ДИМИТРІЙ ГРАВЕ.
Профессоръ Императорскаго Кіевскаго Университета св. Владимира.

ЭНЦИКЛОПЕДІЯ МАТЕМАТИКИ.

ОЧЕРКЪ ЕЯ СОВРЕМЕННАГО ПОЛОЖЕНІЯ.

152 чертежа въ текстѣ.

Изданіе Книжнаго Магазина
Н. Я. ОГЛОБЛИНА.
Кіевъ, Крещатикъ 33. С.-Петербургъ, Екатерининская 4.
КІЕВЪ, 1912 г.

Печатано по опредѣленію Учебнаго Комитета Кіев. Коммерч. Институт

Директоръ **М. Довнаръ-Запольскій.**

КІЕВЪ.
ТИПОГРАФІЯ И. Н. ЧОКОЛОВА, Б.-ЖИТОМІРСКАЯ № 20 С. Д.
1911.

Предисловіе.

Предлагаемая читателямъ книга значительно отличается по содержанію отъ раньше изданныхъ сочиненій такого же рода въ русской и иностранной литературѣ. Обыкновенно въ краткихъ курсахъ высшей математики, предназначенныхъ для натуралистовъ и техниковъ, дѣло ограничивается изложеніемъ аналитической геометріи, а также дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Сокративъ въ своей книгѣ эти отдѣлы до возможнаго минимума, я помѣстилъ краткіе обзоры всѣхъ остальныхъ отдѣловъ современной математики, причемъ старался обращать вниманіе преимущественно на идейную сторону дѣла.

Посвящая свою книгу главнымъ образомъ истиннымъ любителямъ математики, особенно живущимъ въ провинціи, вдали отъ университетскихъ центровъ, я также хотѣлъ бы, чтобы она помогла ученикамъ старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній, имѣющимъ склонность къ математикѣ, при окончательномъ выборѣ жизненной дѣятельности. Какъ учебное руководство въ узкомъ смыслѣ этого слова, книга предназначается въ видѣ дополнительнаго чтенія къ моему краткому курсу высшей математики, читаемому въ Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ.

Изъявляю мою глубокую признательность Учебному Комитету К. К. И-та, давшему средства на напечатаніе этой книги. Выражаю также мою сердечную благодарность профессору А. А. Русову, редактору Извѣстій К. К. И-та, и моимъ дорогимъ ученикамъ С. Л. Волохову, студенту Кіевскаго Политехническаго Института, и О. Ю. Шмидту, студенту Университета св. Владиміра, за дѣятельное участіе при печатаніи книги.

Профессоръ **Д. Граве.**

Кіевъ, Сентябрь 1911 г.

Оглавленіе.

*) Цифры, напечатанныя жирнымъ шрифтомъ и стоящія передъ названіями, обозначаютъ номера параграфовъ; цифры, напечатанныя обыкновеннымъ шрифтомъ и стоящія послѣ названія, обозначаютъ номера страницъ.

ГЛАВА III.

Анализъ безконечно малыхъ.

ГЛАВА IV.

Алгебраическій анализъ.

ГЛАВА V.

Теорія чиселъ.

ГЛАВА VI.

Различныя теченія въ геометріи.

ГЛАВА VII.

Теорія функцій.

ГЛАВА VIII.

Интегральное исчисленіе, какъ источникъ новыхъ трансцендентныхъ.

§ 1. Математика—одна изъ древнѣйшихъ наукъ; ея начало теряется во мракѣ доисторическихъ временъ. Вызванная потребностями обыденной жизни, потребностями въ счетѣ и измѣреніяхъ протяженныхъ величинъ, она въ теченіи вѣковъ получила большое развитіе, такъ что было бы затруднительно въ краткихъ словахъ характеризовать современное ея положеніе въ полномъ объемѣ. Собственно говоря, трудно даже дать вполнѣ удовлетворительную съ логической точки зрѣнія классификацію математическихъ наукъ; чтобы не быть голословнымъ, я разсмотрю обычные пріемы раздѣленія математики.

§ 2. Обычное раздѣленіе математики на элементарную и высшую не выдерживаетъ строгой критики, такъ какъ не существуетъ объективныхъ признаковъ такой классификаціи. Въ настоящее время во всѣхъ государствахъ раздаются голоса о реформѣ преподаванія математики въ средней школѣ; одно изъ главныхъ теченій состоитъ въ томъ, что считаютъ полезнымъ ввести въ среднюю школу начала высшей математики; съ другой стороны нѣкоторые отдѣлы, преподававшіеся до сихъ поръ въ средней школѣ, считаются относящимися къ высшей математикѣ, какъ напримѣръ биномъ Ньютона и непрерывныя дроби. Итакъ, объективныхъ признаковъ для того, чтобы судить, къ низшей или высшей математикѣ относится какая нибудь задача или теорема, мы не видимъ.

§ 3. Другое раздѣленіе математики—есть раздѣленіе ея на чистую и прикладную; въ русскихъ университетахъ существуютъ каѳедры чистой и прикладной математики. Это раздѣленіе не классифицируетъ матеріала математики, а говоритъ только о задачахъ и цѣляхъ изслѣдованія. Тотъ, кто разсматриваетъ какую нибудь математическую теорію съ намѣреніемъ примѣнить ее въ натуральной философіи, въ техникѣ или въ наукахъ общественныхъ или политическихъ, является лицомъ, занимающимся прикладной математикой; если онъ ту же самую теорію разсматриваетъ съ точки зрѣнія обще-

философской, то онъ является представителемъ математики чистой. Такимъ образомъ и этотъ способъ дѣленія не характеренъ.

§ 4. Въ послѣднее время, въ XIX вѣкѣ выработалось раздѣленіе математики на отдѣлы, назовемъ его школьнымъ; я привожу его:

I. Анализъ
- *A.* Ариѳметика
- *B.* Алгебра
  - элементарная
  - высшая
- *C.* Тригонометрія
- *D.* Трансцендентный анализъ
  - дифференціальное исчисленіе
  - интегральное
  - разностное
  - варіаціонное

II. Геометрія
- *A.* Чистая
- *B.* Аналитическая
- *C.* Проэктивная
- *D.* Начертательная
- *E* Analysis situs (*геом. положенія*)
- *F.* Дифференціальная
  - приложенія диф. исчисленія
  - приложенія инт. исчисленія

III. Механика
- *A.* Кинематика
- *B.* Динамика
  - Статика
  - Кинетика
- *C.* Гидродинамика
- *D.* Теорія упругости

IV. Математическая физика

V. Теорія вѣроятностей.

§ 5. Современная наука не мирится однако съ такимъ раздѣленіемъ матеріала. Стремясь къ нахожденію единства въ разнообразіи, она находитъ значительную связь и взаимодѣйствіе между отдѣльными частями указанной таблицы. Много теорій, созданныхъ въ послѣднее время, прямо не укладываются въ рамки этой классификаціи; я упомяну о четырехъ изъ нихъ.

Возьмемъ, напримѣръ, такъ называемую теорію функцій. Жизнь, которая проявляется въ перемѣнѣ и движеніи, вызвала разсмотрѣніе перемѣнныхъ величинъ; эта часть математики разрослась въ громадный отдѣлъ, носящій названіе теоріи функцій.

Теорія чиселъ—даетъ второй примѣръ такой теоріи. Теорія чиселъ началась съ простыхъ теоремъ, относящихся къ свойствамъ чиселъ натуральнаго ряда, изложенныхъ еще въ „Началахъ“ Эвклида. Эти начала теперь мы вводимъ во всѣ начальные курсы ариѳметики; теорія чиселъ разрослась въ настоящее время въ большую доктрину и дошла до созданія новыхъ чиселъ, названныхъ идеальными. Она въ настоящемъ своемъ развитіи не подходитъ ни подъ одну изъ рубрикъ школьной классификаціи, какъ и теорія функцій.

Какъ третій примѣръ разсмотримъ теорію группъ. Она характеризуется тѣмъ, что ищетъ общіе законы въ совершенно различныхъ частяхъ математики. Примѣромъ можетъ служить слѣдующее обстоятельство: изученіе свойствъ уравненія пятой степени сводится къ изученію свойствъ правильнаго многогранника, называемаго икосаедромъ. Профессоръ Klein университета въ Göttingen'ѣ написалъ книгу, которую озаглавилъ: „Ученіе объ икосаедрѣ“. Эта книга заключаетъ не что иное, какъ теорію уравненій пятой степени.

Теорія числовыхъ множествъ или ансамблей (Mengenlehre)—представляетъ изъ себя четвертый примѣръ большой теоріи, не умѣщающейся въ рамкахъ школьной классификаціи. Имѣя дѣло съ идеей безконечности, она въ своихъ мечтаніяхъ доходитъ до чиселъ большихъ безконечности, называемыхъ трансфинитными.

§ 6. Итакъ, мы имѣемъ рядъ большихъ отдѣловъ математики, не укладывающихся въ школьную систему раздѣленія. Поэтому, предполагая дать обзоръ современнаго состоянія математики, я долженъ буду не придерживаться какого нибудь шаблоннаго раз-

дѣленія математики по отдѣламъ, а стараться обратить ваше вниманіе на главнѣйшія задачи, рѣшеніемъ которыхъ занимается современная математика, и на главнѣйшіе методы изслѣдованія, употребляемые въ настоящее время; такимъ образомъ передъ вашими глазами предстанетъ картина того, что мы называемъ въ настоящее время математикой.

ГЛАВА I.

Невозможныя задачи и ихъ роль въ математикѣ.

§ 1. Всѣ задачи, рѣшеніемъ которыхъ занимается математика, очень разнообразны, но все же можно указать два типа задачъ, наиболѣе часто встрѣчающихся. Въ задачахъ перваго типа требуется доказательство нѣкотораго положенія, нѣкоторой теоремы — задача состоитъ въ доказательствѣ, которое можетъ быть какъ положительнаго, такъ и отрицательнаго характера, т. е. мы доказываемъ или существованіе или отсуствіе какого нибудь факта. Въ литературѣ относительно такого рода задачъ очень часто употребляются термины: строгое и нестрогое доказательство. Съ строго логической точки зрѣнія мы имѣемъ дилемму: или доказательство или отсуствіе его; однако, исторія точнѣйшей изъ всѣхъ наукъ, математики, на каждомъ шагу даетъ намъ примѣры доказательствъ и строгихъ и нестрогихъ. Причины этого слѣдующія: въ доказательствѣ, считавшемся раньше выполненнымъ, убѣдительнымъ и строгимъ, съ теченіемъ времени находили иногда ошибки, неточности и нестрогости; доказательство исправлялось или видоизмѣнялось, дѣлалось, какъ говорятъ, строгимъ. Иногда новое доказательство дѣлало прежнее совершенно излишнимъ, иногда доказательство продолжало существовать въ двухъ видахъ. Исторія математики имѣетъ даже такой примѣръ, что предложеніе, которое высказывалось на лекціяхъ выдающимися профессорами, какъ очевидное, оказалось невѣрнымъ. Съ другой стороны очень многіе находятъ полезнымъ для прогресса науки указывать новыя теоремы, хотя бы и не умѣя ихъ строго доказывать. Къ этому мнѣ-

нію можно смѣло присоединиться: появленіе въ большомъ количествѣ новаго матеріала, хотя бы и не вполнѣ обработаннаго, значительно расширяетъ кругозоръ и потому очень важно; улучшеніе же строгости доказательствъ есть дѣло времени; это мы видимъ изъ примѣровъ исторіи. Всѣ нестрогія доказательства, всѣ парадоксы и софизмы въ математикѣ были временны; доказательства обращались всегда въ строгія, парадоксы и софизмы разрѣшались, математика всегда выходила съ честью изъ затруднительнаго положенія. Увѣренность въ точности выводовъ математики не была никогда поколеблена, наоборотъ, появлялись новые, болѣе строгіе пріемы.

Обратимся къ задачамъ другого рода, задачамъ, въ которыхъ по нѣкоторымъ даннымъ ищутся новые, неизвѣстные элементы. Въ большинствѣ случаевъ можно сказать, что ищутся нѣкоторыя числа; почти всѣ задачи можно свести къ этому.

§ 2. Подъ рѣшеніемъ какой нибудь математической задачи мы разумѣемъ слѣдующій процессъ: всю математику мы разбиваемъ на рядъ задачъ, переходя отъ болѣе простыхъ къ болѣе сложнымъ; рѣшить какую нибудь задачу, это значитъ свести ея рѣшеніе къ рѣшенію ряда предыдущихъ задачъ, которыя нами уже разобраны и которыя рѣшать мы уже умѣемъ. Простѣйшими изъ этихъ задачъ являются, конечно, тѣ, которыя относятся къ четыремъ дѣйствіямъ ариѳметики: сложенію, вычитанію, умноженію и дѣленію.

§ 3. Рѣшеніе такихъ простыхъ задачъ, часто необходимое въ математикѣ, мы называемъ математическими операціями или математическими дѣйствіями. Если мы свели рѣшеніе какой нибудь задачи къ рѣшенію ряда такихъ простѣйшихъ задачъ, то это значитъ, что мы свели нахожденіе чиселъ къ ряду операцій; такой рядъ дѣйствій или операцій, который служитъ для рѣшенія какой нибудь задачи, мы называемъ *алгоритмомъ*. Итакъ, алгоритмъ представляетъ собой ту программу дѣйствій, которую надо выполнить, чтобы получить изъ данныхъ чиселъ искомыя. Алгоритмъ въ анализѣ соотвѣтствуетъ до нѣкоторой степени въ геометріи построенію, въ механикѣ—модели, воспроизводящей какое нибудь движеніе.

§ 4. Несмотря на большой промежутокъ времени, пережитый математикой, число простыхъ задачъ, которыя мы можемъ свести къ основнымъ математическимъ операціямъ, не велико; между тѣмъ, практическая жизнь, окружающая насъ съ одной

стороны, и философская пытливость нашего ума съ другой—ставятъ намъ все новыя и новыя задачи; число ихъ растетъ. Ньютонъ сказалъ: я не знаю, что обо мнѣ думаютъ люди, но я самъ себѣ кажусь похожимъ на мальчика, собирающаго камешки на берегу, тогда какъ океанъ скрываетъ истину отъ глазъ моихъ.

§ 5. Что же дѣлать, если нѣкоторыя задачи появляются и не могутъ быть рѣшены при помощи извѣстныхъ намъ задачъ? Математика даетъ намъ два пути. Первый состоитъ въ расширеніи понятія о числѣ, въ расширеніи основныхъ математическихъ понятій, во введеніи новыхъ понятій, при помощи которыхъ эти задачи могутъ быть разрѣшены. Этотъ путь чисто научный. Другой путь, который избирается прикладной математикой, состоитъ въ слѣдующемъ: если нельзя рѣшить какую нибудь задачу при помощи алгоритма, состоящаго изъ конечнаго числа дѣйствій, то нужно попробовать составитъ алгоритмъ изъ безконечнаго числа дѣйствій, такимъ образомъ, чтобы, производя въ этомъ алгоритмѣ все бо́льшее число дѣйствій, мы приближались бы къ искомому результату; если нельзя получить точнаго результата, мы ограничиваемся приближеннымъ рѣшеніемъ. Приближенное рѣшеніе нельзя назвать неправильнымъ рѣшеніемъ; не только въ прикладной, но и въ чистой математикѣ мы встрѣчаемся съ теоретическими вопросами, въ которыхъ приходится имѣть дѣло съ безконечнымъ алгоритмомъ. Нужно только обратить вниманіе на то обстоятельство, что характеръ приближеннаго рѣшенія математической задачи можетъ быть различенъ. Если удалось найти такое приближенное рѣшеніе задачи, которое позволяетъ приблизиться къ искомому результату съ произвольной, заранѣе выбранной степенью точности, то мы считаемъ его всегда настоящимъ, т. е. удовлетворяющимъ требованіямъ чистой математики. Напримѣръ, разсматривая квадратный корень изъ какого нибудь цѣлаго числа, не представляющаго квадрата другого цѣлаго числа, мы можетъ этотъ корень представить въ видѣ безконечной непеpіодической десятичной дроби; послѣдовательное вычисленіе цифръ этой дроби даетъ намъ рядъ приближенныхъ значеній; точнаго результата такимъ путемъ получить нельзя. Однако въ нашемъ умѣ складывается убѣжденіе, что этотъ рядъ цифръ вполнѣ опредѣленъ, т. е. что на всякомъ сколь угодно далекомъ мѣстѣ находится опредѣленная цифра. Для полученія нужной точности приближеннаго значенія придется только достаточно далеко провести алгоритмъ послѣдовательнаго вычисленія

цифръ. Въ математикѣ такое приближенное рѣшеніе приходится считать за точное.

§ 6. Въ прикладной математикѣ приходится ограничиваться приближенными знаніями менѣе совершеннаго характера; иногда мы довольствуемся рѣшеніемъ задачи съ данной степенью приближенія, хотя бы мы и не могли сдѣлать ее произвольно малой; иногда мы ограничиваемся приближенными рѣшеніями, степень точности которыхъ выясняется только по окончаніи задачи. Наконецъ въ прикладной математикѣ мы имѣемъ примѣры такихъ неудовлетворительныхъ съ математической точки зрѣнія пріемовъ приближенія, когда приходится наблюденіями устанавливать точность результата. Такъ нѣкоторыя приближенныя рѣшенія астрономическихъ задачъ съ математической точки зрѣнія можно было бы считать совершенно неудовлетворительными.

§ 7. Оставивъ пока въ сторонѣ вопросъ о приближенныхъ вычисленіяхъ, посмотримъ, къ какимъ новымъ теоретическимъ положеніямъ привели въ исторіи математики такъ называемыя невозможныя задачи, т. е. такія задачи, которыя не рѣшались на основаніи задачъ рѣшенныхъ раньше въ исторіи математики. Я хочу высказать нѣсколько смѣлое заявленіе: главный прогрессъ въ математикѣ происходитъ именно отъ такихъ задачъ, которыя были невозможны и требовали введенія въ науку новыхъ понятій и новыхъ методовъ. Поэтому первую главу своего курса я и посвящаю разсмотрѣнію главнѣйшихъ изъ этихъ задачъ, игравшихъ первостепенную роль въ исторіи математики.

Обобщеніе понятія о числѣ.

Числа раціональныя.

§ 8. Одно изъ первыхъ крупныхъ явленій въ математикѣ, явившихся слѣдствіемъ невозможныхъ задачъ, это обобщеніе понятія о числѣ. Сначала у насъ было только понятіе о рядѣ чиселъ натуральныхъ:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 . . . . . .

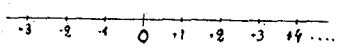
эти числа явились слѣдствіемъ счета предметовъ. Матеріалъ, даваемый этими числами, оказался недостаточнымъ для рѣшенія самыхъ простыхъ задачъ, и вотъ наступаетъ этапъ обобщенія понятія о числѣ: задача дѣленія цѣлаго числа на другое цѣлое число не

[illegible], появилась необходимость въ созданіи *дробныхъ* чиселъ вида $\frac{m}{n}$. Подъ вліяніемъ геометрическихъ и другихъ соображеній явилась потребность сдѣлать всегда возможной задачу вычитанія, даже въ случаѣ вычитанія бо́льшихъ чиселъ изъ меньшихъ; появилось понятіе объ *отрицательномъ* числѣ. Послѣ введенія дробныхъ и отрицательныхъ чиселъ мы получили систему чиселъ, названныхъ *раціональными*. Для всѣхъ чиселъ этой системы всегда возможны первыя четыре дѣйствія ариѳметики.

Числа ирраціональныя.

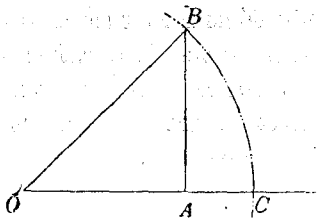
§ 9. Уже древніе греки замѣтили, что для рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ недостаточно чиселъ цѣлыхъ, дробныхъ и отрицательныхъ; появилась потребность въ дальнѣйшемъ обобщеніи понятія о числѣ, явились *ирраціональныя*, несоизмѣримыя числа; хорошее изложеніе началъ ученія о нихъ мы встрѣчаемъ уже у Эвклида, въ его „Началахъ“.

На произвольной прямой отъ точки O (черт. 1) будемъ откладывать единицу длины въ обѣ стороны отъ нея. Совокупность полученныхъ точекъ можно сравнить съ системой цѣлыхъ чиселъ, положительныхъ и отрицательныхъ. Точки, соотвѣтствующія дробнымъ числамъ, находятся въ промежуткахъ между дѣленіями. При продолженіи линіи до безконечности въ обѣ стороны точки, соотвѣтствующія всевозможнымъ раціональнымъ числамъ, плотно заполнятъ ее, т. е. на каждомъ, произвольно маломъ отрѣзкѣ прямой помѣстится безчисленное множество такихъ точекъ. Греческіе математики дали отвѣтъ на вопросъ, исчерпываются ли всѣ точки прямой точками, соотвѣтствующими раціональнымъ числамъ. Отвѣтъ былъ отрицательный. Оказывается, что между плотно заполняющими прямую раціональными точками существуютъ какіе-то промежутки нулевой длины, въ которые помѣщаются точки прямой, несоотвѣтствующіе уже раціональнымъ числамъ. Эти промежутки нулевой длины невозможно себѣ представить наглядно, но фактъ ихъ существованія остается. Такъ напримѣръ найдемъ точку, соотвѣтствующую новому, невозможному до сихъ поръ для насъ числу, квадратъ котораго равенъ 2. Для этого отложимъ длину, равную единицѣ,



Черт. 1.

на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ точки A (черт. 2), соотвѣтствующей числу $+1$, радіусомъ равнымъ гипотенузѣ OB полученнаго прямоугольнаго треугольника OAB опишемъ дугу BC; точка C пересѣченія этой дуги съ нашей прямой OA будетъ искомой точкой, соотвѣтствующей числу, квадратъ котораго равенъ 2. Въ самомъ дѣлѣ теорема Пиѳагора даетъ намъ: $OB = \sqrt{OA^2 + BA^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Но, какъ мы знаемъ изъ элементарнаго курса, нельзя подобрать ни цѣлаго числа, ни дробнаго, т. е. отношенія двухъ цѣлыхъ чиселъ, квадратъ котораго былъ бы равенъ 2. Поэтому точка C находится гдѣ то въ промежуткѣ между раціональными точками; она и подобныя ей точки соотвѣтствуютъ нѣкоторымъ новымъ числамъ, которыя мы должны ввести, если хотимъ, чтобы система чиселъ, соотвѣтствовала системѣ точекъ, непревывно заполняющихъ прямую, чтобы каждой точкѣ соотвѣтствовало число, чего мы не имѣли раньше, и чтобы, какъ и прежде, каждому числу соотвѣтствовала точка на прямой.

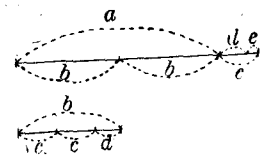


Черт. 2.

§ 10. Обозначая символомъ R совокупность раціональныхъ чиселъ и символомъ W совокупность чиселъ новаго вида, ирраціональныхъ, и беря обѣ совокупности совмѣстно, мы получаемъ совокупность такъ называемыхъ *вещественныхъ* чиселъ, которую можемъ обозначить символомъ (R, W). Эта совокупность обладаетъ свойствомъ непрерывности и вслѣдствіе этого способна изображать всѣ точки непрерывной прямой линіи безъ пропуска. Процессъ сопоставленія протяженной величинѣ нѣкотораго числа называется измѣреніемъ. Слѣдовательно, эта система можетъ служить какъ бы масштабомъ измѣренія для всевозможныхъ непрерывно измѣняющихся протяженныхъ величинъ. Нѣкоторое частное значеніе протяженной величины при такомъ измѣреніи мы принимаемъ условно за единицу или, что то же, считаемъ этой величинѣ соотвѣтствующимъ число 1.

§ 11. Разсмотримъ задачу измѣренія длинъ; измѣренія всѣхъ остальныхъ протяженныхъ величинъ сводятся къ этому основному измѣренію. Эвклидъ далъ способъ рѣшенія этой задачи; геометрическій способъ ея рѣшенія представляетъ нахожденіе общей

наибольшей мѣры. Положимъ, мы имѣемъ два отрѣзка (черт. 3); обозначимъ ихъ длины a и b. Построеніе Эвклида состоитъ въ томъ, что меньшій отрѣзокъ мы откладываемъ въ большемъ столько разъ, сколько это окажется возможнымъ; при этомъ могутъ быть два случая: или меньшій отрѣзокъ содержится цѣлое число разъ въ большемъ, тогда онъ будетъ общей наибольшей мѣрою между самимъ собой и большимъ отрѣзкомъ; или получится нѣкоторый остатокъ, меньшій, чѣмъ отрѣзокъ b;



Черт. 3.

$$a = bp_1 + c,$$

гдѣ p_1 число цѣлое. Подобнымъ же образомъ мы сравниваемъ отрѣзокъ b съ остаткомъ c и получаемъ

$$b = cp_2 + d$$

продолжая аналогичныя откладыванія получаемъ

$$c = dp_3 + e$$
$$d = ep_4 + f \text{ и т. д.}$$

Процессъ послѣдовательнаго откладыванія отрѣзковъ можетъ или кончиться, или нѣтъ; въ первомъ случаѣ послѣдній остатокъ, откладывающійся цѣлое число разъ въ предыдущемъ, будетъ, очевидно, общей наибольшей мѣрою для отрѣзковъ a и b, и отношеніе ихъ длинъ дастъ раціональное число; если при этомъ одинъ изъ отрѣзковъ мы примемъ за единицу, то отношеніе другого къ нему и будетъ числовымъ выраженіемъ длины этого другого отрѣзка; во второмъ случаѣ общей мѣры не существуетъ, отрѣзки несоизмѣримы; ихъ отношеніе есть число несоизмѣримое или ирраціональное.

Преобразовавъ всѣ равенства, мы получаемъ алгоритмъ для разложенія отношенія двухъ длинъ въ непрерывную дробь.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{b} = p_1 + \dfrac{c}{b} \\ \dfrac{b}{c} = p_2 + \dfrac{d}{c} \\ \dfrac{c}{d} = p_3 + \dfrac{e}{d} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \frac{a}{b} = p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{1}{p_3 + \ddots}}$$

§ 12. Такъ напримѣръ раскладывается въ безконечную непрерывную дробь ирраціональное число $\sqrt{2}$. Чтобы проще получить это разложеніе, воспользуемся тождествомъ

$$(\sqrt{2}-1)\ (\sqrt{2}+1)=1$$

отсюда

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

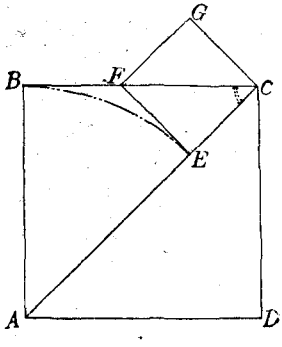
далѣе

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

(1) $$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$$

Итакъ, раціональное число соотвѣтствуетъ конечной непрерывной дроби, ирраціональное—безконечной. Разберемъ тотъ же самый примѣръ геометрически, ибо $\sqrt{2}$ представляетъ собой отношеніе діагонали къ сторонѣ квадрата.



Черт. 4.

Для доказательства будемъ находить способомъ Эвлида общую мѣру діагонали AC и стороны AB квадрата (черт. 4). Отложимъ на діагонали AC отрѣзокъ AE, равный AB, проведемъ EF перпендикулярно AC въ точкѣ E. Имѣемъ $BF=FE$, какъ двѣ касательныя къ окружности, проведенныя изъ точки F; прямоугольный треугольникъ FEC равнобедренный, такъ какъ $\angle ECB = 45^0$. Находимъ общую мѣру отрѣзка EC и стороны квадрата AB, или что то же BC; $EC=EF=FB$; отрѣзокъ EC откладываемъ одинъ разъ отъ точки B на сторонѣ BC, конецъ его упадетъ въ точку F.

Задачу нашу мы свели къ нахожденію общей мѣры отрѣзковъ EC и FC; но, если мы построимъ на отрѣзкѣ EC квадратъ $ECGF$, то увидимъ, что FC служитъ діагональю этого квадрата; слѣдовательно, нашу задачу мы свели къ подобной ей задачѣ относительно меньшаго квадрата; очевидно, отъ второй задачи мы прійдемъ къ такой же третьей и такъ далѣе до безконечности, причемъ квадраты будутъ уменьшаться по размѣрамъ. Отсюда можно заключить, что діагональ не имѣетъ общей мѣры со стороной квадрата, а, слѣдовательно, ихъ отношеніе разлагается въ безконечную непрерывную дробь какъ разъ вида (1). Это ясно изъ того, что первый разъ сторона квадрата на діагонали помѣщается одинъ разъ, что даетъ неполное частное 1: дальше отрѣзки ложатся на предыдущіе по два раза.

Числа комплексныя.

§ 13. Всѣ вещественныя числа, будучи возведены въ четную степень, даютъ положительныя числа. Задача извлеченія корня четной степени изъ отрицательнаго числа оказывается невозможной для вещественныхъ чиселъ. Потребовалось новое обобщеніе понятія о числѣ, были введены мнимыя и комплексныя числа.

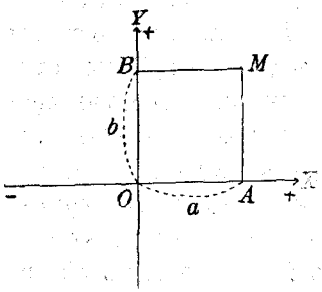
Такъ какъ

$$\sqrt{-b}=\sqrt{-1}.\sqrt{b},$$

то оказалось достаточнымъ ввести числа со знакомъ мнимости $i=\sqrt{-1}$, $a+bi$, гдѣ a и b числа вещественныя. Эти новыя числа называются числами *комплексными*. Вещественное число можно разсматривать, какъ частный случай комплекснаго числа, если $b=o$; если $a=o$, число принимаетъ видъ bi, и ему даютъ названіе *чисто мнимаго* числа. Дѣйствія надъ комплексными числами такъ устанавливаются, чтобы вся алгебра дѣйствій надъ вещественными числами сохранялась и для новыхъ комплексныхъ чиселъ.

§ 14. Для геометрическаго изображенія чиселъ комплексныхъ не хватаетъ уже точекъ прямой линіи, такъ какъ всѣ эти точки соотвѣтствуютъ числамъ вещественнымъ. Системѣ комплексныхъ чиселъ приходится сопоставить совокупность точекъ заполняющихъ всю плоскость. Вещественныя числа, какъ и раньше, мы сопоставляемъ точкамъ нѣкоторой прямой OX, (черт. 5), которой дадимъ названіе вещественной оси. Мнимыя числа сопоставимъ точкамъ перпендикулярной къ ней прямой OY, которую

назовемъ мнимой осью, такъ чтобы мнимому числу bi соотвѣтствовала точка B, находящаяся изъ условія $b = OB$.



Черт. 5.

Всякое комплексное число $a + bi$ сопоставляемъ точкѣ M плоскости находящейся въ вершинѣ прямоугольника $OAMB$, построеннаго на сторонахъ $OA = a$ и $OB = b$. Положительныя значенія a откладываемъ вправо отъ точки O, отрицательныя влѣво; положительныя значенія b—вверхъ отъ точки O, отрицательныя внизъ. Такимъ образомъ комплексное число однозначно опредѣляетъ точку плоскости и обратно. Совокупность комплексныхъ чиселъ заполняетъ всю плоскость плотно и непрерывно.

§ 15. Вводя въ математику комплексныя числа, мы должны условиться, что мы будемъ понимать подъ равенствомъ двухъ такихъ чиселъ. Будемъ считать, что два комплексныхъ числа равны другъ другу и писать

$$a + bi = c + di,$$

если

$$a = c \text{ и } b = d.$$

Геометрически это значитъ, что два равныхъ комплексныхъ числа соотвѣтствуютъ одной и той же точкѣ плоскости. Знаки неравенствъ для комплексныхъ чиселъ не употребляются; напримѣръ, если хотятъ указать, что вещественное число a не равно нулю, то пишутъ

$$a \gtrless o;$$

для комплекснаго числа такой формулы писать нельзя, а надо написать

или a не равно o

или $a \neq o$.

§ 16. Всѣ раціональныя дѣйствія надъ комплексными числами совершаются по законамъ дѣйствій надъ двучленами, причемъ мнимый знакъ i разсматривается, какъ алгебраическая величина, которая допускается только въ первой степени. Высшія степени замѣняются по таблицѣ

$$i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = +1.$$

Вообще говоря

$$i^{4n+1} = i; \qquad i^{4n+3} = i^3 = -i;$$

$$i^{4n+2} = i^2 = -1;\ i^{4n+4} = i^4 = +1.$$

§ 17. Укажемъ рядъ терминовъ и свойствъ комплексныхъ чиселъ, связанныхъ съ ихъ геометрическимъ представленіемъ. Положимъ, на плоскости находится точка M (черт. 6), которая соотвѣтствуетъ нашему комплексному числу; эту точку мы называемъ affixe'омъ комплекснаго числа.

Обозначимъ черезъ ρ разстояніе нашей точки M отъ точки O пересѣченія осей; ρ есть положительное число; оно носитъ названіе *модуля* комплекснаго числа.

Такъ, напримѣръ, если мы возьмемъ комплексное число

$$3 + 4i,$$

то модуль его выразится такъ:

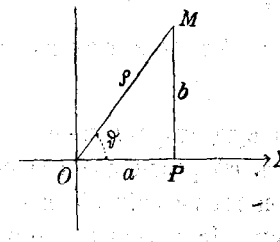
$$\rho = +\sqrt{3^2 + 4^2} = +\sqrt{25} = 5.$$

Вообще, модуль комплекснаго числа

$$a + bi$$

выразится такъ:

$$\rho = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$



Черт. 6.

§ 18. Уголъ, который образуетъ прямая OM, идущая отъ нулевой точки къ affixe'у числа, съ вещественной осью X, обозначимъ черезъ ϑ; этотъ уголъ

$$\vartheta = \angle MOX$$

носитъ названіе *аргумента* комплекснаго числа. Онъ отсчитывается въ какую-нибудь опредѣленную сторону отъ вещественной оси, обыкновенно противъ часовой стрѣлки; при отсчетѣ этого угла можно обходить любое число разъ вокругъ нулевой точки. При такомъ обходѣ аргументъ будетъ измѣняться отъ нуля до безконечности, смотря по тому, какое число разъ мы обойдемъ вокругъ нулевой точки.

Мы вводимъ въ разсмотрѣніе и отрицательныя значенія аргумента; они должны отсчитываться въ другую сторону. Эти отрицательныя значенія могутъ также измѣняться отъ нуля до отрицательной безконечности.

Если мы измѣнимъ значеніе аргумента на 360^0, то прямая OM сохранитъ свое направленіе. Слѣдовательно, для того, чтобы указать направленіе, достаточно указать значеніе аргумента, меньшее 360^0; другія значенія его будутъ отличаться на число градусовъ, кратное 360^0, и будутъ соотвѣтствовать тому же самому направленію.

Итакъ будемъ считать аргументъ всегда положительнымъ, измѣняющимся отъ нуля до 360^0 или, при счетѣ радіанами, отвлеченнымъ числомъ, измѣняющимся отъ O до 2π.

§ 19. Введя модули и аргументы, полезно ввести и тригонометрическія величины. Я буду предполагать начала тригонометріи уже извѣстными.

Изъ прямоугольнаго треугольника OPM мы получимъ

(1) $$a = \rho \cos \vartheta \,;\, b = \rho \sin \vartheta$$

Что касается выраженій

$$\sin \vartheta \text{ и } \cos \vartheta,$$

то существуетъ много таблицъ, позволяющихъ намъ вычислять ихъ съ различной степенью точности. При маломъ числѣ знаковъ, при вычисленіи $\sin$ и $\cos$ можно съ пользой употреблять логариѳмическія линейки, которыя чрезвычайно практичны.

Итакъ всякое комплексное число можно написать въ такомъ видѣ:

(2) $$a + ib = \rho \cos \vartheta + i\rho \sin \vartheta = \rho\ (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

Здѣсь ρ—модуль, положительное число, а множитель, стоящій въ скобкахъ, носитъ названіе *мнимаго множителя*. Посмотримъ, во что обратится этотъ мнимый множитель, если число у насъ будетъ вещественное. Комплексное число можетъ обратиться въ вещественное или когда $\vartheta = 0$, или когда $\vartheta = 180^0$. При $\vartheta = 0$ мы имѣемъ

$$\cos \vartheta = \cos 0 = +1 \,;\, a + bi = \rho;$$

наше комплексное число обратилось въ положительное. При $\vartheta = 180^0$ мы получимъ

$$\cos \vartheta = \cos 180^0 = -1 \,;\, a + bi = -\rho,$$

и комплексное число обратилось въ отрицательное. При названныхъ значеніяхъ аргумента 0 и 180^0 вещественное число равняется $\pm\rho$, а мнимый множитель обращается въ $+1$ или -1. Итакъ, мнимый множитель въ случаѣ вещественнаго числа есть

не что иное, какъ знакъ этого числа, а модуль представляетъ собою то, что мы называемъ абсолютной величиной числа.

Будемъ употреблять терминъ *модуль* для всякихъ чиселъ и будемъ обозначать его такъ: если мы хотимъ написать модуль числа z, то будемъ z ставить между двумя черточками, т. е. будемъ писать

$$|z|.$$

Для комплекснаго числа модулемъ, какъ мы видѣли, будетъ разстояніе affixe'а этой точки до нулевой точки.

Теперь, когда мы ввели понятія о модулѣ и аргументѣ, дѣйствія надъ числами комплексными представятся намъ въ очень простомъ видѣ, въ геометрической формѣ. Обратимъ вниманіе на сложеніе и умноженіе чиселъ.

§ 20. Положимъ, что намъ нужно сложить два комплексныхъ числа

$$a+bi \text{ и } c+di.$$

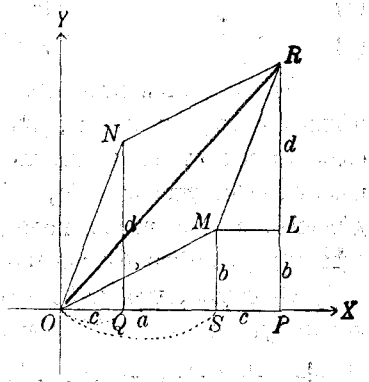
При алгебраическомъ сложеніи, уподобляя эти числа двучленамъ, мы складываемъ отдѣльно части вещественныя и мнимыя:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\ .$$

Посмотримъ, какъ это сложеніе будетъ производится геометрически.

Если мы перемѣстимъ треугольникъ OQN (черт. 7) по плоскости, не поворачивая его, а двигая, какъ говорятъ въ механикѣ, поступательно такъ, чтобы точка O упала въ точку M, то точка N упадетъ въ точку R, которая будетъ affixe'омъ комплекснаго числа

$$(a+c)+(b+d)i.$$



Черт. 7.

Это число будетъ алгебраической суммой нашихъ двухъ чиселъ. Итакъ, мы получаемъ геометрическое правило для сложенія двухъ комплексныхъ чиселъ: надо взять модуль OM, соотвѣтствующій одному слагаемому, и отъ конца его M отложить отрѣзокъ MR, параллельный и равный модулю ON другого слагаемаго. Точку R мы соединяемъ съ начальной точкой O; отрѣзокъ OR представитъ собою модуль суммы нашихъ слагаемыхъ. Обратимъ вниманіе на то, что пра-

вило для сложенія комплексныхъ чиселъ одинаково съ правиломъ сложенія силъ и скоростей въ механикѣ.

Итакъ, для геометрическаго сложенія нужно построить параллелограммъ, стороны котораго были бы модулями заданныхъ чиселъ; діагональ этого параллелограмма дастъ намъ модуль суммы, а вершина его будетъ affixe'омъ комплекснаго числа, равнаго суммѣ данныхъ чиселъ.

Назовемъ одно число Z, другое U, сумма ихъ будетъ

$$Z+U.$$

Изъ чертежа мы найдемъ ихъ модули

$$|Z|=OM,$$
$$|U|=ON,$$
$$|Z+U|=OR.$$

§ 21. Итакъ модуль суммы есть сторона треугольника, у котораго двѣ другія стороны суть модули слагаемыхъ. Изъ элементарной геометріи мы знаемъ, что всякая сторона треугольника не больше суммы двухъ другихъ сторонъ и не меньше ихъ разности. Это даетъ относительно модулей такую теорему: модуль суммы двухъ комплексныхъ чиселъ не превосходитъ суммы модулей слагаемыхъ и не меньше ихъ разности. Теорема эта употребляется на каждомъ шагу, ее слѣдуетъ хорошо помнить.

Итакъ, мы можемъ написать такія формулы:

(1) $$|Z+U|\leqslant|Z|+|U|$$

(2) $$|Z+U|\geqslant|Z|-|U|$$

Что касается второй теоремы, то мы всегда должны ее примѣнять такъ, чтобы модуль Z былъ больше, чѣмъ модуль U; если бы мы стали вычитать бо́льшій модуль изъ меньшаго, то получили бы утвержденіе, ничего не дающее, ибо модуль, по опредѣленію, всегда число положительное, а слѣдовательно неравенство (2) не имѣло бы никакого смысла въ этомъ случаѣ.

Очевидно, что неравенство (1) распространяется на случай какого угодно числа слагаемыхъ, т. е.

$$|Z+U+V+W+\ldots|\leqslant|Z|+|U|+|V|+|W|+\ldots$$

§ 22. Что касается умноженія комплексныхъ чиселъ, то его можно производить очень просто. Пусть нужно перемножить два числа

$$a + bi = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

$$c + di = \rho_1 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$$

Перемножая ихъ мнимые множители, какъ двучлены, и принимая во вниманіе, что

$$i^2 = -1,$$

мы имѣемъ

$$(a + bi)\ (c + di) =$$

$$= \rho\rho_1 [\cos \vartheta \cos \vartheta_1 - \sin \vartheta \sin \vartheta_1 + i (\cos \vartheta \sin \vartheta_1 + \sin \vartheta \cos \vartheta_1)]$$

или

$$(a + bi)\ (c + di) = \rho\rho_1 [\cos (\vartheta + \vartheta_1) + i \sin (\vartheta + \vartheta_1)]$$

Въ скобкахъ мы получили мнимый множитель произведенія

$$\cos (\vartheta + \vartheta_1) + i \sin (\vartheta + \vartheta_1).$$

Произведеніе $\rho\rho_1$ есть модуль произведенія; у насъ получаются двѣ теоремы: модуль произведенія есть произведеніе модулей множителей, а аргументъ произведенія есть сумма аргументовъ множителей. При умноженіи комплексныхъ чиселъ аргументы складываются, а модули перемножаются.

§ 23. То обстоятельство, что аргументы при умноженіи складываются, приводитъ къ одной весьма важной математической формулѣ *Moivre'a*, изъ которой вытекаетъ рядъ важныхъ слѣдствій.

Перемножимъ нѣсколько мнимыхъ множителей, т. е. такихъ комплексныхъ чиселъ, у которыхъ модуль равенъ единицѣ. Для того, чтобы получить модуль искомаго произведенія, модули множителей нужно перемножить; они всѣ равны единицѣ, значитъ произведеніе ихъ тоже будетъ равно единицѣ. Аргументы складываются при умноженіи, поэтому

$$(1) \quad (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)\ (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)\ \ldots\ (\cos \vartheta_n + i \sin \vartheta_n) =$$
$$= \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n) + i \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots\ldots + \sin \vartheta_n)$$

Эта формула имѣетъ мѣсто при всякихъ значеніяхъ ϑ; она справедлива и тогда, когда всѣ множители будутъ одинаковы. Примѣняя ее къ этому случаю и обозначая общую величину всѣхъ угловъ черезъ ϑ, мы получимъ

$$(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n = \cos n \vartheta + i \sin n \vartheta.$$

Это равенство и представляетъ собою ту формулу *Moivre'a*, которую мы желали вывести.

§ 24. Мы остановимся пока на однѡмъ только приложенiи формулы *Moivre'a*, а именно на разъясненiи понятiя о радикалѣ, т. е. объ извлеченiи корня нѣкоторой степени изъ заданнаго числа. Изъ элементарнаго курса мы знаемъ, что квадратный корень изъ какого-нибудь положительнаго числа имѣетъ два значенiя, положительное и отрицательное. Является вопросъ, сколько значенiй будетъ имѣть корень произвольной степени, большей, чѣмъ два. Возьмемъ корень нѣкоторой n' той степени изъ заданнаго числа a; мы его можемъ найти, рѣшая такое уравненiе:

$$z^n = a$$

Возьмемъ общiй случай, когда a — число комплексное. Положимъ

$$a = \alpha (\cos \beta + i \sin \beta).$$

Найдемъ ρ и ϑ, искомые модуль и аргументъ комплекснаго числа

(1) $$z = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

Возведемъ z въ степень n

$$z^n = [\rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)]^n = \alpha (\cos \beta + i \sin \beta).$$

Примѣнимъ формулу *Moivre'a*

$$z^n = \rho^n (\cos n \vartheta + i \sin n \vartheta) = \alpha (\cos \beta + i \sin).$$

Сравнивъ обѣ части, мы вспомнимъ, что если комплексныя числа равны, то ихъ модули равны, а аргументы могутъ отличаться на число, кратное 2π; слѣдовательно мы можемъ написать

$$\rho^n = \alpha$$
$$n \vartheta = \beta + 2 \pi \varkappa$$

гдѣ $\varkappa$ цѣлое число. Откуда

(2) $$\rho = \sqrt[n]{\alpha}$$

(3) $$\vartheta = \frac{1}{n} (\beta + 2 \pi \varkappa)$$

Знакомъ радикала

$$\sqrt[n]{\alpha},$$

взятаго изъ положительнаго числа α, мы здѣсь обозначаемъ корень въ прежнемъ ариѳметическомъ значенiи этого термина, какое мы придавали ему въ элементарной математикѣ, т. е. положительный ариѳметическiй корень.

Итакъ, мы имѣемъ послѣ подстановки значеній ρ и ϑ изъ формулъ (2) и (3) въ формулу (1)

$$z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\alpha\,(\cos\beta + i\sin\beta)} =$$

$$(4) \qquad = \sqrt[n]{\alpha}\left(\cos\frac{\beta + 2\varkappa\pi}{n} + i\sin\frac{\beta + 2\varkappa\pi}{n}\right)$$

§ 25. Мы видимъ, что получается нѣсколько значеній для нашего радикала; можно убѣдиться изъ геометрическихъ соображеній, что какъ разъ получится n различныхъ значеній, n различныхъ соотвѣтствующихъ точекъ для числа z. Возьмемъ кругъ радіуса

$$\rho = \sqrt[n]{\alpha}.$$

Положимъ

$$\varkappa = 0$$

и отложимъ n' тую часть угла β; тогда аргументъ числа z равенъ

$$\frac{\beta}{n}$$

Давая $\varkappa$ значенія

1, 2, 3 и т. д.,

мы будемъ прикладывать къ нашей величинѣ угла $\frac{\beta}{n}$ величины

$$\frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \frac{6\pi}{n} \text{ и т. д.}$$

Для полученія точекъ соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ радикала нужно данную окружность раздѣлить на n равныхъ частей и прикладывать къ нашему углу $\frac{\beta}{n}$ сначала одну часть, затѣмъ двѣ, три и т. д. Радіусъ, равный модулю числа z, остается постояннымъ, а аргументъ будетъ мѣняться.

Сколько же всего различныхъ точекъ мы получимъ на плоскости? Очевидно n точекъ, такъ какъ конецъ n'таго дѣленія совпадетъ съ первоначальной точкой, аргументъ которой равенъ $\frac{\beta}{n}$, а дальше получатся точки, указанныя уже раньше. Итакъ, радикалъ n'той степени изъ какого нибудь комплекснаго числа имѣетъ n зна-

ченій, причемъ всѣ эти значенія соотвѣтствуютъ точкамъ, расположеннымъ на окружности круга и дѣлящимъ этотъ кругъ на ровныя части. Поэтому та теорія, въ которой разсматриваются рѣшенія двучленныхъ уравненій вида.

$$z^n - a = o \text{ , т. е. } z = \sqrt[n]{a},$$

носитъ названіе теоріи дѣленія круга (Kreisteilung). Итакъ задача извлеченія корня изъ какого-нибудь комплекснаго или вещественнаго числа сводится къ задачѣ дѣленія круга на нѣкоторое число равныхъ частей. Напримѣръ уравненіе

$$x^{17} - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^{16} + x^{15} + \ldots + 1) = 0$$

имѣетъ 17 различныхъ рѣшеній, его рѣшенія дѣлаетъ окружность круга на 17 равныхъ частей. Мы замѣчаемъ, что знакъ радикала принадлежитъ къ числу не особенно удобныхъ знаковъ въ алгебрѣ, причемъ слабыя стороны его состоятъ въ его многозначности, такъ что всякій разъ мы должны словами оговорить, какое изъ значеній мы разумѣемъ. Этотъ недостатокъ по самому существу дѣла неустранимъ. Всѣ попытки, которыя были направлены къ улучшенію этого знака (а именно, предполагалось подъ знакомъ „радикалъ" разумѣть одно какое-нибудь опредѣленное значеніе) нельзя признать практичными, и попрежнему всякій знакъ радикала остается знакомъ, требующимъ кромѣ обозначенія на бумагѣ еще и дополненія словами.

Числами комлексными (больше о нихъ я пока говорить не буду) заканчивается обобщеніе понятія о числѣ въ обычномъ значеніи слова. Полная система комплексныхъ чиселъ—это та система, съ которой имѣютъ дѣло главныя части современной математики.

§ 26. Были попытки ввести комплексныя числа съ бо́льшимъ числомъ, чѣмъ двѣ, составныхъ частей, такъ напримѣръ W. R. Hamilton (Lectures on quaternions, Dublin, 1853) предложилъ подъ названіемъ *кватерніоновъ* разсматривать числа вида

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3,$$

гдѣ i_1, i_2, i_3 суть мнимые знаки, которые при выкладкахъ должны быть замѣняемы по формуламъ

$$\begin{array}{ll} i_1^2 = -1 & i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1. \\ i_2^2 = -1 & i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2 \\ i_3^2 = -1 & i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3 \end{array}$$

Данное Hamilton'омъ для кватерніоновъ умноженіе обладаетъ сочетательнымъ закономъ, т. е.

$$(AB)\,C = A\,(BC),$$

точно также существуетъ распредѣлительный законъ умноженія и сложенія, т. е.

$$(A+B)\,C = AC + BC,$$

но перестановочный законъ къ сожалѣнію не имѣетъ мѣста, т. е. вообще говоря

$$A\,B \text{ не } = B\,A.$$

Weierstrass въ своихъ лекціяхъ (1863 г.) разсматривалъ комплексныя числа вида

$$b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_n i_n,$$

гдѣ $i_1, i_2 \ldots i_n$ суть различные мнимые знаки или, какъ онъ ихъ называетъ, различныя единицы. Въ случаѣ обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ имѣетъ мѣсто

$$i_1 = 1\ ,\ i_2 = \sqrt{-1}.$$

Weierstrass показалъ, что всѣ законы элементарной алгебры сохраняются только для случая обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ. Въ послѣднее время были попытки разсматривать числа съ безчисленнымъ множествомъ единицъ, причемъ такимъ числамъ было дано названіе *неарчимедовыхъ* чиселъ.

Невозможныя задачи въ геометріи.

§ 27. Перейдемъ къ задачамъ другого рода, задачамъ, которыя также способствовали прогрессу математики.

Я скажу нѣсколько словъ о рѣшеніи геометрическихъ задачъ циркулемъ и линейкой. Подобно тому, какъ не всѣ задачи рѣшаются въ числахъ какого-нибудь опредѣленнаго характера, напримѣръ только въ цѣлыхъ или только въ раціональныхъ числахъ, такъ и не всѣ геометрическія задачи могутъ быть рѣшаемы при помощи простѣйшихъ построеній.

Уже греческіе математики, обладавшіе большими знаніями и большой логической строгостью при разсужденіяхъ замѣтили, что нѣкоторыя задачи не рѣшаются при помощи только циркуля и линейки. Подъ рѣшеніемъ задачи циркулемъ и линейкой разумѣется рѣшеніе ея при помощи слѣдующихъ послѣдовательныхъ построеній: во первыхъ, если предыдущее построеніе указало двѣ точки,

то эти точки можно соединить прямой линіей и продолжить ее неопредѣленно; эта операція есть способъ примѣненія линейки; во вторыхъ, если предыдущее построеніе дало нѣкоторую точку, то изъ этой точки, какъ центра, можно описать окружность круга, радіусъ котораго заданъ предыдущимъ построеніемъ; эта операція есть способъ примѣненія циркуля. Для того, чтобы убѣдиться, что не всѣ задачи рѣшаются при помощи конечныхъ чиселъ указанныхъ операцій, поступимъ такимъ образомъ: я укажу сперва на нѣкоторый фактъ, который докажу вполнѣ далѣе, во второй главѣ. Оказывается, что какъ бы сложно ни было построеніе изъ ряда круговъ и прямыхъ линій, если только число круговъ и прямыхъ линій будетъ конечное, то длины всѣхъ отрѣзковъ, которые получаются между точками пересѣченія круговъ и прямыхъ линій, выводятся изъ длинъ заданныхъ отрѣзковъ только при помощи уравненій первой степени и квадратныхъ. Слѣдовательно, если задача приводится къ построенію такого числа, которое не можетъ быть получено изъ чиселъ раціональныхъ при помощи уравненій двухъ первыхъ степеней, т. е. при помощи послѣдовательнаго извлеченія квадратнаго радикала, такая задача не можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкой. Такъ, напримѣръ, извѣстна Делійская задача; она состоитъ въ удвоеніи куба. Если мы примемъ за единицу сторону первоначальнаго куба, то сторону (x) искомаго куба, объемъ котораго вдвое больше даннаго, нельзя построить при помощи циркуля и линейки.

Мы имѣемъ

$$x^3 = 2;$$

$$x = \sqrt[3]{2}.$$

На основаніи самыхъ простыхъ алгебраическихъ соображеній можно убѣдиться, что $\sqrt[3]{2}$ есть ирраціональность высшаго порядка, чѣмъ квадратный радикалъ. Эта ирраціональность не можетъ быть вычислена при помощи конечнаго числа извлеченій квадратныхъ радикаловъ. Итакъ, Делійская задача не можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкой.

§ 28. Одна изъ такихъ невозможныхъ задачъ (не рѣшающихся при помощи циркуля и линейки) сыграла особенно важную роль въ математикѣ. Это была задача квадратуры круга, т. е. задача построенія квадрата, равнаго по площади заданному кругу. Если

мы возьмемъ за единицу радіусъ круга, то его площадь будетъ равна числу π; обозначая черезъ x сторону квадрата равновеликаго данному кругу, мы получимъ

$$x^2 = \pi\,;\; x = \sqrt{\pi}.$$

Итакъ, для рѣшенія задачи намъ нужно построить отрѣзокъ

$$x = \sqrt{\pi}.$$

Неудачи построенія послѣдняго числа, повторявшіяся почти два тысячелѣтія заставили предполагать невозможность рѣшенія этой задачи. Но доказана была эта невозможность лишь во второй половинѣ XIX столѣтія совершенно случайно, извѣстнымъ французскимъ математикомъ Hermite'омъ *). Онъ занимался изученіемъ свойствъ формулы

гдѣ e — ирраціональное число, представляющее основаніе неперовыхъ логариѳмовъ. Изучая эту формулу, онъ пришелъ къ заключенію, что число e не можетъ быть корнемъ никакого уравненія вида

$$(1) \qquad x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + g = 0,$$

въ которомъ коэффиціенты a, b и т. д. — числа раціональныя. Въ настоящее время мы называемъ такія числа трансцендентными въ отличіе отъ чиселъ алгебраическихъ, т. е. такихъ, которыя могутъ удовлетворять уравненію вида (1). Уравненія вида (1) носятъ названіе алгебраическихъ уравненій. Итакъ, если число можетъ удовлетворять нѣкоторому алгебрическому уравненію, то мы его назовемъ алгебраическимъ числомъ, если нѣтъ, то трансцендентнымъ.

Число e оказалось трансцендентнымъ. Lindemann **) докончилъ работу Hermite'а и показалъ, что если e есть число трансцендентное, то и π будетъ непремѣнно трансцендентнымъ числомъ. Слѣдовательно, не только корень квадратный изъ π, но даже и самое число π не можетъ быть корнемъ никакого алгебраическаго уравненія; тѣмъ болѣе оно не можетъ быть представлено въ видѣ послѣдовательнаго рѣшенія ряда уравненій степени не выше второй. Легко убѣдиться, что всякія числа, которыя получаются отъ

*) Hermite. Sur la fonction exponentielle. C. R., L. LXXYII, 1873.

**) Lindemann. Über die Zahl π. Mathem. Annalen. Berlin, Band 20. 1882.

послѣдовательнаго рѣшенія алгебраическихъ уравненій, всегда числа алгебраическія.

§ 29. Изслѣдованія Hermite'a и Lindemann'a закончили вопросъ о невозможности рѣшенія квадратуры круга циркулемъ и линейкой. Академіи наукъ всего міра уже сравнительно давно перестали принимать для разсмотрѣнія попытки рѣшенія задачи квадратуры круга. Но въ концѣ XVIII столѣтія они еще отвѣчали авторамъ подобныхъ рѣшеній. Интересно обратить вниманіе на одинъ такой отвѣтъ знаменитаго математика Lagrange'a. Ему было поручено разсмотрѣть одну работу. Lagrange отнесся очень внимательно къ автору этой работы: онъ подсчиталъ, что площадь круга представляется у автора однимъ числомъ, а на самомъ дѣлѣ это число должно быть другимъ, т. е. что рѣшеніе было невѣрно, при этомъ онъ сказалъ, что рѣшеніе представляетъ нѣкоторый интересъ, какъ приближенное. Интересно то, что это дало поводъ Lagrange'у изложить знаменитую, вошедшую въ настоящее время во всѣ курсы, теорему о подходящихъ дробяхъ въ теоріи непрерывныхъ дробей; эта теорема говоритъ, что подходящія дроби выражаютъ ближе величину всей непрерывной дроби, чѣмъ всѣ дроби съ меньшими знаменателями. Онъ указалъ на то обстоятельство, что два знаменитыя числа

$$\frac{22}{7} \text{ и } \frac{355}{113}$$

суть двѣ подходящія дроби разложенія числа π въ непрерывную дробь

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ldots}}}}.$$

Посмотримъ что же сдѣлали для науки эти попытки рѣшить квадратуру круга. Значеніе ихъ было очень велико. Конечно, я говорю не о многочисленныхъ рѣшеніяхъ бѣдныхъ маніаковъ, малообразованныхъ людей. Но попытки рѣшенія квадратуры круга такими знаменитыми математиками, какъ Архимедъ, выяснили значеніе числа π и тѣ пріемы, при помощи которыхъ вычисляются его приближенныя значенія. Вписывая правильные многоугольники и увеличивая число ихъ сторонъ, мы осуществляемъ такимъ образомъ методы современнаго интегральнаго исчисленія.

Итакъ, задача квадратуры круга была первой задачей, вызвавшей къ жизни начала интегральнаго исчисленія.

Рѣшеніе уравненій въ радикалахъ.

§ 30. Теперь мы перейдемъ къ новой невозможной задачѣ, которая сыграла въ исторіи математики одну изъ первостепенныхъ ролей, а именно къ задачѣ алгебрическаго рѣшенія уравненій. Подъ алгебрическимъ рѣшеніемъ уравненій разумѣется такое рѣшеніе, въ которомъ мы получаемъ корень уравненія при помощи производства конечнаго числа дѣйствій сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня надъ коэффиціентами этого уравненія; вкратцѣ говорятъ, что въ такомъ случаѣ уравненіе рѣшается въ радикалахъ, не указывая на первыя пять дѣйствій, какъ элементарныя.

Рѣшеніе уравненій первой степени встрѣчается еще въ древнеегипетской книгѣ Ames'a за 1700 лѣтъ до Р. Х. Уравненія второй степени были рѣшены еще греческими и арабскими математиками; уравненія степеней третьей и четвертой были рѣшены итальянскими математиками Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari въ XVI столѣтіи. Начиная съ уравненій пятой степени не было найдено рѣшеній. Lagrange, разсматривая въ своемъ знаменитомъ мемуарѣ „Reflections sur la résolution algébrique des équations" (1770) различные пріемы рѣшенія уравненій первыхъ четырехъ степеней, думалъ, что изъ нихъ можно вывести правила рѣшенія уравненій высшихъ степеней, начиная съ пятой, но онъ замѣтилъ существованіе какъ бы перелома въ теоріи уравненій; именно, уравненіе третьей степени сводилось къ уравненію второй степени, уравненіе четвертой къ уравненію третьей, тогда какъ всѣ его попытки рѣшить уравненіе пятой степени привели къ тому, что оно свелось къ рѣшенію уравненій степени высшей, шестой; по этому поводу въ одномъ мѣстѣ этого мемуара онъ говоритъ, что рѣшеніе уравненія пятой степени ему кажется почти невозможнымъ.

§ 31. Послѣ Lagrange'a Gauss занимался съ успѣхомъ вопросомъ о рѣшеніи уравненій высшихъ степеней. Онъ обратилъ особое вниманіе на уравненія двучленныя вида

(1) $$x^n - a = 0$$

Обозначимъ черезъ $\sqrt[n]{a}$ какой-нибудь изъ корней уравненія (1). Тогда, полагая

$$x = t\sqrt[n]{a}$$

мы получимъ для t уравненіе

(2) $$t^n = 1;$$

n корней этого уравненія будутъ

$$t_0 = 1$$

$$t_1 = cos\frac{2\pi}{n} + i\,Sin\frac{2\pi}{n}$$

$$t_2 = cos\frac{4\pi}{n} + i\,sin\frac{4\pi}{n}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$t_{n-1} = cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\,sin\frac{2(n-1)\pi}{n},$$

такъ что всѣ корни уравненія (1) будутъ имѣть видъ

$$t_0\sqrt[n]{a},\ t_1\sqrt[n]{a},\ t_2\sqrt[n]{a}\ \ldots\ t_{n-1}\sqrt[n]{a}.$$

Итакъ, задача свелась къ рѣшенію уравненія (2), т. е. къ вычисленію корней n-ой степени изъ единицы. Gauss показалъ, что уравненія (2) всегда рѣшаются въ радикалахъ; особенно важенъ случай уравненія

(3) $$x^{17} - 1 = 0,$$

соотвѣтствующій задачѣ построенія правильнаго вписаннаго въ кругъ семнадцатиугольника. Уравненіе (3) приводится по раздѣленіи на $(x-1)$ къ уравненію

(4) $$x^{16} + x^{15} + \ldots + x + 1 = 0,$$

которое и требуется рѣшить.

Знаменитое открытіе Gauss'а состоитъ въ томъ, что уравненіе (4) рѣшается при помощи цѣпи четырехъ квадратныхъ уравненій, т. е. семнадцатиугольникъ можетъ быть вписанъ въ кругъ циркулемъ и линейкой. Эта задача была послѣ задачъ, разобранныхъ древними греческими математиками, первымъ случаемъ вписанія многоугольника при помощи циркуля и линейки. Gauss высказалъ болѣе общую теорему: онъ показалъ, что можно вписать

циркулемъ и линейкой многоугольники, число сторонъ которыхъ n есть простое число вида

$$n = 2^m + 1.$$

§ 32. Заслуга доказательства невозможности рѣшенія въ радикалахъ общихъ уравненій степеней, начиная съ пятой, принадлежитъ норвежскому математику Niels'у Abel'ю, умершему въ молодомъ возрастѣ, 29 лѣтъ.

Какъ понимать, что нельзя рѣшить общее уравненіе пятой степени въ радикалахъ? Это значитъ, что не существуетъ общаго алгоритма, который годился бы для всѣхъ уравненій пятой степени, каковы бы ни были коэффиціенты. Но было-бы ошибкой думать, что не существуетъ такихъ уравненій пятой степени, которыя можно было бы рѣшить. Существуетъ безчисленное число уравненій пятой и высшихъ степеней, которыя можно рѣшить въ радикалахъ. Нѣтъ только одной общей формулы, по которой всѣ уравненія пятой степени рѣшались бы, нѣтъ такихъ формулъ и для высшихъ степеней. Относительно нѣкоторыхъ числовыхъ уравненій можно доказать, что не можетъ существовать никакихъ формулъ съ радикалами, которыя бы рѣшали ихъ. Что же тогда дѣлать? Gauss показалъ, что уравненіе всякой степени будетъ имѣть непремѣнно одинъ корень, вещественный или комплексный; изъ этой теоремы, какъ мы увидимъ далѣе, вытекаетъ такое слѣдствіе: число корней алгебраическаго уравненія равно его степени.

Итакъ, задача рѣшенія произвольнаго алгебраическаго уравненія возможна; существуютъ его корни, и ихъ столько, сколько единицъ въ показателѣ степени уравненія; невозможность относится не къ отсутствію корней, а лишь къ вычисленію ихъ при помощи радикаловъ.

Задача рѣшенія уравненія выше четвертой степени въ томъ случаѣ, когда оно не рѣшается въ радикалахъ, представляетъ собою новую операцію анализа. Та часть математики, которая изучаетъ свойства и приложенія этой операціи называется алгебраическимъ анализомъ или высшей алгеброй.

§ 33. Разсмотримъ рѣшеніе уравненій третьей и четвертой степени. Возьмемъ уравненіе третьей степени въ общемъ видѣ

(1) $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Прежде всего замѣтимъ, что коэффиціентъ a нельзя считать равнымъ нулю, такъ какъ въ такомъ случаѣ мы получили бы уравненіе второй степени, а, слѣдовательно, можно раздѣлить на него все уравненіе и получить уравненіе въ такомъ видѣ:

(2) $$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

Для того, чтобы возможно болѣе простымъ образомъ рѣшить кубическое уравненіе, упростимъ его, т. е. сведемъ это уравненіе къ такому, гдѣ нѣтъ члена, содержащаго x^2. Возьмемъ вмѣсто x новое неизвѣстное y, полагая

$$x = y + h;$$

уравненіе приметъ видъ

$$(y + h)^3 + \alpha (y + h)^2 + \beta (y + h) + \gamma = 0$$

$$y^3 + y^2 (3h + \alpha) + yA + B = 0.$$

Теперь замѣчаемъ, что если положить

$$3h + \alpha = 0,$$

то

$$h = -\frac{\alpha}{3}.$$

Значитъ, наше уравненіе упростится, если мы замѣнимъ прежнее неизвѣстное x новымъ y, полагая

$$x = y - \frac{\alpha}{3}.$$

Наше уравненіе сведется къ уравненію такого вида:

(3) $$x^3 + p x + q = 0.$$

Выбираемъ самый простой способъ рѣшенія; введемъ двѣ новыя неизвѣстныя величины и одну изъ нихъ подберемъ такъ, чтобы получилось упрощеніе. Положимъ

$$x = u + v$$

Наше уравненіе приметъ видъ

$$(u + v)^3 + p (u + v) + q = 0.$$

Напишемъ его такъ

$$u^3 + v^3 + 3 u^2 v + 3 uv^2 + p (u + v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + (u + v) (3 uv + p) + q = 0.$$

Подбираемъ u и v такъ, чтобы

$$3 uv + p = 0.$$

Итакъ, мы получаемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными

(4) $$3uv + p = 0$$

(5) $$u^3 + v^3 + q = 0.$$

Они преобразуются такъ:

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Эти два уравненія настолько просты, что ихъ можно рѣшить относительно каждаго неизвѣстнаго. По суммѣ и произведенію неизвѣстныхъ величинъ u^3 и v^3 мы находимъ эти величины, а затѣмъ выведемъ формулы для x'а. Величины u^3 и v^3 будутъ корнями квадратнаго уравненія относительно ξ

(6) $$\xi^2 + q\xi - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Итакъ, согласно Lagrange'у, теорія этого рѣшенія состоитъ въ томъ, что мы привели его къ рѣшенію квадратнаго уравненія; мы получаемъ два корня послѣдняго уравненія (6)

$$u^3 = \xi_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = \xi_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Величины u и v получатся извлеченіемъ корня кубическаго

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Итакъ, корень уравненія (3) представится въ видѣ знаменитой формулы Cardan'а:

(7) $$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

§ 34. Разсмотримъ это рѣшеніе; корень кубическій изъ какого-нибудь числа, какъ извѣстно, имѣетъ три значенія. Если мы будемъ комбинировать различныя значенія двухъ корней въ формулѣ Cardan'a (7), то мы получимъ для уравненія третьей степени девять комбинацій вмѣсто ожидаемыхъ трехъ. Значитъ, такія девять комбинацій должны давать только три различныхъ результата. Обратимъ вниманіе на слѣдующее обстоятельство: величины v и u, эти радикалы, въ произведеніи должны давать число

$$-\frac{p}{3};$$

слѣдовательно

$$x=\frac{-\frac{p}{3}}{v}+v,$$

а тогда формула Cardan'a приметъ видъ

$$x=\frac{-\frac{p}{3}}{\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Давая радикалу v три различныя значенія, мы и получимъ только три корня кубическаго уравненія. Съ теоретической точки зрѣнія это рѣшеніе не представляетъ собою ничего затруднительнаго; что касается вычисленій по этимъ формуламъ, то встѣчаются затрудненія не только выкладочнаго характера, но и болѣе существенныя. Одинъ изъ важныхъ въ практическомъ отношеніи случаевъ тотъ, когда всѣ три корня вещественные. Оказывается, что этотъ случай имѣетъ мѣсто тогда, когда выраженіе, стоящее подъ знакомъ квадратнаго радикала отрицательно, т. е.

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0.$$

Если бы мы захотѣли въ корнѣ кубическомъ изъ комплекснаго числа отдѣлить алгебрическимъ путемъ вещественную часть отъ мнимой, то мы пришли бы къ логическому кругу. Въ самомъ дѣлѣ, будемъ искать два вещественныхъ числа x и y, удовлетворяющихъ равенству

(1) $$\sqrt[3]{a+ib}=x+iy.$$

Возвышая обѣ части (1) въ кубъ, получимъ

$$a+i\ b=x^3-3xy^2+i\,(3x^2y-y^3).$$

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ рѣшенію системы двухъ уравненій третьей степени

(2) $$x^3-3\,xy^2=a$$
$$3\,x^2y-y^3=b.$$

Система (2) приводитъ къ слѣдующему существенному затрудненію, а именно, какими бы путями мы ни производили рѣшеніе системы (2), мы приходимъ всегда къ рѣшенію такихъ уравненій, для которыхъ необходимо умѣніе извлекать корни третьей степени изъ комплексныхъ чиселъ. Такимъ образомъ, у насъ нѣтъ возможности что либо сдѣлать алгебраически для отдѣленія вещественной и мнимой части въ корнѣ кубическомъ

$$\sqrt[3]{a+bi}.$$

Придется прибѣгнуть для этой цѣли къ тригонометрическимъ величинамъ (см. § 24).

Этотъ случай называется casus irreducibilis (неприводимый случай).

§ 41. Итакъ, уже на кубическомъ уравненіи мы замѣчаемъ, что представленіе корня въ радикалахъ является не особенно большимъ вычислительнымъ удобствомъ.

Обратимся къ рѣшенію въ радикалахъ уравненій четвертой степени. Возьмемъ уравненіе четвертой степени въ общемъ видѣ, раздѣленное уже на коэффиціентъ при высшей степени x'a

(1) $$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

Разсмотримъ такое тождество

(2) $$\left(x^2+\frac{a}{2}x+y\right)^2=x^4+ax^3+\left(2y+\frac{a^2}{4}\right)x^2+ayx+y^2;$$

вычтемъ изъ этого тождества почленно наше уравненіе, тогда мы получимъ

(3) $$\left(x^2+\frac{a}{2}x+y\right)^2=\left(2y+\frac{a^2}{4}-b\right)x^2+(ay-c)\,x+y^2-d.$$

У насъ пока неизвѣстна величина y. Подберемъ ее такъ, чтобы во второй части получить квадратъ двучлена

$$(\alpha x + \beta)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2;$$

придется положить

$$\alpha^2 = 2y + \frac{a^2}{4} - b,$$

$$2\,\alpha\beta = ay - c,$$

$$\beta^2 = y^2 - d.$$

Исключая буквы α и β, мы получимъ

$$(4) \qquad (ay - c)^2 - 4\left(2y + \frac{a^2}{4} - b\right)(y^2 - d) = 0.$$

Это уравненіе оказывается кубическимъ относительно y; итакъ, мы свели уравненіе четвертой степени къ уравненію кубическому, что находится въ полномъ соотвѣтствіи съ общей теоріей Lagrange'a. Найдя какой-нибудь корень этого уравненія и подставляя его вмѣсто y въ уравненіе (3), мы получимъ

$$\left(x^2 - \frac{a}{2}x + y\right)^2 = (\alpha x + \beta)^2.$$

Отсюда мы имѣемъ одно изъ двухъ уравненій

$$(5) \qquad x^2 + \frac{a}{2}x + y = \alpha x + \beta,$$

$$(6) \qquad x^2 + \frac{a}{2}x + y = -\alpha x - \beta.$$

Итакъ, мы привели задачу рѣшенія уравненія четвертой степени къ рѣщенію двухъ квадратныхъ уравненій; оказывается, что достаточно нахожденія одного какого нибудь корня кубическаго уравненія (4); тогда два квадратныхъ уравненія (5) и (6) дадутъ всѣ четыре корня заданнаго уравненія четвертой степени.

§ 42. Хотя уравненія степени выше четвертой и не рѣшаются въ общемъ видѣ въ радикалахъ, но тѣмъ не менѣе существуетъ безчисленное множество уравненій частнаго вида, гдѣ такое рѣшеніе возможно. Обратимъ вниманіе на одинъ изъ наиболѣе замѣчательныхъ видовъ такого рода уравненій. Возьмемъ уравненіе, къ рѣшенію котораго сводится дѣленіе дуги на пять равныхъ частей. Напишемъ по формулѣ Moivre'a

$$(1) \qquad (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^5 = \cos 5\vartheta + i\sin 5\vartheta.$$

Пусть задана величина

$$a = \cos 5\vartheta.$$

Поставимъ себѣ задачей найти

$$x = \cos\vartheta,$$

другими словами, найдемъ по заданному косинусу пятикратнаго угла косинусъ одиночнаго. Эта задача приводится къ рѣшенію уравненія пятой степени. По биному Ньютона пишемъ

$$\cos^5\vartheta + 5\cos^4\vartheta\, i\sin\vartheta + 10\cos^3\vartheta\, i^2\sin^2\vartheta + 10\cos^2\vartheta\, i^3\sin^3\vartheta +$$
$$+ 5\cos\vartheta\, i^4\sin^4\vartheta + i^5\sin^5\vartheta = \cos^5\vartheta - 10\cos^3\vartheta\sin^2\vartheta +$$
$$+ 5\cos\vartheta\sin^4\vartheta + i(5\cos^4\vartheta\sin\vartheta - 10\cos^2\vartheta\sin^3\vartheta + \sin^5\vartheta) =$$
$$= \cos 5\vartheta + i\sin 5\vartheta.$$

Отсюда

$$a = \cos 5\vartheta = \cos^5\vartheta - 10\cos^3\vartheta\sin^2\vartheta + 5\cos\vartheta\sin^4\vartheta,$$
$$a = \cos^5\vartheta - 10\cos^3\vartheta(1-\cos^2\vartheta) + \cos\vartheta(1-\cos^2\vartheta)^2;$$

мы приходимъ къ уравненію пятой степени

$$a = x^5 - 10x^3(1-x^2) + 5x(1-x^2)^2.$$

Формула Moivre'а даетъ намъ возможность рѣшить это уравненіе въ радикалахъ. Мы имѣемъ

$$\cos 5\vartheta = a,$$

откуда

$$\sin 5\vartheta = \sqrt{1-a^2}.$$

Можемъ написать

$$(\cos\vartheta \pm i\sin\vartheta)^5 = a \pm i\sqrt{1-a^2},$$
$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta = \sqrt[5]{a + i\sqrt{1-a^2}},$$
$$\cos\vartheta - i\sin\vartheta = \sqrt[5]{a - i\sqrt{1-a^2}}.$$

Отсюда

$$x = \cos\vartheta = \frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{a + i\sqrt{1-a^2}} + \sqrt[5]{a - i\sqrt{1-a^2}}\right).$$

§ 43. Теперь укажемъ на нѣкоторыя наиболѣе важныя свойства уравненій высшихъ степеней. Первое свойство состоитъ въ теоремѣ Gauss'а, которая гласитъ, что всякое алгебраическое уравненіе какой угодно степени имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень, причемъ этотъ корень можетъ быть какъ дѣйствительный, такъ и комплексный.

Положимъ, что у насъ задано уравненіе какой нибудь n-ой степени

(1) $$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0.$$

Сокращенно обозначимъ это уравненіе такъ

$$f(x) = 0.$$

Согласно теоремѣ Gauss'a, существуетъ нѣкоторое число a, обращающее послѣ подстановки его вмѣсто x уравненіе въ тождество. Изъ этой теоремы вытекаетъ, какъ слѣдствіе, что уравненіе n-ой степени имѣетъ n корней, т. е. число корней уравненія равно показателю его степени. Для доказательства этого будемъ дѣлить нашъ полиномъ на разность

$$x - a_0,$$

гдѣ a_0 произвольное число; получаемъ нѣкоторое частное, которое обозначимъ черезъ $f_1(x)$, и остатокъ R, въ который не входитъ буква x (нулевой степени относительно x). На основаніи опредѣленія дѣленія имѣемъ тождество

$$f(x) = f_1(x)(x - a_0) + R. \tag{2}$$

Всякое тождество останется справедливымъ, какое бы значеніе мы ни давали буквамъ, входящимъ въ него. Подставляя вмѣсто x въ тождество (2) a_0, мы получаемъ

$$a_0^n + p_1 a_0^{n-1} + \ldots + p_{n-1} a_0 + p_n = R. \tag{3}$$

Итакъ, остатокъ, получаемый отъ дѣленія полинома $f(x)$ на

$$x - a_0,$$

равенъ результату подстановки числа a_0 вмѣсто x въ дѣлимое $f(x)$. Очевидно, если a_0 равно корню a нашего уравненія, то этотъ результатъ подстановки равенъ нулю, а слѣдовательно остатокъ также равенъ нулю.

$$f(a) = R = 0.$$

Подставляя

$$R = 0$$

въ тождество (2), получимъ

$$f(x) = f_1(x)(x - a);$$

значитъ заданное уравненіе

$$f(x) = 0$$

можетъ быть переписано такъ:

$$f_1(x)(x - a) = 0.$$

Очевидно, что намъ придется разсматривать новое уравненіе

$$f_1(x) = 0$$

степени на единицу меньшей. Итакъ, если намъ извѣстенъ одинъ корень a уравненія, то дѣля уравненіе на

$$x - a,$$

мы понижаемъ его степень на единицу.

На основаніи теоремы Gauss'а это новое уравненіе $(n-1)$-ой степени должно также имѣть по крайней мѣрѣ одинъ корень; обозначимъ его черезъ b; слѣдовательно, по предыдущему

$$f_1(x) = (x - b) f_2(x).$$

Въ концѣ концовъ первоначальный полиномъ получится въ такой формѣ

(4) $$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots (x - l),$$

т. е. полиномъ разложится на n линейныхъ множителей *).

§ 44. Если всѣ корни

$$a, b, c, \ldots l$$

различны между собой, то ихъ число n какъ разъ равно степени уравненія; можетъ однако случиться, что среди этихъ корней будутъ одинаковые, тогда мы получимъ такую общую теорему:

Всякій полиномъ n-ой степени раскладывается на множители въ такой формѣ:

(1) $$f(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_l)^{k_l}.$$

Въ этомъ случаѣ мы говоримъ, что полиномъ имѣетъ l различныхъ корней. Такой полиномъ имѣетъ уже меньшее число различныхъ корней, чѣмъ единицъ въ показателѣ степени. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что уравненіе имѣетъ k_1 корней, равныхъ a_1 k_2 корней, равныхъ a_2 и т. д.; при этомъ, если показатель k_1 больше единицы, то корень a_1 называется *кратнымъ*; число k_1 называется степенью его кратности. Считая всякій m-кратный корень за m корней, мы замѣчаемъ, что общее число корней будетъ по прежнему равняться показателю степени уравненія, такъ какъ

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n.$$

Діофантовъ анализъ.

§ 45. Перейдемъ теперь къ слѣдующей категоріи извѣстныхъ въ исторіи математики невозможныхъ задачъ, къ тѣмъ задачамъ, которыя связаны съ такъ называемымъ Діофантовымъ анализомъ.

---

*) Линейными множителями мы называемъ множители первой степени.

Діофантъ — извѣстный александрійскій математикъ, жившій въ III столѣтіи послѣ *Р. Х.* Изъ написанныхъ имъ тринадцати книгъ объ ариѳметическихъ задачахъ до насъ дошли только шесть, но зато самыя важныя, и одно произведеніе о полигональныхъ числахъ. Наиболѣе характерными для Діофанта являются вопросы о рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій въ цѣлыхъ и раціональныхъ числахъ. Эти вопросы долгое время составляли главный предметъ науки, носящей названіе теоріи чиселъ, такъ что этой наукѣ придавалось названіе Діофантики или Діофантова анализа.

Одна глава изъ Діофантова анализа вошла уже въ курсъ элементарной алгебры, именно глава о рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій первой степени въ цѣлыхъ числахъ. Особенно важный шагъ впередъ въ Діофантовомъ анализѣ былъ сдѣланъ открытіями одного изъ самыхъ выдающихся математическихъ умовъ, а именно Fermat'а жившаго отъ 1601 до 1665 года. Fermat не былъ математикомъ по профессіи; онъ былъ юристомъ и занималъ должность въ парламентѣ въ Тулузѣ. Обладая геніальными математическими способностями, онъ имѣлъ солидныя познанія по всѣмъ отраслямъ современной ему математики.

Онъ приготовилъ переводъ Діофанта и на поляхъ этого перевода сдѣлалъ свои знаменитыя замѣтки, въ которыхъ онъ сообщалъ свои открытія по теоріи чиселъ, къ сожалѣнію въ большинствѣ случаевъ безъ доказательства. Эти замѣтки оставили намъ, его потомкамъ, цѣлый рядъ нераскрытыхъ загадокъ.

Остановимся на одной изъ этихъ теоремъ, данныхъ безъ доказательства, представляющей такъ называемую великую теорему Fermat'а. Эта теорема формулируется очень просто:

Уравненіе

$$x^n + y^n = z^n$$

не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній, отличныхъ отъ нуля, при n цѣломъ, большемъ, чѣмъ 2.

Сообщая эту теорему, Fermat въ своемъ изданіи Діофанта прибавляетъ только такія слова: „Я нашелъ для этого предложенія удивительное доказательство, но поле книги слишкомъ узко, чтобы его написать".

Уже больше двухсотъ лѣтъ невозможность рѣшенія этого уравненія въ цѣлыхъ числахъ при

$$n > 2$$

остается недоказанной. Въ послѣднее время появилась крупная премія, установленная однимъ умершимъ математикомъ въ Германіи, въ 100000 марокъ за рѣшеніе этой задачи.

Я упоминаю объ этой задачѣ, конечно, не ради этой преміи, а для того, чтобы на ней познакомить васъ съ частью математики, называемой Діофантовымъ анализомъ, а также и сообщить, что при стремленіи доказать невозможность задачи Fermat'а было сдѣлано въ XIX столѣтіи новое обобщеніе понятія о числѣ, были введены въ науку числа идеальныя.

§ 46. Для знакомства съ характеромъ задачъ Діофантова анализа разсмотримъ уравненіе Fermat'а при $n = 2$, т. е.

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

Еще древніе математики знали, что можно построить прямоугольный треугольникъ, стороны котораго выражаются цѣлыми числами. Подъ названіемъ египетскаго треугольника былъ извѣстенъ такой прямоугольный треугольникъ, у котораго катеты выражались числами 3 и 4, а гипотенуза числомъ 5. Этотъ треугольникъ давалъ египтянамъ возможность строить прямые углы. Подобныхъ треугольниковъ очень много; легко найти всѣ эти треугольники: для этого надо рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе (1).

Если мы раздѣлимъ все уравненіе на z^2 и обозначимъ $\frac{x}{z}$ черезъ ξ, а $\frac{y}{z}$ черезъ η, то получимъ

$$\xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Рѣшая это уравненіе относительно η, имѣемъ

$$\eta = \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Чтобы η было числомъ раціональнымъ, необходимо раціональное число ξ взять меньше единицы. Такъ какъ квадратный корень

$$\sqrt{1 - \xi^2}$$

долженъ оказаться положительнымъ раціональнымъ числомъ, меньшимъ единицы, то можно будетъ положить

$$\eta = \sqrt{1 - \xi^2} = 1 - \frac{u}{v}\xi, \tag{2}$$

гдѣ u и v цѣлыя числа, подлежащія опредѣленію.

Возвышая въ квадратъ равенство (2), имѣемъ

$$\eta^2 = 1 - \xi^2 = 1 - \frac{2u}{v}\xi + \frac{u^2}{v^2}\xi^2.$$

Это уравненіе даетъ

$$(3) \qquad -\xi = -\frac{2u}{v} + \xi\frac{u^2}{v^2}.$$

Такъ какъ въ уравненіе (3) ξ входитъ въ первой степени, то мы получаемъ для числа ξ, рѣшающаго задачу, раціональное значеніе

$$(4) \qquad \xi = \frac{2uv}{u^2 + v^2};$$

подставляя полученное выраженіе для ξ въ уравненіе (2), получимъ

$$(5) \qquad \eta = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}.$$

Цѣлыя числа u и v остаются совершенно произвольными. Нетрудно убѣдиться, что мы получимъ общее рѣшеніе для чиселъ x, y, z, рѣшающихъ уравненіе (1), въ такомъ видѣ

$$x = 2uv;\ y = u^2 - v^2;\ z = u^2 + v^2;$$

подставляя вмѣсто u и v всевозможныя цѣлыя числа, получимъ безчисленное множество рѣшеній уравненія (1). Такъ, напримѣръ, при

$$u = 2;\ v = 1,$$

получимъ египетскій треугольникъ

$$x = 4;\ y = 3;\ z = 5.$$

При

$$u = 3;\ v = 2,$$

имѣемъ

$$x = 12;\ y = 5;\ z = 13.$$

§ 47. Переходя къ задачѣ Fermat'a необходимо обратить вниманіе на то обстоятельство, что исторія попытокъ рѣшить ее сводится къ слѣдующему. Для $n = 4$ существуетъ доказательство, принадлежащее самому Fermat'y. Для $n = 3$ Euler'y удалось примѣнить соображенія, подобныя соображеніямъ Fermat'a. Случай $n = 5$ былъ рѣщенъ въ началѣ XIX вѣка Lejeune Dirichlet и Legendre'омъ. Въ 1837 году Lamé далъ доказательство для $n = 7$; въ 1847 году онъ сдѣлалъ попытку общаго доказательства теоремы Fermat'a. При этомъ онъ сдѣлалъ характерную ошибку, со-

стоящую въ томъ, что ему были неизвѣстны принципы одной новой теоріи, которая была найдена и разработана Kummer'омъ. Эта теорія есть не что иное, какъ теорія идеальныхъ чиселъ. Она дала возможность Kummer'у сдѣлать громадный шагъ впередъ въ задачѣ Fermat'a, а именно, Kummer доказалъ задачу Fermat'a для безчисленнаго числа значеній показателя n. Между прочимъ Kummer'овское рѣшеніе является настолько серьезнымъ рѣшеніемъ, что изъ него вытекаетъ доказательство теоремы Fermat'a для всѣхъ значеній n, не превосходящихъ 100, и лишь при значеніяхъ n, бо́льшихъ 100, появляются показатели, не подходящіе подъ теорію Kummer'a, при которыхъ задача остается по прежнему недоказанной. Жюри, находящееся въ Геттингенѣ, которое теперь разсматриваетъ рѣшенія этой задачи, получаетъ массу рѣшеній, но, конечно, всѣ они ошибочны, въ особенности рѣшенія элементарныя. Ясно, что задача, прошедшая черезъ усилія Euler'a, Lagrange'a, Legendre'a, Dirichlet, Abel'я, Kummer'a, думавшаго о ней цѣлую жизнь, прошла не случайно, что ее дѣйствительно трудно рѣшить. Относительно элементарныхъ доказательствъ жюри даже заявило, что оно не будетъ ихъ разсматривать, если они напечатаны частнымъ образомъ, а будетъ обращать вниманіе только на тѣ рѣшенія, которыя напечатаны въ какомъ нибудь журналѣ; такимъ образомъ оно хочетъ гарантировать себя отъ разсмотрѣнія совсѣмъ нелѣпыхъ рѣшеній. Итакъ, можно съ полнымъ основаніемъ предполагать, что эта задача можетъ быть рѣшена только распространеніемъ рѣшенія Kummer'a на всѣ значенія n, представляющія пока затрудненія.

Задача трехъ тѣлъ.

§ 48. Чтобы закончить главу о невозможныхъ задачахъ, игравшихъ въ исторіи математики большую роль, я долженъ сказать еще объ одной задачѣ. Хотя она и не принадлежитъ къ числу невозможныхъ, но тѣмъ не менѣе до сихъ поръ не рѣшена. Старались рѣшить ее уже около двухсотъ лѣтъ, начиная съ Newton'a, и она оставила большой слѣдъ въ математикѣ; она вызвала къ жизни цѣлый рядъ изслѣдованій въ разныхъ направленіяхъ. Это такъ называемая задача трехъ тѣлъ. Задача эта есть частный случай болѣе общей задачи, задачи какого угодно числа n тѣлъ. Newton въ своихъ „Principia mathematica philosophiae naturalis“ показалъ, что нужно сдѣлать для того, чтобы рѣшить такую задачу. Намъ

дается въ пространствѣ, предполагаемомъ совершенно пустымъ, положеніе n матеріальныхъ тѣлъ въ извѣстныхъ n точкахъ

$$N_1, N_2, N_3, \ldots N_n;$$

n—цѣлое число. Задаются и массы заданныхъ тѣлъ, т. е. для всѣхъ точекъ предполагаются заданными нѣкоторыя положительныя числа

$$m_1, m_2, m_3, \ldots m_n.$$

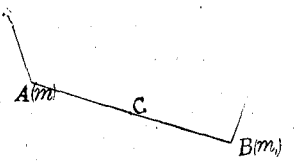
Этимъ точкамъ даны толчки, т. е. для нихъ произвольно заданы первоначальныя скорости по величинѣ и направленію. Предполагается при этомъ, что тѣла притягиваются другъ къ другу по такому закону: сила взаимнаго притяженія пропорціональна массамъ точекъ и обратно пропорціональна квадрату разстоянія между ними. Требуется разсказать всю дальнѣйшую исторію движенія этихъ матеріальныхъ точекъ, т. е. требуется въ каждый послѣдующій моментъ времени указать мѣста, гдѣ эти точки находятся и опредѣлить, куда и съ какой скоростью они въ этотъ моментъ направляются. Newton показалъ, что, примѣняя дифференціальное исчисленіе, можно написать такъ называемыя дифференціальныя уравненія движенія этихъ точекъ. О томъ, что такое дифференціальное уравненіе, мы скажемъ послѣ. Написаніе этихъ дифференціальныхъ уравненій оказывается очень простымъ; вся задача сводится къ рѣшенію ихъ или, какъ говорятъ, къ ихъ *интегрированію*. Что касается рѣшенія этихъ уравненій, то оказалось, что Newton рѣшилъ ихъ только для случая двухъ тѣлъ. Задача трехъ тѣлъ уже превысила его силы. Она по наслѣдству осталась для слѣдующихъ поколѣній математиковъ.

Въ природѣ приходится имѣть дѣло съ задачей не только двухъ или трехъ тѣлъ, но гораздо большаго числа ихъ. Мы видимъ на примѣрѣ нашей солнечной системы совершающееся на самомъ дѣлѣ движеніе большаго числа тѣлъ; здѣсь ихъ очень много. Для астрономіи было, конечно, очень неудобно, что задача движенія нѣсколькихъ тѣлъ встрѣтила серьезныя затрудненія даже при трехъ тѣлахъ. Но, какъ мы увидимъ дальше, во всѣхъ задачахъ, поставленныхъ натуральной философіей наблюденіями природы, эти наблюденія сами подсказываютъ до нѣкоторой степени и рѣшеніе ихъ. И хотя задачи трехъ и большаго числа тѣлъ представили большія трудности, все же оказалось возможнымъ дать достаточныя для практики приближенныя ихъ рѣшенія. Изъ

этихъ приближенныхъ рѣшеній задачъ о n тѣлахъ образовалась особая наука, названная небесной механикой. Творцомъ этой науки былъ знаменитый математикъ Laplace. Оказалось, что наша планетная система представляетъ, къ сожалѣнію, одинъ частный случай этой задачи. Фактъ состоитъ въ томъ, что планеты, двигающіяся вокругъ солнца, двигаются почти въ одной и той же плоскости. Какъ это произошло, мы сказать не можемъ. Масса планетъ очень мала въ сравненіи съ массой центральнаго тѣла, солнца. Залетаютъ къ намъ иногда постороннія тѣла, кометы, но это происходитъ рѣдко, и масса этихъ тѣлъ невелика. Все вмѣстѣ взятое дѣлаетъ то, что практически необходимая для астрономіи задача многихъ тѣлъ сравнительно проста. Нѣкоторые астрономы мечтаютъ о томъ, что тройныя звѣзды дадутъ намъ возможность рѣшить задачу трехъ тѣлъ. Но если вы припомните, что для того, чтобы надъ системой тройной звѣзды сдѣлать наблюденія, которыя помогли бы намъ рѣшить задачу о трехъ тѣлахъ, нужно ждать нѣсколько вѣковъ, пока произойдетъ въ ней значительное перемѣщеніе, то станетъ яснымъ, что надо пытаться рѣшить задачу чисто математическимъ способомъ, хотя бы приближенно. Пока задача трехъ тѣлъ остается нерѣшенной точно.

§ 49. Обратимся къ рѣшенію задачи двухъ тѣлъ. Въ концѣ курса, когда мы будемъ говорить о механикѣ, мы вернемся къ этой задачѣ.

Если мы имѣемъ въ точкахъ A и B, два тѣла, массы которыхъ равны m и m_1, и если мы сообщимъ имъ нѣкоторыя скорости, то судьба ихъ на вѣчныя времена будетъ такова: соединимъ двѣ точки A и B (черт. 8), въ которыхъ находятся тѣла, прямой и представимъ мысленно на этой прямой центръ тяжести этихъ двухъ тѣлъ. Какъ бы ни двигались тѣла, постоянно будемъ слѣдить мысленно за движеніемъ этого центра тяжести. Движеніе будетъ таково, что центръ тяжести будетъ двигаться равномѣрно по прямой, около этого центра тяжести оба тѣла будутъ описывать движенія по закону Kepler'a, т. е. каждое тѣло будетъ двигаться по одной изъ линій, эллипсу, параболѣ или гиперболѣ, въ фокусѣ которыхъ будетъ находиться центръ тяжести. Въ этомъ состоитъ рѣшеніе задачи двухъ тѣхъ. На основаніи этого рѣшенія можно будетъ



Черт. 8.

прослѣдить движеніе каждаго изъ нихъ черезъ сколько угодно лѣтъ и опредѣлить, гдѣ будетъ находиться эта система во всякій будущій моментъ времени.

Что касается задачи трехъ тѣлъ, то равномѣрное движеніе центра тяжести по прямой имѣетъ мѣсто, т. е. если мы возьмемъ треугольникъ, въ его вершинахъ помѣстимъ массы трехъ данныхъ тѣлъ, а затѣмъ найдемъ центръ тяжести, то этотъ центръ будетъ двигаться равномѣрно по прямой. Рѣшеніе же вопроса, какъ тѣла будутъ вращаться и перемѣщаться относительно этого центра, не поддается до сихъ поръ силамъ математики. Приближенное рѣшеніе возможно, но оно можетъ давать годные результаты при изслѣдованіи движенія только впродолженіе нѣкотораго времени. Если же мы будемъ разсматривать достаточно большой промежутокъ времени, то приближеніе становится недостаточнымъ.

§ 50. Обратимъ вниманіе на одно важное обстоятельство. Пытаясь подойти къ общей задачѣ трехъ тѣлъ, математики уже съ XVIII вѣка начали рѣшать болѣе простыя задачи. Такъ, они предполагали, что два тѣла укрѣплены неподвижно и старались разсмотрѣть, какъ будетъ двигаться тогда третье тѣло. Оказалось, что и эта задача, хотя болѣе простая, встрѣтила громадныя затрудненія. Euler'у удалось преодолѣть затрудненіе въ этой задачѣ притяженія какого нибудь тѣла къ двумъ неподвижнымъ центрамъ. Рѣшеніе привело Euler'а къ весьма важной теоремѣ, о которой я скажу дальше, когда буду говорить о періодическихъ функціяхъ, именно къ теоремѣ, относящейся къ такъ называемымъ эллиптическимъ функціямъ. Она положила начало весьма важной теоріи этихъ функцій. Въ настоящее время задача трехъ тѣлъ нѣсколько подвинута благодаря изслѣдованіямъ современнаго математика Poincarré. Теперь только одну точку оставляютъ неподвижной, но такихъ серьезныхъ результатовъ, какіе Euler получилъ въ случаѣ двухъ неподвижныхъ центровъ, еще пока не получено для этой задачи. Рѣшеніе вопроса двигается очень медленно.

ГЛАВА II.

Параллелизмъ между анализомъ и геометріей.

§ 1. Къ первой половинѣ XVII столѣтія принадлежитъ замѣчательное открытіе, сдѣланное философомъ Descartes'омъ и названное имъ *аналитической геометріей*.

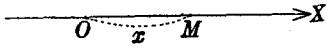
Это открытіе представляетъ собою общій способъ переводить рѣшеніе геометрическихъ задачъ на алгебраическія вычисленія. Значеніе этого открытія идетъ глубже, а именно, аналитическая геометрія раскрываетъ замѣчательный параллелизмъ, существующій между алгеброй-анализомъ съ одной стороны и геометріей съ другой. Этотъ параллелизмъ приводитъ къ важнымъ практическимъ результатамъ для рѣшенія геометрическихъ задачъ, а также открываетъ новые горизонты въ философскомъ отношеніи.

Понятіе о декартовыхъ координатахъ.

§ 2. Въ основѣ способа Descartes'а лежитъ введеніе въ разсмотрѣніе нѣкоторыхъ чиселъ, которыя Descartes назвалъ *координатами* и которыя даютъ возможность указывать положеніе точки на линіи, поверхности и въ пространствѣ. Существуетъ безчисленное множество способовъ введенія въ разсмотрѣніе такихъ координатъ. Мы остановимся на простѣйшемъ способѣ, способѣ такъ называемыхъ *прямолинейныхъ координатъ*. Эти координаты часто называютъ также декартовыми.

§ 3. Разсмотримъ сначала геометрію одного измѣренія, а именно геометрію на одной прямой. Чтобы опредѣлить положеніе точки M (черт. 9) на прямой, можно поступить такъ. Возьмемъ

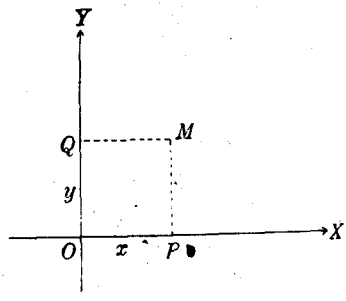
произвольно нѣкоторую основную точку O на прямой и будемъ эту точку называть *началомъ координатъ*. Возьмемъ на прямой нѣкоторое направленіе, напримѣръ OX, указанное на чертежѣ стрѣлкой. Тогда всякой точкѣ M прямой будетъ соотвѣтствовать число x, абсолютная величина котораго равняется разстоянію OM этой точки M до начала координатъ O, знакъ же числа x + или — опредѣлимъ такимъ образомъ: возьмемъ знакъ +, если точка M лежитъ съ той стороны отъ начала координатъ O, куда идетъ направленіе OX, и возьмемъ знакъ —, если точка M лежитъ съ другой стороны относительно выбраннаго направленія. Тогда число x будетъ опредѣлять вполнѣ положеніе точки M, и это число будетъ ничто иное, какъ декартова координата точки M.



Черт. 9.

Точку M съ координатой x будемъ обозначать (x), началу координатъ будетъ соотвѣтствовать знакъ (0).

§ 4. Разсмотримъ теперь двухмѣрную геометрію, геометрію на плоскости. Проведемъ (черт. 10) въ плоскости двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя OX и OY, пересѣкающіяся въ точкѣ O. Назовемъ эти прямыя *осями координатъ*, а точку O *началомъ координатъ*. Тогда положеніе всякой точки M плоскости можетъ быть указано такъ. Опустимъ изъ этой точки M перпендикуляры на оси координатъ, получимъ на осяхъ двѣ точки основаній этихъ перпендикуляровъ, точку P на оси OX и точку Q на оси OY. Тогда положеніе точки M на плоскости опредѣлится положеніями точекъ P и Q на осяхъ. Положеніе точки P на оси OX можно указать координатой $x = OP$, если взять за начало O и выбрать нѣкоторое направленіе на этой оси OX. Точно такъ же положеніе точки Q на оси OY можно указать координатой $y = OQ$ при выборѣ за начало точки O и при указаніи нѣкотораго опредѣленнаго направленія OY на этой оси.



Черт. 10.

Числа x и y опредѣляютъ вполнѣ положеніе точки M на плоскости. Поэтому эти числа x и y называются *координатами точки на плоскости*. Сохранились до сихъ поръ латинскія наз-

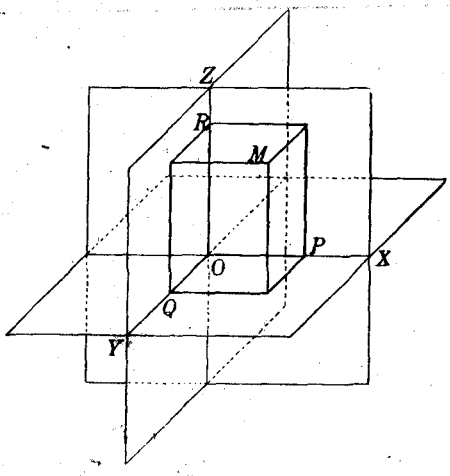
ніи: одна изъ двухъ декартовыхъ координатъ x и y, обыкновенно x, называется *абсциссою* (abscissa, отрѣзокъ), другая называется *ординатою* (ordonata).

Если мы цифрой I обозначимъ уголъ между положительными направленіями осей OX и OY, а другіе вертикальные углы, въ направленіи, обратномъ движенію часовой стрѣлки, назовемъ II, III, IV, то получится такая таблица знаковъ координатъ

	I	II	III	IV
x	+	—	—	+
y	+	+	—	—

Точку M съ координатами x, y обозначимъ знакомъ (x,y). Началу координатъ соотвѣтствуетъ знакъ $(0,0)$.

§ 5. Обратимся къ разсмотрѣнію трехмѣрнаго пространства. Возьмемъ въ пространствѣ прямоугольный трехгранный уголъ (черт. 12) съ вершиною въ точкѣ O. Пусть ребра этого угла будутъ OX, OY, OZ; такъ какъ мы предполагаемъ трехгранный уголъ прямоугольнымъ, то всѣ плоскіе углы между ребрами—прямые.



Черт. 11.

Если мы продолжимъ плоскости этого трехграннаго угла безконечно во всѣ стороны, то эти плоскости раздѣлятъ все пространство на восемь вертикальныхъ угловъ. Укажемъ на ребрахъ OX, OY и OZ нѣкоторыя, произвольно выбранныя, направленія. Чтобы проще оріентироваться въ этихъ направленіяхъ, поступимъ такъ: представимъ себѣ наблюдателя ногами въ точкѣ O, головой по направленію, выбранному на ребрѣ OZ: лицомъ въ сторону направленія, выбраннаго на ребрѣ OY, тогда направленіе на ребрѣ OX можетъ итти или направо отъ

наблюдателя, или направо. Слѣдовательно, возможны только двѣ различныя комбинаціи направленій на трехъ линіяхъ OX, OY и OZ: одна комбинація, когда направленіе третьей линіи идетъ налѣво отъ наблюдателя, другая—когда направо. Возьмемъ для опредѣленности рѣчи первую комбинацію (направленіе OX идетъ налѣво). Тогда изъ восьми вертикальныхъ угловъ для нашего наблюдателя четыре будутъ верхніе, четыре нижніе, четыре передніе, четыре задніе, четыре лѣвые, четыре правые.

Возьмемъ какую-нибудь точку M пространства и проведемъ черезъ нее три плоскости, параллельныя гранямъ заданнаго трехграннаго угла; получимъ прямоугольный параллелепипедъ, образованный тремя гранями заданнаго угла и тремя новыми, проведенными черезъ точку M, плоскостями. Вершина O и точка M будутъ противоположными точками (по діагонали) этого параллелепипеда. Параллелепипедъ этотъ оказывается вставленнымъ въ одинъ изъ вертикальныхъ угловъ, причемъ одна его вершина лежитъ въ вершинѣ O трехграннаго угла, три ребра OP, OQ и OR расположены на трехъ линіяхъ OX, OY и OZ. Будемъ опредѣлять положеніе вершины P параллелепипеда на прямой OX координатой x (по правилу § 3); подобнымъ образомъ будемъ опредѣлять координатой y положеніе точки Q на линіи OY и координатой z положеніе вершины R на линіи OZ. Нетрудно убѣдиться, что заданіемъ трехъ координатъ x, y, z опредѣляется вполнѣ положеніе точки въ пространствѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если задана точка M пространства, проводимъ черезъ точку M три плоскости, параллельныя плоскостямъ заданнаго трехграннаго угла; эти плоскости пересѣкутъ три линіи OX, OY, OZ въ трехъ опредѣленныхъ точкахъ P, Q, R, этимъ же точкамъ соотвѣтствуютъ опредѣленныя координаты x, y, z. Обратно, если заданы координаты x, y, z, то имъ соотвѣтствуютъ опредѣленныя точки P, Q и R на соотвѣтственныхъ ребрахъ трехграннаго угла; проводя черезъ эти точки P, Q, R плоскости, параллельныя гранямъ трехграннаго угла, получимъ въ точкѣ пересѣченія этихъ трехъ плоскостей вполнѣ опредѣленную точку M пространства, которая будетъ соотвѣтствовать заданнымъ координатамъ. Координата x положительна, если точка M лежитъ въ одномъ изъ лѣвыхъ угловъ, отрицательна—для правыхъ; координата y имѣетъ положительное значеніе въ переднихъ углахъ и отрицательное въ заднихъ; координата z положительна въ верхнихъ углахъ и отрицательна въ нижнихъ. Каждому вертикальному

углу будетъ соотвѣтствовать своя комбинація знаковъ; всѣхъ комбинацій можетъ быть восемь, столько же и всѣхъ вертикальныхъ угловъ. Основной трехгранный уголъ представляетъ такъ называемую *систему координатъ*. Вершина O есть *начало координатъ*. Линіи OX, OY и OZ—*оси координатъ*; плоскости граней трехграннаго угла называются *координатными плоскостями*.

Точку M съ координатами x, y, z будемъ обозначать знакомъ

$$M\ (x,\ y,\ z).$$

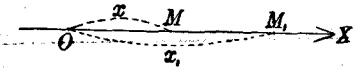
Началу координатъ будетъ соотвѣтствовать знакъ

$$(0,\ 0,\ 0).$$

§ 6. На основаніи всего сказаннаго можно догадаться, что если бы мы могли себѣ представить наглядно геометрію четырехъ измѣреній, то пришлось бы ввести четыре координаты x, y, z, u, и вообще говоря, число координатъ соотвѣтствуетъ числу измѣреній.

Разстояніе двухъ точекъ.

§ 7. Покажемъ, какъ вычислить разстояніе между точками $M(x)$ и $M_1(x_1)$ на прямой линіи (черт. 12), если извѣстны координаты этихъ точекъ x и x_1.



Черт. 12.

Очевидно, что это разстояніе будетъ

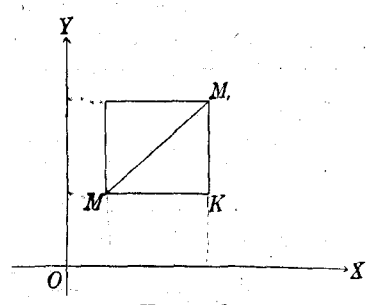
$$|x_1 - x|,$$

т. е. это разстояніе будетъ равняться абсолютной величинѣ разности координатъ. Эту абсолютную величину можно выразить знакомъ

$$+\sqrt{(x_1-x)^2}.$$

§ 8. Обращаемся теперь къ плоской геометріи. Пусть разсматриваются двѣ точки $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ на плоскости (черт. 13). Предполагаются заданными координаты ихъ

$$x, y\ ;\ x_1, y_1.$$



Черт. 13.

Разстояніе MM_1 этихъ точекъ есть не что иное, какъ діагональ прямоугольника, имѣющаго эти точки вершинами, стороны котораго параллельны осямъ координатъ, или, другими словами, разстояніе MM_1 между точками будетъ гипотенузой треугольника, катеты котораго суть MK и KM_1.

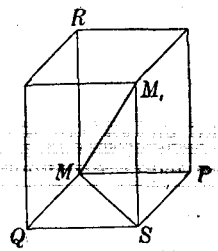
Но изъ чертежа очевидно, что эти катеты равны абсолютнымъ величинамъ соотвѣтствующихъ разностей координатъ, причемъ

$$MK = |x_1 - x|,$$
$$M_1K = |y_1 - y|.$$

Тогда по теоремѣ Пиѳагора получимъ для разстоянія двухъ точекъ формулу

$$+\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}.$$

§ 9. Въ трехмѣрномъ пространствѣ придется разсматривать уже прямоугольный параллелепипедъ, построенный на разстояніи двухъ точекъ M, M_1 (черт. 14), какъ на діагонали, и имѣющій плоскости, параллельныя координатнымъ плоскостямъ. Имѣемъ



Черт. 14.

$$MM_1^2 = MS^2 + SM^2;$$

кромѣ того

$$MS^2 = MP^2 + PS^2;$$

складывая два послѣднихъ равенства, получаемъ

$$MM_1^2 = MP^2 + PS^2 + SM_1^2.$$

Получается обобщенная теорема Пиѳагора, состоящая въ томъ, что квадратъ діагонали прямоугольнаго параллелепипеда равняется суммѣ квадратовъ трехъ его непараллельныхъ между собой реберъ. Если противоположныя вершины M и M_1, на которыхъ построенъ параллелепипедъ, имѣютъ координаты

$$M(x, y, z) \text{ и } M_1(x_1, y_1, z_1),$$

то очевидно, что ребра этого параллелепипеда будутъ равняться абсолютнымъ величинамъ разностей координатъ, такъ что для діагонали параллелепипеда, которая есть не что иное, какъ разстояніе между заданными точками M и M_1, получается формула

$$+\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}.$$

§ 10. Мы догадываемся, что въ четырехмѣрномъ пространствѣ должна существовать для разстоянія формула

$$+\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 + (u_1 - u)^2},$$

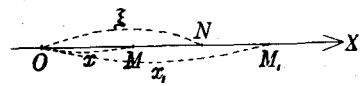
и что подобная же формула будетъ существовать для какого угодно числа измѣреній.

Середина отрѣзка.

§ 11. Возьмемъ сначала геометрію одного измѣренія. Пусть заданы двѣ точки $M(x)$ и $M_1(x_1)$. Найдемъ координату ξ середины N отрѣзка MM_1 (черт. 15). Имѣемъ

$$x_1 - \xi = \xi - x$$

$$2\xi = x + x_1.$$



Черт. 15.

Откуда

$$\xi = \frac{x + x_1}{2}.$$

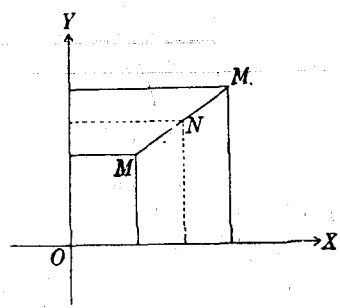
Итакъ, получаемъ середину

$$N\left(\frac{x + x_1}{2}\right),$$

т. е. координата середины отрѣзка равняется среднему ариѳметическому изъ координатъ концовъ.

§ 12. Перейдемъ теперь къ нахожденію середины отрѣзка на плоскости.

Опустимъ изъ концовъ M и M_1 отрѣзка MM_1 (черт. 16), а также изъ середины N отрѣзка перпендикуляры на обѣ оси координатъ. Тогда мы замѣчаемъ, что основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ середины, дѣлитъ пополамъ отрѣзокъ между основаніями перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ концовъ. Отсюда мы получаемъ, что если концы M и M_1 заданы координатами



Черт. 16.

$$M(x, y)\ ,\ M_1(x_1 y_1),$$

то для координатъ середины N получимъ среднія ариѳметическія, т. е.

$$N\left(\frac{x + x_1}{2}\ ,\ \frac{y + y_1}{2}\right).$$

§ 13. Очевидно, что будетъ существовать аналогичное предложеніе въ трехмѣрной геометріи, а именно, если концы отрѣзка въ трехмѣрномъ пространствѣ будутъ имѣть координаты

$$M(x, y, z) \text{ и } M_1(x_1, y_1, z_1),$$

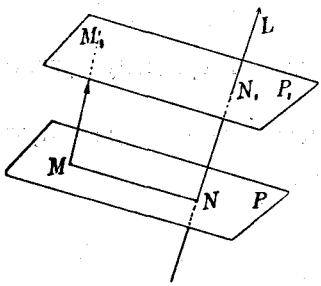
то середина N будетъ имѣть координаты

$$N\left(\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}, \frac{z+z_1}{2}\right).$$

Вообще говоря, получается для пространства съ какимъ угодно числомъ измѣреній предложеніе, что координаты середины отрѣзка будутъ средними ариѳметическими изъ соотвѣтственныхъ координатъ концовъ.

О проекціяхъ.

§ 14. Возьмемъ въ пространствѣ нѣкоторую прямую L и внѣ ея точку M (черт. 17). Проведемъ черезъ M плоскость, перпендикулярную къ прямой L; эта плоскость P пересѣчетъ прямую L въ точкѣ N. Будемъ называть точку N *прямоугольною проекціей* или просто *проекціей* точки M на прямой L. Прямую L будемъ называть *осью проекцій*.



Черт. 17.

Если мы соединимъ точку M съ проекціей N прямою MN, то эта прямая будетъ ничѣмъ инымъ, какъ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ точки M на ось L; мы ее будемъ называть *проектирующимъ перпендикуляромъ*.

§ 15. Возьмемъ въ пространствѣ другую точку M_1 (черт. 17) и будемъ разсматривать отрѣзокъ MM_1 прямой, соединяющей точки M и M_1. Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ отрѣзкамъ придавать нѣкоторое направленіе и понимать это направленіе, какъ направленіе движенія вдоль поотрѣзку отъ одного изъ его концовъ къ другому. Если на отрѣзкѣ MM_1 мы укажемъ направленіе отъ точки M къ точкѣ M_1, то будемъ называть точку M началомъ отрѣзка, а точку M_1 концомъ отрѣзка. Если будемъ проектировать конецъ M_1 отрѣзка MM_1 при помощи плоскости P_1 на ось проекцій L, то получимъ проекцію N_1 конца отрѣзка. Отрѣзокъ NN_1, образованный на оси L проекціями концовъ отрѣзка MM_1, мы будемъ называть проекціей заданнаго отрѣзка MM_1 на оси L. Если на заданномъ отрѣзкѣ направленіе уже указано, то мы будемъ на проекціи отрѣзка выбирать направленіе соотвѣтствующее, причемъ за начало проекціи будемъ считать проекцію начала отрѣзка.

Мы будемъ обозначать какъ проекціи, такъ и вообще отрѣзки буквами, обозначающими концы, причемъ на первое мѣсто будемъ ставить букву начала отрѣзка. Такъ, напримѣръ, можемъ написать

$$NN_1 = \text{пр. } MM_1.$$

§ 16. Будемъ сопоставлять проекціямъ отрѣзковъ на оси нѣкоторыя вещественныя числа, причемъ будемъ это сопоставленіе производить слѣдующимъ образомъ. Выбираемъ на оси проекцій произвольное направленіе, но разъ навсегда для даннаго вопроса, тогда проекціямъ, направленіе которыхъ совпадаетъ съ направленіемъ на оси, будемъ сопоставлять числа положительныя, а проекціямъ обратнаго направленія числа отрицательныя, за абсолютную же величину числа возьмемъ длину проекціи. Вообще говоря, нѣтъ надобности, чтобы нѣкоторый отрѣзокъ, расположенный на оси, былъ непремѣнно проекціей другого; все равно, если разсматривается нѣкоторая ось съ заданнымъ на ней направленіемъ, то всякому отрѣзку, лежащему на ней, можно будетъ сопоставить нѣкоторое число совершенно такимъ же образомъ, какъ это сказано для проекцій.

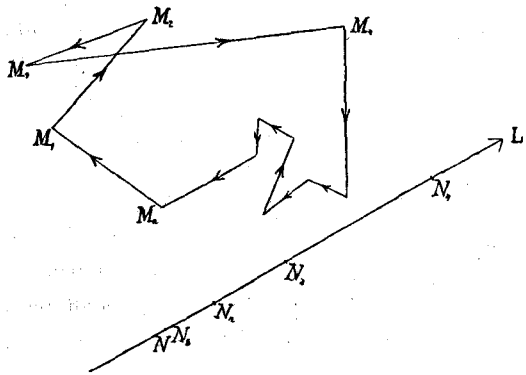
§ 17. Во всемъ дальнѣйшемъ подъ словомъ проекція отрѣзка мы будемъ разумѣть или отрѣзокъ на оси, опредѣленный по правиламъ § 15, или соотвѣтствующее этому отрѣзку число. По смыслу фразы всегда будетъ ясно, въ какомъ изъ этихъ двухъ значеній употреблено слово проекція. Такъ, напримѣръ, если говорится „сумма проекцій“, то очевидно, что идетъ рѣчь о числахъ, если же сказано „направленіе проекціи“, то дѣло идетъ объ отрѣзкѣ. Въ этомъ и состоитъ сущность аналитической геометріи, что мы употребляемъ выраженія, въ которыхъ совмѣщаются сразу два понятія, аналитическое и геометрическое.

§ 18. Разсмотримъ (черт. 18) n точекъ въ пространствѣ

$$M_1, M_2, \ldots M_n.$$

Предположимъ, что наши точки выбраны совершенно произвольно такъ, что могутъ не лежать въ одной плоскости. Будемъ соединять эти точки попарно прямыми, причемъ за начало каждаго слѣдующаго отрѣзка будемъ брать конецъ предыдущаго; послѣднюю точку M_n соединимъ прямою съ первою точкою M_1. Получаемъ такимъ образомъ сомкнутую ломанную линію—много-

угольникъ, который, вообще говоря, будетъ косой, т. е. стороны его не будутъ лежать въ одной плоскости. Если въ этой ломанной линіи, какъ было сказано, начало каждой слѣдующей стороны есть конецъ предыдущей, то направленія этихъ сторонъ идутъ въ одну сторону вдоль по периметру этой ломанной линіи и значитъ, слѣдуя по направленію сторонъ, мы обходимъ всѣ вершины многоугольника и возвращаемся въ первоначальную точку. Будемъ проектировать стороны многоугольника на нѣкоторую ось проекцій L. Пусть проекціи вершинъ $M_1, M_2 \ldots$ M_n будутъ точки $N_1, N_2 \ldots N_n$. Очевидно, что мы получимъ независимо отъ расположенія точекъ $N_1, N_2, \ldots N_n$ равенство



Черт. 18.

$$(1) \qquad N_1 N_2 + N_2 N_3 + \ldots + N_{n-1} N_n + N_n N_1 = 0,$$

ибо, двигаясь отъ точки N_1 ко всѣмъ остальнымъ и возвращаясь въ первоначальную точку N_1, мы будемъ перемѣщаться столько же налѣво, сколько и направо, такъ что общее перемѣщеніе въ концѣ концовъ окажется равнымъ нулю.

Но мы имѣемъ

$$\begin{aligned} N_1 N_2 &= \text{пр. } M_1 M_2 \\ N_2 N_3 &= \text{пр. } M_2 M_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ N_n N_1 &= \text{пр. } M_n M_1. \end{aligned}$$

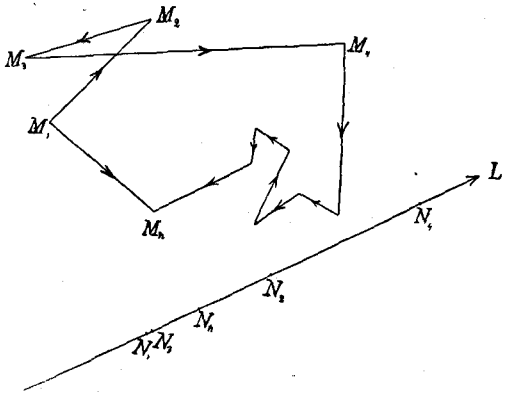
Отсюда получаемъ

$$(2) \quad \text{пр. } M_1 M_2 + \text{пр. } M_2 M_3 + \ldots + \text{пр. } M_{n-1} M_n + \text{пр. } M_n M_1 = 0,$$

что даетъ слѣдующую теорему.

Теорема. *Сумма проекцій сторонъ сомкнутаго многоугольника на любую ось въ пространствѣ равна нулю.*

§ 19. Измѣнимъ направленіе одной изъ сторонъ сомкнутаго многоугольника, напримѣръ $M_n M_1$ (черт. 19). Тогда изъ точки M_1 въ точку M_n можно будетъ попасть или слѣдуя по новому направленію стороны $M_n M_1$, или же по первоначальному направленію всѣхъ остальныхъ сторонъ вдоль по контору. Мы будемъ говорить, что сторона $M_1 M_n$ съ ея новымъ направленіемъ есть *замыкающая* сторона несомкнутой ломанной линіи



Черт. 19.

$$M_1 M_2 M_3 \ . \ . \ . \ . \ M_{n-1} M_n.$$

Равенство (2) предыдущаго §-а можно будетъ переписать такъ пр. $M_1 M_2 +$ пр. $M_2 M_3 + \ . \ . \ . +$ пр. $M_{n-1} M_n -$ пр. $M_1 M_n = 0$, слѣдовательно, мы имѣемъ

пр. $M_1 M_n =$ пр. $M_1 M_2 +$ пр. $M_2 M_3 + \ . \ . \ . +$ пр. $M_{n-1} M_n$,

откуда получаемъ теорему.

Теорема. *Проекція на любую ось замыкающей стороны многоугольника равна суммѣ проекцій сторонъ замыкаемой ломанной линіи.*

§ 20. Теорема. *Проекція отрѣзка на оси равняется произведенію длины отрѣзка на косинусъ угла между направленіемъ отрѣзка и направленіемъ оси проекцій.*

Проведемъ черезъ начало M отрѣзка MM_1 (черт. 20) прямую MK параллельно оси проекцій до встрѣчи въ точкѣ K съ плоскостью P_1, проектирующей конецъ отрѣзка MM_1; тогда изъ треугольника MM_1K будемъ имѣть

(1) $$\text{пр. } MM_1 = NN_1$$

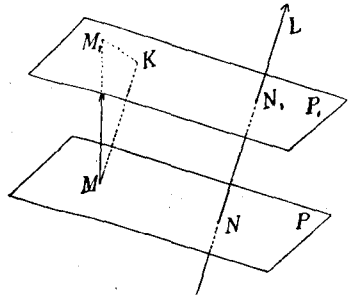
(2) $$MK = MM_1 \cos (M_1MK)$$

Обозначимъ теперь черезъ ϑ уголъ между направленіемъ нашего отрѣзка и направленіемъ оси, тогда имѣемъ

$$\angle M_1MK = \vartheta;$$

кромѣ того имѣемъ равенство

(3) $$MK = NN_1,$$



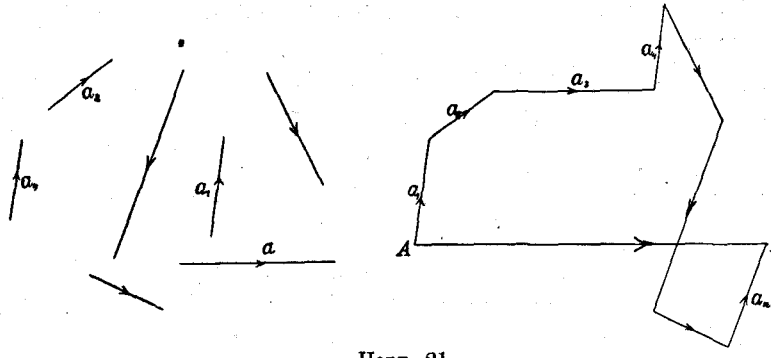
Черт. 20.

какъ отрѣзки параллельныхъ между двумя параллельными плоскостями. Сопоставляя формулы (1), (2) и (3), можемъ написать

$$\text{пр. } MM_1 = MM_1 \cos\vartheta,$$

что и требовалось доказать.

§ 21. Введемъ понятіе о такъ называемомъ геометрическомъ сложеніи отрѣзковъ. Два отрѣзка будемъ называть *геометрически равными*, если длины ихъ равны и они параллельны между собой и одинаково направлены. Замѣну одного изъ двухъ геометрически равныхъ отрѣзковъ другимъ мы будемъ называть параллельнымъ перемѣщеніемъ отрѣзка. Пусть задано въ пространствѣ n отрѣзковъ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ (черт. 21).



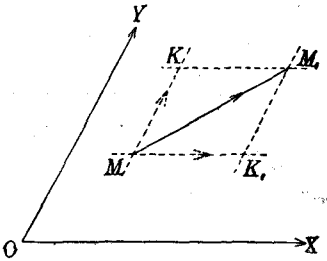
Черт. 21.

Подъ *геометрическимъ сложеніемъ* этихъ отрѣзковъ будемъ разумѣть такую операцію: перемѣщаемъ отрѣзокъ a_1 такимъ образомъ, чтобы его начало попало въ нѣкоторую опредѣленную точку A пространства; второй отрѣзокъ a_2 перемѣщаемъ параллельно такимъ образомъ, чтобы его начало попало въ конецъ перемѣщеннаго перваго отрѣзка; далѣе перемѣщаемъ третій отрѣзокъ a_3, заставляя его начало попасть въ конецъ предыдущаго перемѣщеннаго отрѣзка; продолжая такимъ образомъ дальше, полу-

чимъ ломанную линію, которая будетъ представлять результатъ такъ называемаго геометрическаго сложенія отрѣзковъ. Замыкающую сторону AB мы будемъ называть *геометрическою суммою* заданныхъ отрѣзковъ. Не трудно убѣдиться, что геометрическая сумма не зависитъ отъ порядка, въ которомъ произведено сложеніе отрѣзковъ.

§ 22. Разсмотримъ теперь обратную задачу, а именно задачу нахожденія слагаемыхъ по заданной геометрической суммѣ и по заданнымъ направленіямъ этихъ слагаемыхъ. Начнемъ со случая двухъ слагаемыхъ. Пусть задана геометрическая сумма MM_1 (черт. 22); направленія двухъ слагаемыхъ укажемъ двумя осями OX и OY, выходящими изъ нѣкоторой точки O пространства. Итакъ формулируемъ задачу.

Найдемъ два такихъ отрѣзка, чтобы ихъ геометрическая сумма равнялась заданному отрѣзку MM_1, причемъ одинъ изъ отрѣзковъ долженъ быть параллеленъ съ осью OX, а другой отрѣзокъ съ осью OY (это и значитъ, что направленія искомыхъ слагаемыхъ указаны осями OX и OY). Не трудно убѣдиться, что задача возможна лишь въ томъ случаѣ, когда заданная геометрическая сумма MM_1 параллельна плоскости, проходящей черезъ обѣ оси, т. е. плоскости XOY. Въ самомъ дѣлѣ,



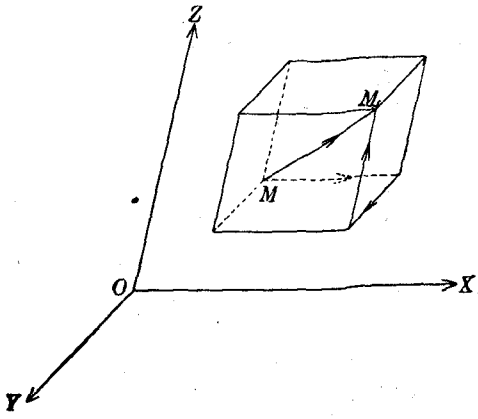
Черт. 22.

допустимъ, что задача возможна, и что мы нашли слагаемыя MK и MK_1. Плоскость треугольника MKM_1 должна быть параллельна плоскости XOY, ибо MK_1 параллельно OX и KM параллельно OY, слѣдовательно, плоскость треугольника MM_1K параллельна плоскости осей, и слѣдовательно прямая MM_1 параллельна плоскости, образуемой осями; мы замѣчаемъ, что задача нахожденія двухъ слагаемыхъ даннаго направленія по заданной суммѣ возможна только въ плоской геометріи, потому что, если отрѣзокъ MM_1 параллеленъ плоскости XOY, то его безъ измѣненія общности задачи можно предположить перенесеннымъ параллельно на плоскость XOY.

Итакъ, будемъ разсматривать задачу на плоскости; пусть заданы двѣ оси OX и OY и въ той же плоскости нѣкоторый отрѣзокъ MM_1; для полученія искомыхъ слагаемыхъ, параллель-

ныхъ осямъ, проведемъ черезъ оба конца M и M_1 прямыя, параллельныя осямъ; получимъ параллелограммъ MKM_1K_1, стороны котораго и дадутъ два искомыхъ слагаемыхъ, параллельныхъ осямъ. Будемъ называть слагаемыя MK и KM_1 *составляющими отрѣзка* MM_1 *на осяхъ*, причемъ MK будетъ составляющая отрѣзка MM_1 на оси OY, а KM_1 на оси OX.

§ 23. Разсмотримъ теперь случай трехъ слагаемыхъ. Возьмемъ въ пространствѣ три оси OX, OY, OZ, образующія нѣкоторый трехгранный уголъ съ вершиною въ точкѣ O (черт. 23)*).



Черт. 23.

Если въ пространствѣ заданъ отрѣзокъ MM_1, то всегда можно однимъ способомъ указать три отрѣзка, имѣющіе направленія заданныхъ осей и дающіе въ геометрической суммѣ данный отрѣзокъ MM_1. Проводимъ черезъ оба конца M и M_1 отрѣзка MM_1 плоскости, параллельныя плоскостямъ трехграннаго угла, образованнаго осями. Эти шесть плоскостей образуютъ параллелепипедъ, діагональ котораго есть отрѣзокъ MM_1; ребра этого параллелепипеда параллельны осямъ OX, OY, OZ. Три ребра различнаго между собою направленія и будутъ три слагаемыя, дающія въ суммѣ діагональ MM_1 и параллельныя осямъ. Эти слагаемыя называютъ составляющими отрѣзка MM_1 на трехъ осяхъ OX, OY, OZ.

§ 24. Не трудно видѣть, что если осей въ пространствѣ будетъ больше трехъ, то задача нахожденія составляющихъ отрѣзка на этихъ осяхъ будетъ неопредѣленною.

Предположимъ, что заданы въ пространствѣ четыре оси OX, OY, OZ и OU (черт. 24); требуется найти четыре составляющія x, y, z, u отрѣзка MM_1, параллельныя заданнымъ осямъ. Возьмемъ въ

*) Тѣмъ, что сказано, что оси образуютъ трехгранный уголъ, исключается предположеніе, что всѣ оси лежатъ въ одной плоскости.

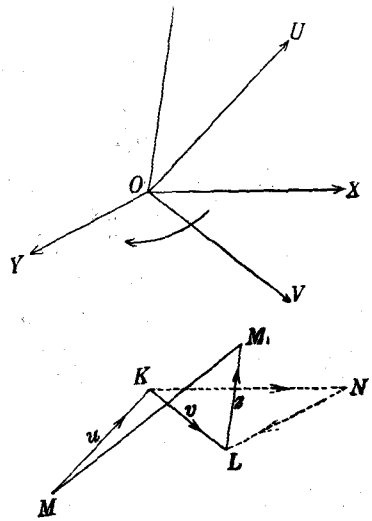
плоскости двухъ осей OX и OY произвольную ось OV; мы знаемъ, что если поставимъ себѣ задачею найти три составляющія z, u, v отрѣзка MM_1 параллельныя осямъ OZ, OU, OV, то задача будетъ имѣть одно опредѣленное рѣшеніе (если только не будемъ предполагать OV лежащей въ плоскости двухъ другихъ осей OZ и OU). Итакъ, пусть ломанная линія $MKLM_1$ представляетъ изъ себя три составляющихъ:

$$MK = u;\ KL = v;\ LM_1 = z,$$

параллельныхъ осямъ OU, OV, OZ. Такъ какъ ось OV лежитъ въ плоскости двухъ осей OX и OY, то отрѣзокъ $KL = v$, параллельный оси OV, параллеленъ плоскости XOY, а значитъ можно найти двѣ составляющія этого отрѣзка на осяхъ OX и OY; проводя прямыя KN и LN параллельно осямъ OX и OY, получаемъ окончательно четыре составляющія:

$$MK = u,\ KN = x,$$
$$NL = y,\ LM_1 = z,$$

параллельныя заданнымъ четыремъ осямъ.



Черт. 24.

Задача неопредѣленна, потому что выборъ вспомогательной оси OV совершенно произволенъ и, слѣдовательно, поворачивая ее въ плоскости XOY около точки O, будемъ получать безчисленное множество ломанныхъ линій

$$MKNLM_1.$$

§ 25. Въ пространствѣ четырехъ измѣреній задача дѣлается опредѣленной при четырехъ осяхъ, при большемъ же числѣ осей она дѣлается также неопредѣленною.

§ 26. Укажемъ теперь на весьма важное обобщеніе изложенныхъ соображеній. Покажемъ, что теорема:

Проекція замыкающей стороны на любую ось равна суммѣ проекцій замыкаемыхъ, сохраняется при косоугольномъ проектиро-

ваніи, т. е., когда плоскости, проектирующія вершины многоугольника на ось проекцій, и не перпендикулярны къ этой оси.

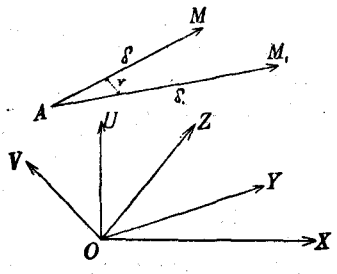
Понятіе о косоугольномъ проектированіи можно установить такъ. Пусть задана ось проекцій L и нѣкоторая плоскость Q, образующая съ осью L уголъ, отличный отъ O или 90^0. Тогда, если мы будемъ проектировать концы отрѣзковъ плоскостями, параллельными плоскости Q, то на оси проекцій будемъ получать такъ называемыя *косоугольныя проекціи отрѣзка.*

Такъ какъ при доказательствѣ теоремы о проекціи замыкающей стороны направленіе проектирующихъ плоскостей не имѣло никакого значенія, то очевидно, что эта теорема останется справедливой и для косоугольнаго проектированія.

§ 27. Введемъ понятіе о *геометрическомъ произведеніи* двухъ отрѣзковъ. Будемъ называть *геометрическимъ произведеніемъ* двухъ отрѣзковъ AM и AM_1 произведеніе длинъ этихъ отрѣзковъ на косинусъ угла, заключеннаго между ними. Обозначая черезъ δ длину отрѣзка AM, а черезъ δ_1 длину отрѣзка AM_1, и черезъ ν уголъ между отрѣзками, получимъ для геометрическаго произведенія двухъ отрѣзковъ слѣдующее выраженіе:

$$\delta\delta_1 \cos \nu.$$

Возьмемъ (черт. 25) въ пространствѣ нѣсколько осей OX, OY, OZ, OU, ... , выходящихъ изъ одной и той же точки O. Мы будемъ предполагать число осей не меньше трехъ. На основаніи изложеннаго выше мы замѣчаемъ, что оба отрѣзка δ и δ_1 будутъ имѣть нѣкоторыя составляющія на осяхъ. Въ случаѣ трехъ осей составляющія будутъ представлять вполнѣ опредѣленные отрѣзки, въ случаѣ же числа осей, большаго трехъ, задача остается возможной, хотя и дѣлается неопредѣленной.



Черт. 25.

Итакъ, пусть числа

(1) $$x, y, z, u, \ldots\ldots$$

суть составляющія отрѣзка δ на заданныхъ осяхъ, а числа

(2) $$x_1, y_1, z_1, u_1, \ldots\ldots$$

составляющія второго отрѣзка δ_1 на осяхъ.

Кромѣ составляющихъ введемъ въ разсмотрѣніе прямоугольныя проекціи заданныхъ отрѣзковъ δ и δ_1 на заданныхъ осяхъ. Пусть эти проекціи для перваго отрѣзка будутъ

$$\xi, \eta, \zeta, \upsilon, \ldots\ldots,$$

а для другого отрѣзка

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \upsilon_1, \ldots\ldots$$

Разсмотримъ отрѣзокъ δ, какъ замыкающую сторону ломаной линіи, образованной составляющими (1). Тогда проектируя на любую ось въ пространствѣ, будемъ имѣть

$$\text{пр. } \delta = \text{пр. } x + \text{пр. } y + \text{пр. } z + \text{пр. } u + \ldots\ldots$$

Возьмемъ за ось проекцій направленіе второго отрѣзка δ_1, тогда, примѣняя теорему § 20, получимъ

$$\delta \cos \nu = x \cos (OX, \delta_1) + y \cos (OY, \delta_1) + \\ + z \cos (OZ, \delta_1) + u \cos (OU, \delta_1) + \ldots\ldots$$

Умножая обѣ части послѣдняго равенства на δ_1 и замѣчая, что

$$\delta_1 \cos (OX, \delta_1) = \xi_1, \ \delta_1 \cos (OY, \delta_1) = \eta_1, \ \delta_1, \cos (OZ, \delta_1) = \zeta_1, \\ \delta_1 \cos (OU, \delta_1) = \upsilon_1, \ldots\ldots,$$

получимъ

$$\delta\delta_1 \cos \nu = x\, \xi_1 + y\, \eta_1 + z\, \zeta_1 + u\, \upsilon_1 + \ldots\ldots$$

Очевидно, что, помѣнявъ ролями отрѣзки, мы получимъ еще такую формулу

$$\delta\delta_1 \cos \nu = x_1\, \xi + y_1\, \eta + z_1\, \zeta + u_1\, \upsilon + \ldots\ldots$$

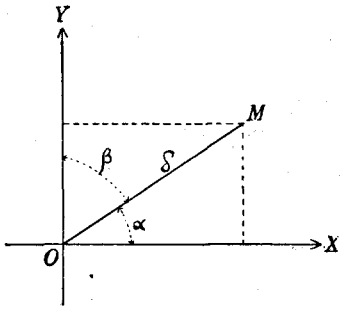
и получается теорема:

Теорема. *Геометрическое произведеніе двухъ отрѣзковъ равняется суммѣ произведеній, составляющихъ одного отрѣзка на заданныхъ осяхъ на соотвѣтствующія прямоугольныя проекціи другого отрѣзка на тѣхъ же осяхъ.*

Уголъ между двумя отрѣзками.

§ 28. Весьма важно бываетъ для рѣшенія задачъ разсмотрѣть пріемы вычисленія угловъ между отрѣзками. Вычисленія эти основываются на очень небольшомъ числѣ простыхъ принциповъ. Будемъ всякій отрѣзокъ задавать углами, которыя онъ составляетъ съ осями координатъ. Въ одномѣрной геометріи нѣтъ необходимости въ разсмотрѣніи угловъ. Разсмотрѣніе угловъ можетъ начаться только съ двухмѣрной геометріи.

Начнемъ съ плоскости. Мы можемъ предполагать, не нарушая общности задачи, что отрѣзокъ имѣетъ начало въ началѣ координатъ O. Обозначимъ (черт. 26) черезъ α и β углы, которые онъ образуетъ съ осями координатъ. Тогда, если мы назовемъ черезъ δ длину отрѣзка, а черезъ x, y координаты его конца M, то эти координаты будутъ, очевидно, проекціями этого отрѣзка, такъ что будетъ



Черт. 26.

(1) $$x = \delta \cos \alpha, \quad y = \delta \cos \beta.$$

По формулѣ для разстоянія точки M отъ начала, выведенной въ § 8, мы получаемъ

$$\delta = +\sqrt{(x-o)^2 + (y-o)^2}$$

или иначе

(2) $$\delta^2 = x^2 + y^2.$$

Подставляя въ равенство (2) выраженія (1), получимъ по сокращеніи на δ^2

(3) $$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta.$$

Это равенство (3) даетъ соотношеніе между косинусами угловъ, которые образуетъ съ осями координатъ нашъ отрѣзокъ. Это соотношеніе не представляетъ, конечно, ничего новаго, ибо уголъ β дополняетъ уголъ α до 90^0, значитъ

$$\cos \beta = \sin \alpha,$$

и получается основная теорема тригонометріи, дающая связь синуса съ косинусомъ.

§ 29. Продѣлаемъ тѣ же разсужденія въ пространствѣ. Пусть α, β, γ будутъ углы, образованные съ осями координатъ нѣкоторымъ отрѣзкомъ OM, имѣющимъ начало въ началѣ координатъ O. Обозначимъ черезъ δ длину отрѣзка, а черезъ x, y, z координаты конца его M. Тогда будемъ имѣть

$$x = \delta \cos \alpha, \quad y = \delta \cos \beta, \quad z = \delta \cos \gamma.$$

Кромѣ того

$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Отсюда получается слѣдующее весьма важное соотношеніе:

(1) $$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

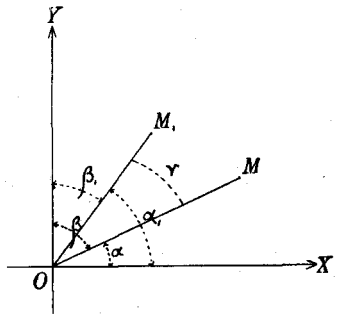
между тремя косинусами угловъ отрѣзка съ осями.

§ 30. Можно догадываться, что въ четырехмѣрномъ пространствѣ должно существовать соотношеніе аналогичное

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\zeta.$$

§ 31. Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію угла между двумя отрѣзками на плоскости. Для простоты предположимъ, что начало отрѣзковъ совпадаетъ съ началомъ координатъ. Пусть ν будетъ уголъ между отрѣзками OM и OM_1 (черт. 27). Пусть α и β суть углы съ осями координатъ, образуемые отрѣзкомъ OM, и пусть α_1 и β_1 соотвѣтствующіе углы отрѣзка OM_1. Тогда мы имѣемъ, очевидно,

$$\cos\nu = \cos(\alpha_1 - \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \sin\alpha\sin\alpha_1.$$



Черт. 27.

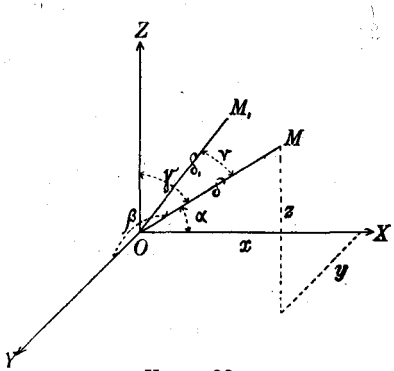
Но такъ какъ углы β и β_1 дополняютъ до прямого углы α и α_1, то можно будетъ написать

$$\sin\alpha = \cos\beta \text{ и } \sin\alpha_1 = \cos\beta_1,$$

и мы получаемъ формулу

(1) $$\cos\nu = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1.$$

§ 32. Формула (1) предыдущаго §-а обобщается на случай трехмѣрнаго пространства. Пусть ν будетъ уголъ между двумя отрѣзками (черт. 28) OM и OM_1. Пусть α, β, γ будутъ углы съ осями координатъ отрѣзка OM, а α_1, β_1, γ_1 соотвѣтствующіе углы для другого отрѣзка. Пусть x, y, z будутъ координаты конца отрѣзка OM, длину котораго обозначимъ черезъ δ. Проектируя ломанную линію, образованную отрѣзкомъ OM и тремя координатами конца M на направленіе другого отрѣзка OM_1, получимъ по теоремѣ § 19



Черт. 28.

$$\delta \cos \nu = x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1.$$

Но

$$x = \delta \cos \alpha, \quad y = \delta \cos \beta, \quad z = \delta \cos \gamma.$$

Получаемъ окончательно

(1) $$\cos \nu = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1.$$

§ 33. Не трудно догадаться, что въ четырехмѣрномъ пространствѣ должна существовать формула

$$\cos \nu = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1 + \cos \zeta \cos \zeta_1.$$

Уравненіе первой степени между координатами.

§ 34. Разсмотримъ неопредѣленное уравненіе первой степени

(1) $$Ax + By + C = 0,$$

гдѣ x и y будемъ считать декартовыми координатами нѣкоторой точки. Уравненіе можно считать заданнымъ, если заданы три коэффиціента A, B, C.

Изъ элементарной алгебры извѣстно, что уравненіе будетъ неопредѣленнымъ, если число неизвѣстныхъ будетъ больше одного. Въ данномъ случаѣ это уравненіе дѣйствительно неопредѣленное, такъ какъ одну изъ координатъ x можно задать произвольно, а другую координату y выражать черезъ заданное значеніе x. Существуетъ безчисленное множество паръ рѣшеній этого уравненія

$$x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots$$

Интересно, что точки, соотвѣтствующія этимъ парамъ рѣшеній, лежатъ на одной и той же прямой, такъ что получается слѣдующая весьма важная основная теорема, состоящая въ томъ, что *прямой линіи на плоскости сопостовляется аналитическое понятіе неопредѣленнаго уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными вида* (1).

Для доказательства этой теоремы поступимъ такъ. Возьмемъ произвольную прямую L (черт. 29) на плоскости; тогда ея положеніе относительно координатныхъ осей можно задать такимъ образомъ: опустимъ изъ начала координатъ на прямую L перпендикулярѣ ON и назовемъ длину перпендикуляра черезъ p. Тогда положеніе прямой L можетъ быть задано длиною p этого перпендикуляра и его направленіемъ, которое мы будемъ считать идущимъ отъ начала координатъ къ прямой. Обозначимъ черезъ α и β углы, образованные этимъ направленіемъ съ осями координатъ. Возьмемъ

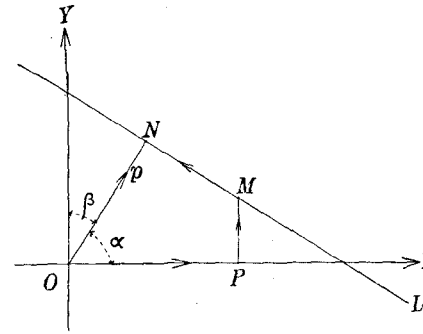
на прямой какую нибудь точку M, не указывая, которую именно, и обозначимъ ея координаты черезъ x, y. Тогда перпендикуляръ ON будетъ замыкающей стороной ломанной линіи $OPMN$, образованной координатами x, y и отрѣзкомъ MN. Проектируя на направленіе самого перпендикуляра, мы получимъ

$$p = x \cos \alpha + y \cos \beta + MN \cos (MN, p) = 0,$$

но

$$\cos (MN, p) = 0,$$

слѣдовательно, получимъ уравненіе



Черт. 29.

$$\cos \alpha . x + \cos \beta . y - p = 0,$$

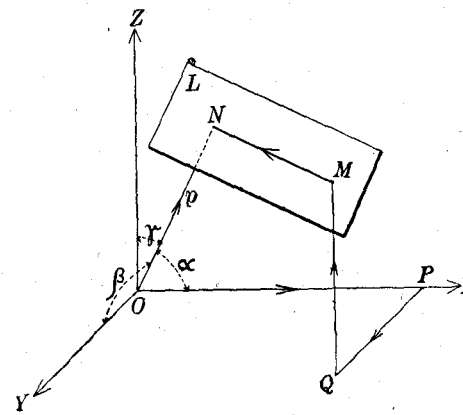
т. е. какъ разъ уравненіе вида (1).

§ 35. Покажемъ теперь, что аналогичныя соображенія существуютъ въ трехмѣрномъ пространствѣ, а именно, что неопредѣленное уравненіе первой степени вида

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

гдѣ x, y, z декартовы координаты, опредѣляетъ въ пространствѣ нѣкоторую плоскость.

Въ самомъ дѣлѣ, положеніе относительно всякой координатной системы плоскости L (черт. 30) въ пространствѣ можно указать такъ. Опустимъ изъ начала O координатъ перпендикуляръ ON на плоскость; обозначимъ длину этого перпендикуляра черезъ p и возьмемъ на немъ направленіе, идущее отъ начала координатъ къ плоскости. Пусть α, β, γ углы этого направленія съ осями координатъ. Возьмемъ на плоскости какую нибудь точку M, не указывая, которую



Черт. 30.

именно, и обозначимъ ея координаты черезъ x, y, z. Тогда перпендикуляръ ON будетъ замыкающей стороной ломанной линіи $OPQMN$, образованной тремя координатами x, y, z и отрѣзкомъ MN. Будемъ проектировать на направленіе перпендикуляра. Тогда получимъ

$$p = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + MN\cos(MN,p),$$

но

$$\cos(MN,p) = 0,$$

слѣдовательно

$$\cos\alpha . x + \cos\beta . y + \cos\gamma . z - p = 0,$$

т. е. какъ разъ уравненіе вида (1).

§ 36. Мы догадываемся уже, что въ четырехмѣрномъ пространствѣ уравненіе первой степени между четырьмя координатами

$$Ax + By + Cz + Du + E = 0$$

будетъ опредѣлять нѣкоторое плоское трехмѣрное пространство. Такія же соображенія будутъ относиться къ пространствамъ съ произвольнымъ числомъ измѣреній.

§ 37. Такъ какъ уравненіе первой степени на плоскости опредѣляетъ прямую линію, то *линейными* называютъ всѣ уравненія первой степени относительно неизвѣстныхъ, причемъ число этихъ неизвѣстныхъ можетъ быть произвольнымъ.

§ 38. Перейдемъ теперь къ рѣшенію нѣкоторыхъ основныхъ задачъ относительно прямыхъ линій на плоскости.

Задача. *Найти точку встрѣчи двухъ прямыхъ.*

Разсмотримъ эту задачу на численномъ примѣрѣ. Пусть заданы двѣ прямыя

$$2x - 3y + 7 = 0$$

(1)

$$x - 2y + 5 = 0.$$

Такъ какъ точка встрѣчи этихъ прямыхъ лежитъ на обѣихъ прямыхъ, то ея координаты должны удовлетворять обоимъ написаннымъ уравненіямъ, другими словами для того, чтобы найти точку встрѣчи двухъ прямыхъ, указанныхъ уравненіями (1), надо рѣшить эту систему (1) относительно двухъ неизвѣстныхъ x и y. Въ самомъ дѣлѣ, произведя рѣшеніе, получаемъ

$$x = 1\,;\, y = 3.$$

§ 39. Оси координатъ, какъ прямыя линіи, должны имѣть свои собственныя уравненія. Эти уравненія, конечно, являются самыми простыми.

Для оси x-овъ получаемъ

$$y = 0,$$

а для оси y-овъ

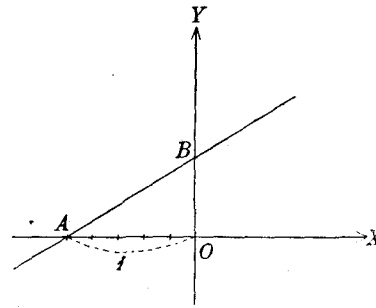
$$x = 0.$$

§ 40. Для того, чтобы построить прямую, заданную какимъ нибудь уравненіемъ, напримѣръ

$$3x - 5y + 3 = 0,$$

достаточно найти ея точки встрѣчи съ осями координатъ. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы найти ея точку встрѣчи съ осью x-овъ, надо будетъ рѣшить два уравненія

$$3x - 5y + 3 = 0,$$
$$y = 0;$$



Черт. 31.

получаемъ точку A (черт. 31)

$$x = -1, \quad y = 0$$

Для нахожденія точки встрѣчи съ осью y-овъ рѣшаемъ систему

$$3x - 5y + 3 = 0,$$
$$x = 0;$$

получаемъ точку B

$$x = 0, \; y = \frac{3}{5}.$$

Точки A и B опредѣляютъ искомую прямую.

§ 41. Задача. *Найти уголъ между двумя прямыми*

(1)
$$Ax + By + C = 0,$$
$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0.$$

Если намъ удастся переписать уравненія (1) въ такомъ видѣ:

(2)
$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0,$$
$$x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 - p_1 = 0,$$

тогда уголъ ν между двумя прямыми опредѣляется очень просто. Онъ равенъ углу между перпендикулярами къ этимъ прямымъ, а слѣдовательно, на основаніи формулы (1) § 32, мы получимъ

(3) $$\cos \nu = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1.$$

Пусть R будетъ тотъ множитель, послѣ умноженія на который уравненіе

$$Ax + By + C = 0$$

обращается въ

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0.$$

Тогда мы имѣемъ, очевидно,

(4) $$R A = \cos \alpha; \; R B = \cos \beta; \; R C = -p.$$

Но мы видѣли уже, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1,$$

значитъ получаемъ

$$R^2 A^2 + R^2 B^2 = 1,$$

откуда

(5) $$R = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Подставляя полученное выраженіе для R въ формулу (4), получимъ

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \; \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \; p = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Очевидно, что аналогичныя формулы получатся для другой изъ заданныхъ прямыхъ, т. е. мы получимъ

$$\cos \alpha_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}; \; \cos \beta_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}; \; p_1 = \frac{-C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Отсюда по формулѣ (3) получимъ выраженіе для косинуса угла между прямыми

(6) $$\cos \nu = \frac{AA_1 + BB_1}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Вычисляя по косинусу синусъ, получимъ

(7) $$\sin \nu = \frac{AB_1 - BA_1}{\sqrt{A^2 + B_1}\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Если прямыя параллельны, то должно быть

$$\sin \nu = 0,$$

т. е. получаемъ

$$AB_1 - BA_1 = 0$$

или

(8) $$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B},$$

т. е. получается пропорціональность угловыхъ коэффиціентовъ. Коэффиціенты A и B при неизвѣстныхъ носятъ названія *угловыхъ*, потому что $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ выражаются только черезъ эти коэффиціенты.

Прямыя будутъ перпендикулярны, когда

$$\cos\nu = 0,$$

и получается условіе перпендикулярности въ такомъ видѣ

(9) $$AA_1 + BB_1 = 0.$$

§ 42. Мы будемъ называть во всемъ дальнѣйшемъ видъ уравненія

(1) $$Ax + By + C = 0$$

общимъ видомъ уравненія прямой, видъ

(2) $$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

нормальнымъ видомъ уравненія прямой.

Если мы рѣшимъ общее уравненіе прямой относительно одной изъ координатъ, напримѣръ y, то получимъ

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Это рѣшеніе можно получить только въ томъ случаѣ, если коэффиціентъ B не равенъ нулю. Обозначая

$$-\frac{A}{B} = m, \; -\frac{C}{B} = n,$$

получимъ уравненіе прямой въ такомъ видѣ

(3) $$y = mx + n.$$

Не трудно найти геометрическое значеніе коэффиціентовъ m и n. Если мы положимъ

$$x = 0,$$

то получимъ

$$y = n,$$

значитъ n есть ордината той точки, въ которой прямая пересѣкаетъ ось y-овъ. Что касается коэффиціента m, то по формулѣ предыдущаго §-а можно написать

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}{\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}} = -\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} =$$

$$= -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot g\,\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

Но очевидно, что, если α есть уголъ съ осью x-овъ перпендикуляра, опущеннаго на заданную прямую (3), то $\frac{\pi}{2}+\alpha$ будетъ уголъ съ осью x-овъ самой прямой, и мы получаемъ, что угловой коэффиціентъ m есть не что иное, какъ тангенсъ угла, образованнаго съ осью x-овъ прямою (3).

Пусть разсматриваются двѣ прямыя

$$(4)\qquad \begin{aligned} y &= mx+n, \\ y &= m_1x+n_1; \end{aligned}$$

напишемъ условія ихъ параллельности и перпендикулярности.

Въ этомъ случаѣ можно употребить формулы (8) и (9) предыдущаго §-а, причемъ положить

$$A = m,\ B = -1;$$
$$A_1 = m_1,\ B_1 = -1;$$

мы получаемъ для условія параллельности равенство

$$m = m_1$$

угловыхъ коэффиціентовъ. Условіе же перпендикулярности напишется такъ

$$1 + mm_1 = 0.$$

§ 43. Задача. *Написать уравненіе прямой, проходящей черезъ точку* (x_0, y_0).

Очевидно, что уравненіе такой прямой можно написать въ такомъ видѣ

$$(1)\qquad y - y_0 = m(x - x_0),$$

гдѣ угловой коэффиціентъ m совершенно произволенъ. Въ самомъ дѣлѣ, необходимо убѣдиться, что уравненіе (1) опредѣляетъ во первыхъ прямую, а во вторыхъ какъ разъ такую прямую, которая проходитъ черезъ заданную точку. Что уравненіе (1) опредѣляетъ прямую, явствуетъ изъ того соображенія, что x и y, пере-

мѣнныя координаты, входятъ въ это уравненіе въ первой степени. То обстоятельство же, что прямая (1) проходитъ черезъ заданную точку, слѣдуетъ изъ того, что если мы подставимъ вмѣсто перемѣнныхъ x и y координаты заданной точки, то получимъ тождество

$$y_0 - y_0 = m(x_0 - x_0).$$

Если мы будемъ мѣнять угловой коэффиціентъ m въ уравненіи (1), то прямая (1) будетъ вращаться около заданной точки. Получится такъ называемый *пучекъ прямыхъ линій* съ вершиной въ заданной точкѣ. Подберемъ коэффиціентъ m такимъ образомъ, чтобы прямая (1) проходила также черезъ другую точку плоскости (x_1, y_1). Предположимъ, что задача рѣшена, и что мы подобрали коэффиціентъ m дѣйствительно такъ, какъ нужно. Провѣримъ справедливость рѣшенія, т. е. подставимъ координаты x_1, y_1 второй точки въ уравненіе (1).

Получимъ

$$y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0).$$

Если коэффиціентъ m подобранъ правильно, то это уравненіе должно быть тождествомъ и, значитъ, должно быть

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Подставляя въ уравненіе (1) полученное выраженіе для m, придемъ къ уравненію

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \tag{2}$$

прямой, проходящей черезъ двѣ заданныя точки.

Такъ напримѣръ, если прямая должна проходить черезъ двѣ точки (2, 3) и (—1, 4), то получаемъ

$$\frac{x - 2}{-1 - 2} = \frac{y - 3}{4 - 3},$$

откуда окончательно

$$x + 3y - 11 = 0.$$

§ 44. Продѣлаемъ аналогичныя задачи въ трехмѣрномъ пространствѣ относительно плоскостей и прямыхъ.

Такъ какъ въ пространствѣ двѣ плоскости пересѣкаются по прямой, то, слѣдовательно, прямую аналитически придется задавать системой двухъ уравненій первой степени, т. е. прямая въ пространствѣ указывается двумя уравненіями

$$(1)\quad \begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \end{aligned}$$

Всякую систему двухъ уравненій можно видоизмѣнять самыми разнообразными способами, не нарушая содержанія этой системы, т. е. видоизмѣняя ее такъ, что новая система будетъ равносильна съ первоначальной. Такъ напримѣръ, систему (1), опредѣляющую нѣкоторую прямую линію, можно рѣшить относительно двухъ изъ числа координатъ, напримѣръ, относительно координатъ x и y. Тогда прямую можно задать двумя уравненіями

$$(2)\quad \begin{aligned} x = pz + a, \\ y = qz + b. \end{aligned}$$

Уравненія прямой, написанныя въ послѣднемъ видѣ, можно въ нѣкоторомъ отношеніи считать простѣйшими, ибо въ нихъ получается наименьшее число коэффиціентовъ, въ данномъ случаѣ четыре. Эти коэффиціенты суть

$$p, q, a, b.$$

Покажемъ еще одинъ важный видъ уравненій прямой линіи. Оказывается, что прямую линію можно будетъ опредѣлять тремя уравненіями, если ввести кромѣ трехъ координатъ x, y, z еще нѣкоторую четвертую перемѣнную величину. Разсмотримъ прямую, проходящую черезъ постоянную точку M_0 (x_0, y_0, z_0). Возьмемъ на прямой перемѣнную точку M, находящуюся на перемѣнномъ разстояніи u отъ постоянной точки M_0. Тогда, если мы обозначимъ черезъ x, y, z координаты перемѣнной точки M, то разности

$$x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0$$

будутъ проекціями длины u на осяхъ координатъ. Обозначая черезъ α, β, γ углы, которые образуетъ прямая съ осями координатъ, получимъ три уравненія прямой:

$$(3)\quad \begin{aligned} x - x_0 = u \cos\alpha, \\ y - y_0 = u \cos\beta, \\ z - z_0 = u \cos\gamma. \end{aligned}$$

Если мы исключимъ добавочную перемѣнную u, то получимъ по прежнему два уравненія прямой. Эти два уравненія можно будетъ написать въ видѣ пропорціи

$$(4)\quad \frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}.$$

Очевидно, что въ этой пропорціи послѣдующіе члены $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ могутъ быть замѣнены числами, имъ пропорціональными, l, m, n, т. е. можно будетъ написать

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \tag{5}$$

гдѣ

$$\frac{l}{\cos\alpha}=\frac{m}{\cos\beta}=\frac{n}{\cos\gamma}. \tag{6}$$

Коэффиціенты l, m, n носятъ названіе *угловыхъ коэффиціентовъ*; они пропорціональны косинусамъ угловъ. Не трудно убѣдиться, что пропорція (6) даетъ возможность выразить $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ черезъ угловые коэффиціенты. Въ самомъ дѣлѣ, мы получаемъ

$$\frac{\cos\alpha}{l}=\frac{\cos\beta}{m}=\frac{\cos\gamma}{n}=$$

$$=\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Отсюда

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Получается такое общее правило. Если косинусы угловъ съ осями координатъ какого нибудь направленія въ пространствѣ пропорціональны тремъ числамъ l, m, n, то, чтобы перейти отъ этихъ чиселъ къ самимъ косинусамъ, надо раздѣлить эти числа на корень квадратный изъ суммы ихъ квадратовъ.

§ 45. Задача. *Найти уравненія прямой въ пространствѣ, проходящей черезъ двѣ заданныя точки* (x_0, y_0, z_0) *и* (x_1, y_1, z_1).

Пишемъ сначала общія уравненія прямой, проходящей черезъ первую точку. Это не что иное, какъ уравненія (5) предыдущаго § — а, т. е.

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{1}$$

Подберемъ теперь угловые коэффиціенты l, m, n такимъ образомъ, чтобы прямая проходила также черезъ вторую точку.

Подставляя координаты второй точки въ послѣднія уравненія, получаемъ

(2) $$\frac{x_1 - x}{l} = \frac{y_1 - y_0}{n} = \frac{z_1 - z_0}{n}.$$

Сопоставляя пропорціи (1) и (2), получаемъ окончательныя уравненія искомой прямой

(3) $$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Такъ напримѣръ, требуется провести прямую черезъ точки $(0, 0, 0)$ и $(1, 2, 3)$. Получимъ уравненія

$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{z - 0}{3 - 0},$$

которыя можно окончательно переписать въ такомъ видѣ

$$y - 2x = 0,$$
$$z - 3x = 0.$$

§ 46. Обращаемся теперь къ задачамъ на плоскость.

Уравненіе

(1) $$Ax + By + Cz + D = 0$$

мы будемъ называть *общимъ* уравненіемъ плоскости, а уравненіе

(2) $$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0,$$

гдѣ α, β, γ углы съ осями перпендикуляра, опущеннаго на эту плоскость, будемъ называть *нормальнымъ* уравненіемъ плоскости. Чтобы перейти отъ общаго уравненія (1) къ нормальному, нужно будетъ опредѣлить множитель R, отъ умноженія на который уравненіе (1) принимаетъ нормальный видъ. Получаемъ

$$RA = \cos\alpha;\ RB = \cos\beta;\ RC = \cos\gamma;\ RD = -p.$$

Такъ какъ мы имѣемъ соотношеніе

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

то получимъ

$$R^2 A^2 + R^2 B^2 + R^2 C^2 = 1,$$

откуда

$$R = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

§ 47. Задача. *Найти уголъ между двумя плоскостями*

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A_1x+B_1x+C_1x+D_1=0.$$

Обозначая черезъ α, β, γ углы съ осями координатъ перпендикуляра къ первой плоскости, а черезъ α_1, β_1, γ_1 углы перпендикуляра ко второй плоскости, получаемъ

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}.$$

Такъ какъ уголъ ν между плоскостями есть въ то же время уголъ между ихъ перпендикулярами, то по формулѣ

$$\cos\nu = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1$$

мы получаемъ

(1) $$\cos\nu = \frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}.$$

Отсюда получается условіе перпендикулярности двухъ плоскостей

(2) $$AA_1+BB_1+CC_1=0.$$

Чтобы найти условіе параллельности двухъ плоскостей, обратимъ вниманіе на тождество Lagrange'a, которое полезно помнить:

$$(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2)-(AA_1+BB_1+CC_1)^2 =$$
$$=(BC_1-CB_1)^2+(CA_1-AC_1)^2+(AB_1-BA_1)^2.$$

Тогда изъ формулы (1) получимъ

$$\sin^2\nu = \frac{(BC_1-CB_1)^2+(CA_1-AC_1)^2+(AB_1-BA_1)^2}{(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2)};$$

при параллельности плоскостей получимъ

$$\sin \nu = 0,$$

значитъ будетъ

$$(BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2 + (AB_1 - BA_1)^2 = 0.$$

Такъ какъ всѣ коэффиціенты предполагаются вещественными, то квадраты не могутъ быть числами отрицательными, а значитъ для того, чтобы сумма этихъ квадратовъ равнялась нулю, необходимо, чтобы всѣ квадраты отдѣльно равнялись нулю. Мы получаемъ, слѣдовательно,

$$BC_1 - CB_1 = 0,$$
$$CA_1 - AC_1 = 0,$$
$$AB_1 - BA_1 = 0,$$

т. е. пропорцію

$$(3) \qquad \frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C}.$$

Итакъ, условіемъ параллельности двухъ плоскостей является пропорціональность угловыхъ коэффиціентовъ.

§ 48. Если заданы двѣ прямыя

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

то на основаніи соображеній, аналогичныхъ соображеніямъ предыдущаго §-а, мы замѣтимъ, что условіемъ параллельности этихъ прямыхъ будетъ пропорціональность ихъ угловыхъ коэффиціентовъ

$$\frac{l_1}{l} = \frac{m_1}{m} = \frac{n_1}{n},$$

условіемъ же перпендикулярности будетъ

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0.$$

§ 49. Если бы мы хотѣли найти условія параллельности и перпендикулярности между плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

съ одной стороны и прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

съ другой, то очевидно, что условіе перпендикулярности прямой и плоскости будетъ въ то же время условіемъ параллельности ме-

жду прямой и перпендикуляромъ, опущеннымъ на плоскость изъ начала координатъ, такъ что происходитъ явленіе обратное: пропорціональность угловыхъ коэффиціентовъ

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}$$

дастъ перпендикулярность прямой и плоскости, а условіемъ параллельности будетъ

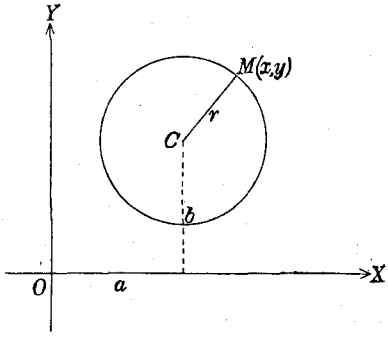
$$Al+Bm+Cn=0.$$

О кругѣ и шарѣ.

§ 50. Переходя къ разсмотрѣнію кривыхъ линій и поверхностей, мы должны обратить вниманіе на простѣйшіе случаи; начнемъ съ круга и шара, какъ геометрическихъ объектовъ, хорошо извѣстныхъ изъ элементарной геометріи.

Пусть на плоскости разсматривается кругъ, имѣющій центръ въ точкѣ C (a, b) и радіусъ r. Тогда, если мы на окружности круга возьмемъ какую нибудь точку M, не указывая, которую именно, и обозначимъ ея координаты черезъ x, y, то свойство точки M окружности находиться на разстояніи, равномъ радіусу, отъ центра, можно будетъ записать равенствомъ

$$+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$



Черт. 32.

Это уравненіе послѣ освобожденія отъ радикала приметъ видъ

(1) $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Итакъ, мы видимъ, что кругъ представляется уравненіемъ уже второй степени между координатами x и y. Это уравненіе по раскрытіи скобокъ приметъ видъ

(2) $$x^2+y^2+Ax+By+C=0,$$

гдѣ

$$A=-2a,\ B=-2b,\ C=a^2+b^2-r^2.$$

§ 51. Какъ обобщеніе только что сказаннаго о кругѣ, является такое общее положеніе, что всякое уравненіе между двумя координатами x и y опредѣляетъ, вообще говоря, нѣкоторую кри-

вую линію на плоскости. Простѣйшей линіей является прямая, опредѣляемая уравненіемъ первой степени

$$Ax + By + C = 0.$$

Какъ видно изъ предыдущаго §-а, кругъ опредѣляется уравненіемъ болѣе сложнымъ, въ которое входятъ уже вторыя степени координатъ. Поэтому кругъ называютъ *линіей второго порядка.* Вообще подъ порядкомъ n линіи разумѣется наивысшая степень координатъ, входящая въ уравненіе.

§ 52. Задача. *Найти точку пересѣченія заданнаго круга*

(1) $$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

и прямой

(2) $$y = mx + n.$$

Очевидно, что для нахожденія координатъ точекъ встрѣчи прямой съ кругомъ придется рѣшить относительно координатъ x и y, какъ неизвѣстныхъ, два уравненія, одно (1) второй степени, другое (2) первой степени. Для рѣщенія проще всего исключить букву y изъ этихъ двухъ уравненій; получаемъ слѣдующее квадратное уравненіе относительно x

(3) $$x^2 + (mx + n)^2 + Ax + B(mx + n) + C = 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что задача нахожденія точекъ встрѣчи круга съ прямою привела къ квадратному уравненію (3). Обозначимъ черезъ x_1 и x_2 корни этого уравненія (3). Мы замѣчаемъ, что эти корни будутъ представлять собою абсциссы точекъ встрѣчи круга съ прямою, ординаты же этихъ точекъ мы получимъ, подставляя вмѣсто x эти корни въ уравненіе (2). Получаемъ два значенія для y

$$y_1 = mx_1 + n,$$
$$y_2 = mx_2 + n.$$

Итакъ получаются слѣдующія двѣ точки встрѣчи

$$(x_1, y_1) \text{ и } (x_2, y_2).$$

Если оба корня x_1, x_2 уравненія (3) вещественны, то прямая дѣйствительно пересѣкаетъ кругъ. Если эти корни мнимые, то не существуетъ дѣйствительныхъ точекъ встрѣчи прямой съ кругомъ, прямая круга не пересѣкаетъ. Наконецъ, въ промежуточномъ случаѣ, когда корни квадратнаго уравненія совпадаютъ

$$x_1 = x_2,$$

тогда прямая обращается въ касательную къ кругу и имѣетъ только одну общую точку съ нимъ.

§ 53. Задача. *Найти точку пересѣченія двухъ круговъ*

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0, \tag{1}$$

$$x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0. \tag{2}$$

Очевидно, что мы получимъ координаты точекъ встрѣчи двухъ круговъ, если рѣшимъ относительно x и y, какъ неизвѣстныхъ, два уравненія (1) и (2). Прежде чѣмъ рѣшать, воспользуемся однимъ общимъ принципомъ, извѣстнымъ намъ изъ элементарнаго курса, а именно, что, если задана система двухъ уравненій

$$\begin{aligned} U&=0, \\ V&=0, \end{aligned} \tag{3}$$

то прежде чѣмъ эти два уравненія рѣшать относительно неизвѣстныхъ, мы имѣемъ право систему подвергнуть любому тождественному преобразованію, т. е. такому преобразованію, послѣ котораго система обращается въ новую, равносильную съ нею. Такъ напримѣръ, систему (3) можно будетъ замѣнить такою, ей равносильною

$$\begin{aligned} U&=0, \\ V-U&=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Примѣняя это къ данному случаю, мы замѣчаемъ, что уравненіе (1) можно будетъ оставить, а уравненіе (2) замѣнить разностью этого уравненія и уравненія (1), т. е. уравненіемъ

$$(A_1-A)x+(B_1-B)y+C_1-C=0. \tag{5}$$

Итакъ, мы видимъ, что задача нахожденія точекъ встрѣчи двухъ круговъ привелась къ задачѣ нахожденія точекъ встрѣчи одного изъ этихъ круговъ съ прямой линіей, опредѣляемой уравненіемъ (5). Слѣдовательно, задача пересѣченія двухъ круговъ приводитъ также къ квадратному уравненію, причемъ круги пересѣкаются, если корни этого уравненія дѣйствительны, не пересѣкаются, если корни мнимые, и касаются другъ друга, если корни равные.

§ 54. Теперь мы можемъ разъяснить то обстоятельство, которое мы оставили безъ доказательства въ § 27 главы I.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ, какія задачи могутъ рѣшаться циркулемъ и линейкой. Предположимъ, что задача рѣшается циркулемъ и линейкой, такъ что на плоскости сдѣланъ чертежъ,

состоящій изъ нѣкотораго числа круговъ и прямыхъ линій. Какъ бы сложенъ этотъ чертежъ ни былъ, на основаніи сказаннаго въ предыдущихъ §-ахъ мы заключаемъ, что координаты всѣхъ точекъ пересѣченія круговъ и прямыхъ выражаются квадратными уравненіями или уравненіями первой степени при пересѣченіи двухъ прямыхъ. Разстояніе всякихъ двухъ точекъ пересѣченія выражается корнемъ квадратнымъ черезъ координаты концовъ. Итакъ, мы замѣчаемъ, что построенія циркулемъ и линейкой оставляютъ всѣ отрѣзки между точками этого построенія въ области чиселъ, выражающихся черезъ заданные отрѣзки при помощи послѣдовательнаго рѣшенія уравненій первой и второй степени.

§ 55. Разсмотримъ теперь въ трехмѣрномъ пространствѣ шаръ, имѣющій центръ $C\ (a,\ b,\ c)$ и радіусъ r. Возьмемъ на поверхности шара какую нибудь точку M, не указывая, которую именно, и обозначимъ ея координаты черезъ x, y, z. Тогда получаемъ уравненіе шара

$$+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r,$$

которое по освобожденіи отъ радикала даетъ

$$(1)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Если мы раскроемъ скобки, то получимъ уравненіе

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0,$$

гдѣ

$$A=-2a,\ B=-2b,\ C=-2c,\ D=a^2+b^2+c^2-r^2.$$

§ 56. Какъ обобщеніе только что сказаннаго о шарѣ, является такое общее положеніе, что всякое уравненіе между тремя координатами x, y, z опредѣляетъ, вообще говоря, нѣкоторую кривую поверхность въ трехмѣрномъ пространствѣ. Простѣйшей поверхностью является плоскость, опредѣляемая уравненіемъ

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Какъ видно изъ предыдущаго §-а, шаръ опредѣляется уравненіемъ болѣе сложнымъ, въ которое входятъ уже вторыя степени координатъ. Поэтому шаръ называютъ *поверхностью второго порядка*. Вообще подъ порядкомъ n поверхности разумѣется наивысшая степень координатъ, входящая въ уравненіе поверхности.

Итакъ, мы видимъ, что понятіемъ, аналогичнымъ плоской линіи, является въ пространствѣ поверхность, линіи же въ трехмѣрномъ пространствѣ опредѣляются уже, какъ пересѣченія по-

верхностей, такъ напримѣръ, прямая линія, какъ мы видѣли, опредѣляется, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей.

Линіи въ пространствѣ раздѣляются на двѣ большихъ категоріи, *плоскія* и *косыя*. Плоскія, это тѣ, которыя всѣми своими точками лежатъ въ нѣкоторой плоскости, косыя—тѣ, которыя не лежатъ въ одной плоскости.

§ 57. Кругъ въ пространствѣ опредѣляется, какъ пересѣченіе шара и плоскости, значитъ, онъ опредѣляется двумя уравненіями такого вида

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

и

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

§ 58. Задача. *Найти линію пересѣченія двухъ шаровъ*

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0, \tag{1}$$

$$x^2+y^2+z^2+A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0. \tag{2}$$

Не трудно видѣть, что эта линія будетъ кругомъ, потому что она будетъ лежать въ плоскости

$$(A_1-A)x+(B_1-B)y+(C_1-C)z+D_1-D=0. \tag{3}$$

§ 59. Какъ обобщеніе шара, получаемъ въ пространствѣ четырехъ измѣреній такъ называемую *гиперсферу*, кривое трехмѣрное пространство, опредѣляемое уравненіемъ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+(u-d)^2=r^2.$$

Обобщеніе понятія о координатахъ.

§ 60. Понятіе о декартовыхъ координатахъ, данное нами въ §§ 3—6 и прилагавшееся въ дальнѣйшихъ §-ахъ, допускаетъ самыя разнообразныя и важныя обобщенія.

Первое обобщеніе состоитъ въ томъ, что оси координатъ можно не предполагать образующими прямые углы. Тогда разобранный нами случай можно назвать случаемъ *прямоугольныхъ* координатъ, а въ томъ случаѣ, когда оси координатъ образуютъ произвольно выбранный уголъ, не прямой, система координатъ называется *косоугольною*.

Въ случаѣ косоугольной системы координатъ прямоугольникъ $OPMQ$ (см. черт. 10) обращается въ параллелограммъ, такъ же точно прямоугольный параллелепипедъ (черт. 11) обращается въ случаѣ косоугольной системы координатъ въ косоугольный.

Это обобщеніе прямоугольной системы координатъ въ косоугольную является обобщеніемъ несущественнымъ; формулы аналитической геометріи отъ такой замѣны координатъ претерпѣваютъ лишь несущественныя измѣненія. Такъ какъ формулы для косоугольныхъ координатъ сложнѣе, то обыкновенно въ приложеніяхъ почти всегда употребляется система прямоугольная.

§ 61. Одно обобщеніе прямолинейныхъ координатъ составляютъ такъ называемыя *однородныя* координаты. Если мы декартовы координаты x и y замѣнимъ выраженіями

$$x = \frac{X}{Z}, \; y = \frac{Y}{Z},$$

то три величины X, Y, Z носятъ названіе однородныхъ координатъ. Всякое уравненіе прямой линіи

$$Ax + By + C = 0$$

въ однородныхъ координатахъ перепишется такъ:

$$AX + BY + CZ = 0.$$

Такое введеніе однородныхъ координатъ приноситъ пользу въ томъ отношеніи, что мы вводимъ въ разсмотрѣніе такъ называемую *безконечно-далекую* прямую плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, получается уравненіе безконечно-далекой прямой

$$Z = 0,$$

ибо въ этомъ случаѣ

$$x = \infty \text{ и } y = \infty.$$

Итакъ, однородныя координаты даютъ возможность въ число прямыхъ линій, опредѣляемыхъ уравненіями, заключать также безконечно-далекую прямую.

Приходится себѣ представлять безконечно-далекую прямую, какъ линію, огибающую плоскость со всѣхъ сторонъ на подобіе круга безконечно-большого радіуса. Со всякою прямою плоскости безконечно-далекая прямая пересѣкается въ одной только точкѣ. Приходится считать, что всѣ прямыя, параллельныя какой нибудь опредѣленной, имѣютъ одну общую точку съ безконечно-далекой прямой.

Не трудно видѣть, что три уравненія

$$X = 0, \; Y = 0, \; Z = 0$$

дають три прямыхъ линіи, изъ которыхъ первая будетъ осью y-овъ, вторая осью x-овъ, а третья безконечно-далекой прямой. Въ виду этого однородныя координаты можно разсматривать, какъ предѣльный случай такъ называемыхъ *трилинейныхъ* координатъ. Названіе трилинейныхъ носятъ такія координаты ξ, η, ζ, что равенства

$$\xi = 0, \ \eta = 0, \ \zeta = 0$$

мѣютъ мѣсто для трехъ сторонъ нѣкотораго треугольника, называемаго координатнымъ. Однородныя координаты представляютъ собою тотъ предѣльный случай, когда одна сторона треугольника уходитъ на безконечность.

§ 62. Дальнѣйшее болѣе широкое обобщеніе понятія о координатахъ состоитъ въ введеніи такъ называемыхъ *криволинейныхъ* координатъ. Разсмотримъ одинъ изъ простѣйшихъ случаевъ такихъ координатъ, такъ называемую систему *полярныхъ* координатъ. Эту систему мы видѣли при опредѣленіи чиселъ комплексныхъ при помощи модуля и аргумента. Модуль ρ и аргументъ ϑ можно считать за такъ называемыя полярныя координаты точки, соотвѣтствующей комплексному числу. Координата ρ обыкновенно называется *радіусомъ векторомъ* точки, а координата ϑ *полярнымъ угломъ*; начало координатъ ρ носитъ для полярной системы названіе *полюса*.

Мы видѣли уже зависимость между этими полярными координатами и прямоугольными координатами x и y, а именно

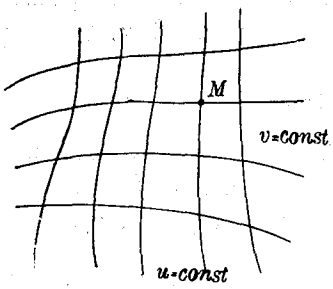
$$x = \rho \cos \vartheta, \ y = \rho \sin \vartheta. \tag{1}$$

Обратно, черезъ рѣшеніе уравненій (1) относительно ρ и ϑ получимъ полярныя координаты черезъ прямоугольныя

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\, \vartheta = \frac{y}{x}.$$

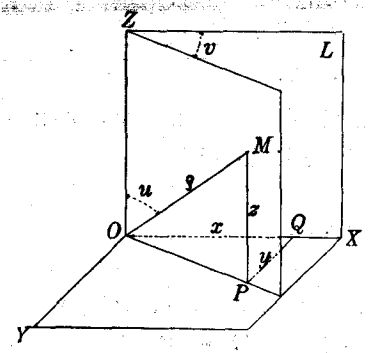
§ 63. Будемъ называть *координатной линіей*, сотвѣтствующей нѣкоторой координатѣ u, такую линію плоскости, для всѣхъ точекъ которой эта координата u постоянная. Очевидно, что въ случаѣ декартовыхъ координатъ координатными линіями являются прямыя, параллельныя осямъ координатъ. Въ случаѣ полярныхъ координатъ координатной линіей для радіуса вектора ρ будетъ,

очевидно, кругъ, а для координаты ϑ прямая линія, проходящая черезъ полюсъ. Координаты, для которыхъ координатныя линіи кривыя, мы будемъ называть криволинейными координатами. Такъ какъ въ полярныхъ координатахъ одна система координатныхъ линій круги, то полярныя координаты надо считать за криволинейныя. Въ самомъ общемъ случаѣ криволинейныхъ координатъ на плоскости перекрещиваются двѣ системы этихъ линій (черт. 33). Для каждой линіи одной изъ этихъ системъ будетъ постоянной одна координата u, а для каждой линіи другой системы будетъ постоянной другая координата v. Тогда точку M пересѣченія двухъ линій различныхъ системъ мы будемъ опредѣлять тѣми значеніями координатъ u и v, которыя соотвѣтствуютъ проходящимъ черезъ эту точку координатнымъ линіямъ.



Черт. 33.

§ 64. Понятіе о координатахъ точекъ плоскости обобщается на случай кривыхъ поверхностей, причемъ для опредѣленія точки всякой поверхности необходимы двѣ координаты. Одинъ важный примѣръ опредѣленія положенія точки на поверхности при помощи двухъ координатъ мы имѣли уже въ элементарномъ курсѣ географіи, когда опредѣляли положеніе точки на земномъ шарѣ при помощи долготы и широты. Координатными линіями въ этомъ случаѣ являются меридіаны и параллели.



Черт. 34.

§ 65. Понятіе о криволинейныхъ координатахъ на плоскости обобщается также въ пространствѣ. Мы ограничимся разсмотрѣніемъ такъ называемыхъ *полярныхъ* координатъ.

Возьмемъ (черт. 34) нѣкоторый полюсъ O въ пространствѣ, проведемъ черезъ этотъ полюсъ прямую ZO, которую будемъ на-

зывать полярною осью, и черезъ эту прямую произвольную плоскость L, которую будемъ называть полярной плоскостью. Тогда положеніе всякой точки M пространства можно указать слѣдующими тремя координатами, которыя мы будемъ называть полярными: во первыхъ, радіусомъ векторомъ ρ, представляющимъ разстояніе точки M до полюса, во вторыхъ, угломъ u, который это разстояніе образуетъ съ полярной осью, и, наконецъ, двуграннымъ угломъ v между полярной плоскостью L и плоскостью, проведенною черезъ заданную точку и полярную ось.

Покажемъ, что эти полярныя координаты находятся въ тѣсной связи съ обыкновенными прямоугольными. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ полярную ось за ось z-овъ, полюсъ за начало координатъ, плоскость L за плоскость XZ. Проведемъ плоскость XY, перпендикулярную къ полярной оси, и возьмемъ за ось x-овъ прямую встрѣчи съ плоскостью L. Тогда изъ двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ OPM и OQP мы получимъ

$$z = \rho \cos u, \quad OP = \rho \sin u,$$
$$x = OP \cos v, \quad y = OP \sin v.$$

Отсюда получится такая зависимость между полярными и прямоугольными координатами

$$(1) \qquad x = \rho \sin u \cos v, \; y = \rho \sin u \sin v, \; z = \rho \cos u.$$

Рѣшая эти уравненія относительно ρ, u и v, получимъ обратныя выраженія полярныхъ координатъ черезъ прямоугольныя:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$tg\, u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad tg\, v = \frac{y}{x}.$$

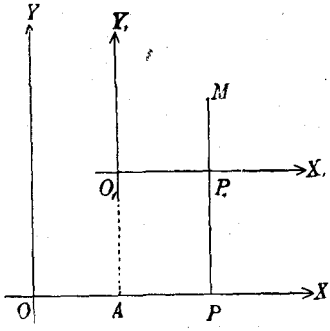
§ 66. Будемъ называть координатными поверхностями такія поверхности въ пространствѣ, для всѣхъ точекъ которыхъ нѣкоторая координата постоянна. Не трудно убѣдиться, что для только что разобраннаго случая полярныхъ координатъ, координатными поверхностями являются для координаты ρ шары, для координаты v плоскости, а для координаты u конусы.

§ 67. Переходъ отъ однѣхъ координатъ къ другимъ представляетъ собою операцію, называемую *преобразованіемъ коорди-*

нать. Мы дадимъ здѣсь правила, по которымъ можно перейти отъ одной прямоугольной системы къ другой.

Перенесемъ на плоскости начало координатъ безъ измѣненія направленія осей въ нѣкоторую точку O_1 (черт. 35), имѣющую координаты a, b относительно первоначальной системы координатъ, такъ что

$$a = OA,\ b = AO_1.$$



Черт. 35.

Тогда, обозначая первоначальныя координаты точки M черезъ x, y, а черезъ x_1, y_1 новыя ея координаты, получимъ

$$x = OP,\ y = PM,$$
$$x_1 = O_1P_1,\ y_1 = P_1M,$$

и у насъ выходятъ слѣдующія формулы для преобразованія координатъ

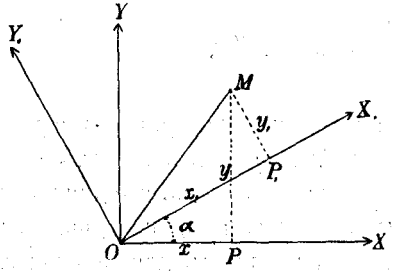
$$x = a + x_1,\ y = b + y_1.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ, если мы разсмотримъ перенесеніе начала координатъ въ пространствѣ безъ измѣненія направленія осей, то формулы преобразованія будутъ

$$x = a + x_1,\ y = b + y_1,\ z = c + z_1,$$

гдѣ a, b, c суть координаты новаго начала.

§ 68. Разсмотримъ теперь измѣненіе направленія координатныхъ осей на плоскости безъ измѣненія начала координатъ.



Черт. 36.

Мы можемъ указать положеніе прямоугольной оси заданіемъ угла α поворота ея относительно первоначальной оси. Тогда пусть первоначальныя координаты точки M (черт. 36) будутъ

$$x = OP,\ y = PM,$$

а новыя координаты

$$x_1 = OP_1,\ y_1 = P_1M.$$

Проектируя отрѣзокъ OM, соединяющій начало координатъ съ точкой M, на первоначальныя оси x-овъ и y-овъ, получимъ

$$x = \text{пр. } x_1 + \text{пр. } y_1,$$

или

(1) $$x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ получимъ

(2) $$y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha.$$

§ 69. Соображенія предыдущаго §-а можно будетъ обобщить на случай трехмѣрнаго пространства.

Обозначимъ девять косинусовъ угловъ между первоначальными и новыми осями координатъ отдѣльными буквами слѣдующей таблицы, показывающей сразу, какимъ двумъ осямъ принадлежитъ разсматриваемый уголъ.

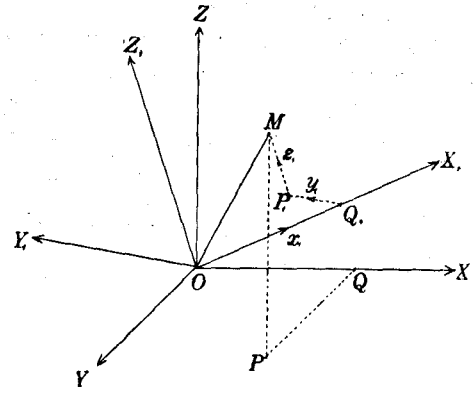
	x_1	y_1	z_1
x	a_1	a_2	a_3
y	b_1	b_2	b_3
z	c_1	c_2	c_3

Такъ, напримѣръ, b_3 есть косинусъ угла между первоначальной осью Y и новой осью Z.

Проектируя ломанную линію, составляемую тремя новыми координатами x_1, y_1, z_1 точки M (черт. 37), на первоначальныя оси, получимъ формулы

(1) $$\begin{aligned} x &= x_1 a_1 + y_1 a_2 + z_1 a_3, \\ y &= x_1 b_1 + y_1 b_2 + z_1 b_3, \\ z &= x_1 c_1 + y_1 c_2 + z_1 c_3, \end{aligned}$$

дающія собою формулы преобразованія координатъ x, y, z точки M въ новыя x_1, y_1, z_1. Девять косинусовъ, очевидно, должны удовлетворять слѣдующимъ соотношеніямъ



Черт. 37.

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1,\\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1,\\
c_1^2 + e_2^2 + c_3^2 &= 1;\\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0,\\
a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0,\\
b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0,
\end{aligned}
$$

которыя являются слѣдствіемъ того, что обѣ системы координатъ, какъ первоначальная, такъ и новая, образуютъ прямые углы между осями, такъ что имѣютъ мѣсто соображенія §-овъ 29 и 32. Мѣняя роли обѣихъ координатныхъ системъ, можемъ переписать формулы (2) въ такомъ видѣ

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1,\\
a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1,\\
a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1;\\
a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0,\\
a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 &= 0,\\
a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Такъ какъ между девятью косинусами существуетъ шесть соотношеній, то три косинуса остаются произвольными. Вообще говоря, можно всѣ девять косинусовъ выразить черезъ три независимыя перемѣнныя.

§ 70. Комбинируя перенесеніе начала координатъ съ поворотомъ системы около начала, мы приходимъ къ преобразованію прямоугольныхъ координатъ самаго общаго вида, когда измѣняется начало координатъ и направленіе осей. Тогда получаемъ на плоскости самый общій видъ преобразованія въ такомъ видѣ

$$
\begin{aligned}
x &= a + x \cos\alpha - y \sin\alpha,\\
y &= b + x \sin\alpha + y \cos\alpha,
\end{aligned}
$$

а въ пространствѣ въ такомъ видѣ

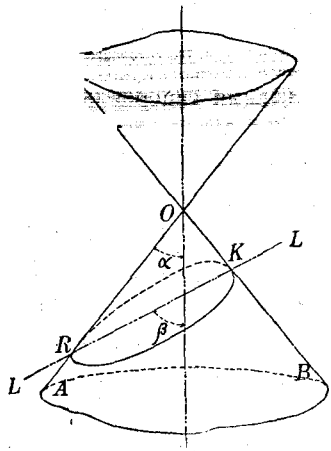
$$
\begin{aligned}
x &= a + x_1 a_1 + y_1 a_2 + z_1 a_3,\\
y &= b + x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_2 b_3,\\
z &= c + x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3.
\end{aligned}
$$

Мы видимъ, что формулы преобразованія прямоугольныхъ координатъ суть формулы первой степени относительно координатъ, какъ первоначальныхъ, такъ и новыхъ.

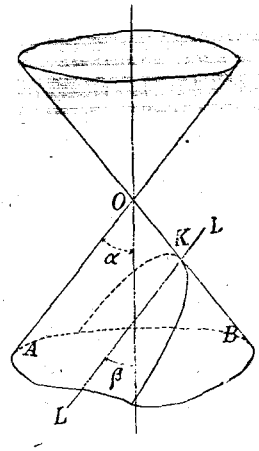
Коническія сѣченія.

§ 71. Теперь мы перейдемъ къ разбору весьма важныхъ по своимъ свойствамъ кривыхъ линій, получающихся при пересѣченіи прямого кругового конуса произвольной сѣкущей плоскостью. При такомъ сѣченіи получаются три различныхъ кривыхъ линіи, такъ называемыя эллипсъ, гипербола, парабола, которыя вмѣстѣ носятъ названіе коническихъ сѣченій. Свойства этихъ линій были извѣстны уже древнимъ грекамъ. Обыкновенно приписываютъ открытіе коническихъ сѣченій Менехму, ученику Платона (350 г. до Р. Х.); такъ, напримѣръ, Эратосѳенъ даетъ этимъ тремъ линіямъ названіе „тріада Менехма". Хотя Эвклидъ и Архимедъ знали уже свойство этихъ линій получаться при сѣченіи конуса, но заслуга полнаго разбора ихъ теоріи принадлежитъ Аполлонію (225 г. до Р. Х.);

§ 74. Возьмемъ нѣкоторый круговой конусъ и расположимъ его ось въ плоскости чертежа, а также возьмемъ сѣкущую плоскость P перпендикулярно къ плоскости чертежа. Тогда конусъ пересѣчется съ плоскостью чертежа по двумъ образующимъ, одинаково наклоненнымъ подъ угломъ α къ оси конуса. Это есть



Черт. 38.



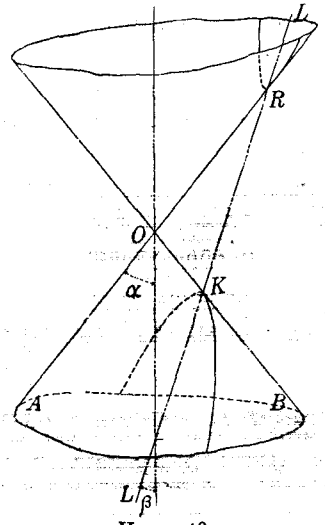
Черт. 39.

уголъ раструба конуса. Пусть OD будетъ ось конуса, его образующія OB и OA, и пусть прямая L будетъ сѣченіе плоскости чертежа плоскостью P, перпендикулярной къ плоскости чертежа. Наклоненіе сѣкущей плоскости P къ оси конуса можно указать

угломъ β. Заданный конусъ мы будемъ предполагать полнымъ, т. е. будемъ предполагать, что его образующія продолжены за вершину, такъ что полный конусъ будетъ составлять совокупность двухъ конусовъ, соединяющихся вершинами. Каждую изъ этихъ двухъ частей конуса мы будемъ называть *полою* полнаго конуса.

Если $\beta > \alpha$ (черт. 38), то сѣкущая плоскость пересѣкаетъ одну полу конуса по овальнаго вида кривой, называемой *эллипсомъ*.

Если $\beta = \alpha$ (черт. 39), т. е. сѣкущая плоскость параллельна одной образующей, то эта плоскость пересѣчетъ одну полу конуса по нѣкоторой кривой, имѣющей безконечныя вѣтви и называемой *параболой*.



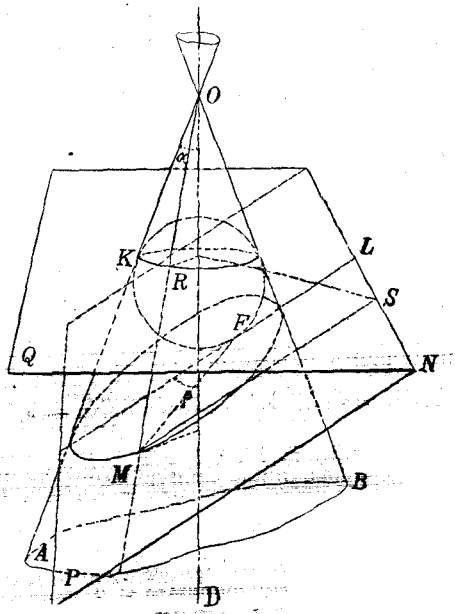
Черт. 40.

Наконецъ, если $\beta < \alpha$ (черт. 40), то сѣкущая плоскость встрѣчаетъ обѣ полы конуса по двумъ отдѣльно расположеннымъ кривымъ линіямъ. Изъ этихъ кривыхъ каждая распространяется на безконечность вродѣ параболы. Мы будемъ совокупность обѣихъ кривыхъ считать за одно коническое сѣченіе и будемъ это сѣченіе называть *гиперболой*, а каждую изъ составныхъ частей въ отдѣльности будемъ называть вѣтвями гиперболы.

§ 73. Будемъ сначала разсматривать такія свойства коническихъ сѣченій, которыя суть общія для эллипса параболы и гиперболы. Безразлично, какой чертежъ взять для разсмотрѣнія; возьмемъ, напримѣръ чертежъ, относящійся к эллипсу. Впишемъ (черт. 41) кругъ въ треугольникъ, образованный въ плоскости чертежа двумя образующими AO и BO конуса и прямою L. Вращая этотъ кругъ около оси конуса получимъ шаръ, касающійся въ одной точкѣ F сѣкущей плоскости P. Этотъ шаръ касается конуса по кругу, расположенному въ плоскости Q, перпендикулярной къ оси конуса. Продолжимъ плоскость Q круга K до пересѣченія съ сѣкущей плоскостью P. Это пересѣченіе совершится по прямой N, перпендикулярной къ плоскости чертежа. Возьмемъ на коническомъ сѣченіи нѣкоторую точку M. Не трудно доказать слѣдующую теорему.

Теорема. *Коническое сѣченіе есть геометрическое мѣсто точекъ M въ плоскости P, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что отношеніе разстояній этихъ точекъ M до точки F и до прямой N есть величина постоянная.*

Точка F называется *фокусомъ* коническаго сѣченія, а прямая N его *директрисою*. Мы увидимъ сейчасъ, что это постоянное отношеніе меньше единицы для эллипса, равно единицѣ для параболы и больше единицы для гиперболы.



Черт. 41.

Проведемъ черезъ точку M образующую конуса; эта образующая коснется шара въ точкѣ R, причемъ точка R будетъ, очевидно, лежать въ плоскости Q. Проведемъ черезъ M въ плоскости P прямую MS, параллельную прямой L. Очевидно, что двѣ прямыя MR и MS имѣютъ одну и ту же проекцію на оси OD конуса; въ самомъ дѣлѣ, оба эти отрѣзка MR и MS имѣютъ одно и тоже начало M, а оба конца лежатъ въ плоскости Q, перпендикулярной къ оси конуса, значитъ оба конца R и S имѣютъ одну и ту же проектирующую плоскость Q, и, значитъ, проекціи концовъ R и S совпадаютъ въ одной и той же точкѣ встрѣчи плоскости Q съ осью конуса. Итакъ

$$\text{пр.}\, MR = \text{пр.}\, MS\, (\text{на ось } OD);$$

отсюда

$$MR \cos(MR, OD) = MS \cos(MS, OD).$$

Но уголъ между MR и OD есть уголъ α наклоненія образующей MR къ оси конуса; уголъ же между MS и OD такой же, какъ и между L и OD, т. е. равенъ углу β, и мы получаемъ, слѣдовательно

$$(1) \qquad MR \cos\alpha = MS \cos\beta.$$

Прямыя MR и MF одинаковы по длинѣ, какъ двѣ касательныя, проведенныя къ одному и тому же шару изъ внѣшней точки M, т. е.

$$MR = MF,$$

и уравненіе (1) обращается въ такое:

(2) $$MF \cos \alpha = MS \cos \beta.$$

Это уравненіе (2) можно переписать такъ:

(3) $$\frac{MF}{MS} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Обозначимъ черезъ e постоянное число $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$, т. е.

(4) $$\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = e;$$

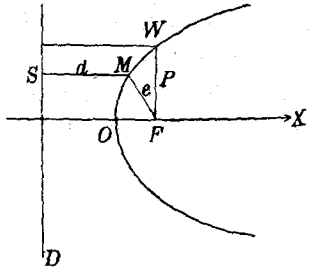
получаемъ равенство

(5) $$\frac{MF}{MS} = e,$$

выражающее приведенную выше теорему.

Для эллипса $\beta > \alpha$, и, слѣдовательно, $e < 1$.
Для параболы $\beta = \alpha$ „ $e = 1$.
Для гиперболы $\beta < \alpha$ „ $e > 1$.

§ 74. Возьмемъ теперь за плоскость чертежа сѣкущую плоскость P (черт. 42). Пусть прямая D будетъ директрисою, а точка F фокусомъ.



Черт. 42.

Проведемъ черезъ фокусъ прямую FX перпендикулярно къ директрисѣ, и пусть точка M будетъ нѣкоторой точкой коническаго сѣченія. Тогда имѣемъ

(1) $$\frac{MF}{MS} = e,$$

гдѣ прямая MS параллельна FX. Будемъ обозначать черезъ r разстояніе точки M отъ фокуса, это такъ называемый *радіусъ-векторъ* точки M; черезъ d обозначимъ разстояніе точки M отъ директрисы. Тогда получаемъ

(2) $$\frac{r}{d} = e.$$

Числа r и d можно называть координатами точки коническаго сѣченія. Мы видимъ, что въ этихъ координатахъ уравненіе коническаго сѣченія имѣетъ видъ (2).

Введемъ въ разсмотрѣніе нѣкоторое положительное число p, которое назовемъ *параметромъ* коническаго сѣченія. Параметръ мы опредѣлимъ, какъ радіусъ-векторъ точки W коническаго сѣченія, параллельный директрисѣ. Черезъ параметръ p легко выразить разстояніе фокуса отъ директрисы, а именно, разстояніе фокуса отъ директрисы есть не что иное, какъ значеніе координаты d для точки W коническаго сѣченія, радіусъ-векторъ которой есть параметръ p. Поэтому, подставляя въ уравненіе (2) вмѣсто r величину параметра p, получимъ

$$\frac{p}{d} = e,$$

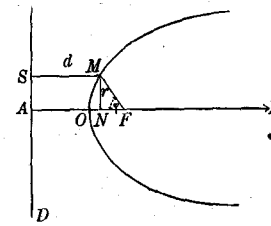
откуда, рѣшая относительно d, получимъ разстояніе фокуса отъ директрисы

$$p = de \text{ и } d = \frac{p}{e},$$

т. е. разстояніе фокуса отъ директрисы есть p, дѣленное на e.

§ 75. Выведемъ теперь уравненіе коническаго сѣченія въ полярныхъ координатахъ, т. е. изъ предыдущихъ кооординатъ r и d оставимъ координату r, а вмѣсто d возьмемъ новую координату φ, уголъ радіуса-вектора съ прямою FX (черт. 43), причемъ будемъ отсчитывать этотъ уголъ отъ направленія этой прямой, идущаго отъ фокуса къ директрисѣ. Обозначимъ черезъ A пересѣченіе директрисы съ прямою FX, а черезъ N основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки M на прямую AF. Получаемъ

$$d = AF - NF,$$



Черт. 43.

но

$$NF = r \cos \varphi,$$

а въ предыдущемъ §-ѣ мы видѣли, что

$$AF = \frac{p}{e},$$

такъ что

(1) $$d = \frac{p}{e} - r \cos \varphi.$$

Уравненіе (2) § 74 можно переписать такъ

$$r = ed.$$

Вставляя вмѣсто d его значеніе (1), получимъ

$$r = e\left(\frac{p}{e} - r\cos\varphi\right).$$

Это уравненіе и есть искомое уравненіе коническаго сѣченія въ полярныхъ координатахъ. Его можно переписать такъ

$$r = p - re\cos\varphi,$$

или

$$r + re\cos\varphi = p;\ r(1 + e\cos\varphi) = p.$$

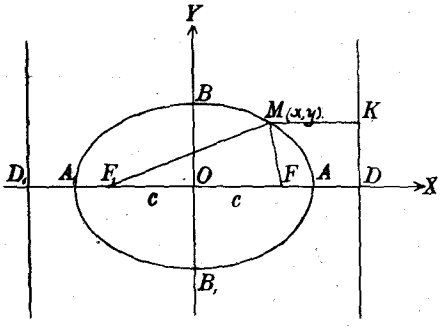
и, наконецъ,

$$(2) \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Эллипсъ.

§ 76. Задача. *Найти геометрическое мѣсто точекъ M, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ заданныхъ точекъ F и F_1 есть величина постоянная.*

Чтобы получить формулы въ болѣе простомъ видѣ, возьмемъ (черт. 44) за ось x-овъ прямую, соединяющую заданныя точки F и F_1; за начало координатъ O возьмемъ середину отрѣзка FF_1, а ось y-овъ возьмемъ по перпендикуляру, возставленному къ оси x-овъ изъ точки O. Обозначимъ черезъ c половину разстоянія между заданными точками. Пусть x, y будутъ координаты нѣкоторой точки M искомаго геометрическаго мѣста, причемъ мы не указываемъ, которой именно. Тогда мы получаемъ по опредѣленію геометрическаго мѣста



Черт. 44.

$$(1) \qquad MF + MF_1 = 2a,$$

гдѣ мы черезъ $2a$ обозначаемъ постоянное число, которому должна равняться сумма разстояній точки M отъ двухъ заданныхъ точекъ F и F_1. Такъ какъ сумма двухъ сторонъ треуголь-

ника MFF_1 всегда должна быть больше третьей, то должно имѣть мѣсто неравенство

$$2a > FF_1$$

или

$$2a > 2c,$$

то есть

(2) $$a > c.$$

Но мы имѣемъ

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2},$$

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2};$$

значитъ равенство (1), выражающее свойство точекъ геометрическаго мѣста, обращается въ такое уравненіе

(3) $$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

геометрическаго мѣста. Чтобы получить окончательное уравненіе, освобожденное отъ радикаловъ, поступимъ такъ. Перепишемъ уравненіе (3) въ такомъ видѣ

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

и возвысимъ обѣ части въ квадратъ. Тогда послѣ надлежащихъ выкладокъ будемъ имѣть

(4) $$xc = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Обозначимъ черезъ e отношеніе $\frac{c}{a}$, такъ что

$$c = ea,$$

мы получимъ

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - ex.$$

Отсюда мы получаемъ

(5) $$MF = a - ex.$$

Мѣняя въ равенствѣ (4) величину c на $-c$, получимъ

(6) $$MF_1 = a + ex.$$

Остается теперь уничтожить послѣдній радикалъ въ уравненіи (4). Переписывая это уравненіе такъ

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - x\frac{c}{a},$$

и возвышая въ квадратъ, получаемъ

$$(x-c)^2+y^2=a^2+x^2\frac{c^2}{a^2}-2xc.$$

Послѣ упрощеній имѣемъ окончательно

(7) $$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^2(a^2-c^2).$$

На основаніи неравенства (2) мы замѣчаемъ, что a^2-c^2 есть число положительное, которое мы можемъ обозначить черезъ b^2, такъ что получаемъ

(8) $$a^2-c^2=b^2,$$

и мы видимъ, что уравненіе нашей линіи можетъ быть написано окончательно въ такомъ видѣ

(9) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Не трудно убѣдиться, что линія (9) есть линія замкнутая, овальнаго вида. Покажемъ, что эта линія будетъ эллипсомъ. Въ самомъ дѣлѣ, если мы возставимъ въ точкѣ D оси x-овъ, имѣющей абсциссу $\frac{a}{e}$, перпендикуляръ и если разсмотримъ разстояніе MK отъ точки геометрическаго мѣста до этого перпендикуляра, то будетъ имѣть мѣсто равенство

(10) $$\frac{MF}{MK}=e,$$

ибо

$$MK=\frac{a}{e}-x,$$

и равенство (10) провѣряется непосредственно на основаніи равенства (5). Итакъ, линія (9) есть коническое сѣченіе. Что эта линія есть эллипсъ, слѣдуетъ изъ неравенства

$$e<1,$$

ибо

$$e=\frac{c}{a},\ \text{а}\ c<a.$$

Начало координатъ O будетъ, очевидно, центромъ линіи, т. е. такой точкой, въ которой дѣлится пополамъ каждая хорда линіи, проведенная черезъ эту точку. Это слѣдуетъ изъ того соображенія, что уравненіе (9) заключаетъ только квадраты координатъ и, значитъ, представляетъ линію, симметрично расположенную относительно обѣихъ осей.

Равенство (10) показываетъ, что заданная точка F есть фокусъ эллипса (9), а прямая DK директриса его. Изъ указанной симметричности вытекаетъ существованіе второго фокуса, которымъ является другая заданная точка F_1, и второй директрисы. Длина c, выражающая разстояніе фокуса F отъ центра O, носитъ названіе *линейнаго эксцентриситета* эллипса, а отвлеченное число e, представляющее собою отношеніе c къ a, носитъ названіе *астрономическаго эксцентриситета.*

Полагая въ уравненіи (9)

$$y = 0,$$

найдемъ точки встрѣчи эллипса съ осью x-овъ. Получаемъ

$$x^2 = a^2,$$

откуда получаются двѣ точки A и A_1 съ координатами

$$x = +a \text{ и } x = -a.$$

Это будутъ такъ называемыя *вершины* эллипса, лежащія на оси, проходящей черезъ фокусы. Разстояніе между этими вершинами, очевидно, будетъ равно $2a$. Совершенно подобнымъ же образомъ ищемъ точки встрѣчи эллипса съ осью y-овъ. Полагаемъ

$$x = 0,$$

тогда будетъ

$$y^2 = b^2,$$

т. е. получимъ двѣ точки

$$y = +b \text{ и } y = -b.$$

Получаемъ двѣ вершины эллипса B и B_1, лежащія на оси y-овъ. Разстояніе между ними будетъ равняться $2b$.

Такъ какъ существуетъ равенство (8), то мы замѣчаемъ, что длина b должна быть непремѣнно меньше длины a, поэтому ось AA_1, проходящая черезъ фокусы, носитъ названіе большей оси эллипса, а ось BB_1 носитъ названіе меньшей оси эллипса.

Гипербола.

§ 77. Задача. *Требуется найти геометрическое мѣсто точекъ M, разность разстояній которыхъ до двухъ заданныхъ точекъ F и F_1 есть величина постоянная.*

Взявъ такое же расположеніе осей координатъ относительно точекъ F и F_1, какое мы брали въ предыдущей задачѣ, по-

лучимъ уравненіе геометрическаго мѣста въ одномъ изъ слѣдующихъ двухъ видовъ

$$(1) \qquad \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

$$(2) \qquad \sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Такъ какъ изъ элементарной геометріи извѣстно, что разность двухъ сторонъ треугольника должна быть всегда меньше, чѣмъ третья сторона, то мы получаемъ

$$2a<2c$$

или

$$a<c,$$

неравенство, противоположное тому, которое было въ разобранномъ случаѣ эллипса. Посмотримъ, въ чемъ будетъ состоять разница анализа этой новой задачи отъ анализа первой задачи. Прежде всего мы замѣчаемъ, что то обстоятельство, что въ уравненіяхъ (1) и (2) стоятъ передъ корнями знаки —, тогда какъ въ первой задачѣ оба корня были со знакомъ +, не имѣетъ никакого существеннаго значенія, такъ какъ мы уничтожаемъ оба радикала послѣдовательнымъ возвышеніемъ въ квадратъ, это же возвышеніе въ квадратъ даетъ одинъ и тотъ же результатъ, какой бы знакъ у радикала ни былъ, + или —. Значитъ, не повторяя выкладки, мы замѣчаемъ, что послѣ уничтоженія радикаловъ въ уравненіяхъ (1) и (2) получается одно и то же уравненіе (7) предыдущаго §-а

$$(3) \qquad x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^2(a^2-c^2).$$

Что касается доказательства того, что линія (3) должна быть коническимъ сѣченіемъ, а именно гиперболой, то это доказательство будетъ проведено такъ же. Если мы разсмотримъ прямую, опредѣляемую уравненіемъ

$$(4) \qquad x=\frac{a}{e},$$

то мы получимъ, какъ и тогда

$$\frac{MK}{MF}=e,$$

причемъ число

$$e = \frac{c}{a}$$

будетъ больше единицы, ибо

$$c > a.$$

Точка F будетъ фокусомъ гиперболы, а прямая (4) ея директрисою.

Мы видѣли уже, что гипербола состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ частей, которыя мы называли вѣтвями. Не трудно убѣдиться, что уравненія (1) и (2) будутъ уравненіями этихъ двухъ вѣтвей, а именно уравненіе (1) будетъ давать точки на одной вѣтви, уравненіе (2) на другой вѣтви. Посмотримъ, какъ замѣтить, что линія должна состоять изъ двухъ вѣтвей, по уравненію (3). Такъ какъ въ данномъ случаѣ $a^2 - c^2$ есть число отрицательное, то придется положить

$$a^2 - c^2 = -b^2;$$

слѣдовательно, уравненіе (3) окончательно обратится въ такое

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

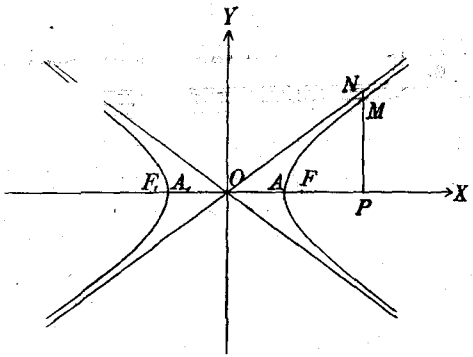
Знакъ — между членами и дѣлаетъ то, что линія состоитъ изъ двухъ различныхъ кусковъ, ибо съ осью x-овъ, имѣющей уравненіе

$$y = 0,$$

гипербола пересѣкается въ двухъ вещественныхъ точкахъ A и A_1 (черт. 45), называемыхъ вершинами. Эти вершины будутъ опредѣляться равенствомъ

$$x^2 = a^2,$$

и мы получимъ



Черт. 45.

$$x = +a \text{ и } x = -a.$$

Ось же y-овъ, опредѣляемая уравненіемъ

$$x = 0,$$

не пересѣкаетъ гиперболы, потому что будемъ имѣть

$$y^2 = -b^2,$$

откуда получаются мнимыя значенія для y.

Гипербола симметрична относительно обѣихъ осей координатъ и имѣетъ центръ симметріи въ началѣ координатъ. Изъ этой симметричности вытекаетъ существованіе второго фокуса F_1 и второй директрисы.

§ 78. Покажемъ, что существуютъ двѣ прямыя линіи, называемыя *ассимптотами*, съ которыми безконечныя вѣтви гиперболы стремятся слиться, никогда не достигая этихъ прямыхъ. Уравненіе совокупности ассимптотъ мы получимъ, если въ уравненіи (5) гиперболы замѣнимъ во второй части единицу на нуль, т. е. уравненіе совокупности ассимптотъ будетъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Послѣднее уравненіе можно переписать такъ

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0,$$

и поэтому мы получаемъ уравненіе ассимптотъ въ такомъ видѣ:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \text{ и } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

т. е. другими словами,

$$y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}x.$$

Чтобы показать, что гипербола дѣйствительно приближается къ ассимптотѣ, разсмотримъ разность MN ординатъ NP ассимптоты и MP гиперболы. MP равняется y, взятому изъ уравненія (5), т. е.

$$MP = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

$$NP = \frac{b}{a}x.$$

Отсюда

$$MN = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\,\frac{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

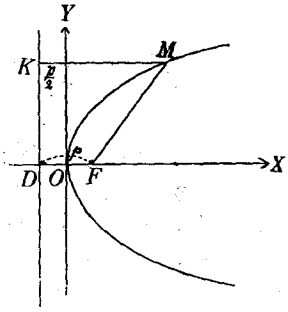
$$= \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Итакъ, мы видимъ, что MN уменьшается до нуля при безпредѣльномъ возрастаніи числа x.

Парабола.

§ 79. Задача. *Найти геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ заданной точки F и отъ заданной прямой D.*

Возьмемъ (черт. 46) за ось x-овъ перпендикуляръ, опущенный изъ заданной точки F на заданную прямую D, и направимъ этотъ перпендикуляръ отъ прямой D къ точкѣ F. Пусть p будетъ представлять разстояніе заданной точки F отъ прямой. Возьмемъ начало координатъ по серединѣ этого разстоянія, а ось y-овъ возьмемъ параллельно заданной прямой. Тогда возьмемъ какую нибудь точку M, принадлежащую къ искомому геометрическому мѣсту, и обозначимъ ея координаты черезъ x, y. Тогда будемъ имѣть равенство



Черт. 46.

$$MK = MF,$$

опредѣляющее свойство точки M геометрическаго мѣста. Мы имѣемъ

$$MK = \frac{p}{2} + x,$$

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

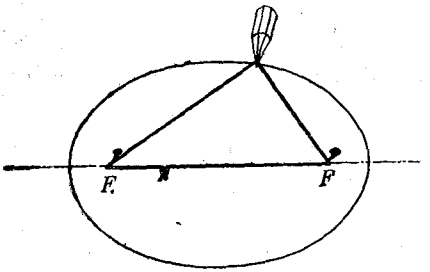
Итакъ, получаемъ уравненіе геометрическаго мѣста

$$(1) \qquad \frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Что это геометрическое мѣсто должно быть параболой, это слѣдуетъ изъ его опредѣленія, потому что въ этомъ случаѣ заданная точка F будетъ фокусомъ, а заданная прямая директрисой параболы. Освобождая уравненіе (1) отъ радикала, получимъ окончательное уравненіе параболы въ такомъ видѣ

$$y^2 = 2px.$$

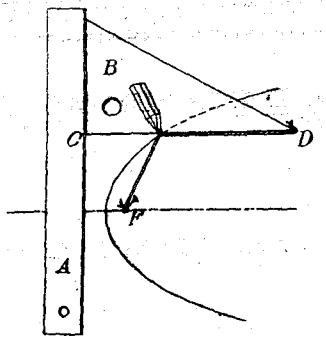
§ 80. На основаніи соображеній предыдущихъ §-овъ можно указать простые пріемы механическаго вычерчиванія коническихъ сѣченій.



Черт. 47.

Построеніе эллипса (черт. 47). Въ заданныхъ фокусахъ F и F_1 укрѣпляются двѣ иглы, вокругъ которыхъ обводится нитка, связанная концами. Если карандашъ держать такъ, чтобы его остріе поддерживало нитку въ натянутомъ состояніи, то передвигая его, мы вычертимъ эллипсъ.

§ 81. *Построеніе параболы* (черт. 48). Линейка A устанавливается вдоль по директрисѣ; треугольникъ B скользитъ вдоль по линейкѣ такъ, что его сторона CD остается постоянно перпендикулярной къ директрисѣ. Берется нитка FD длины, равной сторонѣ CD треугольника, и укрѣпляется концами въ фокусѣ F и концѣ D треугольника B. Если мы будемъ карандашемъ натягивать нитку, прижимая ее постоянно къ треугольнику B, то при движеніи треугольника вдоль по линейкѣ A, карандашъ будетъ описывать параболу.



Черт. 48.

§ 82. Можно указать аналогичное построеніе также для гиперболы; читатель легко самъ найдетъ такой способъ вычерчиванія гиперболы при помощи нитокъ, укрѣпленныхъ въ фокусахъ ея.

§ 83. Мы видимъ, что коническія сѣченія, эллипсъ, гипербола и парабола, опредѣляются уравненіями второй степени относительно координатъ. Эти уравненія суть частные случаи самаго общаго уравненія второй степени относительно координатъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{1}$$

Линіи, опредѣляемыя уравненіемъ второй степени (1), принято называть линіями *второго порядка*. Оказывается, что кромѣ коническихъ сѣченій не существуетъ другихъ кривыхъ линій вто-

рого порядка, но можно считать за линію второго порядка систему двухъ прямыхъ, опредѣляемую уравненіемъ

(2) $$(ax+by+c)(\alpha x+\beta y+\gamma)=0.$$

Уравненіе (2) представляетъ, очевидно, двѣ прямыя

$$ax+by+c=0,$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma=0.$$

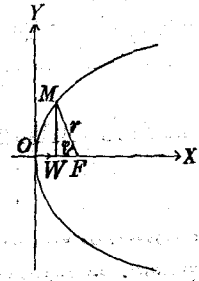
Систему двухъ прямыхъ потому можно считать линіей второго порядка, что послѣ раскрытія скобокъ въ правой части уравненія (2) получается уравненіе вида (1).

§ 84. Составимъ теперь уравненіе коническаго сѣченія, отнесеннаго къ оси симметріи, проходящей черезъ фокусы, и къ касательной въ вершинѣ. Обозначая черезъ x и y прямоугольныя координаты точки M (черт. 49) коническаго сѣченія, мы получимъ

$$x=OW=OF-WF;\ y=MW.$$

Но изъ прямоугольнаго треугольника MFW имѣемъ

$$WF=r\cos\varphi,$$
$$WM=r\sin\varphi.$$



Черт. 49.

Кромѣ того изъ полярнаго уравненія коническаго сѣченія

(1) $$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

при $\varphi=0$ получаемъ

$$OF=\frac{p}{1+e}.$$

Отсюда мы имѣемъ

(2) $$x=\frac{p}{1+e}-r\cos\varphi,$$

(3) $$y=r\sin\varphi.$$

Исключая изъ трехъ уравненій (1), (2) и (3) двѣ буквы r и φ, получимъ окончательно

(4) $$y^2=2px+qx^2,$$

гдѣ

$$q=e^2-1.$$

Для эллипса $q<0$.

Для параболы $q=0$.

Для гиперболы $q>0$.

Аналитическое изложеніе геометріи.

§ 85. Представимъ себѣ преподавателя, который придетъ въ аудиторію и начнетъ свои лекціи по геометріи такимъ образомъ:

„Назовемъ точкой совокупность трехъ вещественныхъ чиселъ (x, y, z)“.

Этого преподавателя нельзя остановить, сказавши, что онъ говоритъ неправильно, потому что терминъ „точка“ онъ употребилъ въ первый разъ и, поэтому, имѣетъ право подъ этимъ терминомъ подразумѣвать то, что онъ хочетъ. Если слушателямъ не нравится такое опредѣленіе точки, то они могутъ перестать слушать изложеніе преподавателя, но назвать неправильнымъ изложеніе не могутъ.

При этомъ преподаватель говоритъ, что онъ считаетъ разными двѣ точки, не только отличающіяся числами, но и порядкомъ этихъ чиселъ, такъ что онъ считаетъ двумя различными точками точки

$$(2, 3, 1) \text{ и } (3, 2, 1).$$

Далѣе, преподаватель заявляетъ, что будетъ называть трехмѣрнымъ пространствомъ совокупность всѣхъ точекъ (x, y, z), которыя получатся, если мы будемъ давать числамъ x, y, z всевозможныя вещественныя значенія. Опять терминъ „трехмѣрное пространство“ преподаватель ввелъ въ первый разъ, и, слѣдовательно, нельзя говорить, что трехмѣрное пространство что-то другое. Затѣмъ преподаватель заявляетъ, что онъ будетъ называть разстояніемъ двухъ точекъ (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) число, выражаемое формулой

$$(1) \qquad +\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Далѣе, прямую линію, соединяющую двѣ точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), онъ опредѣляетъ, какъ геометрическое мѣсто точекъ, числа которыхъ удовлетворяютъ двумъ уравненіямъ первой степени

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Далѣе, на этой прямой онъ считаетъ точку (x, y, z) лежащей между точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), если существуютъ неравенства

$$0<\frac{x-x_1}{x_2-x_1}<1 \text{ и т. д.}$$

Читатель уже догадывается на основаніи всего, что онъ прочелъ въ настоящей главѣ, что преподавателю, о которомъ идетъ рѣчь, удастся всю геометрію Эвклида изложить на числахъ и формулахъ безъ помощи чертежа и построенія. Слушатели могутъ добавлять къ изложенію преподавателя какія угодно геометрическія представленія, но преподаватель при своемъ изложеніи фактически не будетъ нуждаться въ этихъ представленіяхъ.

Изъ всего, что здѣсь сказано, я желаю вывести то важное заключеніе, что способъ аналитической геометріи даетъ возможность аналитическаго изложенія геометріи, не зависящаго отъ нашихъ пространственныхъ представленій. Эта независимость аналитическаго изложенія даетъ возможность посмотрѣть, если такъ можно выразиться, со стороны на наши пространственныя представленія; можно отнестись съ критикой къ этимъ представленіямъ. Такая критика сдѣлана была въ первый разъ нашимъ геніальнымъ соотечественникомъ Николаемъ Ивановичемъ Лобачевскимъ (1793—1856), который пришелъ къ выводамъ, въ высшей степени замѣчательнымъ. Оказалось, что внѣшняя природа, изъ которой мы черпаемъ наши пространственныя представленія, не навязываетъ этимъ представленіямъ какой либо вполнѣ опредѣленной формы. Геометрія Эвклида оказывается однимъ только изъ различныхъ видовъ логическихъ схемъ, въ которыя укладываются наши пространственныя представленія. Лобачевскій далъ другую геометрію, отличную отъ геометріи Эвклида, или, лучше сказать, онъ далъ безчисленное множество геометрій, отличныхъ отъ Эвклидовской, строго логичныхъ во всѣхъ своихъ частяхъ и не нарушающихъ нашихъ обычныхъ представленій о точкахъ, прямыхъ линіяхъ, плоскостяхъ и т. д. Геометріи Лобачевскаго оказываются уже не эвклидовскими, т. е. въ нихъ теоремы оказываются другими. Такъ, напримѣръ, сумма угловъ треугольника перестаетъ равняться двумъ прямымъ, она меньше двухъ прямыхъ.

Логичность во всѣхъ своихъ частяхъ геометріи Лобачевскаго обнаруживается въ томъ, что можно дать аналитическое изложеніе геометріи, соотвѣтствующее геометріи Лобачевскаго. Разница съ эвклидовскимъ изложеніемъ будетъ состоять въ томъ, что подъ разстояніемъ двухъ точекъ разсматривается уже не корень квадратный (1), а формула болѣе сложнаго вида.

Если читатель, не вдумавшись достаточно въ предметъ, сдѣлаетъ мнѣ возраженіе, что, по его мнѣнію, внѣшній міръ обяза-

тельно требуетъ употребленія геометріи Эвклида, потому что при производствѣ чертежей на бумагѣ мы убѣждаемся въ томъ, что сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ, то на такое возраженіе читателя нужно будетъ отвѣтить такъ: въ геометріи Лобачевскаго разница суммы угловъ съ двумя прямыми увеличивается по мѣрѣ увеличенія размѣровъ треугольника, малые же треугольники имѣютъ очень малую разницу. Такъ какъ всѣ построенія человѣческія заключаютъ неизбѣжныя ошибки—обыкновенно при практическомъ черченіи нельзя ручаться болѣе, чѣмъ за три цифры послѣ запятой, —то, слѣдовательно, такимъ неточнымъ способомъ, какъ наше построеніе, нельзя уловить разницу суммы угловъ треугольника отъ двухъ прямыхъ въ томъ случаѣ, если она мала, т. е. для малыхъ треугольниковъ. Эта разница можетъ сдѣлаться ощущительной при треугольникахъ со сторонами, равными разстояніямъ между планетами, но разсмотрѣніе такихъ треугольниковъ намъ непосредственно не доступно.

Итакъ, фактъ состоитъ въ томъ, что мы можемъ при нашихъ пространственныхъ представленіяхъ употреблять безразлично обѣ геометріи, Эвклида и Лобачевскаго; такъ какъ обѣ геометріи строго логичны въ всѣхъ своихъ частяхъ, то ошибки отъ приложенія той или другой геометріи быть не можетъ. При приложеніяхъ формулы будутъ разныя, но результаты, очевидно, не должны зависѣть отъ этихъ формулъ. Бо́льшая простота геометріи Эвклида при прочихъ равныхъ условіяхъ говоритъ, по моему мнѣнію, за то, что Эвклидовская геометрія будетъ, повидимому, всегда употребляться, какъ болѣе простое орудіе изслѣдованія.

Многомѣрныя геометріи.

§ 86. Изъ всего изложеннаго вытекаетъ, какъ слѣдствіе, что геометрія пространствъ, число измѣреній которыхъ больше трехъ, допускаетъ только аналитическій способъ изложенія. Наши наглядныя пространственныя представленія не могутъ уже служить пособіемъ для умозаключеній. Является поэтому вопросъ, имѣетъ ли серьезное значеніе изученіе многомѣрныхъ геометрій съ большимъ числомъ, чѣмъ три, измѣреній; не будетъ ли такое изученіе простою игрой въ формулы, не имѣющей никакого практическаго значенія? Новыя теченія въ наукѣ показываютъ, однако, важное въ трехъ отношеніяхъ значеніе многомѣрныхъ геометрій. Во первыхъ, въ чисто

философскомъ отношеніи, во вторыхъ, разсмотрѣніе многомѣрныхъ геометрій является полезнымъ при изложеніи многихъ математическихъ теорій, въ третьихъ, наука послѣдняго времени показала важность этихъ изслѣдованій для нахожденія новыхъ результатовъ.

Что касается значенія многомѣрныхъ геометрій при редактированіи нѣкоторыхъ математическихъ теорій, то это значеніе можно формулировать такъ. Когда приходится разсматривать теоріи, въ которыхъ формулы заключаютъ рядъ величинъ

$$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n,$$

то часто бываетъ полезно называть эти величины координатами нѣкоторой точки въ n-мѣрномъ пространствѣ. Такое геометрическое изложеніе теорій чисто аналитическихъ полезно въ томъ отношеніи, что читатель можетъ повѣрить излагаемую теорію на случаѣ

$$n = 3$$

и, такимъ образомъ, для этого случая иллюстрировать теорію при помощи наглядныхъ геометрическихъ образовъ.

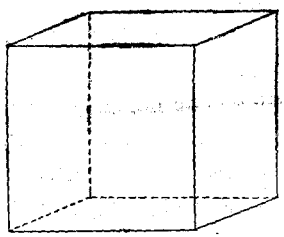
Помимо такого значенія съ точки зрѣнія редактированія изложенія математическихъ теорій, наука послѣдняго времени даетъ цѣлый рядъ фактовъ, обнаруживающихъ большое научное значеніе многомѣрныхъ геометрій. Я обращу вниманіе лишь на два такихъ факта. Первый фактъ относится къ теоріи алгебраическихъ поверхностей. Парижскій академикъ Picard нашелъ полезнымъ для установленія одного важнаго положенія этой теоріи перейти отъ нашего трехмѣрнаго пространства, въ которомъ расположена изучаемая алгебраическая поверхность, къ разсмотрѣнію пространства пятнадцати измѣреній съ тѣмъ, чтобы послѣ нахожденія результатовъ перевести эти результаты опять въ наше трехмѣрное пространство.

Второй фактъ, на которой я считаю своимъ долгомъ обратить вниманіе, состоитъ въ той пользѣ, которую многомѣрныя геометріи приносятъ современной теоріи чиселъ. Въ послѣднее время наука потеряла двухъ первокласныхъ ученыхъ, Вороного, профессора Варшавскаго унивеситета, и Миньковскаго, профессора университета въ Геттингенѣ. Эти два ученые достигли результатовъ первостепенной важности въ теоріи чиселъ, причемъ они оба были приведены къ своимъ открытіямъ геометрическими соображеніями, относящимися къ многомѣрнымъ геометріямъ.

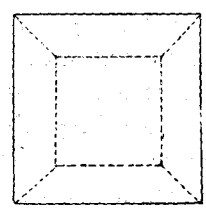
Одинъ изъ математиковъ, занимавшійся теоріей чиселъ, высказалъ такую мысль, что современная теорія чиселъ въ своихъ главныхъ задачахъ изучаетъ симметріи въ многомѣрныхъ простран-

ствахъ. Онъ же высказалъ ту мысль, что современная наука приближается къ тому состоянію, когда долженъ появиться сверхчеловѣкъ, который будетъ отчетливо мыслить въ геометріяхъ съ какимъ угодно числомъ измѣреній. При этомъ, конечно, въ геометріяхъ большого, чѣмъ три, числа измѣреній, этотъ человѣкъ не будетъ употреблять тѣхъ наглядныхъ пріемовъ представленія, которыми онъ пользуется въ трехмѣрной геометріи, ибо такія представленія невозможны, но это отсутствіе наглядныхъ представленій не помѣшаетъ ему оперировать въ многомѣрныхъ геометріяхъ съ тѣмъ же искуствомъ и съ той же увѣреностью, какъ въ трехмѣрной.

Чтобы не быть голословнымъ, я долженъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что правильныя фигуры, такъ называемые правильные многоячейники, для пространства четырехъ измѣреній уже изучены настолько хорошо, что сдѣланы модели проекцій въ наше трехмѣрное пространство всѣхъ правильныхъ многоячейниковъ изъ пространства четырехмѣрнаго. Чтобы въ нѣсколькихъ словахъ намекнуть, въ чемъ дѣло, представимъ себѣ правильные многогранники нашего пространства. Мы знаемъ, что такихъ многогранниковъ существуетъ пять: тетраэдръ, кубъ, октаэдръ, додекаэдръ и икосаэдръ. Возьмемъ сначала какой нибудь одинъ изъ нихъ, напримѣръ кубъ. Чтобы изобразить на плоскости наглядно кубъ, приходится, какъ мы это видимъ на черт. 50, разсматривать часть поверхности куба, какъ переднюю, а часть, какъ заднюю, такъ что кубъ изображается девятью линіями сплошными и тремя пунктирными, лежащими на задней сторонѣ куба. Можно всегда помѣстить глазъ съ передней стороны относительно какой нибудь грани куба настолько близко къ этой грани, чтобы передняя для зрителя часть куба составлялась изъ этой одной ближайшей грани, всѣ же остальныя грани были бы задними, какъ это показано на черт. 51. Если мы хотимъ получить фигуру, наиболѣе симметричную, то придется точку глаза взять на перпендикулярѣ, возставленномъ въ центрѣ передней грани. Если мы такъ поступимъ

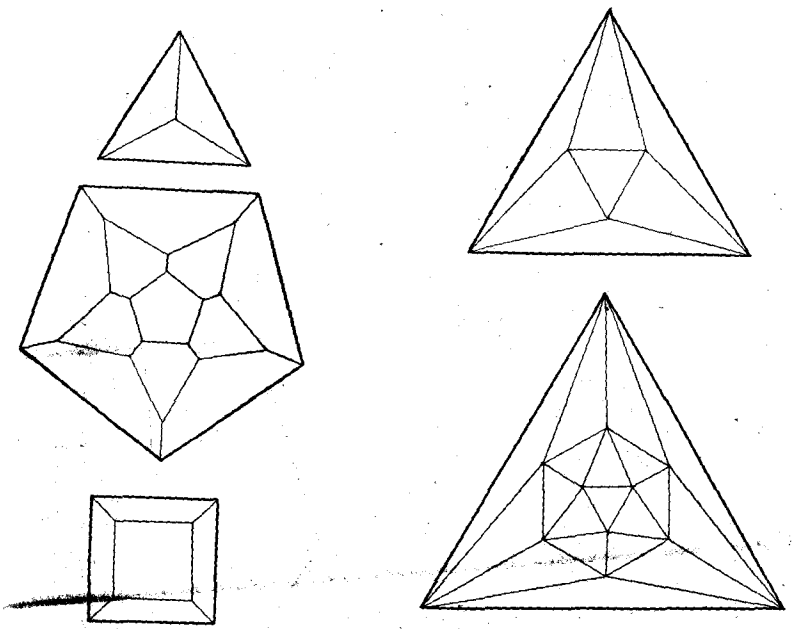


Черт. 50.



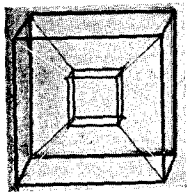
Черт. 51.

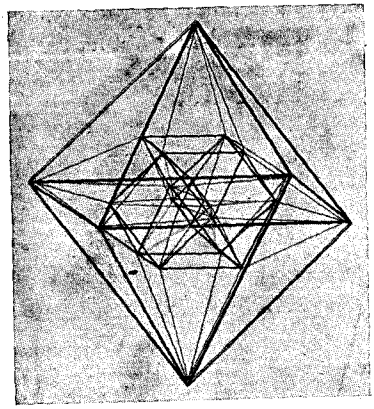
относительно всѣхъ пяти правильныхъ многогранниковъ, то получимъ слѣдующую таблицу пяти фигуръ (черт. 52).

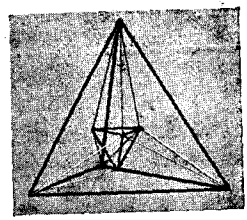


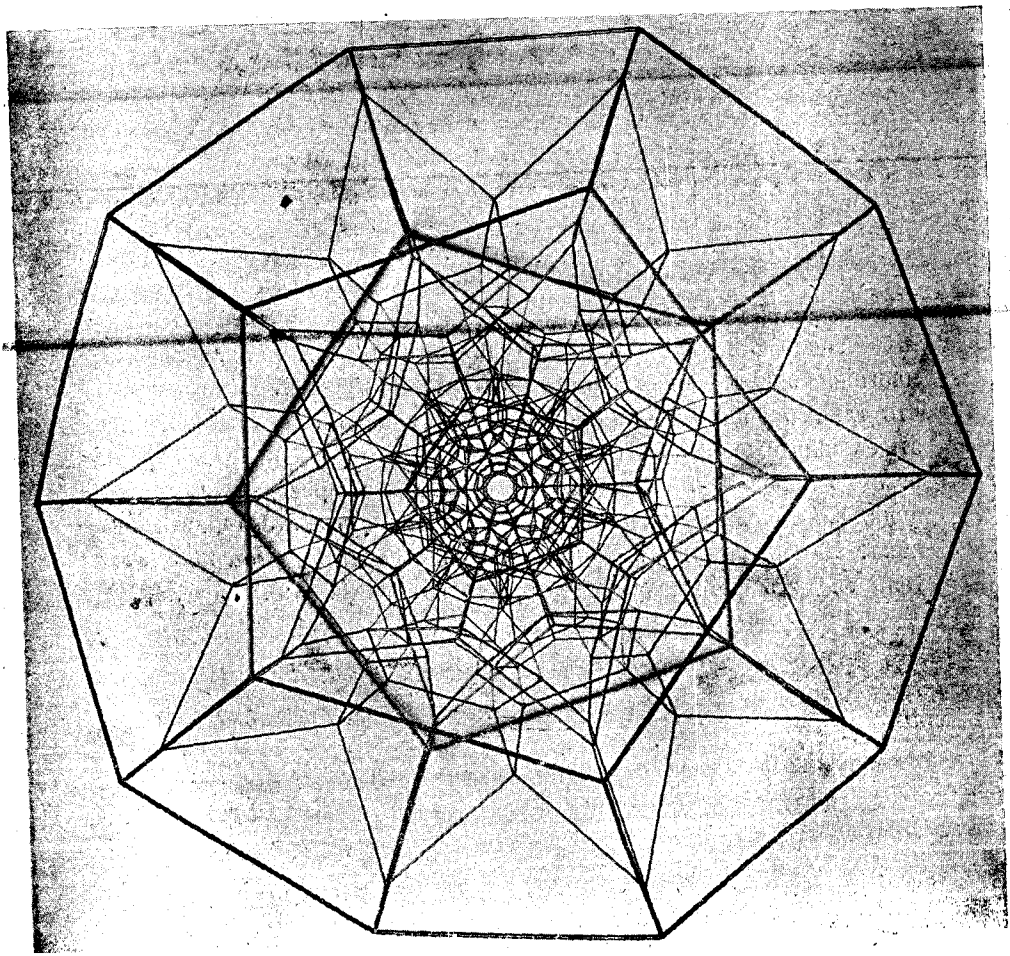
Черт. 52.

Точно такъ же можно поступить и относительно правильныхъ многоячейниковъ пространства четырехъ измѣреній. Оказывается, что такихъ многоячейниковъ существуетъ шесть. Модели проекцій этихъ многоячейниковъ составлены такъ, что роль передней грани играетъ передній многогранникъ трехмѣрнаго пространства; проекціи всѣхъ остальныхъ граней находятся внутри этого многогранника. На прилагаемомъ на слѣдующей страницѣ чертежѣ 53 читатель увидитъ фотографіи нѣкоторыхъ изъ числа этихъ моделей.









ГЛАВА III.

Анализъ безконечно-малыхъ.

§ 1. Изобрѣтеніе аналитической геометріи было началомъ блестящей эпохи математики XVII столѣтія, ознаменовавшейся цѣлымъ рядомъ открытій первостепенной важности. Эти открытія привели къ установленію новыхъ вычислительныхъ пріемовъ, получившихъ названіе *анализа безконечно-малыхъ*. Анализъ безконечно-малыхъ принялъ видъ двухъ исчисленій, весьма важныхъ по своимъ приложеніямъ и тѣсно связанныхъ между собою, такъ называемыхъ *дифференціальнаго* и *интегральнаго* исчисленій.

Основныя идеи анализа безконечно-малыхъ не были идеями совершенно новыми по существу, необходимо признать, что эти идеи, въ зачаточномъ своемъ состояніи, восходятъ еще къ древне-греческому періоду математики. Такъ, напримѣръ, Архимедъ пользовался методами, очень близкими къ методамъ современнаго интегральнаго исчисленія. Исторія математики наводитъ на мысль, что, повидимому, отсутствіе алгебры было главной помѣхой развитію идей анализа безконечно-малыхъ у древнихъ грековъ.

§ 2. Главная честь установленія идей новаго анализа принадлежитъ, несомнѣнно, англійской школѣ математиковъ съ Newton'омъ во главѣ. Newton не только нашелъ алгоритмъ новаго исчисленія, обнявшій большое число единичныхъ изслѣдованій и пріемовъ, употреблявшихся раньше, но и примѣнилъ этотъ алгоритмъ къ рѣшенію большого числа астрономическихъ и механическихъ вопросовъ. Эти приложенія новаго исчисленія Newton изложилъ въ своемъ безсмертномъ сочиненіи „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1687). Въ 1684 г. знаменитый нѣмецкій философъ Leibniz опубликовалъ мемуаръ подъ заглавіемъ: „Nova

methodus pro maximis et minimis itemqne tangentibus, quae nec fracta nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus". Этотъ мемуаръ замѣчателенъ тѣмъ, что, заключая тотъ же самый алгоритмъ, онъ облекаетъ этотъ алгоритмъ въ характерную форму при помощи удачно придуманныхъ знакоположеній. Несомнѣнно, что знакоположеніямъ Leibniz'а анализъ безконечно-малыхъ во многомъ обязанъ своимъ блестящимъ развитіемъ въ XVIII столѣтіи.

§ 3. Особенное значеніе имѣетъ открытіе анализа безконечно-малыхъ главнымъ образомъ потому, что этотъ анализъ открылъ эпоху приложеній математики къ изученію внѣшняго міра. Хотя несомнѣнно, что начала математики вызваны потребностями приложеній въ обыденной жизни человѣка, но долгое время роль математики въ натуральной философіи была не вполнѣ ясна. Тѣмъ не менѣе черезъ всю исторію науки проходитъ вѣра въ особенное значеніе приложеній математики. Начало этой вѣры теряется во мракѣ временъ. Стоитъ вспомнить древнихъ пиѳагорейцевъ, придававшихъ числамъ и геометрическимъ фигурамъ какое то мистическое значеніе. Сочиненіе Newton'а открыло эпоху перехода этой вѣры въ полное внутреннее убѣжденіе. Newton сознавалъ громадное прикладное значеніе новыхъ методъ и потому назвалъ пріемы приложенія этихъ методъ къ изученію природы „математическими принципами натуральной философіи".

§ 4. Книга Newton'а устанавливаетъ начала такъ называемой *аналитической механики*. Можно сказать, что Newton прибавилъ къ прежнимъ двумъ частямъ математики, анализу и геометріи, третью часть, механику, науку о движеніи и о причинахъ этого движенія. Аналитическая механика является, несомнѣнно, частью чистой математики, потому что, подобно анализу и геометріи, она устанавливаетъ рядъ опредѣленій и аксіомъ и изъ этихъ основныхъ положеній выводитъ слѣдствія путемъ математической выкладки и геометрическаго построенія. Подведеніе же изученія движенія, дѣйствительно имѣющаго мѣсто въ природѣ, подъ ту или другую задачу аналитической механики составляетъ предметъ такъ называемой прикладной механики.

Установленная Newton'омъ аналитическая механика получила въ XVIII столѣтіи блестящее развитіе, главнымъ образомъ подъ вліяніемъ изслѣдованій двухъ первостепенныхъ математиковъ, Euler'а и Lagrange'а. Lagrange первый далъ обстоятельный трак-

тать по аналитической механикѣ, носящій названіе „Mécanique analytique“ (1788). Прикладная механика также получила блестящее развитіе въ XVIII столѣтіи, къ концу котораго относится появленіе сочиненія Laplace'a „Traité de la mécanique céleste“ (1799), гдѣ Laplace развиваетъ приложенія аналитической механики къ астрономіи.

§ 5. Анализъ безконечно-малыхъ является, такимъ образомъ, той частью математики, которая вызвана къ жизни потребностями приложеній къ натуральной философіи, и все дальнѣйшее движеніе этого анализа впередъ совершается подъ вліяніемъ требованій, которыя ставятъ математикѣ эти приложенія.

§ 6. Обратимъ теперь вниманіе на тѣ новыя понятія, которыя анализъ безконечно-малыхъ беретъ изъ наблюденій окружающей природы.

Окружающая насъ жизнь проявляется въ перемѣнѣ и движеніи; поэтому новый анализъ, желая приблизиться къ возможности объясненія явленій окружающей жизни, долженъ былъ ввести новое понятіе о *перемѣнной величинѣ*. Въ изложеніи Newton'a перемѣнныя числа называются числами текущими, *quantitates fluentes*, причемъ Newton разсматриваетъ скорости, съ которыми текутъ перемѣнныя. Этимъ скоростямъ онъ даетъ названіе *флюксій* (fluxiones). Эти флюксіи и являются основнымъ понятіемъ новаго исчисленія.

§ 7. Второй принципъ, который анализъ безконечно-малыхъ беретъ изъ природы, есть принципъ *непрерывности*.

Наблюдая окружающую насъ жизнь, въ частности наблюдая тѣ движенія и перемѣны, въ которыхъ эта жизнь проявляется, мы изъ опыта приходимъ къ убѣжденію, что эти перемѣны и движенія совершаются безъ скачковъ или, какъ говорятъ въ математикѣ, *непрерывно*.

§ 8. Среди затрудненій, встрѣчающихся при приложеніи математики къ натуральной философіи, существуетъ одно громадное и, повидимому, неустранимое. Это затрудненіе мы назовемъ идеей безконечности. Безконечность проникаетъ во всѣ наши представленія о внѣшнемъ мірѣ. Она простирается въ обѣ стороны, въ сторону безконечно-большихъ, — безконечность пространства, въ которомъ двигаются небесныя тѣла, и въ сторону безконечно-малыхъ, въ сторону тайнъ молекулярнаго строенія матеріи.

Я назвалъ идею безконечности непреодолимымъ затрудненіемъ, ибо исторія математики, повидимому, учитъ, что разумъ че-

ловѣческій долженъ быть разсматриваемъ, какъ нѣчто конечное, и что ему дана возможность только косвеннымъ образомъ подходить къ уразумѣнію безконечности. Не имѣя силъ обнять идею безконечности во всемъ ея объемѣ, мы изучаемъ конечные факты, на которыхъ проявляется вліяніе безконечности, и такимъ образомъ мы стараемся составить себѣ понятіе, если не объ идеѣ безконечности въ самой себѣ, то, по крайней мѣрѣ, объ ея проявленіяхъ въ вещахъ конечныхъ.

Я поясню только что сказанное нѣсколькими примѣрами.

Если мы разсмотримъ совокупность конечнаго числа вещественныхъ чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots a_n,$$

то изъ этихъ чиселъ одно будетъ наименьшее изъ всѣхъ, и будетъ тоже существовать другое наибольшее. Всѣ остальныя числа будутъ заключаться между этими двумя, которыя мы назовемъ крайними.

Совершенно иначе можетъ обстоять дѣло, если въ совокупности безчисленное число элементовъ. Напримѣръ, разсмотримъ совокупность всѣхъ положительныхъ раціональныхъ правильныхъ дробей, т. е. чиселъ вида

$$\frac{m}{n},$$

гдѣ цѣлое число m меньше цѣлаго числа n. Всѣ эти правильныя дроби суть числа, лежащія въ границахъ между числами 0 и 1, причемъ эти послѣднія два числа не принадлежатъ къ совокупности, какъ не подходящія подъ опредѣленіе правильной дроби.

Очевидно, что совокупность правильныхъ дробей не имѣетъ крайнихъ элементовъ. Въ самомъ дѣлѣ, нельзя сказать, что нѣкоторая правильная дробь $\frac{m}{n}$ есть самая большая изъ всѣхъ, ибо можно написать дробь

$$\frac{m+1}{n+1},$$

которая будетъ также правильная и больше предыдущей. Подобнымъ же образомъ никакая дробь $\frac{p}{q}$ не можетъ быть наименьшею, ибо, если бы мы предположили, что дробь $\frac{p}{q}$ наименьшая, то получили бы противорѣчіе, такъ какъ дробь

$$\frac{p}{q+1}$$

еще меньше.

Итакъ, если совокупность вещественныхъ чиселъ состоитъ изъ конечнаго числа элементовъ, то существованіе крайнихъ элементовъ обязательно. При безконечномъ числѣ элементовъ пропадаетъ обязательность существованія крайнихъ элементовъ.

Какъ второй примѣръ, возьмемъ сложеніе чиселъ. Мы знаемъ изъ ариѳметики и алгебры, что сумма конечнаго числа слагаемыхъ не зависитъ отъ порядка сложенія. Совершенно иныя явленія происходятъ при сложеніи безконечнаго числа слагаемыхъ. Въ этомъ случаѣ не всегда сумма не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ. Иногда, производя суммированіе въ различныхъ порядкахъ, можемъ получить различныя суммы. Возможно бываетъ, устанавливая извѣстный порядокъ суммированія членовъ, получить въ видѣ суммы любое заданное число. Наконецъ, бываютъ случаи, когда ни при какомъ порядкѣ сложенія мы не получаемъ опредѣленной суммы.

Отсутствіе крайнихъ элементовъ совокупности и зависимость суммы отъ порядка сложенія, вотъ простые факты совершенно конечнаго характера, въ которыхъ играетъ роль идея безконечности.

Наконецъ, какъ третій примѣръ, припомнимъ, что мы сказали въ § 9 главы I о числахъ ирраціональныхъ. Эти числа находятся въ какихъ то промежуткахъ между числами раціональными. Длина этихъ промежутковъ равна нулю. У насъ нѣтъ никакой возможности представить себѣ ясно промежутокъ съ длиною нуль, между тѣмъ фактъ существованія такихъ промежутковъ налицо.

§ 9. Хотя основные принципы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій были установлены уже Newton'омъ и Leibniz'омъ, тѣмъ не менѣе пріемы изложенія, такъ сказать методика преподаванія этихъ исчисленій, измѣнялись втеченіе столѣтій; можно сказать, что нѣкоторые пункты изложенія получили окончательную формулировку только въ послѣднее время. Въ прежнія времена понятіе о безконечно-малой величинѣ, которое на каждомъ шагу встрѣчается въ дифференціальномъ и интегральномъ исчисленіи носило нѣсколько метафизическій, чтобы не сказать мистическій характеръ, теперь же изложеніе анализа безконечно-малыхъ значительно упрощено. Поэтому мы совѣтуемъ читателю, приступающему къ чтенію слѣдующихъ §-овъ, посвященныхъ изложенію анализа безконечно-малыхъ, отнестись къ дѣлу возможно проще,

не стараться искать какихъ нибудь туманныхъ произвольныхъ представленій, а слѣдить только точно за опредѣленіями, которыя будутъ даны дальше, и за математическими слѣдствіями изъ этихъ опредѣленій. Такъ напримѣръ, читатель долженъ разъ навсегда себѣ замѣтить, что подъ безконечно-малой величиной подразумѣвается перемѣнная величина, имѣющая предѣломъ нуль, и больше ничего.

Поэтому читатель долженъ отличать строго два понятія, только что указанное понятіе о безконечно-малой величинѣ, употребляемое въ анализѣ, и физическое понятіе объ очень малой величинѣ, т. е. о величинѣ малой въ сравненіи съ размѣрами нашего тѣла и съ продолжительностью нашей жизни. Такъ напримѣръ, размѣры нѣкоторой инфузоріи можно считать очень малыми по сравненію съ размѣрами нашего тѣла, но размѣръ тѣла всякой опредѣленной инфузоріи опредѣляется нѣкоторымъ числомъ, хотя и малымъ, но постояннымъ, и, слѣдовательно, не можетъ быть величиною безконечно-малой.

§ 10. Прежде чѣмъ перейти къ систематическому изложенію анализа безконечно-малыхъ, позволю себѣ въ нѣсколькихъ словахъ, хотя и не совсѣмъ строго, характеризовать сущность обоихъ исчисленій, дифференціальнаго и интегральнаго.

На основаніи вышеуказаннаго закона непрерывности мы замѣчаемъ, что жизнь переходитъ отъ всякой своей стадіи въ моментъ A времени къ нѣкоторой новой формѣ, соотвѣтствующей моменту B, при помощи непрерывнаго перехода черезъ всѣ промежуточныя картины.

Пояснимъ сказанное на примѣрѣ. Разсмотримъ ленту картины кинематографа, изображающей какую нибудь сцену изъ жизни, напримѣръ приближеніе поѣзда къ станціи. Извѣстно, что на лентѣ кинематографа находится рядъ большаго числа фотографій желѣзнодорожной станціи, снятыхъ черезъ очень малые промежутки времени, обыкновенно доли секунды. Разсмотримъ ту часть ленты, которая заключаетъ всѣ послѣдовательныя фотографіи отъ того момента, когда станція была пустая, до момента прихода на нее поѣзда. Если мы сравнимъ два рядомъ стоящихъ снимка нашей ленты, то мы въ нихъ почти не замѣтимъ разницы, эта разница очень мала, различіе же двухъ крайнихъ фотографій, пустой станціи и станціи, наполненной пассажирами, выходящими изъ прибывшаго поѣзда, очень значительно. Но не надо забывать, что

переходъ отъ первой картины къ послѣдней, значительно отъ нея отличающейся, совершился при помощи ряда малыхъ измѣненій черезъ промежуточныя картины.

Дифференціальное исчисленіе можно характеризовать, какъ такое исчисленіе, которое изучаетъ законы безконечно-малыхъ измѣненій, происходящихъ подъ вліяніемъ тѣхъ или другихъ причинъ въ безконечно-малые промежутки времени. Интегральное же исчисленіе стремится отъ этихъ безконечно-малыхъ измѣненій при помощи ихъ суммированія притти къ выводамъ относительно конечныхъ измѣненій, происходящихъ уже черезъ большіе промежутки времени.

Теорія предѣловъ.

§ 11. Пусть задана нѣкоторая совокупность Σ вещественныхъ чиселъ. Задать совокупность чиселъ, это значитъ указать правила, по которымъ относительно каждаго произвольно взятаго числа можно сказать, принадлежитъ ли оно къ этой совокупности или нѣтъ.

Если мы какое нибудь изъ чиселъ совокупности Σ, не указывая, которое именно, обозначимъ буквою x, то это буква выразитъ такъ называемую *перемѣнную величину*.

Каждое изъ чиселъ совокупности Σ будемъ называть *частнымъ значеніемъ* перемѣнной x.

§ 12. Пусть x_0 будетъ одно изъ частныхъ значеній x'а; мы будемъ говорить, что перемѣнная x получила частное значеніе x_0, если написано равенство

$$x = x_0.$$

§ 13. Обыкновенно устанавливается процессъ измѣненія перемѣнной, т. е. устанавливается послѣдовательность, въ которой перемѣнная принимаетъ свои частныя значенія. Мы устанавливаемъ, какія значенія перемѣнная принимаетъ раньше, какія позже. Такъ, напримѣръ, мы говоримъ, что перемѣнная возрастаетъ, если она принимаетъ бо́льшія значенія послѣ меньшихъ.

Очень часто процессъ измѣненія перемѣнной устанавливается нумерованіемъ частныхъ значеній

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n,\ \ldots$$

Такое нумерованіе, впрочемъ, возможно не всегда; когда оно возможно, то совокупность Σ носитъ названіе *перечислимой* или *нумерованной* (abzählbar).

Итакъ, въ случаѣ перечислимой совокупности

$$\Sigma; (x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$$

процессъ измѣненія перемѣнной можетъ состоять, напримѣръ, въ послѣдовательномъ увеличеніи нумера n.

§ 14. Перемѣнная, всѣ значенія которой одинаковы, носитъ названіе *постоянной* величины. Къ числу постоянныхъ величинъ относится также всякое опредѣленное число.

§ 15. Опредѣленіе. *Постоянное число a называется предѣломъ перемѣнной x, если при нѣкоторомъ процессѣ измѣненія перемѣнной численное значеніе разности*

$$x - a$$

можетъ быть сдѣлано меньше произвольно заданнаго положительнаго числа ε и при дальнѣйшемъ измѣненіи x оно останется меньше ε.

Предѣлъ обозначается знакомъ

$$a = lim\, x.$$

§ 16. Ограничимся во всемъ дальнѣйшемъ тѣмъ случаемъ, когда перемѣнная пробѣгаетъ перечислимую совокупность частныхъ значеній. Опредѣленіе предѣла можно въ этомъ случаѣ формулировать такъ:

Число a есть предѣлъ перемѣнной x_n, если всякому положительному числу ε можно сопоставить нѣкоторое цѣлое положительное число n такое, что при произвольномъ цѣломъ положительномъ числѣ p имѣетъ мѣсто неравенство

$$|x_{n+p} - a| < \varepsilon.$$

§ 17. Какъ слѣдствіе опредѣленія предѣла, получаемъ теорему:

Теорема. *Если перемѣнная x_n стремится къ нѣкоторому предѣлу a, то всякому положительному числу ε можно сопоставить такое цѣлое положительное число n, что при произвольномъ значеніи числа p будетъ*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Для доказательства замѣтимъ, что при достаточно большомъ n численныя значенія

$$x_{n+p} - a,\ x_n - a$$

будутъ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, слѣдовательно будетъ меньше ε численное значеніе разности

$$(x_{n+p} - a) - (x_n - a)$$

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

§ 18. Обратная теорема оказывается также справедливой.

Теорема. *Если всякому положительному числу ε можно сопоставить такое цѣлое число n, что при произвольномъ цѣломъ положительномъ p имѣетъ мѣсто неравенство*

(1) $$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,$$

то перемѣнная x_n при возрастаніи n стремится къ нѣкоторому предѣлу.

Эта теорема есть основная теорема всего анализа. Мы будемъ ее называть теоремой Bolzano-Cauchy по имени математиковъ, ее высказавшихъ. Мы не будемъ останавливаться въ нашемъ краткомъ изложеніи на ея доказательствѣ, скажемъ только, что это доказательство основано на фактѣ, указанномъ въ первой главѣ, а именно на томъ фактѣ, что точки, соотвѣтствующія вещественнымъ числамъ, какъ раціональнымъ, такъ и ирраціональнымъ, заполняютъ непрерывнымъ образомъ прямую. *) Понятіе о предѣлѣ играетъ важную роль уже въ элементарной математикѣ, гдѣ, между прочимъ, разсматривается окружность круга, какъ предѣлъ периметра вписаннаго многоугольника при возрастаніи числа его сторонъ.

§ 19. Перечислимъ рядъ основныхъ теоремъ, относящихся къ предѣламъ перемѣнныхъ.

Теорема. *Если перемѣнная x_n, возрастающая съ возрастаніемъ значка n, остается меньше опредѣленнаго числа A, то она стремится къ нѣкоторому предѣлу.*

Допустимъ, что эта перемѣнная не имѣетъ предѣла; тогда основное условіе (1) § 18 существованія предѣла не должно имѣть мѣста, т. е. мы должны отрицать возможность сопоставленія всякому числу ε числа n, другими словами, если не всякому числу ε можно сопоставить число n, то должно существовать по крайней мѣрѣ одно число ε_1, которому нельзя сопоставить требуемаго числа n. Что же значитъ, что числу ε_1 нельзя сопоставить числа

*) Для желающихъ познакомиться съ доказательствомъ теоремы Bolzano-Cauchy можно указать книгу: Введеніе въ анализъ. Ирраціональныя числа и предѣлы. Изъ лекцій, читанныхъ на Кіевскихъ Высшихъ Женскихъ Курсахъ профессоромъ Д. А. Граве. Кіевъ. 1910.

n такого, чтобы независимо отъ цѣлаго числа p имѣло мѣсто неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon_1?$$

Это значитъ, очевидно, что какое бы число n мы ни выбирали, будетъ по крайней мѣрѣ при одномъ цѣломъ числѣ p_1 противорѣчіе этому неравенству, т. е. другими словами всякому числу n можно будетъ сопоставить по крайней мѣрѣ одно цѣлое число p_1, при которомъ

$$|x_{n+p_1} - x_n| \geqslant \varepsilon_1.$$

Такъ какъ перемѣнная x_n возрастаетъ, то будетъ также

(1) $$x_{n+p_1} - x_n \geqslant \varepsilon_1;$$

подобнымъ же образомъ для числа $n + p_1$ можно найти новое число p_2, чтобы было

(2) $$x_{n+p_1+p_2} - x_{n+p_1} \geqslant \varepsilon_1$$

и т. д., такъ что мы получимъ неравенство

(3) $$x_{n+p_1+p_2+\ldots+p_k} - x_{n+p_1+p_2+\ldots\ldots+p_{k-1}} \geqslant \varepsilon_1;$$

отсюда, складывая, получимъ

$$x_{n+p_1+p_2+\ldots+p_k} \geqslant x_n + k\varepsilon_1.$$

Мы видимъ, что при достаточно большомъ k перемѣнная

$$x_{n+p_1+p_2+\ldots+p_k}$$

можетъ сдѣлаться сколь угодно большою, что противорѣчитъ предположенію, что она всегда остается меньше A.

Легко видѣть, что предѣлъ будетъ больше всякаго значенія перемѣнной x_n.

§ 20. Очевидно, что, *если перемѣнная, постоянно убывающая, остается больше нѣкотораго опредѣленнаго числа B, то она стремится къ нѣкоторому предѣлу, который будетъ меньше всякаго значенія перемѣнной.*

§ 21. Очень часто приходится имѣть дѣло съ двумя перемѣнными, имѣющими общій предѣлъ.

Теорема. *Если изъ двухъ перемѣнныхъ x_n, y_n первая постоянно возрастаетъ, а вторая убываетъ, причемъ разность $y_n - x_n$, будучи положительной, имѣетъ предѣломъ нуль, то перемѣнныя стремятся къ нѣкоторому общему предѣлу a.*

По условію теоремы при всякомъ p имѣемъ

$$y_{n+p} < y_n, \; x_{n+p} > x_n,$$
$$y_{n+p} > x_{n+p};$$

слѣдовательно

$$x_{n+p} < y_n,$$
$$y_{n+p} > x_n.$$

На основаніи теоремы § 19 перемѣнная x_{n+p} имѣетъ нѣкоторый предѣлъ a, ибо, возрастая съ возрастаніемъ p, она остается постоянно меньше y_n; подобнымъ же образомъ перемѣнная y_{n+p} имѣетъ нѣкоторый предѣлъ b, ибо, убывая, она остается постоянно больше x_n. Очевидно, что $a = b$, ибо невозможно предположить, что, напримѣръ,

$$b > a,$$

ибо тогда при существованіи неравенствъ

$$y_n > b, \; x_n < a$$

было бы

$$y_n - x_n > b - a,$$

что противорѣчитъ условію

$$lim\,(y_n - x_n) = 0.$$

§ 22. Разсмотримъ нѣкоторое число m перемѣнныхъ

$$x_1, x_2, \ldots\ldots x_m,$$

стремящихся соотвѣтственно къ предѣламъ

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_m.$$

Тогда можно высказать слѣдующій рядъ теоремъ.

Теорема I. *Предѣлъ алгебраической суммы равенъ суммѣ предѣловъ, т. е.*

$$lim\,(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m) = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_m.$$

Для доказательства теоремы представимъ разность

(1) $$(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m) - (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_m)$$

въ видѣ суммы разностей

(2) $$x_1 - a_1, \; x_2 - a_2, \ldots\ldots x_m - a_m.$$

Такъ какъ числа a_i суть предѣлы соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ x_i, то каждая изъ разностей (2) можетъ быть сдѣлана по абсолютной величинѣ меньше $\frac{\varepsilon}{m}$, гдѣ ε произвольно малое положительное число. Тогда, очевидно, разность (1) будетъ меньше ε, и справедливость теоремы доказана.

§ 23. Теорема II. *Предѣлъ произведенія равенъ произведенію предѣловъ, т. е.*

$$lim\,(x_1 x_2 \ldots x_m) = a_1 a_2 \ldots a_m.$$

Докажемъ сначала теорему для двухъ чиселъ x_1 и x_2 и разсмотримъ для этой цѣли разность

(1) $$x_1 x_2 - a_1 a_2.$$

Переписавъ ее въ видѣ

(2) $$x_1 (x_2 - a_2) + a_2 (x_1 - a_1),$$

мы замѣчаемъ, что, если черезъ a обозначимъ положительное число, которое больше всѣхъ численныхъ значеній x_1, достаточно близкихъ къ предѣлу a_1, то мы имѣемъ

$$|x_1 x_2 - a_1 a_2| < a|x_2 - a_2| + |a_2| \,.\, |x_1 - a_1|.$$

Сколь бы мало ни было число ε, если численныя значенія разностей

$$x_1 - a_1,\ x_2 - a_2$$

сдѣлаются меньше

$$\frac{\varepsilon}{a + |a_2|},$$

то тогда численная величина разности (1) будетъ меньше ε, и теорема доказана.

Доказавъ теорему для двухъ множителей, не трудно ее распространить на произвольное число множителей. Предположимъ, что теорема доказана для $m - 1$ множителей, т. е. что имѣетъ мѣсто равенство

(3) $$lim\,(x_1 x_2 \ldots x_{m-1}) = a_1 a_2 \ldots a_{m-1}.$$

Покажемъ справедливость равенства

$$lim\,(x_1 x_2 \ldots x_{m-1}\, x_m) = a_1 a_2 \ldots a_{m-1}\, a_m\,.$$

Обозначимъ для сокращенія

$$X = x_1 x_2 \ldots x_{m-1};$$

требуется доказать, что

(4) $$lim\,(X x_m) = a_1 a_2 \ldots a_{m-1} \,.\, a_m\,.$$

Но теорема для случая двухъ множителей доказана, слѣдовательно

$$lim\,(X \,.\, x_m) = lim\, X \,.\, lim\, x_m\,,$$

но

$$lim\, x_m = a_m\,,$$

а на основаніи формулы (3)

$$lim\, X = a_1\, a_2\, .\ .\ .\ a_{m-1};$$

отсюда слѣдуетъ справедливость формулы (4), и теорема доказана въ общемъ видѣ.

Примѣчаніе. Относительно теоремы о предѣлѣ суммы и произведенія перемѣнныхъ надо имѣть въ виду, что эти теоремы остаются справедливыми только тогда, когда число слагаемыхъ и множителей предполагается вполнѣ опредѣленнымъ и неизмѣннымъ при процессѣ измѣненія этихъ перемѣнныхъ. Если же число слагаемыхъ и множителей безпредѣльно возрастаетъ при приближеніи ихъ къ предѣламъ, то обѣ теоремы могутъ оказаться несправедливыми. Такъ, напримѣръ, сумма

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ .\ .\ .\ .\ + \frac{1}{m},$$

состоящая изъ m слагаемыхъ, постоянно имѣетъ значеніе равное 1, и, слѣдовательно, сумма имѣетъ предѣломъ 1 при безконечномъ возрастаніи числа m, а каждое изъ слагаемыхъ имѣетъ предѣломъ нуль.

Подобнымъ образомъ выраженіе

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

составленное изъ n множителей вида

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

не приближается къ предѣлу 1, къ которому приближаются всѣ его множители, ибо это выраженіе остается всегда больше двухъ, какъ это видно изъ разложенія по биному Ньютона

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\,.\,\frac{1}{n} + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{n^2} +$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ > 1 + n\,.\,\frac{1}{n} \text{ т. е.} > 2.$$

§ 24. Теорема III. *Предѣлъ частнаго равенъ частному предѣловъ, т. е.*

$$lim\,\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Справедливость теоремы слѣдуетъ изъ тождества

$$\frac{x_1}{x_2}-\frac{a_1}{a_2}=\frac{x_1 a_2 - x_2 a_1}{a_2 x_2}=\frac{(x_1-a_1)a_2-(x_2-a_2)a_1}{a_2 x_2}.$$

Въ этой теоремѣ предполагается, конечно, отличнымъ отъ нуля предѣлъ a_2, ибо при $a_2=0$ выраженіе $\frac{a_1}{a_2}$ не имѣетъ смысла.

§ 25. Теорема IV. *Предѣлъ степени равенъ степени предѣла, т. е.*

$$lim\left(x^{\alpha}\right)=a^{\alpha}.$$

Если показатель α есть цѣлое число, то теорема есть частный случай теоремы о предѣлѣ произведенія.

Теорема остается справедливою и въ случаѣ дробнаго или ирраціональнаго показателя. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ необходимо ограничиваться, чтобы не вводить въ разсмотрѣніе чиселъ комплексныхъ, такою перемѣнною x, которая остается всегда положительной и имѣетъ положительный предѣлъ a.

§ 26. Теорема. *Если перемѣнныя x и y стремятся соотвѣтственно къ предѣламъ a и b, то, если перемѣнная x постоянно не превосходитъ перемѣнную y, то и предѣлъ a не превосходитъ предѣла b.*

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ обратное, что

$$a>b,$$

и обозначимъ

$$a-b=k,$$

гдѣ k число положительное. Имѣемъ тождество

$$x-y=x-a-(y-b)+a-b,$$

или

$$x-y=x-a-(y-b)+k.$$

Обѣ разности

$$x-a \text{ и } x-b$$

могутъ быть сдѣланы по числовой величинѣ сколь угодно малыми, и вторая часть получитъ знакъ числа k, т. е. сдѣлается числомъ положительнымъ; выйдетъ $x>y$, что противорѣчитъ предположенію.

§ 27. Примѣнимъ теперь наши свѣдѣнія о предѣлахъ къ разсмотрѣнію одного новаго ирраціональнаго числа, которое мы будемъ называть e и которое составляетъ основаніе такъ называе-

мыхъ натуральныхъ логариѳмовъ. Въ виду того, что логариѳмы въ первый разъ были введены въ разсмотрѣніе извѣстнымъ математикомъ Napier'омъ (1550—1617) въ его сочиненіи „Mirifici logarithmorum canonis descriptio", натуральные логариѳмы носятъ также названіе *неперовыхъ*.

Мы будемъ разсматривать предѣлъ величины

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m,$$

гдѣ m безгранично возрастающее цѣлое число. Раскрывая по формулѣ для бинома, получимъ

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+m\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2}+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{m^3}+\ldots=1+1+\frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1.2}+$$

$$+\frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\ldots$$

Такъ какъ въ правой части послѣдняго равенства число членовъ возрастаетъ съ увеличеніемъ m, причемъ всѣ разности

$$(1)\qquad 1-\frac{1}{m},\ 1-\frac{2}{m},\ 1-\frac{3}{m},\ \ldots$$

также возрастаютъ, и всѣ члены остаются числами положительными, то мы заключаемъ, что перемѣнная

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

сама возрастаетъ съ увеличеніемъ числа m. Не трудно убѣдиться, что при этомъ возрастаніи перемѣнная остается меньше числа 3. Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя разности (1) единицами, мы всѣ члены правой части увеличимъ, и получится неравенство

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m};$$

уменьшая знаменатели всѣхъ дробей правой части неравенства замѣною цѣлыхъ чиселъ 3, 4, 5, . . . двойками, мы получимъ справедливое подавно неравенство

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}}$$

или

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1+\frac{1-\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда мы окончательно видимъ, что

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 3.$$

Итакъ, наша перемѣнная величина, возрастая, остается постоянно меньше числа 3, значитъ по теоремѣ § 19 она приближается къ нѣкоторому предѣлу, не превосходящему числа 3. Этотъ предѣлъ есть новое важное число анализа. Это число есть ирраціональное; кромѣ того, какъ было сказано въ § 28 главы I, въ послѣднее время выяснилось, что это число, обозначаемое всегда буквой e, есть трансцендентное число. Болѣе точный способъ вычисленія этого числа даетъ для него выраженіе

$$e = 2{,}718281828459\ldots$$

§ 28. Покажемъ теперь, что предѣлъ выраженія

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

остается числомъ e, какое бы ни было число n, цѣлое или дробное, положительное или отрицательное, лишь бы абсолютная его величина безпредѣльно возрастала.

Итакъ, предположимъ сначала, что n есть безпредѣльно возрастающая положительная величина, проходящая черезъ значенія какъ цѣлыя, такъ и дробныя. Если n число дробное, то оно заключается между двумя послѣдовательными цѣлыми числами m и $m+1$, такъ что

$$m < n < m+1; \tag{2}$$

неравенство $n < m+1$ показываетъ, что съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ числа n цѣлое число m также возрастаетъ. На основаніи неравенствъ (2) будетъ

$$1+\frac{1}{m} > 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{m+1},$$

отсюда подавно

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}.$$

Но

$$lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} . \; lim\left(1+\frac{1}{m}\right) = e.1 = e,$$

$$lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} = \frac{lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

слѣдовательно, перемѣнная

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

заключающаяся между двумя перемѣнными, имѣющими одинъ и тотъ же предѣлъ e, должна имѣть тотъ же предѣлъ, т. е.

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Остается показать теперь, что предѣлъ перемѣнной (1) будетъ e при n отрицательномъ, возрастающемъ по абсолютной величинѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $n = -\nu$, гдѣ $\nu > 0$; мы получимъ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^{\nu} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu} = \left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1} . \left(1+\frac{1}{\nu-1}\right).$$

Выраженіе

$$\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}$$

имѣетъ предѣломъ e, потому что $\nu - 1$ безпредѣльно возрастающее положительное число, а

$$lim\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right) = 1,$$

слѣдовательно

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Если мы обозначимъ черезъ α дробь $\frac{1}{n}$, то при возрастаніи абсолютной величины n до безконечности величина α будетъ при-

ближаться къ нулю, и мы можемъ резюмировать все вышесказанное формулой

$$\lim_{\alpha=0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e,$$

причемъ предѣлъ не зависитъ отъ закона, по которому мы приближаемъ α къ нулю.

§ 29. Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію предѣла

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

гдѣ x произвольное положительное или отрицательное вещественное число, а n безпредѣльно возрастающее цѣлое число. Обозначимъ $\frac{x}{n}=\alpha$, тогда

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=(1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}}=\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x,$$

отсюда, приближая къ предѣлу, получимъ

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left[\lim_{\alpha=0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x=e^x.$$

Получаемъ слѣдующую весьма важную теорему, состоящую въ томъ, что трансцендентная величина e^x выражается, какъ предѣлъ алгебраической формулы

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

О предѣлахъ чиселъ комплексныхъ.

§ 30. Будемъ разсматривать перемѣнную x, принимающую комплексныя частныя значенія. Понятіе о предѣлѣ комплексной перемѣнной установимъ совершено такъ же, какъ это было сдѣлано въ § 15 для вещественной перемѣнной. Вся разница будетъ состоять только въ томъ, что вмѣсто словъ *абсолютное значеніе* вещественнаго числа будемъ употреблять слово *модуль* комплекснаго числа. Очевидно, что такимъ образомъ всѣ соображенія о предѣлахъ дѣйствительныхъ чиселъ будутъ частными случаями соображеній о предѣлахъ чиселъ комплексныхъ.

§ 31. Опредѣленіе. *Постоянное вещественное или комплексное число* a *называется предѣломъ комплексной перемѣнной* x, *если при нѣкоторомъ процессѣ измѣненія перемѣнной* x *модуль разности*

$$x - a$$

можетъ быть сдѣланъ меньше произвольно заданнаго положительнаго числа ε *и при дальнѣйшемъ измѣненіи остается меньше* ε.

Какъ и въ случаѣ вещественныхъ чиселъ мы будемъ обозначать предѣлъ знакомъ

$$a = lim\, x.$$

§ 32. Ограничиваясь во всемъ дальнѣйшемъ случаемъ, когда перемѣнная x пробѣгаетъ перечислимую совокупность значеній, мы можемъ опредѣленіе предѣла въ случаѣ комплексныхъ чиселъ формулировать буквально такъ же, какъ это сдѣлано въ § 16:

Число a *есть предѣлъ перемѣнной* x_n, *если всякому положительному числу* ε *можно сопоставить нѣкоторое цѣлое положительное* n *такое, что при произвольномъ цѣломъ числѣ* p *имѣетъ мѣсто неравенство*

$$|x_{n+p} - a| < \varepsilon.$$

Здѣсь, конечно, знакомъ

$$|x_{n+p} - a|$$

выражается уже модуль комплекснаго числа $x_{n+p} - a$.

§ 33. Теорема. *Необходимое и достаточное условіе того, что число* $a = \alpha + \beta i$ *есть предѣлъ перемѣнной* $x_n = \xi_n + i\eta_n$, *состоитъ въ томъ, что вещественная часть* α *предѣла* a *есть предѣлъ вещественной части* ξ_n *перемѣнной* x_n, *а мнимая часть* β *есть предѣлъ мнимой части* η_n.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$x_n - a = (\xi_n - \alpha) + i(\eta_n - \beta),$$

$$|x_n - a| = +\sqrt{(\xi_n - \alpha)^2 + (\eta_n - \beta)^2},$$

отсюда неравенство

(1) $$|x_{n+p} - a| < \varepsilon$$

влечетъ за собою неравенства

$$|\xi_{n+p} - \alpha| < \varepsilon, |\eta_{n+p} - \beta| < \varepsilon,$$

откуда слѣдуетъ необходимость теоремы.

Съ другой стороны изъ очевиднаго неравенства

$$+\sqrt{(\xi_n - \alpha)^2 + (\eta_n - \beta)^2} \leqslant |\xi_n - a| + |\eta_n - \beta|$$

получаемъ

$$|x_{n+p} - a| < |\xi_{n+p} - \alpha| + |\eta_{n+p} - \beta|,$$

отсюда неравенства

$$|\xi_{n+p} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\eta_{n+p} - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

влекутъ, какъ слѣдствіе, неравенство (1), откуда слѣдуетъ достаточность теоремы.

§ 34. Основная теорема § 18 остается справедливою и для чиселъ комплексныхъ, а именно мы получаемъ теорему.

Если всякому положительному числу ε можно сопоставить такое цѣлое число n, что при произвольномъ цѣломъ положительномъ p имѣетъ мѣсто неравенство

(1) $$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,$$

то перемѣнная x_n при возрастаніи n стремится къ нѣкоторому предѣлу.

Въ самомъ дѣлѣ

$$x_{n+p} - x_n = \xi_{n+p} - \xi_n + i(\eta_{n+p} - \eta_n);$$

неравенство (1) влечетъ за собою, какъ слѣдствіе, два слѣдующихъ

$$|\xi_{n+p} - \xi_n| < \varepsilon,$$

$$|\eta_{n+p} - \eta_n| < \varepsilon.$$

Отсюда мы видимъ на основаніи теоремы § 18, что обѣ вещественныя перемѣнныя ξ_n и η_n имѣютъ предѣлы, значитъ на основаніи предыдущаго §-а и вся комплексная перемѣнная x_n имѣетъ предѣлъ.

Итакъ мы видимъ, что только что указанная теорема представляетъ основной принципъ теоріи предѣловъ; она даетъ условіе необходимое и достаточное для существованія предѣла заданной перемѣнной.

Основанія теоріи рядовъ.

§ 35. Положимъ, что мы имѣемъ безконечный рядъ

(1) $$u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$$

какихъ угодно чиселъ вещественныхъ или комплексныхъ и по этимъ числамъ составленъ второй рядъ чиселъ

$$s_1 = u_0,$$

$$s_2 = u_0 + u_1,$$

$$s_3 = u_0 + u_1 + u_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Если сумма s_n приближается къ нѣкоторому предѣлу s при безпредѣльномъ возрастаніи n, то будемъ, во первыхъ, рядъ (1) называть *сходящимся*, во вторыхъ, число s будемъ называть *суммою* этого ряда и, въ третьихъ, будемъ писать

$$(2) \qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$$

Если же при безпредѣльномъ возрастаніи n сумма s_n не приближается ни къ какому предѣлу, то рядъ (1) будемъ называть *расходящимся* и не имѣющемъ суммы.

Равенство (2) мы будемъ иначе записывать символомъ

$$s = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n = \sum u_n.$$

§ 36. Основная теорема о предѣлахъ даетъ признакъ необходимый и достаточный для сужденія о сходимости ряда. Мы получаемъ

$$s_{n+p} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots + u_{n+p-1}.$$

Отсюда получаемъ основной признакъ сходимости ряда.

Рядъ будетъ сходиться, если всякому положительному числу ε можно сопоставить столь большое цѣлое число n что при произвольномъ цѣломъ p будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots u_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

Но очевидно, что этотъ признакъ сопряженъ со значительными неудобствами въ приложеніи къ частнымъ случаямъ; поэтому различными математиками было предложено большое число болѣе простыхъ признаковъ сходимости. Всѣ эти признаки уступаютъ, однако, указанному основному принципу въ томъ отношеніи, что существуютъ ряды, для которыхъ эти признаки неприложимы.

Имѣя въ виду изложеніе лишь основныхъ положеній теоріи рядовъ, я ограничусь изложеніемъ весьма небольшого числа самыхъ важныхъ признаковъ сходимости. Подобнымъ же образомъ я буду пока исключительно разсматривать ряды съ постоянными членами и не буду пока касаться рядовъ, члены которыхъ заключаютъ перемѣнныя величины.

§ 37. Теорема. *Необходимымъ условіемъ сходимости ряда* $\sum u_n$ *является*

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Справедливость теоремы слѣдуетъ изъ основного признака предыдущаго §-а, если будемъ считать $p = 1$.

§ 38. Начнемъ со случая рядовъ, всѣ члены которыхъ положительны.

Пусть заданъ рядъ

(1) $$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots,$$

члены котораго a_0, a_1, a_2, ... всѣ положительны. Очевидно, что сумма

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots\ldots + a_{n-1}$$

n первыхъ членовъ такого ряда съ возрастаніемъ значка n возрастаетъ.

Теорема. *Если рядъ съ положительными членами расходится, то сумма n первыхъ его членовъ при возрастаніи числа n можетъ быть сдѣлана сколь угодно большою.*

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что сколь бы большое положительное число N мы ни взяли, всегда можно указать столь большое цѣлое число n, чтобы было

(2) $$s_n > N.$$

Допустимъ обратное, а именно, что не для всякаго положительнаго числа N существуетъ неравенство (2), т. е. предположимъ, что мы указали такое положительное число N_1, что ни при какомъ n величина s_n не превосходитъ числа N_1. Такимъ образомъ, мы имѣемъ нѣкоторую перемѣнную величину s_n, которая возрастаетъ, но остается меньше конечнаго числа N_1; но, на основаніи теоремы § 19, подобная перемѣнная должна имѣть предѣлъ s, значитъ, рядъ (1) будетъ сходящимся, что противорѣчитъ предположенію. Итакъ, перемѣнная s_n, возрастая, должна превзойти всякое положительное число, сколь большимъ бы оно ни было задано. Это обстоятельство мы будемъ записывать равенствомъ

$$s = +\infty.$$

§ 39. Въ § 37 мы видѣли, что необходимымъ признакомъ сходимости ряда является равенство

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Не трудно на простомъ примѣрѣ убѣдиться въ *недостаточности* этого признака для рядовъ съ положительными членами. Такой примѣръ даетъ такъ называемый гармоническій рядъ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Несмотря на то, что общій членъ $\frac{1}{n}$ при безпредѣльномъ увеличеніи n стремится къ нулю, рядъ расходится. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ $n = 2m$, тогда сумму n первыхъ членовъ можно будетъ написать такъ

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right),$$

откуда получаемъ неравенство

$$s_n > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right),$$

или

$$s_n > 1 + \frac{m}{2}.$$

Такъ какъ число m можетъ быть сколь угодно большимъ, то, слѣдовательно, возрастаетъ безпредѣльно s_n, и *рядъ гармоническій расходится.*

§ 40. Весьма важный случай сходящагося ряда представляетъ безконечно убывающая прогрессія

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots,$$

гдѣ $q < 1$. По извѣстной формулѣ имѣемъ

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

и въ предѣлѣ

$$s = \lim_{n=\infty} s_n = \lim \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Очевидно, что если $q > 1$, то геометрическая прогрессія будетъ рядомъ расходящимся.

§ 41. Изъ всего предыдущаго вытекаютъ слѣдующія очевидныя предложенія.

I. Если каждый членъ ряда

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

съ положительными членами менѣе соотвѣтствующаго ему члена другого такого же ряда

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots,$$

такъ что

$$a_n < b_n,$$

и если второй рядъ сходится, то и первый сходится.

II. Если будетъ постоянно

$$a_n > b_n,$$

а второй рядъ расходится, то и первый будетъ расходиться.

III. Какъ частный случай этихъ теоремъ, получается, что черезъ отбрасываніе изъ сходящагося ряда конечнаго или безконечнаго числа членовъ получается рядъ также сходящійся.

§ 42. Приведемъ еще одну весьма важную для приложеній теорему.

Рядъ

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \ldots$$

сходится, если $k > 1$, *и расходится, если* $k \leqslant 1$.

Въ самомъ дѣлѣ, можемъ написать нашъ рядъ такъ:

$$s = 1 + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) + \left(\frac{1}{4^k} + \ldots + \frac{1}{7^k}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{8^k} + \ldots + \frac{1}{15^k}\right) + \ldots$$

Въ каждой изъ скобокъ первый членъ есть наибольшій, а число членовъ въ первой скобкѣ 2, а во второй 4, въ третьей 8 и т. д. Очевидно, получимъ

$$s < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^k} + 4 \cdot \frac{1}{4^k} + 8 \cdot \frac{1}{8^k} + \ldots$$

или иначе

$$s < 1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^3 + \ldots .$$

Въ правой части нашего неравенства находится геометрическая прогрессія; такъ какъ по предположенію $k > 1$, то, слѣдовательно,

$$\frac{1}{2^{k-1}} < 1,$$

значитъ прогрессія имѣетъ конечную сумму, а, слѣдовательно, и заданный рядъ имѣетъ конечную сумму s.

Расходимость ряда въ случаѣ $k = 1$ нами была показана уже выше въ § 39. Остается разсмотрѣть случай $k < 1$; но тогда

$$\frac{1}{2^k} > \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3^k} > \frac{1}{3},$$

$$\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n^k} > \frac{1}{n},$$

$$\ldots\ldots$$

и, слѣдовательно, на основаніи теоремы II § 41, рядъ будетъ подавно расходящимся.

§ 43. При выводѣ большинства признаковъ сходимости примѣняютъ теоремы § 41, т. е. сравниваютъ заданный рядъ

(1) $$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

съ другимъ рядомъ

(2) $$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

выбраннымъ такъ, чтобы его сходимость или расходимость была извѣстна. Самые простые признаки получаются при сравненіи даннаго ряда съ геометрической прогрессіей.

Положимъ, что для всѣхъ значковъ, начиная съ $n = m$, до безконечности будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha < 1,$$

т. е. что отношеніе всякаго послѣдующаго члена къ его предыдущему остается меньше нѣкотораго положительнаго числа $\alpha < 1$, тогда рядъ (1) будетъ сходящимся.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} < \alpha, \text{ слѣдовательно, } a_{m+1} < a_m \cdot \alpha,$$

$$\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} < \alpha, \quad \text{„} \quad a_{m+2} < a_{m+1} \cdot \alpha < a_m \cdot \alpha^2,$$

$$\frac{a_{m+3}}{a_{m+2}} < \alpha, \quad \text{„} \quad a_{m+3} < a_{m+2} \cdot \alpha < a_m \cdot \alpha^3,$$

. . . . . .

. . . . . .

Примѣняя основную теорему о предѣлахъ, замѣчаемъ, что при $n > m$ мы имѣемъ

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p-1} &< a_n (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{p-1}) \\ &< a_n (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{p-1} + \ldots) \\ &< a_n \cdot \frac{1}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Но, такъ какъ

$$a_n < a_m \alpha^{n-m},$$

то

$$(3) \qquad a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n+p-1} < a_m \frac{\alpha^{n-m}}{1-\alpha};$$

по предположенію $\alpha < 1$, слѣдовательно правая часть при возрастаніи n дѣлается сколь угодно малою независимо отъ числа p, а потому, на основаніи § 36, рядъ (1) сходится. Такимъ образомъ мы приходимъ къ теоремѣ.

Теорема d'Alambert'a. *Если въ рядѣ съ положительными членами*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

начиная съ нѣкотораго значка $n=m$ и для всѣхъ за нимъ слѣдующихъ членовъ отношеніе всякаго члена къ предшествующему ему

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

меньше нѣкотораго числа $\alpha < 1$, то рядъ сходящійся.

Не трудно видѣть, что если отношеніе

$$\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

начиная съ нѣкотораго n, остается больше 1, то рядъ расходящійся, ибо тогда

$$a_{n+1} > a_n,$$

и общій членъ ряда не стремится къ нулю.

§ 44. Чтобы пользоваться приведеннымъ въ предыдущемъ §-ѣ признакомъ, поступаютъ на практикѣ обыкновенно такъ. Ищутъ предѣлъ отношенія

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

при $n = \infty$. Если этотъ предѣлъ, который мы обозначимъ черезъ λ, окажется *неравнымъ* 1, то рядъ *сходится*, когда $\lambda < 1$, и *расходится*, когда $\lambda > 1$. Дѣйствительно, если $\lambda \neq 1$, то можно взять за α произвольное число между λ и 1, тогда отношеніе

$$\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

стремясь къ предѣлу λ, при $\lambda < 1$ сдѣлается, начиная съ нѣкотораго значка $n = m$, числомъ, меньшимъ α, и рядъ будетъ, на основаніи предыдущаго §-а, сходиться. Если же $\lambda > 1$, то отношеніе

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

сдѣлается и останется больше 1, и рядъ будетъ расходиться.

§ 45. При такомъ примѣненіи признака, когда разсматривается предѣлъ λ отношенія

$$\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

въ случаѣ $\lambda = 1$ можетъ остаться сомнѣніе, ибо въ этомъ случаѣ между 1 и λ нельзя поставить никакого числа α, отличнаго отъ 1, и разсужденіе предыдущаго §-а не имѣетъ мѣста.

Въ подобномъ сомнительномъ случаѣ рядъ можетъ быть какъ сходящимся, такъ и расходящимся. Такъ напримѣръ для гармоническаго ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

имѣемъ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

При n безконечно большомъ это отношеніе, хотя и меньше 1, но безконечно близко къ 1, и по предыдущей теоремѣ мы не можемъ судить о сходимости или расходимости этого ряда; мы видѣли изъ другихъ соображеній, что рядъ *расходится*.

Для ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\ldots$$

отношеніе

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

также имѣетъ своимъ предѣломъ 1, между тѣмъ мы видѣли, что этотъ рядъ *сходится*.

Весьма важно замѣтить, что, *если* $\lambda=1$, *и отношеніе членовъ приближается къ 1, оставаясь больше 1, то рядъ будетъ расходящимся.*

§ 46. *Примѣръ I.* Разсмотримъ рядъ

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{x_n}{1.2\ldots\ldots n}+\ldots$$

гдѣ x произвольное положительное число. Примѣняя выведенный признакъ сходимости, получаемъ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{n+1};$$

при $n=\infty$ получаемъ

$$lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=0.$$

Такъ какъ нуль есть число меньшее единицы, то мы замѣчаемъ, что заданный рядъ *сходящійся*.

Примѣръ II. Разсмотримъ рядъ

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\ldots$$

Для этого ряда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}x,$$

отсюда

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x.$$

Итакъ, мы видимъ, что нашъ рядъ сходится для $x < 1$ и расходится для $x \geqslant 1$.

§ 47. Сравненіе даннаго ряда съ геометрической прогрессіей можно производить еще иначе, причемъ мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Теорема Cauchy. *Рядъ изъ положительныхъ членовъ*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

сходится, если корень n-ой степени изъ члена a_n, т. е. величина

$$\sqrt[n]{a_n},$$

начиная съ нѣкотораго значенія n остается меньше постояннаго числа α, меньшаго единицы, и расходится, если указанный радикалъ, начиная съ нѣкотораго значенія n, остается больше единицы.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, начиная съ нѣкотораго $n = m$, будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} < \alpha < 1,$$

тогда

$$a_n < \alpha^n < 1,$$

и члены заданнаго ряда меньше соотвѣтственныхъ членовъ убывающей геометрической прогрессіи; но такая прогрессія есть рядъ сходящійся, слѣдовательно, сходится и заданный рядъ.

Обратно, если, начиная съ нѣкотораго мѣста,

$$\sqrt[n]{a_n} > 1,$$

то

$$a_n > 1,$$

и, слѣдовательно, мы получаемъ противорѣчіе съ необходимымъ условіемъ

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

значитъ, заданный рядъ расходится.

§ 48. Мы разсматривали ряды съ положительными членами. Относительно этихъ рядовъ существуетъ слѣдующее основное предложеніе. *Сумма ряда съ положительными членами не зависитъ отъ порядка членовъ,* такъ что сумма такого ряда, будучи суммой

безконечнаго числа слагаемыхъ, обладаетъ тѣмъ не менѣе перестановочнымъ закономъ конечной суммы.

Переходя къ рядамъ, члены которыхъ могутъ быть разныхъ знаковъ, мы встрѣчаемся въ первый разъ въ анализѣ съ фактомъ, о которомъ было выше упомянуто, а именно, что сумма ряда можетъ зависѣть отъ порядка слагаемыхъ. Отсылая для болѣе подробнаго знакомства къ моей книгѣ „Введеніе въ анализъ", мы поясним сказанное обстоятельство на одномъ частномъ примѣрѣ.

Возьмемъ рядъ

$$(1) \qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\ldots$$

Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы увидимъ, что этотъ рядъ имѣетъ суммой $lg2$, гдѣ логариѳмъ взятъ при основаніи e.

Покажемъ, что если мы переставимъ члены такимъ образомъ:

$$(2) \qquad 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots$$

т. е. такъ, что за каждыми двумя послѣдовательными положительными членами слѣдуетъ одинъ отрицательный, то получится для ряда другая сумма s. Въ самомъ дѣлѣ, ряды (1) и (2) можно будетъ записать знаками

$$lg\,2=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right),$$

$$s=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right);$$

отсюда

$$s=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)=lg\,2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=lg\,2+\frac{1}{2}\,lg\,2=\frac{3}{2}\,lg\,2.$$

Итакъ, сумма s второго ряда (2) не равна суммѣ $lg\,2$ перваго ряда (1).

§ 49. Указанное обстоятельство дѣлаетъ необходимымъ разбить сходящіеся ряды на двѣ категоріи. Одни, въ которыхъ сумма не зависитъ отъ порядка членовъ, называются *абсолютно сходящимися*. Другіе сходящіеся ряды, въ которыхъ сумма можетъ зависѣть отъ порядка членовъ, носятъ названіе *условно сходящихся*. Сходящіеся ряды съ положительными членами принадлежатъ всѣ къ абсолютно сходящимся.

Абсолютно сходящіеся ряды обладаютъ всѣми свойствами конечныхъ многочленовъ, т. е. въ нихъ можно, какъ угодно, члены переставлять, а также складывать и перемножать эти ряды по правиламъ сложенія и умноженія многочленовъ.

Для условно сходящихся рядовъ знаки

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n, \quad \sum u_n$$

суть символы, имѣющіе значеніе только для обозначеннаго порядка слѣдованія членовъ одного за другимъ. Другими словами, если мы измѣнимъ порядокъ расположенія членовъ въ условно сходящемся рядѣ, то мы пишемъ другой символъ, пишемъ, такъ сказать, другой рядъ.

§ 50. Существуетъ простой необходимый и достаточный признакъ абсолютной сходимости ряда съ разными знаками, этотъ признакъ можно формулировать въ видѣ такой теоремы.

Теорема. *Для существованія абсолютной сходимости ряда*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

съ разными знаками членовъ необходимо и достаточно, чтобы рядъ абсолютныхъ величинъ

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots$$

былъ сходящимся.

Рядъ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

который, какъ мы видѣли, есть рядъ условно сходящійся, оказывается условно сходящимся въ силу того обстоятельства, что рядъ абсолютныхъ величинъ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

расходится.

§ 51. Соображенія, приведенныя относительно условно сходящихся рядовъ, относятся къ рядамъ съ комплексными членами, причемъ получается общее предложеніе, что *рядъ*

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots$$

съ комплексными членами будетъ абсолютно сходящимся, т. е. имѣетъ сумму, не зависящую отъ порядка членовъ, только при условіи, что рядъ модулей

$$|u_0|+|u_1|+|u_2|+\ldots\ldots$$

сходится.

§ 52. Разсмотримъ теперь правила сложенія и умноженія двухъ рядовъ.

Что касается алгебраическаго сложенія двухъ сходящихся рядовъ

$$\sum u_n=s\,,\ \sum v_n=t\,,$$

то, очевидно, получается формула

$$\sum(u_n\pm v_n)=s\pm t\,.$$

Эта формула остается справедливой, будутъ ли ряды абсолютно или условно сходящимися.

Гораздо сложнѣе обстоитъ дѣло съ перемноженіемъ рядовъ. Приступая къ разсмотрѣнію вопроса объ умноженіи рядовъ, мы, естественно, наталкиваемся на мысль, нельзя ли перемножать ряды, какъ конечныя суммы, т. е. не будетъ ли произведеніе рядовъ

$$\sum u_n \text{ и } \sum v_n$$

получаться въ видѣ двойного ряда

$$\sum_m\sum_n u_m v_n\,,$$

общій членъ котораго получается отъ умноженія общаго члена перваго ряда на общій членъ второго ряда. Оказывается, дѣйствительно, что въ случаѣ, когда оба перемножаемыхъ ряда абсолютно сходящіеся, то ихъ произведеніе представляется такимъ двойнымъ рядомъ, который тоже абсолютно сходится, т. е. имѣетъ сумму, не зависящую отъ закона суммированія.

Теорема Cauchy. *Если перемножаются два абсолютно сходящихся ряда*

$$\sum u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$$
$$\sum v_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots,$$

то имѣетъ мѣсто формула

$$(1) \qquad \left(\sum u_n\right)\left(\sum v_n\right) = \sum w_n,$$

гдѣ

$$\begin{aligned} w_0 &= u_0 v_0, \\ w_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0, \\ w_2 &= u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_n &= u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mertens показалъ, что формула (1) остается справедливой, когда одинъ изъ перемножаемыхъ рядовъ перестаетъ быть абсолютно сходящимся, т. е., другими словами, дѣлается условно сходящимся *).

Если оба перемножаемыхъ ряда условно сходятся, то теорема о перемноженіи рядовъ можетъ перестать быть справедливой, въ чемъ легко убѣдиться на простыхъ примѣрахъ.

О кратныхъ рядахъ.

§ 53. На теоремѣ Cauchy объ умноженіи рядовъ мы видѣли примѣръ такъ называемаго *двойного ряда*. Подъ двойнымъ рядомъ мы будемъ разумѣть символомъ

$$\sum_m \sum_n u_{m,n},$$

гдѣ общій членъ этого ряда

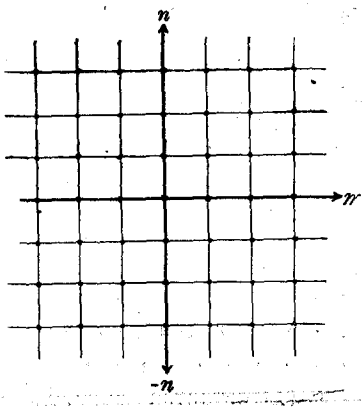
$$u_{m,n}$$

имѣетъ два значка, причемъ оба эти значка могутъ мѣняться, принимая цѣлыя значенія. Разсмотримъ самый общій случай, когда оба суммированія, по значку m и по значку n, распространяются на всѣ, какъ положительныя, такъ и отрицательныя цѣлыя значенія этихъ значковъ.

---

*) Введеніе въ анализъ. Гл. III § 32.

Для нагляднаго представленія такихъ двойныхъ рядовъ придется членами этихъ рядовъ заполнить цѣлую плоскость, расположивъ ихъ въ безчисленномъ множествѣ строкъ и колоннъ. Можно поступить такъ: разсматривать числа m и n, значки члена, какъ прямоугольныя координаты на плоскости, тогда каждый парѣ цѣлыхъ значеній этихъ координатъ будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая точка плоскости. Получимъ безчисленное множество точекъ, расположенныхъ въ вершинахъ сѣти квадратовъ, стороны которыхъ равны единицѣ.



Если мы противъ каждой точки такой сѣти напишемъ соотвѣтствующій членъ $u_{m,n}$ ряда, то заполнимъ членами ряда всю плоскость.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & u_{-2,2} & u_{-1,2} & u_{0,2} & u_{1,2} & u_{2,2} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & u_{-2,1} & u_{-1,1} & u_{0,1} & u_{1,1} & u_{2,1} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & u_{-2,0} & u_{-1,0} & u_{0,0} & u_{1,0} & u_{2,0} & \cdot & \cdot \\
\cdot & u_{-2,-1} & u_{-1,-1} & u_{0,-1} & u_{1,-1} & u_{2,-1} & \cdot & & \\
\cdot & u_{-2,-2} & u_{-1,-2} & u_{0,-2} & u_{1,-2} & u_{2,-2} & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Далѣе можно разсматривать тройные ряды

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} u_{m,n,p} \, .$$

Такіе ряды заполняютъ цѣлое трехмѣрное пространство. Обобщая далѣе, можно притти къ k кратному ряду, значекъ общаго члена которого состоитъ изъ k цѣлыхъ чиселъ.

О безконечныхъ произведеніяхъ.

§ 54. По аналогіи съ безконечными рядами, сумма которыхъ получается отъ безконечнаго числа прибавленій членовъ одного за другимъ, разсматриваютъ безконечныя произведенія вида

$$(1+u_0)(1+u_1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (1+u_n)\ .\ .\ .\ .\ ,$$

состоящія изъ безконечнаго числа множителей вида

$$1+u_n\ ,$$

гдѣ u_n какое угодно вещественное или мнимое число.

Разсмотримъ произведеніе n первыхъ множителей безконечнаго произведенія и обозначимъ это произведеніе P_n, такъ что будетъ

$$P_n=(1+u_0)(1+u_1)\ .\ .\ .\ (1+u_{n-1})=\prod_{k=0}^{k=n-1}(1+u_k).$$

Если число P_n стремится съ возрастаніемъ значка n къ предѣлу P, отличному отъ *нуля* и *безконечности*, то, во первыхъ, произведеніе будемъ называть *сходящимся*, во вторыхъ, число P будемъ называть его *величиною* и, въ третьихъ, будемъ писать

$$P=(1+u_0)(1+u_1)\ .\ .\ .\ (1+u_n)\ .\ .\ .\ .=\prod(1+u_n).$$

Подобно рядамъ безконечныя произведенія раздѣляются на *абсолютно сходящіяся*, т. е. такія, величина которыхъ не мѣняется отъ порядка множителей, и *условно сходящіяся*, т. е. имѣющія данную величину лишь при извѣстномъ опредѣленномъ слѣдованіи множителей однихъ за другими.

§ 55. Оказывается, что вопросъ о сходимости произведенія

(1) $$\prod(1+u_n)$$

тѣсно связанъ со сходимостью ряда

(2) $$\sum u_n,$$

причемъ существуетъ теорема, что *для абсолютной сходимости произведенія (1) необходима и достаточна абсолютная сходимость ряда (2).*

Основы дифференціальнаго исчисленія.

О функціяхъ.

§ 56. Будемъ разсматривать двѣ перемѣнныя величины x и y. Если частныя значенія этихъ перемѣнныхъ величинъ такимъ образомъ связаны между собою, что всякому произвольно выбранному частному значенію перемѣнной x соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное частное значеніе другой величины y, то говорятъ, что между перемѣнными существуетъ зависимость. Перемѣнная x, част-

ныя значенія которой берутся произвольно, носитъ названіе *перемѣнной независимой*, а другая перемѣнная y называется зависимой перемѣнной или *функціей*. При этомъ говорятъ, что перемѣнная y есть функція отъ независимой перемѣнной x, или проще, *y есть функція отъ x*. Это обстоятельство записывается формулой

$$y = f(x),$$

которая выговаривается такъ: y равняется функціи f отъ x.

§ 57. Иногда въ одномъ и томъ же вопросѣ приходится разсматривать нѣсколько различныхъ функцій отъ одной и той же независимой перемѣнной. Тогда для различныхъ функцій употребляются различные знаки, напримѣръ

$$f(x),\ F(x),\ \varphi(x),\ f_1(x),\ f_2(x)\ \ldots$$

§ 58. Вообще, всякое выраженіе, всякая формула, въ составъ которой входитъ перемѣнная величина, есть функція отъ этой перемѣнной, такъ напримѣръ

$$\sqrt{x}\ ,\ 2^x\ ,\ \sin x\ ,\ \frac{1 - lg\, x}{\sqrt[3]{tg\, x}}$$

суть функціи отъ перемѣнной x.

Въ началѣ понятіе о функціи отождествлялось съ понятіемъ о формулѣ. Считалось, что всякой функціи должна соотвѣтствовать нѣкоторая формула, которая давала бы правила для вычисленія по частному значенію перемѣнной независимой соотвѣтствѣннаго частнаго значенія функціи. При дальнѣйшемъ развитіи науки пришлось установить болѣе общее понятіе о функціональной зависимости двухъ перемѣнныхъ, причемъ, согласно вышеприведенному общему опредѣленію функціи, функція считается заданной всякій разъ, когда указаны точныя правила нахожденія по частному значенію перемѣнной независимой частнаго значенія функціи совершенно независимо отъ того, укладываются-ли эти правила въ рамки какой нибудь опредѣленной формулы, или нѣтъ.

Функція можетъ быть задана сразу нѣсколькими формулами, причемъ по одной формулѣ она вычисляется для однихъ частныхъ значеній перемѣнной независимой, по другой формулѣ для другихъ. Наконецъ, правило вычисленія функціи можетъ быть указано независимо отъ какихъ бы то ни было формулъ, такъ, напримѣръ, мы получаемъ опредѣленную функцію, если скажемъ, что $y = 0$ для всѣхъ раціональныхъ значеній перемѣнной независимой и $y = 1$ для всѣхъ ирраціональныхъ значеній.

§ 59. Понятіе о функціи отъ одной перемѣнной независимой можетъ быть обобщено слѣдующимъ образомъ. Пусть перемѣнныя величины

$$x, y, z, \ldots u, v$$

таковы, что кромѣ v всѣмъ остальнымъ перемѣннымъ

$$x, y, z, \ldots u$$

можно давать произвольныя значенія, перемѣнная же v получаетъ опредѣленное значеніе всякій разъ, какъ остальныя $x, y, z \ldots u$ получаютъ нѣкоторыя частныя значенія. Въ этомъ случаѣ v называется функціей отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots u$, а эти послѣднія носятъ названіе независимыхъ перемѣнныхъ. Это обстоятельство записывается такъ:

$$v = f(x, y, z, \ldots u).$$

Такъ же, какъ и въ случаѣ одной перемѣнной независимой, получаются простѣйшія функціи отъ многихъ перемѣнныхъ независимыхъ при помощи формулъ алгебры и тригонометріи; напримѣръ

$$v = \sin(x + y), v = \frac{1 - lgx^2}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \ldots$$

Первая функція есть функція отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ, а вторая отъ трехъ.

§ 60. Начнемъ съ разсмотрѣнія функціи, опредѣляемыхъ формулами элементарной математики.

Опредѣленіе. Если для полученія функціи надъ независимымъ перемѣннымъ надо произвести въ конечномъ числѣ дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія и, какъ частный случай умноженія, возвышенія въ цѣлую положительную степень, но не дѣленія, то такая функція называется *цѣлой*.

Общій видъ цѣлой функціи отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots u$ можетъ быть представленъ въ видѣ суммы

$$\sum A x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} \ldots u^{\tau},$$

гдѣ сумма распространяется на конечное число членовъ вида

$$A x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} \ldots u^{\tau},$$

Здѣсь A есть какой нибудь постоянный коэффиціентъ, а показатели $\lambda, \mu, \nu \ldots \tau$ какія нибудь цѣлыя положительныя числа или нули.

Напримѣръ

$$(1) \qquad \sqrt[3]{3}\; xy^2 - lg\,9.\,xz + \frac{2}{3}z^5 - sin\,5$$

есть цѣлая функція отъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z. Слѣдуетъ замѣтить, что дѣйствія, производимыя въ численныхъ коэффиціентахъ, могутъ быть какія угодно: такъ въ нашемъ примѣрѣ дѣйствія извлеченія корня, дѣленія, логариѳмированія и т. д., совершенныя въ коэффиціентахъ, нисколько не препятствуютъ тому, чтобы функція была цѣлая, ибо при опредѣленіи цѣлой функціи дѣло идетъ только о дѣйствіяхъ надъ независимыми перемѣнными.

Сумма показателей

$$\lambda + u + \nu + \ldots + \tau$$

независимыхъ перемѣнныхъ въ каждомъ членѣ называется *степенью* этого члена; такъ напримѣръ въ цѣлой функціи (1) первый членъ третьей степени, второй членъ второй степени, третій пятой и четвертый нулевой. Наибольшая изъ степеней отдѣльныхъ членовъ называется *степенью цѣлой функціи*. Цѣлая функція (1), очевидно, пятой степени.

§ 61. Если мы приравняемъ нулю нѣкоторую цѣлую функцію, то получимъ такъ называемое *алгебраическое уравненіе*. Въ § 28 гл. I мы дали уже это опредѣленіе для случая одной перемѣнной независимой. Въ самомъ общемъ случаѣ алгебраическимъ уравненіемъ будетъ называться уравненіе вида

$$U = 0,$$

гдѣ U есть цѣлая функція отъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots u, v$.

§ 62. Если выраженіе функціи задано прямо черезъ независимыя перемѣнныя, то такая функція называется *явной*. Если же для полученія выраженія функціи черезъ независимыя перемѣнныя нужно рѣшить одно или нѣсколько уравненій, то въ такомъ случаѣ функція называется *неявной*. Такъ, напримѣръ, если функція v отъ двухъ перемѣнныхъ x и y задана уравненіемъ

$$v^2 - 2xv - y^2 = 0,$$

то v будетъ, очевидно, неявной функціей. Эту неявную функцію мы обратимъ въ явную, если рѣшимъ уравненіе относительно v. Получаемъ

$$v = x \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

§ 63. Если функція можетъ удовлетворять алгебраическому уравненію, связывающему ее съ перемѣнными независимыми, то

она называется *алгебраической функціей*. Въ обратномъ случаѣ она называется *трансцендентною*, т. е. другими словами, функція называется трансцендентною, если нельзя подобрать никакого алгебраическаго уравненія, которому эта функція удовлетворяетъ. Такъ функція

$$v = x + \sqrt{x^2 + y^2}$$

есть функція алгебраическая, ибо она удовлетворяетъ алгебраическому уравненію

$$v^2 - 2xv - y^2 = 0 .$$

Функція

$$v = lg\, x$$

есть функція трансцендентная, ибо не трудно показать, что она не можетъ удовлетворять никакому алгебраическому уравненію между x и v.

Въ нѣкоторыхъ устарѣлыхъ книгахъ по анализу можно видѣть такое опредѣленіе функцій алгебраической и трансцендентной, что алгебраическая функція есть такая, которая выражается при помощи конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій надъ перемѣнными независимыми, а трансцендентная—такая, которая не выражается при помощи конечнаго числа дѣйствій. Не говоря уже о томъ, что такое опредѣленіе совершенно не соотвѣтствуетъ тому, что въ настоящее время всѣ математики разумѣютъ подъ алгебраической функціей, т. е., повторимъ, функціей, представляющей корень алгебраическаго уравненія, простой примѣръ безконечно убывающей геометрической прогрессіи покажетъ неудовлетворительность приведеннаго опредѣленія, ибо одна и та же функція

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots ,$$

если заключать по лѣвой части равенства, будетъ алгебраической, если судить по правой части, трансцендентной.

§ 64. Алгебраическія функціи подраздѣляются на *раціональныя* и *ирраціональныя*. *Раціональной* называется такая алгебраическая функція, которая удовлетворяетъ алгебраическому уравненію первой степени. Если же уравненіе самой низкой степени, которому удовлетворяетъ алгебраическая функція, степени выше первой, то функцію называютъ *ирраціональной*.

Согласно этому опредѣленію всякая раціональная функція v должна удовлетворять уравненію вида

$$Qv - P = 0,$$

гдѣ Q и P цѣлыя функціи независимыхъ перемѣнныхъ. Можно всегда предполагать, что P и Q суть многочлены, не имѣющіе общихъ дѣлителей, ибо, если бы такой дѣлитель существовалъ, то мы предварительно сократили бы на него все уравненіе. Рѣшая послѣднее уравненіе относительно v, получимъ

$$v = \frac{P}{Q}.$$

Это показываетъ, что раціональная функція есть частное двухъ цѣлыхъ функцій. Въ частномъ случаѣ, если Q не будетъ содержать независимыхъ перемѣнныхъ, то это Q будетъ нѣкоторое постоянное число A, тогда

$$v = \frac{1}{A} P,$$

т. е. v представляетъ собою цѣлую функцію, и мы видимъ, что цѣлая функція есть частный случай функціи раціональной.

Если уравненіе, которому удовлетворяетъ ирраціональная функція будетъ второй, третьей или четвертой степени, то мы можемъ его рѣшить и найти явное выраженіе этой функціи черезъ перемѣнныя независимыя. Когда уравненіе выше четвертой степени, то, на основаніи сказаннаго въ § 32 гл. I, задача приведенія неявной функціи въ явную дѣлается въ общемъ случаѣ невозможною. Эта невозможность, однако, не помѣшала прогрессу теоріи алгебраическихъ функцій, пришлось только судить о свойствахъ алгебраической функціи по тому алгебраическому уравненію, которому она удовлетворяетъ, совершенно независимо отъ того, умѣемъ ли мы рѣшать это уравненіе или нѣтъ. Фактъ состоитъ въ томъ, что современная теорія алгебраическихъ функцій есть одна изъ самыхъ разработанныхъ теорій современной математики и составляетъ одну изъ главныхъ частей такъ называемаго *алгебраическаго анализа*, о которомъ было уже упомянуто въ I главѣ.

§ 65. Переходя къ разсмотрѣнію функцій трансцендентныхъ, мы остановимся сначала на тѣхъ трансцендентныхъ функціяхъ, съ которыми намъ приходится имѣть дѣло уже въ элементарной математикѣ. Мы разсмотримъ четыре вида такихъ функцій, а именно функціи показательную, логариѳмическую, тригонометрическія и круговыя.

Подъ *показательной* функціей разумѣется функція вида

$$A^x,$$

гдѣ x перемѣнная независимая, а A постоянное число, называемое *основаніемъ* показательной функціи. Показательныя функціи разсматриваются обыкновенно только при положительныхъ основаніяхъ, ибо при отрицательномъ основаніи A для всѣхъ значеній показателя

$$x = \frac{m}{n},$$

гдѣ m число нечетное, а n четное, получались бы мнимыя значенія функціи.

§ 66. Обратная функція относительно функціи показательной *логариѳмическая* функція, т. е. логариѳмъ перемѣннаго независимаго, взятый при нѣкоторомъ положительномъ основаніи. Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ знакомъ

$$Lg_A\, x$$

обозначать логариѳмъ отъ x, взятый при основаніи A. Ввиду того, что, какъ мы увидимъ при изложеніи началъ дифференціальнаго исчисленія, неперовскіе логариѳмы, взятые при основаніи e, обладаютъ болѣе простыми свойствами, почему и носятъ названіе *натуральныхъ*, мы для этихъ логариѳмовъ будемъ употреблять болѣе простой знакъ

$$lg\, x,$$

такъ какъ эти логариѳмы будутъ чаще встрѣчаться.

Изъ элементарной алгебры извѣстно, что переходъ отъ логариѳмовъ при одномъ основаніи къ логариѳмамъ при другомъ основаніи совершается простымъ умноженіемъ всѣхъ логариѳмовъ первой системы на одно общее число, называемое модулемъ преобразованія логариѳмической системы. Пусть логариѳмъ числа x при натуральномъ основаніи есть y, а при основаніи A есть z, такъ что

$$y = lg\, x$$

$$z = Lg_A\, x.$$

Переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, получимъ

$$x = e^y \text{ и } x = A^z,$$

откуда

$$e^y = A^z.$$

Возьмемъ натуральные логариѳмы отъ обѣихъ частей полученнаго равенства, тогда будемъ имѣть

$$y \lg e = z \lg A;$$

но

$$\lg e = 1,$$

слѣдовательно

$$z = \frac{y.1}{\lg A},$$

откуда окончательно

(1) $$Lg_A x = \lg x . M,$$

гдѣ

(2) $$M = \frac{1}{\lg A}.$$

По формулѣ (2) вычисляется модуль M, служащій для перехода отъ неперовскихъ логариѳмовъ къ логариѳмамъ при произвольномъ основаніи A. Модуль обыкновенной системы логариѳмовъ при $A = 10$ оказывается равнымъ

$$M = \frac{1}{\lg 10} = 0,43429448190325182765112 89$$

Чтобы перейти отъ десятичныхъ логариѳмовъ къ натуральнымъ, необходимо десятичный логариѳмъ раздѣлить на модуль M. Въ таблицахъ логариѳмовъ обыкновенно помѣщаются вспомогательныя таблицы для упрощенія этого дѣленія, т. е. таблицы для приближеннаго умноженія на величину $\frac{1}{M}$.

§ 67. Тригонометрія даетъ намъ рядъ функцій, тѣсно связанныхъ другъ съ другомъ и выражающихся формулами

$$\sin x,\ \cos x,\ tg\, x,\ cotg\, x,\ \sec x,\ cosec\, x.$$

Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать длину дуги выраженной не въ градусахъ, а въ доляхъ радіуса. Центральному углу $57^0\ 17'\ 44{,}8''$ . . . . соотвѣтствуетъ дуга, равная радіусу, и, если радіусъ равенъ единицѣ, то и дуга равна единицѣ и принимается за единицу дугъ; соотвѣтственный уголъ принимается за единицу угловъ. Легко выразить въ доляхъ радіуса уголъ, выраженный въ секундахъ.

§ 68. Такъ называемыя *круговыя* функціи представляютъ собою функціи, обратныя тригонометрическимъ функціямъ предыдущаго §-а. Такъ функція, обратная функціи $\sin x$, будетъ $arc \sin x$,

т. е. дуга, синусъ которой есть x. Получаемъ слѣдующій рядъ круговыхъ функцій:

$$arc\,sin\,x,\ arc\,cos\,x,\ arc\,tg\,x,\ arc\,cotg\,x,\ arc\,sec\,x,\ arc\,cosec\,x.$$

Эти функціи относятся къ такъ называемымъ *многозначнымъ* функціямъ, т. е. имѣютъ безчисленное множество значеній при одномъ и томъ же значеніи независимаго перемѣннаго. Такъ, напримѣръ, $x = sin y$ при всѣхъ значеніяхъ y вида $y + 2k\pi$ и $(2k+1)\pi - y$, гдѣ k какое угодно цѣлое число или нуль; слѣдовательно, въ круговой функціи $y = arc\,sin\,x$ опредѣленному значенію независимой перемѣнной соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній функціи. Къ такому же выводу мы придемъ, разсматривая остальныя круговыя функціи: всѣ онѣ многозначны.

Чтобы избѣжать неопредѣленности, мы условимся разумѣть въ дальнѣйшемъ, если не будемъ указывать каждый разъ особо, подъ $arc\,sin\,x$ и $arc\,tg\,x$ дугу, заключающуюся въ предѣлахъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, и подъ $arc\,cos\,x$ и $arc\,cotg\,x$ дугу, заключающуюся въ предѣлахъ отъ 0 до π.

Что касается остальныхъ круговыхъ функцій $arc\,sec\,x$ и $arc\,cosec\,x$, то разсмотрѣніе ихъ сводится къ разсмотрѣнію $arc\,cos\,\frac{1}{x}$ и $arc\,sin\,\frac{1}{x}$.

Величины безконечно малыя и безконечно большія.

§ 69. Въ основѣ дифференціальнаго исчисленія лежитъ понятіе о такъ называемой безконечно малой величинѣ. Поэтому это исчисленіе, а также неразрывно связанное съ нимъ интегральное исчисленіе получаютъ названіе *анализа безконечно малыхъ*.

Понятіе о безконечно малой величинѣ вводится условно при помощи такого опредѣленія.

Безконечно малой величиной называется перемѣнная величина, имѣющая предѣломъ нуль.

Такимъ образомъ мы видимъ, что если величина x есть безконечно малая, то это обстоятельство можетъ быть записано знакомъ

$$lim\,x = 0.$$

§ 70. Неразрывно съ понятіемъ о величинахъ безконечно малыхъ связано понятіе о перемѣнной *безконечно большой*. Подъ

безконечно большой величиной мы разумѣемъ такую перемѣнную величину, которая по условіямъ задачи можетъ принимать сколь угодно большія по абсолютной величинѣ значенія. Очевидно, что если x есть безконечно малая величина, то величина

$$y = \frac{1}{x}$$

будетъ безконечно большой. То обстоятельство, что величина y есть безконечно большая записываютъ иногда знакомъ

$$lim\, y = \infty.$$

§ 71. Постоянная величина, не равная нулю, а также и перемѣнная, стремящаяся къ предѣлу, отличному отъ нуля и безконечности, называются величинами *конечными*.

Разсмотрѣніе величинъ перемѣнныхъ какъ конечныхъ, такъ и безконечно большихъ можетъ быть сведено къ разсмотрѣнію безконечно малыхъ.

Пусть разсматривается конечная перемѣнная x, для которой

$$lim\, x = a.$$

Тогда, если мы положимъ

$$y = a - x,$$

то y будетъ уже безконечно малой величиной, ибо

$$lim\, y = a - lim\, x = a - a = 0.$$

Точно такъ же, если въ нѣкоторую формулу входитъ буква x, обозначающая безконечно большую величину, то, полагая

$$y = \frac{1}{x},$$

откуда

$$x = \frac{1}{y},$$

мы внесемъ въ данную формулу вмѣсто x новую перемѣнную y, которая будетъ, какъ легко видѣть, безконечно малой, ибо

$$lim\, y = \frac{1}{lim\, x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

§ 72. Основной задачей дифференціальнаго исчисленія является разсмотрѣніе предѣловъ отношеній двухъ безконечно малыхъ величинъ α и β, т. е. разсмотрѣніе предѣла, къ которому стремится дробь

$$\frac{\beta}{\alpha}.$$

Мы оставимъ въ сторонѣ случай, когда при уменьшеніи α и β до нуля дробь $\frac{\beta}{\alpha}$ не стремится ни къ какому опредѣленному предѣлу. Разберемъ лишь слѣдующіе три случая:

$$lim\,\frac{\beta}{\alpha}=k\,,\quad lim\,\frac{\beta}{\alpha}=0\,,\quad lim\,\frac{\beta}{\alpha}=\infty\,,$$

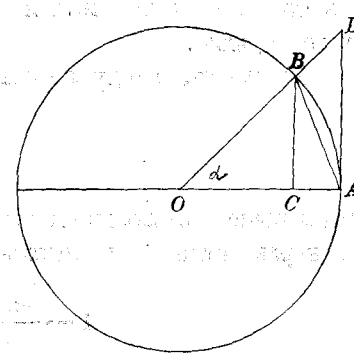
гдѣ k нѣкоторая конечная величина.

Когда предѣлъ отношенія есть конечная величина, то α и β называются безконечно малыми *одного порядка*. Когда предѣлъ отношенія есть 0, то говорятъ, что β *высшаго порядка*, чѣмъ α, или β *безконечно малая относительно* α. Когда предѣлъ отношенія есть ∞, то говорятъ, что β *низшаго порядка*, чѣмъ α, или β *безконечно большая относительно* α.

§ 73. Пояснимъ сказанное въ предыдущемъ §-ѣ на одномъ важномъ примѣрѣ. Разсмотримъ двѣ перемѣнныя α и $\beta = sin\,\alpha$. Предположимъ безконечно малую дугу α величиной положительной, уменьшающейся до нуля, тогда перемѣнная β, представляющая собою синусъ этого угла, будетъ также безконечно малая. Разсмотримъ предѣлъ отношенія

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{sin\,\alpha}{\alpha}.$$

Возьмемъ на окружности круга, радіусъ котораго равенъ единицѣ, дугу AB (черт. 55), и пусть α обозначаетъ длину этой дуги, выраженную въ частяхъ радіуса. Построимъ $sin\,\alpha$, т. е. опустимъ перпендикуляръ BC изъ конца B дуги на радіусъ OA, проведенный черезъ начало A дуги. Такъ какъ радіусъ OB принятъ за единицу, то длина перпендикуляра BC будетъ представлять величину $sin\,\alpha$. Построимъ также тангенсъ угла α, т. е. проведемъ въ началѣ A дуги касательную AD къ кругу до пересѣченія въ точкѣ D съ продолженіемъ радіуса OB. Величина AL будетъ, очевидно, тангенсомъ угла α. Разсмотримъ площади тре-



Черт. 55.

угольниковъ OAB и OAD, а также площадь сектора OAB. Очевидно, имѣемъ

$$\text{пл. } \Delta\ OAD > \text{пл. сект. } OAB > \text{пл. } \Delta\ OAB.$$

или

$$\frac{1}{2} OA.AD > \frac{1}{2} OA (\smile AB) > \frac{1}{2} AO.BC.$$

Откуда

$$AD > \smile AB > BC$$

или

$$tang\, \alpha > \alpha > sin\, \alpha.$$

Дѣля всѣ члены неравенства на $sin\, \alpha$, мы получимъ

$$\frac{1}{cos\, \alpha} > \frac{\alpha}{sin\, \alpha} > 1$$

или

$$(1) \qquad cos\, \alpha < \frac{sin\, \alpha}{\alpha} < 1.$$

Такъ какъ меньшая перемѣнная $cos\, \alpha$ при уменьшеніи α до нуля имѣетъ предѣломъ единицу, то и перемѣнная $\frac{sin\, \alpha}{\alpha}$ стремится къ единицѣ, и мы получаемъ

$$lim \frac{\beta}{\alpha} = lim \frac{sin\, \alpha}{\alpha} = 1,$$

такъ что безконечно малыя величины α и $sin\, \alpha$ суть величины одного порядка.

Покажемъ, что дугу α можно подобрать такъ, чтобы разность

$$1 - \frac{sin\, \alpha}{\alpha}$$

была меньше произвольно малымъ заданнаго положительнаго числа ε. Изъ неравенствъ (1) выводимъ

$$1 - \frac{sin\, \alpha}{\alpha} < 1 - cos\, \alpha,$$

$$1 - \frac{sin\, \alpha}{\alpha} < 2\, sin^2 \frac{\alpha}{2} < 2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

или окончательно

$$1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} < \frac{\alpha^2}{2}.$$

Если мы хотимъ, чтобы было

$$1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} < \varepsilon,$$

то мы должны удовлетворить неравенству

$$\frac{\alpha^2}{2} < \varepsilon,$$

т. е.

$$\alpha < \sqrt{2\varepsilon}.$$

§ 74. Если одновременно разсматриваются нѣсколько безконечно малыхъ α, β, γ, δ,... то часто приходится поступать такъ. Принимаютъ одну изъ нихъ, напримѣръ α, за главную и съ нею сравниваютъ порядки остальныхъ величинъ. Наиболѣе важный для практики случай тотъ, когда существуютъ равенства

$$lim \frac{\beta}{\alpha^m} = a,\ lim \frac{\gamma}{\alpha^n} = b,\ lim \frac{\delta}{\alpha^p} = c, \ldots$$

гдѣ m, n, p, . . . положительныя числа, a, b, c, . . . конечныя величины. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что β, γ, δ, . . . суть *безконечно малыя порядковъ* m, n, p, . . .

Такимъ образомъ, мы видимъ, что *порядкомъ безконечно малой называется показатель степени, въ которую надо возвысить главную безконечно малую величину, чтобы отношеніе разсматриваемой безконечно малой къ этой степени имѣло конечный предѣлъ.*

Легко составить общій видъ безконечно малой величины нѣкотораго порядка n. Въ самомъ дѣлѣ, такая величина β будетъ опредѣляться формулой

$$lim \frac{\beta}{\alpha^n} = a,$$

гдѣ a нѣкоторая конечная величина. Мы получаемъ

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = a + \varepsilon,$$

гдѣ ε безконечно малая величина. Отсюда

(1) $$\beta = \alpha^n a + \eta.$$

Невидно, что въ выраженіи (1) второй членъ

$$\eta = \alpha^n \varepsilon$$

представляетъ величину безконечно малую по сравненію съ пер-

вымъ $\alpha^n a$. Поэтому первый членъ $\alpha^n a$ носитъ названіе *главнаго члена* безконечно малой величины.

Для примѣра опредѣлимъ порядокъ перемѣнной

$$1 - \cos\alpha,$$

если α главная безконечно малая величина.

Мы имѣемъ

$$\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right]^2,$$

откуда

$$\lim\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2}.$$

Значитъ безконечно малая величина $(1-\cos\alpha)$ есть величина второго порядка малости и ея главный членъ будетъ равенъ $\frac{1}{2}\alpha^2$.

Приращеніе функціи отъ одной независимой перемѣнной.

§ 75. Пусть

$$y = f(x)$$

есть нѣкоторая функція отъ одной независимой перемѣнной x и пусть указаны два частныя значенія x_0, x_1 перемѣнной независимой. Разность $x_1 - x_0$, показывающая, насколько измѣнилось x при измѣненіи отъ x_0 до x_1, называется *приращеніемъ независимой перемѣнной*. Значеніе x_0 мы будемъ называть *начальнымъ значеніемъ* независимой перемѣнной. Приращеніе будемъ обозначать знакомъ Δx_0, подчеркивая этимъ, что приращеніе дается начальному значенію x_0. Значеніе $x_1 = x_0 + \Delta x_0$ мы будемъ называть *приращеннымъ значеніемъ* перемѣнной независимой.

Подобнымъ же образомъ значеніе

$$y_0 = f(x_0)$$

функціи, соотвѣтствующее начальному значенію x_0 перемѣнной независимой, мы будемъ называть *начальнымъ значеніемъ* функціи, а значеніе ея

$$y_1 = f(x_1)$$

мы будемъ называть *приращеннымъ значеніемъ* функціи. Подъ *приращеніемъ функціи* мы будемъ разумѣть разность

$$y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

и будемъ это приращеніе обозначать или знакомъ Δy_0, или знакомъ $\Delta f(x_0)$.

Очевидно, что приращенное значеніе функціи выражается по формулѣ

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0.$$

Мы имѣемъ, очевидно, слѣдующую формулу:

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0).$$

Непрерывность функцій.

§ 76. Однозначная функція $f(x_0)$ называется *непрерывной* при начальномъ значеніи x_0 перемѣнной независимой, если безконечно малому приращенію Δx_0 соотвѣтствуетъ также безконечно малое приращеніе функціи $\Delta f(x_0)$.

§ 77. Приходится отличать два понятія, *частное значеніе* функціи при $x = a$ и *предѣльное значеніе* $f(x)$ при приближеніи x къ a.

Частное значеніе функціи при $x = a$ вычисляется на основаніи опредѣленія функціи; мы его будемъ обозначать такъ:

$$f(a).$$

Что касается предѣльнаго значенія, которое можно обозначить такъ:

$$\lim_{x=a} f(x) = A,$$

то вообще говоря, число A можетъ не равняться числу $f(a)$. Такъ, напримѣръ, пусть функція $f(x)$ опредѣлена такъ, что $f(x) = 1$ при всѣхъ цѣлыхъ значеніяхъ x и $f(x) = 0$ при всѣхъ дробныхъ значеніяхъ. Тогда, очевидно, что

$$f(1) = 1,$$

а предѣльное значеніе

$$\lim_{x=1} f(x) = 0,$$

потому что при всѣхъ дробныхъ значеніяхъ x, приближающихся къ единицѣ, функція постоянно равна нулю, значитъ и предѣлъ ея нуль.

Равенство

$$A = f(a)$$

будетъ выражать не что иное, какъ только что высказанное свой-

ство непрерывности. Очевидно, что это свойство непрерывности можетъ быть написано еще такъ

$$lim f(x) = f(lim x),$$

т. е. другими словами для непрерывной функціи знаки предѣла и функціи обладаютъ перемѣстительнымъ свойствомъ.

§ 78. Если функція $f(x)$ непрерывна для всѣхъ значеній x, лежащихъ въ границахъ между двумя числами a и b, причемъ $b > a$, то функція называется непрерывной въ промежуткѣ отъ a до b. Функція непрерывная въ промежуткѣ отъ a до b обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ: если эта функція для двухъ значеній α и β перемѣнной независимой принимаетъ значенія A и B, такъ что

$$A = f(\alpha), \; B = f(\beta),$$

то и внутри того же самаго промежутка (a, b) функція приметъ всякое значеніе C, промежуточное между A и B, т. е. другими словами, будетъ существовать такое значеніе $x = \gamma$, при которомъ

$$f(\gamma) = C.$$

Мы не можемъ здѣсь останавливаться на доказательствѣ этого важнаго предложенія, что непрерывная функція пробѣгаетъ всѣ промежуточныя значенія, отсылая читателя къ современнымъ болѣе полнымъ курсамъ дифференціальнаго исчисленія.

§ 79. Обращаемся теперь къ графическому изображенію функцій кривыми линіями.

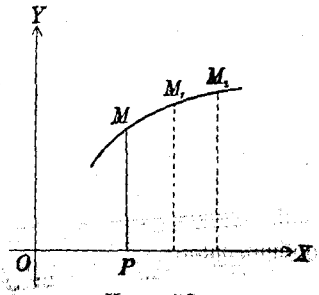
Къ числу функцій непрерывныхъ принадлежатъ, напримѣръ, тѣ простѣйшія функціи, съ которыми мы знакомимся въ элементарной математикѣ и которыя перечислены въ §§ 60-68. Эти функціи и большинство простѣйшихъ комбинацій изъ нихъ представляютъ собою такого рода непрерывныя функціи, которыя могутъ быть графически изображены непрерывными кривыми линіями. Конечно, всѣ эти функціи могутъ переставать быть непрерывными или, какъ говорятъ, претерпѣвать разрывъ непрерывности для нѣкоторыхъ значеній перемѣннаго независимаго.

Представимъ себѣ въ координатной плоскости OXY (черт. 56) проведенной нѣкоторую линію S, причемъ совершенно безразлично, какимъ движеніемъ карандаша эта линія проведена, участвовалъ ли при такомъ проведеніи какой-нибудь приборъ, какъ напримѣръ циркуль при проведеніи круга, или же линія проведена свободнымъ движеніемъ руки, выражаясь словами Euler'a „linea

libera manu ducta". Очевидно, что такой линіи будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая функція

$$y = f(x),$$

т. е. каждому значенію $x = OP$ абсциссы будетъ соотвѣтствовать опредѣленное численное значеніе $y = PM$ ординаты. Если линія проведена непрерывнымъ движеніемъ, то ей будетъ соотвѣтствовать непрерывная функція $f(x)$.



Черт. 56.

Обратная задача гораздо труднѣе. А именно, если мы построимъ геометрическое мѣсто точекъ M, M_1, M_2, . . , соотвѣтствующихъ нѣкоторой непрерывной функціи $y = f(x)$, то, какъ мы убѣдимся въ дальнѣйшемъ, полученное такимъ образомъ геометрическое мѣсто не всегда обладаетъ свойствами кривой линіи въ томъ видѣ, въ какомъ мы привыкли себѣ кривую линію представлять изъ наглядныхъ геометрическихъ соображеній. Оставляя въ сторонѣ разборъ деликатнаго и труднаго вопроса о выводѣ тѣхъ условій, при которыхъ непрерывная функція представляетъ кривую, мы ограничимся въ настоящей главѣ разсмотрѣніемъ только такихъ непрерывныхъ функцій, которымъ соотвѣтствуютъ кривыя линіи.

Понятіе о производной и дифференціалѣ.

§ 80. Приращеніе непрерывной функціи, вообще говоря, есть безконечно малая того же порядка, что и приращеніе независимой перемѣнной, такъ что

$$\lim_{\Delta x_0 = 0} \left\{ \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} \right\}$$

есть, вообще говоря, величина конечная, отличная отъ нуля.

Предѣлъ этотъ будетъ зависѣть, конечно, отъ вида функціи $f(x)$, а также отъ начальнаго значенія x_0 перемѣннаго независимаго. Можно сказать, что этотъ предѣлъ будетъ функціей отъ этого значенія x_0. Эту функцію, слѣдуя Lagrange'у, мы будемъ обозначать такъ:

$$f'(x_0),$$

и называть *производною* отъ разсматриваемой функціи $f(x)$.

Итакъ, мы имѣемъ

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x=0} \left\{ \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} \right\}.$$

Часто въ послѣдней формулѣ мы будемъ пропускать значекъ 0 у начальнаго значенія x_0 и писать эту формулу такъ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \left\{ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \right\}.$$

Функція $f(x)$ по отношенію къ ея производной $f'(x)$ носитъ названіе *первообразной* функціи. Если функція отъ x обозначена одной буквой y, то мы будемъ производную обозначать знакомъ y'. Вообще знаки

$$(x^m)', \ (\sin x)', \ldots$$

будутъ обозначать производныя отъ функцій

$$x^m, \ \sin x, \ldots$$

§ 81. Покажемъ существованіе производной на одномъ простомъ примѣрѣ:

$$f(x) = x^2.$$

Тогда

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x_0)^2 - x_0^2 =$$
$$= 2 x_0 \Delta x_0 + \Delta x_0^2.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = 2 x_0 + \Delta x_0,$$

и, наконецъ,

$$\lim_{\Delta x_0=0} \left\{ \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} \right\} = 2 x_0.$$

Итакъ, производная отъ функціи x^2 есть функція $2x$.

§ 82. Слѣдуя Leibniz'у, вводятъ нынѣ кромѣ понятія о производной понятіе о такъ называемомъ *дифференціалѣ* функціи. Покажемъ, въ чемъ состоитъ это понятіе.

Такъ какъ мы имѣемъ

$$f'(x) = \lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

т. е. производная есть предѣлъ дроби $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то сама эта дробь

будетъ отличаться отъ своего предѣла на безконечно малую величину ε, такъ что

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

откуда

$$\Delta f(x) = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x,$$

и мы видимъ, что приращеніе функціи распадается на двѣ части: на главную часть

$$f'(x)\,\Delta x$$

того же порядка, что и Δx, и на безконечно малую величину $\varepsilon\Delta x$ высшаго порядка. Мы называемъ нынѣ главную часть приращенія *дифференціаломъ* функціи и обозначаемъ этотъ дифференціалъ знакомъ $d\,f(x)$, такъ что имѣетъ мѣсто равенство

(1) $$d\,f(x) = f'(x)\,\Delta x.$$

Является теперь важнымъ разъяснить, что такое дифференціалъ перемѣнной независимой. Такъ какъ перемѣнная независимая x есть въ то же время простѣйшая функція отъ самой себя, то мы можемъ формулу (1) примѣнить къ этой функціи

$$f(x) = x.$$

такъ какъ для этой функціи $\Delta f(x) = \Delta x$, т. е.

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 1,$$

то

$$f'(x) = 1,$$

и мы получаемъ

(2) $$d\,x = \Delta x,$$

т. е. подъ дифференціаломъ перемѣнной независимой x придется разумѣть не что иное, какъ произвольно взятое приращеніе этой перемѣнной независимой.

Тогда формула (1) для дифференціала функціи перепишется такъ:

$$d\,f(x) = f'(x)\,d\,x.$$

Итакъ мы видимъ, что для полученія дифференціала функціи необходимо умножить производную функціи на дифференціалъ перемѣннаго независимаго. Вѣрнѣе сказать, подъ дифференціаломъ функціи разумѣется такая формула, въ которой написана производная функціи и къ ней приписанъ множителемъ дифференціалъ

перемѣннаго независимаго, ибо о настоящемъ умноженіи не можетъ быть и рѣчи, потому что dx остается произвольнымъ числомъ.

У читателя можетъ явиться вопросъ, почему же знакъ дифференціала оказался имѣющимъ важное значеніе. Отвѣтъ на этотъ вопросъ будетъ данъ въ ближайшемъ изложеніи.

Изъ формулы (3) мы замѣчаемъ, что производную $f'(x)$ можно записать символомъ

$$\frac{df(x)}{dx}$$

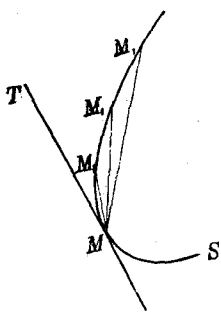
или, если саму функцію обозначимъ черезъ y, то символомъ

$$\frac{dy}{dx}.$$

§ 83. Слѣдуетъ замѣтить, что дифференціалъ независимаго перемѣннаго, будучи совершеннно произвольнымъ его приращеніемъ, есть величина, которая не зависитъ отъ перемѣнныхъ, входящихъ въ разсматриваемый вопросъ. Что касается дифференціала функціи, то на основаніи предыдущаго мы видимъ, что онъ не совпадаетъ съ приращеніемъ функціи, а составляетъ его главную часть. Самъ Leibniz опредѣлялъ дифференціалъ нѣсколько неточно, а именно, онъ дифференціаломъ функціи называлъ приращеніе функціи, но при вычисленіяхъ совѣтовалъ откидывать безконечно малыя высшаго порядка, что, конечно, сводилось къ тому же самому значенію дифференціала.

Геометрическое толкованіе производной и дифференціала.

§ 84. Для выясненія геометрическаго значенія производной мы разсмотримъ ту задачу, которая послужила однимъ изъ поводовъ къ изобрѣтенію дифференціальнаго исчисленія, а именно задачу о проведеніи касательной къ нѣкоторой кривой на плоскости.



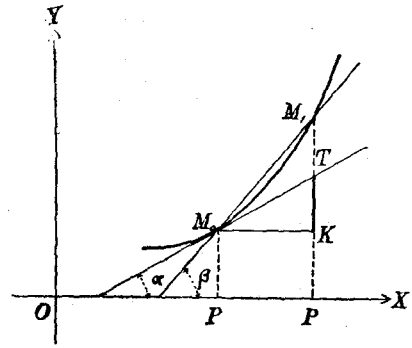
Черт. 57.

Опредѣленіе. *Подъ касательной къ кривой* S (черт. 57) *въ нѣкоторой ея точкѣ* M *разумѣется такая прямая* MT, *съ которой стремится совпасть сѣкущая* MM_1, *проведенная черезъ точку* M *и черезъ безконечно близкую къ ней точку* M_1 *кривой* S, *при постепенномъ приближеніи точки* M_1 *къ точкѣ* M *вдоль по кривой.*

Разсмотримъ въ плоскости прямоугольныхъ координатъ кривую, опредѣляемую уравненіемъ

$$y = f(x).$$

Пусть начальному значенію x_0 перемѣннаго независимаго соотвѣтствуетъ на кривой точка M_0 (черт. 58), такъ что $x_0 = OP_0, y_0 = f(x_0) = P_0 M_0$.



Черт. 58.

Дадимъ независимому перемѣнному x_0 приращеніе

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0,$$

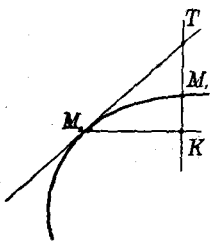
тогда мы получимъ приращенное значеніе x_1, которому соотвѣтствуетъ точка M_1, при томъ

$$\Delta x_0 = P_0 P_1, \Delta f(x_0) = P_1 M_1 - P_0 M_0 = K M_1.$$

Если мы обозначимъ черезъ β уголъ, который образуетъ съ осью x-овъ сѣкущая $M_0 M_1$, то мы получимъ

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \frac{K M_1}{M_0 K} = tg \angle K M_0 M_1 = tg \beta.$$

Если мы будемъ передвигать точку M_1 вдоль по кривой къ точкѣ M_0, то сѣкущая $M_0 M_1$ будетъ стремиться совпасть съ касательною $M_0 T$ въ точкѣ M_0. Уголъ β будетъ имѣть своимъ предѣломъ уголъ α, который образуетъ съ осью x-овъ эта касательная. Тогда въ предѣлѣ равенство (1) обратится въ такое:



Черт. 59.

$$f'(x) = tg\, \alpha.$$

Итакъ, мы видимъ, что производная представляетъ собою не что иное, какъ тангенсъ угла, который образуетъ касательная съ осью x-овъ, причемъ при вычисленіи производной надо независимому перемѣнному дать значеніе x_0, соотвѣтствующее точкѣ касанія.

Легко убѣдиться, что дифференціаломъ функціи является отрѣзокъ KT, представляющій собою приращеніе ординаты касательной. Въ самомъ дѣлѣ, изъ треугольника $KM_0 T$ мы получаемъ

$$KT = M_0 K\, tg\, \alpha = \Delta x\, f'(x) = d f(x).$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что приращеніе KM_1 функціи состоитъ изъ двухъ частей: изъ главной, дифференціала, представляющаго собою приращеніе до касательной, и изъ безконечно малой высшаго порядка TM_1, представляющей собою уклоненіе кривой отъ касательной. Дифференціалъ, будучи главной частью приращенія, можетъ быть и меньше этого приращенія, какъ мы это видимъ на чертежѣ 58, и больше него, какъ видно изъ чертежа 59.

Понятіе о дифференцированіи функціи.

§ 85. Въ дифференціальномъ исчисленіи указываются пріемы нахожденія производныхъ и дифференціаловъ отъ функцій. Нахожденіе дифференціала функціи представляетъ собою ту же самую операцію, что и нахожденіе производной, потому что дифференціалъ функціи равняется производной, къ которой приписанъ множителемъ дифференціалъ независимаго перемѣннаго. Операція нахожденія производной носитъ названіе операціи *дифференцированія* функціи. Такъ какъ эта операція есть основная во всемъ анализѣ безконечно малыхъ, то приступимъ теперь къ изученію правилъ дифференцированія.

Докажемъ предварительно нѣсколько общихъ теоремъ.

Теорема I. *Производная и дифференціалъ постоянной величины тождественно равны нулю.*

Пусть

$$f(x) = C,$$

гдѣ C величина постоянная. Такъ какъ это равенство имѣетъ мѣсто при всякомъ x, то

$$f(x + \Delta x) = C.$$

Значитъ

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0,$$

откуда

$$lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 0.$$

Поэтому мы получаемъ

$$(C)' = 0, \; d\,C = (C)'\,d\,x = 0.$$

Теорема II. *Производныя и дифференціалы двухъ функцій, отличающихся на постоянное число C, равны между собою.*

Пусть имѣемъ двѣ функціи

$$f(x) \text{ и } F(x) = f(x) + C.$$

Тогда

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = f(x + \Delta x) + C - f(x) - C =$$
$$= f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x).$$

Значитъ

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

отсюда

$$F'(x) = f'(x),\ dF(x) = df(x).$$

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что, если двѣ функціи тождественно равны, то и ихъ производныя также тождественно равны.

Теорема III. *Если двѣ функціи отличаются другъ отъ друга постояннымъ множителемъ C, то ихъ производныя и дифференціалы отличаются тѣмъ же множителемъ C.*

Пусть мы имѣемъ

$$F(x) = Cf(x).$$

Найдемъ производную. Мы имѣемъ

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = Cf(x + \Delta x) - Cf(x).$$

Отсюда

$$F'(x) = Cf'(x),\ dF(x) = Cdf(x).$$

Производная и дифференціалъ степени.

§ 86. Возьмемъ функцію

$$f(x) = x^a,$$

гдѣ a какое-нибудь постоянное число. Получаемъ

$$\Delta f(x) = (x + \Delta x)^a - x^a$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^a - x^a}{\Delta x}.$$

Такъ какъ Δx есть безконечно малая величина, то мы можемъ положить

$$\Delta x = \alpha x,$$

гдѣ α также нѣкоторая новая безконечно малая.

Вносяя это выраженіе Δx въ послѣднее равенство, получимъ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\alpha x)^a - x^a}{\alpha x} = \frac{x^a[(1+\alpha)^a - 1]}{\alpha x} =$$

$$= x^{a-1}\frac{(1+\alpha)^a - 1}{\alpha}.$$

Итакъ, производная получается въ такомъ видѣ:

(1) $$f'(x) = lim\,\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = x^{a-1}\,lim\,\frac{(1+\alpha)^a - 1}{\alpha} = x^{a-1}\,lim\,\frac{\beta}{\alpha},$$

гдѣ

(2) $$\beta = (1+\alpha)^a - 1.$$

Мы видимъ, что при α безконечно маломъ β также безконечно малая величина. Изъ равенства (2) получаемъ

$$1+\beta = (1+\alpha)^a,$$

откуда, логариѳмируя,

$$Log\,(1+\beta) = a\,Log\,(1+\alpha).$$

Послѣднее равенство можно будетъ переписать такъ:

$$\beta\,.\,\frac{1}{\beta}\,Log\,(1+\beta) = a\,\alpha\,\frac{1}{\alpha}\,Log\,(1+\alpha)$$

или

$$\beta\,Log\,(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = a\,\alpha\,Log\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

откуда окончательно

$$\frac{\beta}{\alpha} = a\,\frac{Log\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{Log\,(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}.$$

Посмотримъ, къ какому предѣлу стремится $\frac{\beta}{\alpha}$ при уменьшеніи α до нуля. Числитель и знаменатель во второй части стремятся къ общему предѣлу $Log\ e$, ибо

$$lim\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = lim\,(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = e.$$

Итакъ

$$lim\,\frac{\beta}{\alpha} = a,$$

т. е. мы получаемъ формулы

$$f'(x) = (x^a)' = a\,x^{a-1};\ \ d\,(x^a) = a\,x^{a-1}\,d\,x.$$

Выведенная нами формула заключаетъ въ себѣ цѣлый рядъ формулъ болѣе частнаго вида, ибо число a можетъ быть произвольнымъ цѣлымъ, дробнымъ, отрицательнымъ и ирраціональнымъ. Такъ напримѣръ

1) $$a = 5,$$

$$(x^5)' = 5x^4;\ d(x^5) = 5x^4 dx.$$

2) $$a = -1,$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};\ d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}.$$

3) $$a = \frac{1}{2},$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};\ d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Производная и дифференціалъ показательной функціи.

§ 87. Будемъ дифференцировать функцію

$$f(x) = A^x.$$

Мы получаемъ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{A^{x+\Delta x} - A^x}{\Delta x} = A^x \frac{A^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Итакъ

(1) $$f'(x) = A^x \lim \frac{\alpha}{\Delta x},$$

гдѣ

(2) $$\alpha = A^{\Delta x} - 1.$$

Когда Δx приближается къ нулю, то число α также приближается къ нулю. На основаніи (2) мы имѣемъ

$$A^{\Delta x} = 1 + \alpha,$$

откуда, логариѳмируя при основаніи e, мы получимъ

$$\Delta x \lg A = \lg(1 + \alpha),$$

или

$$\Delta x \lg A = \alpha \lg(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Отсюда

$$\frac{\alpha}{\Delta x} = \frac{lg\, A}{lg\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Приближая Δx къ нулю, мы получимъ

$$lim\, \frac{\alpha}{\Delta x} = lg\, A,$$

ибо

$$lim\, lg\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = lg\, e = 1.$$

Итакъ, получаемъ

$$(A^x)' = A^x\, lg\, A\,;\;\; d\,(A^x) = A^x\, lg\, A\, d\, x.$$

Формулы дѣлаются проще, если разсматривать случай $A = e$, тогда получаемъ

$$(e^x)' = e^x\,;\;\; d\,(e^x) = e^x\, d\, x.$$

Показательная функція e^x есть единственная функція, производная которой равна самой функціи. Такъ какъ выраженія производной и дифференціала показательной функціи оказываются болѣе простыми при основаніи e, то обыкновенно и употребляются показательныя функціи съ этимъ основаніемъ.

Производная и дифференціалъ логариѳмической функціи.

§ 88. Отыщемъ производную функціи

$$f(x) = Log x.$$

Мы имѣемъ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{Log\,(x+\Delta x) - Log x}{\Delta x} = \frac{Log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Полагая

$$\Delta x = x\,\alpha,$$

мы получимъ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\, Log\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

откуда производная опредѣляется по формулѣ

$$f'(x) = \frac{1}{x}\, lim\, Log\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{Log\, e}{x}.$$

Итакъ

$$(Log\, x)' = \frac{Log\, e}{x}, \quad d(Log\, x) = Log\, e \frac{d\, x}{x}.$$

Для неперовыхъ логариѳмовъ, когда за основаніе взято число e, формулы дѣлаются проще:

$$(lg\, x)' = \frac{1}{x}, \quad d\, lg\, x = \frac{d\, x}{x}.$$

Логариѳмическая функція даетъ намъ замѣчательный примѣръ того, что производная проще, чѣмъ первообразная функція, потому что эта первообразная функція $lg\, x$ есть функція трансцендентная, а производная простая раціональная $\frac{1}{x}$.

Производныя и дифференціалы функцій тригонометрическихъ.

§ 89. Будемъ дифференцировать функцію

$$f(x) = sin\, x,$$

получаемъ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{sin\,(x + \Delta x) - sin\, x}{\Delta x} =$$

$$\frac{2\, cos \frac{x + \Delta x + x}{2} sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} = cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Приближая число Δx къ нулю, мы получимъ

$$(sin\, x)' = cos\, x, \quad d\,(sin\, x) = cos\, x\, d\, x.$$

§ 90. Разсмотримъ теперь функцію

$$f(x) = cos\, x.$$

Подобно предыдушему, получимъ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x,} = \frac{cos\,(x + \Delta x) - cos\, x}{\Delta x} =$$

$$= -\frac{2\, sin \frac{x + \Delta x + x}{2} sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} = -sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Отсюда

$$(cos\, x)' = -sin\, x\,;\; d\,(cos\, x) = -sin\, x\, dx.$$

Дифференцированіе суммы, разности, произведенія и дроби.

§ 91. Возьмемъ функцію

(1) $$y = u + v,$$

гдѣ u и v суть функціи отъ перемѣнной независимой x. Дадимъ этой перемѣнной независимой приращеніе Δx и пусть черезъ Δy, Δu и Δv обозначаются соотвѣтственныя приращенія функцій y, u и v. Тогда, очевидно, будемъ имѣть

$$y + \Delta y = (u + \Delta v) + (v + \Delta v).$$

Вычитая равенство (1), получимъ

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Переходя къ предѣлу, получимъ

$$y' = u' + v', \; dy = du + dv.$$

Производная суммы равняется суммѣ производныхъ слагаемыхъ).*

§ 92. Если будемъ имѣть

$$y = u - v,$$

то аналогичнымъ путемъ получимъ

$$y' = u' - v', \; dy = du - dv;$$

мы получаемъ, что *производная разности равняется разности производныхъ.*

§ 93. Теоремы двухъ предыдущихъ §-овъ позволяютъ высказать такую болѣе общую теорему.

Производная алгебраической суммы равна алгебраической суммѣ производныхъ, т. е. равенство

$$y = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

даетъ

$$y' = u'_1 + u'_2 + u'_3 + \ldots + u_n'.$$

Относительно этой послѣдней теоремы надо обратить вниманіе на слѣдующее весьма важное обстоятельство: теорема можетъ переставать имѣть мѣсто, если число слагаемыхъ будетъ

---

*) Въ этой теоремѣ и въ слѣдующихъ слово *производная* можно замѣнить словомъ *дифференціалъ*.

безконечно большимъ; другими словами, если намъ данъ безконечный рядъ функцій

$$u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

имѣющій суммой функцію y, т. е.

(1) $$y = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

то рядъ производныхъ

(2) $$u_1' + u_2' + u_3' + \ldots$$

во-первыхъ, можетъ перестать сходиться для тѣхъ значеній, для которыхъ сходится заданный рядъ (1), и, кромѣ того, даже въ томъ случаѣ, когда рядъ (2) сходится, онъ можетъ не имѣть суммой производную y'. Для того, чтобы дѣйствительно имѣло мѣсто равенство

(3) $$y' = u_1' + u_2' + u_3' + \ldots,$$

нужно, чтобы заданный рядъ (1) обладалъ извѣстными условіями. Эти условія носятъ названіе *условій дифференцируемости ряда.*

§ 94. Разсмотримъ производную функціи

$$y = u\,v,$$

представляющей произведеніе двухъ функцій u и v.

Получаемъ

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v),$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v) - u\,v = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta x\frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Приближая Δx къ нулю и предполагая существованіе конечныхъ производныхъ u' и v', приходимъ къ формулѣ

$$y' = u\,v' + v\,u'\,;\; d\,y = u\,d\,v + v\,d\,u.$$

§ 95. Примѣняя теорему о дифференцированіи произведенія двухъ множителей послѣдовательно къ произведенію большаго числа множителей, мы получимъ формулы, удобныя для запоминанія. Напримѣръ, въ случаѣ трехъ множителей

$$y = u\,v\,w$$

получаемъ слѣдующую выкладку:

$$\begin{aligned} y' &= (u\,v)\,w' + w\,(u\,v)' = \\ &= u\,v\,w' + w\,(u\,v' + v\,u') = \\ &= u'\,v\,w + u\,v'\,w + u\,v\,w'. \end{aligned}$$

Получается, слѣдовательно, такое правило дифференцированія произведенія нѣсколькихъ множителей $u_1 u_2 u_3 \ldots u_n$. Пишемъ рядъ новыхъ произведеній, въ которыхъ замѣняемъ одинъ изъ множителей его производной:

$$\begin{array}{l} u_1' u_2 u_3 \ldots u_n \\ u_1' u_2' u_3 \ldots u_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1 u_2 u_3 \ldots u'_n. \end{array}$$

Очевидно, что такихъ произведеній будетъ столько, сколько множителей. *Сумма всѣхъ этихъ произведеній и дастъ производную заданнаго произведенія.*

§ 96. Обращаемся теперь къ дифференцированію дроби

$$y = \frac{u}{v}.$$

Получаемъ

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Приближая къ предѣлу, получаемъ

$$y' = \frac{v u' - u v'}{v^2}, \quad d y = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Производная дроби есть дробь, имѣющая знаменателемъ квадратъ знаменателя заданной дроби, а числителемъ разность между произведеніемъ знаменателя дроби на производную числителя и произведеніемъ числителя на производную знаменателя.

§ 97. Найдемъ, напримѣръ, производную функціи

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Получаемъ

$$(tg\, x)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

$$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad d\, tg\, x = \frac{d\, x}{\cos^2 x}.$$

Подобнымъ же образомъ вычислимъ производную функціи $sec\,x$:

$$(sec\,x)' = \left(\frac{1}{cos\,x}\right)' = \frac{cos\,x\,(1)' - 1.(cos\,x)'}{cos^2 x} = \frac{sin\,x}{cos^2 x}.$$

Дифференцированіе функцій отъ функцій.

§ 98. Пусть дана нѣкоторая функція y отъ независимой перемѣнной u

(1) $$y = f(u).$$

Мы желаемъ въ уравненіе (1) вмѣсто независимой перемѣнной u подставить новую функцію отъ независимой перемѣнной x

(2) $$u = \varphi(x).$$

Тогда получается въ концѣ концовъ y, какъ функція отъ независимой перемѣнной x, которую мы будемъ называть *функціей отъ функціи*.

Перемѣнной независимой u, которая замѣняется новой функціей, мы дадимъ другое названіе, чтобы показать, что она уже перестаетъ быть перемѣнной независимой. Мы эту перемѣнную u будемъ называть *аргументомъ* функціи $f(u)$. Этотъ аргументъ можетъ быть или самой независимой перемѣнной, или же функціей отъ новой перемѣнной независимой. Въ послѣднемъ случаѣ получается функція отъ функціи. Знаками функцію отъ функціи можно выразить такъ:

$$y = f(\varphi(x)).$$

§ 99. Покажемъ теперь, какъ найти производную функціи отъ функціи. Дадимъ независимой перемѣнной x приращеніе Δx. Тогда аргументъ u получитъ приращеніе Δu, а функція y получитъ приращеніе Δy. Намъ надо будетъ вычислить предѣлъ отношенія

(1) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Вмѣсто перемѣнной (1) можно будетъ разсматривать перемѣнную

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

тогда мы получаемъ

$$\frac{dy}{dx} = lim\,\frac{\Delta y}{\Delta u} . lim\,\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Конечно, мы предполагаемъ, что аргументъ u есть такая функція отъ независимой перемѣнной x, что Δu не обращается тождественно въ нуль.

По опредѣленію понятія о производной и на основаніи тѣхъ примѣровъ вычисленія производной, которые мы видѣли выше, мы замѣчаемъ, что производная зависитъ только отъ начальнаго значенія перемѣнной независимой и не зависитъ отъ закона приближенія къ нулю приращенія Δx. Отсюда мы можемъ заключить, что

$$lim \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u),$$

причемъ производная $f'(u)$ взята по аргументу u, какъ будто бы этотъ аргументъ u былъ перемѣнная независимая. Далѣе

$$lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' = \varphi'(x).$$

Итакъ, мы получаемъ слѣдующую формулу для дифференцированія функціи отъ функціи:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(u) \,.\, u'. \tag{2}$$

Итакъ, мы видимъ, что получается такое правило для дифференцированія функціи отъ функціи: надо сначала написать производную функціи по аргументу, какъ будто бы этотъ аргументъ былъ перемѣнной независимой, и *не позабыть* умножить эту производную на производную u' аргумента u по настоящей перемѣнной независимой x.

Мы замѣчаемъ, слѣдовательно, что производная мѣняетъ свой видъ въ зависимости отъ выбора перемѣнной независимой.

Весьма важное обстоятельство, давшее большое распространеніе символу дифференціала, состоитъ въ томъ, что *формула для дифференціала функціи отъ нѣкотораго аргумента по своему внѣшнему виду не зависитъ отъ выбора перемѣнной независимой.*

Въ самомъ дѣлѣ, умножая обѣ части равенства (2) на dx, получаемъ

$$dy = f'(u)\, u'\, dx.$$

Но по опредѣленію дифференціала функціи имѣемъ

$$u'\, dx = du,$$

и мы получаемъ формулу

$$dy = f'(u)\, du, \tag{3}$$

имѣющую мѣсто во всѣхъ случаяхъ, какая бы ни была перемѣнная независимая.

Итакъ, видъ формулы (3) остается одинъ и тотъ же, но значеніе входящихъ въ нее величинъ мѣняется при перемѣнѣ независимой перемѣнной. Если u перемѣнная независимая, то дифференціалъ du будетъ произвольной постоянной величиной, постоянной въ томъ смыслѣ, что онъ не будетъ зависѣть ни отъ какихъ перемѣнныхъ, входящихъ въ задачу; если же u перестанетъ быть независимой перемѣнной, то дифференціалъ du будетъ выражаться по формулѣ

$$du = u'\,dx = \varphi'(x)\,dx,$$

и онъ будетъ перемѣнной величиной, могущей мѣняться отъ двухъ причинъ: во-первыхъ отъ измѣненія произвольной постоянной dx, дифференціала независимой перемѣнной, во-вторыхъ отъ измѣненія перемѣнной x, которая входитъ въ du подъ видомъ функціи $\varphi'(x)$. Практичность употребленія формулы (3) съ дифференціалами состоитъ именно въ томъ, что внѣшній видъ этой формулы не зависитъ отъ выбора перемѣнной независимой, а потому мы имѣемъ возможность, начиная вычисленія для какой нибудь задачи, писать формулы, не намѣчая заранѣе перемѣнной независимой, а когда характеръ выкладокъ уже выяснится, можно будетъ болѣе практичнымъ образомъ выбрать перемѣнную независимую.

§ 100. Правило для дифференцированія функцій отъ функцій значительно расширяетъ кругъ функцій, которыя мы умѣемъ дифференцировать. Напримѣръ, требуется найти производную функціи

$$y = \sqrt{1+x^2}\,.$$

Тогда, обозначая

$$1 + x^2 = u,$$

мы получаемъ

$$y' = (\sqrt{u})'_u \,.\, u',$$

гдѣ знакомъ $(\sqrt{u})'_u$ мы указываемъ производную, взятую по аргументу u, какъ независимому перемѣнному. Поэтому,

$$y' = (\sqrt{u})'_u \,.\, u' = \frac{1}{2\sqrt{u}}(1+x^2)' = \frac{(x^2)'}{2\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Дифференцированіе тождества.

§ 101. Однимъ изъ важныхъ принциповъ приложеній дифференціальнаго исчисленія является дифференцированіе тождествъ. Пусть намъ дано нѣкоторое тождество

(1) $$\Phi(x) = 0.$$

Въ первой части мы написали функцію отъ буквы x, но кромѣ этой буквы функція $\Phi(x)$ можетъ заключать сколько угодно другихъ буквъ, которыя мы будемъ считать за числа постоянныя. Обозначимъ производную отъ первой части, взятую по буквѣ x, такъ:

$$\Phi'(x).$$

Тогда изъ тождества (1) получится, какъ слѣдствіе, тождество

(2) $$\Phi'(x) = 0,$$

ибо, если тождество (1) имѣетъ мѣсто, то будетъ имѣть мѣсто тождество

(3) $$\Phi(x + \Delta x) = 0,$$

потому что тождество остается въ силѣ, что бы ни подставлять вмѣсто входящихъ въ него буквъ. Вычитая тождество (1) изъ (3), получимъ тождество

$$\Delta\Phi(x) = 0.$$

Раздѣляя послѣднее тождество на Δx и приближая къ предѣлу, получимъ тождество (2).

Указанный принципъ можно формулировать такъ. *Мы имѣемъ право всякое тождество дифференцировать по любой изъ входящихъ въ него буквъ. Въ результатѣ дифференцированія тождества получается также тождество.*

§ 102. Если мы имѣемъ нѣкоторое уравненіе

(1) $$f(x) = 0,$$

которое не есть тождество, и если мы его продифференцируемъ, то получимъ новое уравненіе

(2) $$f'(x) = 0,$$

которое, быть можетъ, и полезно при изученіи свойствъ первоначальнаго уравненія (1), но не является слѣдствіемъ его.

Дифференцированіе функцій обратныхъ.

§ 103. Пусть задано уравненіе

(1) $$y = f(x),$$

связывающее двѣ перемѣнныя y и x, причемъ y оказывается нѣкоторой функціей $f(x)$. Если уравненіе (1) такого вида, что мы умѣемъ его рѣшить относительно x, то получимъ x въ видѣ функціи отъ y; эту функцію мы будемъ называть функціей *обратной функціи* f и обозначать знакомъ f_{-1}, такъ что получимъ уравненіе

$$x = f_{-1}(y). \tag{2}$$

Напримѣръ, если

$$y = x^2 - 1,$$

то, рѣшая это уравненіе относительно x, получимъ обратную функцію

$$x = \pm\sqrt{y+1}.$$

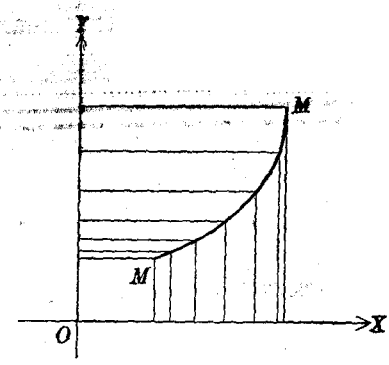
Возьмемъ еще примѣръ

$$y = a^x,$$

тогда

$$x = Log_a y.$$

Нѣкоторое затрудненіе относительно существованія функцій обратныхъ можетъ встрѣтиться въ томъ случаѣ, когда мы не умѣемъ уравненіе (1) рѣшить относительно буквы x, но тогда, ограничиваясь разсмотрѣніемъ функцій, изображаемыхъ кривыми линіями, мы можемъ убѣдиться въ существованіи обратныхъ функцій изъ слѣдующихъ соображеній. Пусть нѣкоторая кривая линія MM_1 (черт. 60) изображаетъ собою геометрическую картину измѣненія ординаты y, которая есть заданная функція f отъ абсциссы x. Тогда очевидно, что если мы повернемъ чертежъ на 90° и будемъ разсматривать перемѣнную y, какъ независимую, то та же самая кривая будетъ давать измѣненія величины x, разсматриваемой, какъ функція отъ y.



Черт. 60.

Если мы въ уравненіе (2) вмѣсто y подставимъ величину, взятую изъ уравненія (1), то должны получить тождество

$$x = f_{-1}\left(f(x)\right),$$

такъ что уравненіе (2) можно будетъ разсматривать, какъ тож-

дество относительно x, если аргументъ y разсматривать, какъ функцію отъ x. Дифференцируя это тождество по x, получимъ

(3) $$1 = f'_{-1}(y)\, y'.$$

Но мы имѣемъ

(4) $$y' = f'(x),$$

и тогда изъ тождества (3) и равенства (4) получаемъ

(5) $$f'_{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Приходимъ, слѣдовательно, къ теоремѣ. *Производная обратной функціи есть обратная величина относительно производной первоначальной функціи.*

Не надо только забывать, что въ формулѣ (5) каждая производная берется по своему аргументу, такъ что производная первоначальной функціи берется по аргументу x, а производная обратной функціи по аргументу y.

Наша теорема получается изъ формулъ съ дифференціалами ороче, а именно

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Пояснимъ сказанное на примѣрѣ, разсмотримъ

$$y = e^x, x = lg\, y;$$

тогда мы имѣемъ

$$(lg\, y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x}.$$

Отсюда получаемъ

$$(lg\, y)' = \frac{1}{y},$$

что мы уже видѣли въ § 88.

Производныя отъ функцій круговыхъ.

§ 104. Будемъ дифференцировать функцію

$$y = arc\, sin\, x.$$

Тогда обратная функція будетъ

$$x = sin\, y.$$

Отсюда, примѣняя теорему о дифференцированіи функцій обратныхъ, получимъ

$$(arc\ sin\ x)' = \frac{1}{(sin\ y)'} = \frac{1}{cos\ y}.$$

Мы выразили производную заданной функціи черезъ y, но такъ какъ заданная функція есть функція отъ x, то намъ желательно получить выраженіе этой производной черезъ x. Для этого воспользуемся равенствомъ

$$cos\ y = \pm\sqrt{1 - sin^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Что касается знака, то мы должны припомнить, что опредѣлили функцію $arc\ sin\ x$ такимъ образомъ, что это дуга, косинусъ которой число положительное. Отсюда получаемъ окончательно

$$(arc\ sin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};\ d\,(arc\ sin\ x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

§ 105. Будемъ дифференцировать функцію

$$y = arc\ tg\ x.$$

Значитъ

$$x = tg\,y.$$

Получаемъ

$$(arc\ tg\ x)' = \frac{1}{(tg\ y)'} = cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2 y},$$

откуда окончательно

$$(arc\ tg\ x)' = \frac{1}{1 + x^2},\ d\,(arc\ tg\ x) = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

§ 106. Возьмемъ функцію

$$y = arc\ cos\ x.$$

Разсмотримъ тождество

$$arc\ cos\ x + arc\ sin\ x = \frac{\pi}{2}.$$

Дифференцируя это тождество, получимъ

$$(arc\ cos\ x + arc\ sin\ x)' = 0,$$

значитъ

$$(arc\ cos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ d\,(arc\ cos\ x) = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

§ 107. Подобнымъ же образомъ, дифференцируя тождество

$$arc\,cotg\,x + arc\,tg\,x = \frac{\pi}{2},$$

получимъ

$$(arc\,cotg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2},\ d\,(arc\,cotg\,x) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

§ 108. Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію послѣднихъ функцій $arc\,sec\ x$ и $arc\,cosec\ x$. Для нахожденія производныхъ отъ этихъ функцій необходимо имѣть въ виду, что

$$arc\,sec\,x = arc\,cos\,\frac{1}{x},$$

а потому, дифференцируя, какъ функцію отъ функціи, получимъ

$$(arc\,sec\,x)' = \left(arc\,cos\,\frac{1}{x}\right)'\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

или окончательно

$$(arc\,sec\,x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ d\,(arc\,sec\,x) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

наконецъ, получаемъ

$$(arc\,cosec\,x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ d\,(arc\,cosec\,x) = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

§ 109. Найдемъ производную функціи

$$y = u^v,$$

гдѣ u и v суть функціи отъ x.

Прологариѳмировавъ, получимъ

$$lg\,y = v\,lg\,u,$$

откуда

$$y = e^{v\,lg\,u}.$$

Получаемъ

$$y' = e^{v\,lg\,u}\,(v\,lg\,u)' = e^{v\,lg\,u}\left(v\,\frac{u'}{u} + v'\,lg\,u\right) =$$

$$= u^v\left(v\,\frac{u'}{u} + lg\,u\,.\,v'\right);$$

$$(u^v)' = v\,u^{v-1}\,u' + u^v\,lg\,u\,.\,v'.$$

Первый членъ во второй части, какъ легко усмотрѣть, представляетъ собою производную отъ u^v въ предположеніи, что v есть постоянная величина, а второй членъ производную отъ u^v въ предположеніи, что u постоянная величина. Это обстоятельство въ дальнѣйшемъ приведетъ къ весьма важнымъ обобщеніямъ.

§ 110. *Основная таблица производныхъ и дифференціаловъ простѣйшихъ функцій.*

Эту таблицу полезно помнить наизусть.

1. $(c)' = 0,$ $\qquad d\,c = 0.$
2. $(c \pm y)' = \pm y',$ $\qquad d\,(c \pm y) = \pm dy.$
3. $(cy)' = cy',$ $\qquad d\,(cy) = cdy.$
4. $\left(\frac{c}{y}\right)' = -\frac{cy'}{y^2},$ $\qquad d\left(\frac{c}{y}\right) = -\frac{cdy}{y^2}.$
5. $(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w',$ $\qquad d\,(u \pm v \pm w) = du \pm dv \pm dw.$
6. $(uv)' = vu' + uv',$ $\qquad d\,(uv) = vdu + udv.$
7. $(u\,v\,w \ldots \omega)' = u'\,vw \ldots \omega + uv'\,w \ldots \omega + \ldots + uvw \ldots \omega'.$
   $d\,(uvw \ldots \omega) = vw \ldots \omega\,du + uw \ldots \omega\,dv + \ldots + uvw \ldots d\omega.$
8. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ $\qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$
9. $(y^n)' = n\,y^{n-1}\,y',$ $\qquad d\,(y^n) = n\,y^{n-1}\,dy.$
10. $(\sqrt{y})' = \frac{y'}{2\sqrt{y}},$ $\qquad d\,(\sqrt{y}) = \frac{dy}{2\sqrt{y}}.$
11. $(\sqrt{a^2 \pm y^2})' = \pm\frac{yy'}{\sqrt{a^2 \pm y^2}},$ $\qquad d\,(\sqrt{a^2 \pm y^2}) = \pm\frac{ydy}{\sqrt{a^2 \pm y^2}}.$
12. $(e^y)' = e^y y',$ $\qquad d\,(e^y) = e^y\,dy.$
13. $(A^y)' = A^y\,lg\,A\,y',$ $\qquad d\,(A^y) = A^y\,lg\,A\,dy.$
14. $(lg\,y)' = \frac{y'}{y},$ $\qquad d\,lg\,y = \frac{dy}{y}.$
15. $(Log\,y)' = \frac{y'\,Log\,e}{y},$ $\qquad d\,Log\,y = \frac{Log\,e\,dy}{y}.$
16. $(sin\,y)' = cos\,y\,.\,y',$ $\qquad d\,sin\,y = cos\,y\,.\,dy.$
17. $(cos\,y)' = -\,sin\,y\,.\,y',$ $\qquad d\,cos\,y = -\,sin\,y\,.\,dy.$
18. $(tg\,y)' = \frac{y'}{cos^2\,y},$ $\qquad d\,tg\,y = \frac{dy}{cos^2\,y}.$

19. $(cotg\, y)' = -\dfrac{y'}{sin^2 y}$, $\qquad d\, cotg\, y = -\dfrac{dy}{sin^2 y}$.

20. $(sec\, y)' = \dfrac{sin\, y \,.\, y'}{cos^2 y}$, $\qquad d\, sec\, y = \dfrac{sin\, y \,.\, dy}{cos^2 y}$.

21. $(cosec\, y)' = -\dfrac{cos\, y \,.\, y'}{sin^2 y}$, $\qquad d\, cosec\, y = -\dfrac{cos\, y \,.\, dy}{sin^2 y}$.

22. $(arc\, sin\, y)' = \dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}}$, $\qquad d\, arc\, sin\, y = \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

23. $(arc\, cos\, y)' = -\dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}}$, $\qquad d\, arc\, cos\, y = -\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

24. $(arc\, tg\, y)' = \dfrac{y'}{1+y^2}$, $\qquad d\, arc\, tg\, y = \dfrac{dy}{1+y^2}$.

25. $(arc\, cotg\, y)' = -\dfrac{y'}{1+y^2}$, $\qquad d\, arc\, cotg\, y = -\dfrac{dy}{1+y^2}$.

26. $(arc\, sec\, y)' = \dfrac{y'}{y\sqrt{y^2-1}}$, $\qquad d\, arc\, sec\, y = \dfrac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}$.

27. $(arc\, cosec\, y)' = \dfrac{y'}{y\sqrt{y^2-1}}$, $\qquad d\, arc\, cosec\, y = -\dfrac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}$.

28. $(u^v)' = u^v\, lg\, u\, v' + v\, u^{v-1} u'$, $\qquad d\,(u^v) = u^v\, lg\, u\, dv + v\, u^{v-1} du$.

§ 111. *Примѣры на дифференцированіе нѣкоторыхъ функцій отъ одной перемѣнной*

1. $y = lg\dfrac{1+x}{1-x}$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{1-x^2}$.

2. $y = \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{a^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$.

3. $y = \dfrac{1+3x-3x^2}{3x^3-9x^2+9x-3}$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-2}{(x-1)^4}$.

4. $y = sin\,(x^m)$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = m\, cos\,(x^m) .\, x^{m-1}$.

5. $y = lg\,(lg\, x)$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\, lg\, x}$.

6. $y = lg\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

7. $y = x^{\sin x}$, $\qquad \frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left(\cos x \, lg\, x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

8. $y = arc\, tg \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$, $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$.

9. $y = e^{a^x}$, $\qquad \frac{dy}{dx} = y\, a^x\, lg\, a$.

10. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$.

11. $y = \frac{\sin x}{a + b \cos x}$, $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a \cos x + b}{(a + b \cos x)^2}$.

12. $y = arc\, tg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $y = tg\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$, $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}$.

14. $y = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$, $\qquad \frac{dy}{dx} = x^3 e^x$.

15. $y = arc\, tg \left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}} tg \frac{x}{2}\right]$, $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{a + b \cos x}$.

16. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, arc\, \cos \frac{b + a \cos x}{a + b \cos x}$, $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a + b \cos x}$.

Признаки убыванія и возрастанія функцій.

§ 112. Функція $f(x)$ называется *возрастающей* въ промежуткѣ между числами a и $b > a$, если для всѣхъ значеній x, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$a < x < b,$$

приращеніе функціи $\Delta f(x)$ одного знака съ приращеніемъ Δx перемѣннаго независимаго. Если же знаки этихъ приращеній различны, то функція $f(x)$ называется *убывающей*. Въ первомъ случаѣ при возрастаніи x функція $f(x)$ возрастаетъ, во второмъ случаѣ при возрастаніи x функція $f(x)$ убываетъ.

§ 113. Не трудно убѣдиться въ справедливости слѣдующаго заключенія: *функція будетъ возрастающей, если для всѣхъ значеній x въ промежуткѣ (a, b) производная $f'(x)$ остается*

постоянно положительной, и функція будетъ убывающей, если эта производная остается постоянно отрицательной.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ на основаніи § 82

$$\Delta f(x) = \Delta x\,(f'(x) + \varepsilon). \tag{1}$$

Если производная $f'(x)$ положительна, то вблизи разсматриваемаго значенія x можно указать столь малый промежутокъ $(x-\alpha, x+\beta)$, что въ этомъ промежуткѣ приращеніе Δx будетъ достаточно мало, чтобы безконечно малая величина ε оказалась меньше по абсолютной величинѣ, чѣмъ функція $f'(x)$.

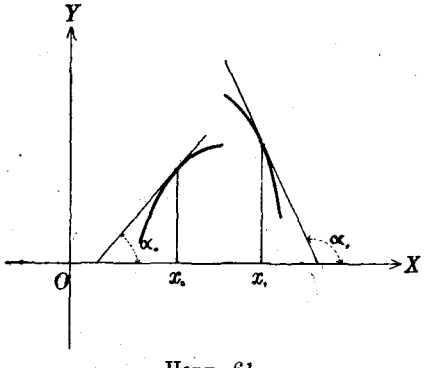
Тогда выраженіе въ скобкахъ въ правой части равенства (1) будетъ положительно для этого промежутка, значитъ, приращенія $\Delta f(x)$ и Δx будутъ одного знака, и функція въ промежуткѣ $(x-\alpha, x+\beta)$ будетъ возрастающей.

Если же функція будетъ возрастать во всѣхъ частичныхъ промежуткахъ $(x-\alpha, x+\beta)$, то она будетъ возрастать и во всемъ промежуткѣ (a, b).

Для возрастанія функціи въ какомъ нибудь промежуткѣ нѣтъ надобности требовать, чтобы для всѣхъ точекъ этого промежутка производная была непремѣнно положительная. Производная можетъ обращаться въ нуль для нѣкоторыхъ точекъ, необходимо только, чтобы при переходѣ черезъ нуль эта функція оставалась положительной, а не мѣняла своего знака.

То же самое относится и къ убыванію функцій.

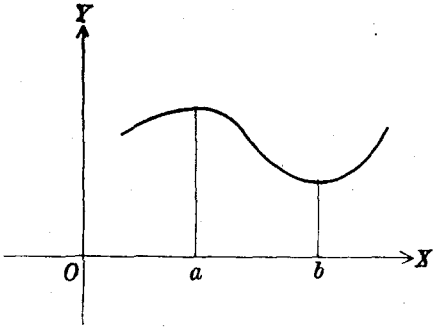
§ 114. Геометрически возрастаніе функціи при значеніи x_0 независимаго перемѣннаго характеризуется тѣмъ, что касательная въ соотвѣтственной точкѣ кривой образуетъ острый уголъ α_0 (черт. 61) съ осью x-овъ; если же при значеніи x_1 функція убываетъ, то касательная въ той точкѣ кривой, въ которой абсцисса равняется x_1, образуетъ тупой уголъ α_1 съ осью x-овъ.



Черт. 61.

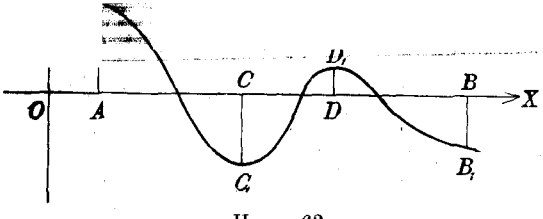
Говорятъ, что при воз-

растаніи перемѣннаго независимаго x функція $f(x)$ имѣетъ *maximum* (наибольшее значеніе) $f(a)$ при значеніи $x=a$, если при переходѣ x черезъ это значеніе a функція изъ возрастающей дѣлается убывающей (черт. 62). Если же происходитъ обратное, т. е. при нѣкоторомъ значеніи b функція изъ убывающей дѣлается возрастающей, то значеніе $f(b)$ носитъ названіе *minimum'a* (наименьшаго значенія) функціи.



Черт. 62.

Знаменитый русскій математикъ Чебышевъ ввелъ понятіе о такъ называемомъ *уклоненіи отъ нуля* функціи въ нѣкоторомъ данномъ промежуткѣ (a, b) (черт. 63). Мы разсматриваемъ всѣ maxima (DD_1) и всѣ minima $(-CC_1)$ функціи въ данномъ промежуткѣ, а также значенія функціи $f(a)$ и $f(b)$ для границъ промежутка (въ разсматриваемомъ чертежѣ эти значенія суть $+AA_1$ и $-BB_1$). Наибольшую изъ абсолютныхъ величинъ разсматриваемыхъ maxima и minima, а также предѣльныхъ значеній $f(a)$ и $f(b)$ Чебышевъ называетъ уклоненіемъ функціи отъ нуля въ данномъ промежуткѣ.



Черт. 63.

Теорема Rolle'я.

§ 115. *Если функція $f(x)$ и ея производная $f'(x)$ остаются непрерывными въ предѣлахъ промежутка (A, B) и $f(x)$ обращается въ нуль при двухъ значеніяхъ a и b, лежащихъ въ разсматриваемомъ промежуткѣ, такъ что*

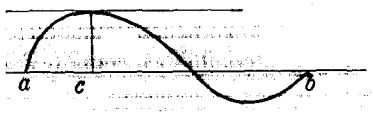
$$f(a)=0, f(b)=0,$$

то существуетъ такое значеніе c между a и b, для котораго производная $f'(x)$ обращается въ нуль, т. е.

$$f'(c)=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, производная $f'(x)$ не можетъ оставаться ни постоянно положительной, ни постоянно отрицательной при измѣненіи x отъ a до b, потому что въ этомъ случаѣ $f(x)$ была бы или все возрастающей, или все убывающей функціей и, обращаясь въ нуль для $x=a$, не могла бы быть нулемъ еще для $x=b$. Слѣдовательно, производная $f'(x)$ должна мѣнять знакъ въ промежуткѣ (a, b). Но такъ какъ она непрерывна, то можетъ мѣнять знакъ не иначе, какъ обращаясь въ нуль для нѣкотораго значенія $x=c$, лежащаго между a и b.

§ 116. Геометрически теорема *Rolle'я* можетъ быть интерпретирована такъ: если непрерывная кривая пересѣкаетъ ось x-овъ въ точкахъ a и b (черт. 64), то между этими точками существуетъ такое значеніе абсциссы $x=c$, при которомъ касательная параллельна оси x-овъ.

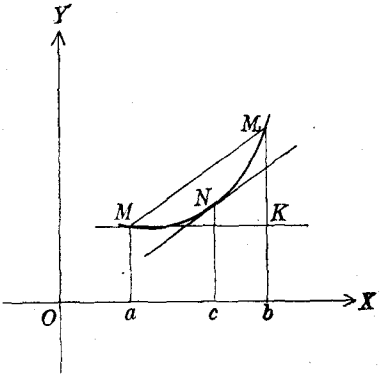


Черт. 64.

Теорема Lagrange'a.

§ 117. Если мы разсмотримъ нѣкоторую хорду MM_1 (черт. 65) кривой линіи, то на основаніи соображеній предыдущаго §-а существуетъ на дугѣ MM_1 такая точка N, въ которой касательная параллельна хордѣ MM_1, ибо ось x-овъ при разсужденіяхъ предыдущаго §-а являлась нѣкоторой хордой. Мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ *Lagrange'a*.

Если функція $f(x)$ конечна и непрерывна для всѣхъ значеній x въ промежуткѣ отъ A до B, и, кромѣ того, производная $f'(x)$ непрерывна въ томъ же промежуткѣ, то для всякихъ двухъ



Черт. 65.

значеній $x=a$ *и* $x=b$, *лежащихъ въ этомъ промежуткѣ, имѣетъ мѣсто равенство*

$$(1)\qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),$$

гдѣ c *заключается между* a *и* b.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы возьмемъ за числа a и b абсциссы концовъ M и M_1 хорды, a за c абсциссу точки касанія N, то параллельность касательной въ точкѣ N съ хордой MM_1, очевидно, выражается равенствомъ (1).

§ 118. Формулу *Lagrange'a* можно переписать въ такомъ видѣ, удобномъ для приложеній. Замѣнимъ a черезъ x, b черезъ $x+\Delta x$, тогда получаемъ

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x+\vartheta\,\Delta x),$$

положительная правильная дробь, т. е. $0<\vartheta<1$.

формулу можно переписать такъ:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x\,f'(x+\vartheta\,\Delta x).$$

производныя и частные дифференціалы. Полные дифференціалы.

119. Пусть

$$f(x, y, z, \ldots t)$$

есть нѣкоторая функція отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Эту функцію мы можемъ разсматривать, какъ функцію отъ одной перемѣнной x, если всѣ остальныя буквы $y, z, \ldots t$ будемъ считать постоянными числами. Производную, взятую по буквѣ x въ такомъ предположеніи, мы, очевидно, найдемъ по изложеннымъ выше правиламъ дифференцированія и будемъ ее называть *частной производной функціи по* x. Подобнымъ же образомъ можно разсматривать частныя производныя по всѣмъ остальнымъ буквамъ.

Такія частныя производныя можно обозначить символами

$$f'_x(x, y, z, \ldots t), f'_y(x, y, z, \ldots t), \ldots f'_t(x, y, z, \ldots t).$$

Въ этихъ символахъ мы пишемъ въ скобкахъ значенія перемѣнныхъ независимыхъ, чтобы показать, что частныя произ-

водныя суть въ свою очередь нѣкоторыя функціи отъ этихъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Очень часто употребляются слѣдующія обозначенія Jacobi для частныхъ производныхъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Что касается знака

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x},$$

то мы замѣчаемъ, что если мы остальныя перемѣнныя кромѣ x будемъ считать постоянными величинами, а не перемѣнными независимыми, то эту производную можно будетъ написать такъ:

$$(2) \qquad \frac{df}{dx}.$$

Итакъ, мы видимъ, что знакъ (1) не отличается по существу ничѣмъ отъ знака (2). Круглыя буквы ставятся только для того, чтобы подчеркнуть, что остальныя перемѣнныя $y, z, \ldots t$, хотя и остаются постоянными при дифференцированіи, но все таки въ разсматриваемомъ вопросѣ являются величинами перемѣнными, т. е. другими словами, понятіе о частной производной отличается отъ понятія объ обыкновенной производной только названіемъ, которое мы придаемъ остальнымъ перемѣннымъ величинамъ, входящимъ въ функцію.

Въ высшей степени важно обратить вниманіе на то, что знакъ Jacobi не подлежитъ расчлененію, т. е. его нельзя разсматривать, какъ частное отъ дѣленія ∂f на ∂x; его можно писать только въ полномъ видѣ (1).

Разсмотримъ примѣръ

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x + y.$$

§ 120. Произведеніе частной производной по какой-нибудь перемѣнной на дифференціалъ этой перемѣнной или, что одно и то же, на произвольное приращеніе перемѣнной (ибо дифференціалъ независимой перемѣнной совпадаетъ съ ея приращеніемъ)

называется *частнымъ дифференціаломъ* функціи по этой перемѣнной. Для частныхъ дифференціаловъ употребляются знаки

$$d_x f = \frac{\partial f}{\partial x} dx,\ d_y f = \frac{\partial f}{\partial y} dy,\ \ldots\ d_t f = \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

На основаніи этого обозначенія частныя производныя могутъ быть обозначены знаками

$$\frac{d_x f}{dx},\ \frac{d_y f}{dy},\ \ldots\ \frac{d_t f}{dt}.$$

Эти знаки представляютъ собою уже обыкновенныя дроби, въ которыхъ можно отдѣлять числителя отъ знаменателя.

§ 121. Сумма всѣхъ частныхъ дифференціаловъ, взятыхъ по всѣмъ независимымъ перемѣннымъ, отъ которыхъ функція зависитъ, называется *полнымъ дифференціаломъ* функціи и обозначается буквой d. Такимъ образомъ дифференціалъ функціи напишется въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t} dt,$$

$$df = d_x f + d_y f + \ldots + d_t f,$$

$$df = f_x' dx + f_y' dy + \ldots + f_t' dt.$$

Дифференцированіе сложныхъ функцій.

§ 122. Функція

$$f(x, y, z, \ldots)$$

отъ нѣсколькихъ аргументовъ $x, y, z, \ldots$ называется *сложной* функціей отъ одной независимой перемѣнной t, если аргументы $x, y, z, \ldots$ суть нѣкоторыя функціи отъ этой перемѣнной независимой t, такъ что

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \omega(t),\ \ldots$$

Конечно, для нахожденія производной сложной функціи можно было бы поступить такъ: замѣнить всѣ аргументы ихъ выраженіями черезъ t и потомъ уже продифференцировать по t. На практикѣ оказывается болѣе полезнымъ искать производную сложной функціи, не выражая эту сложную функцію предварительно черезъ независимыя перемѣнныя. Къ такому пріему дифференцированія мы приходимъ по двумъ мотивамъ; во-первыхъ, иногда зависимость

между аргументами x, y, z, . . . t можетъ быть задана неявно, напримѣръ, можетъ быть задано уравненіе

$$\varphi(x, t) = 0,$$

причемъ выразить явно x черезъ t при помощи рѣшенія послѣдняго уравненія представляетъ большія затрудненія; но главнымъ мотивомъ для составленія особаго правила для дифференцированія функцій сложныхъ является то обстоятельство, что это правило можетъ быть высказано очень просто.

§ 123. Разсмотримъ сначала одинъ частный примѣръ. Пусть

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz. \tag{1}$$

Предположимъ, что аргументы x, y, z суть функціи отъ нѣкотораго одного перемѣннаго независимаго. Если мы будемъ брать дифференціалъ отъ обѣихъ частей уравненія (1), то, какъ мы видѣли въ § 99, для такой операціи нѣтъ надобности вводить независимую перемѣнную t явно, и мы получаемъ

$$df = d(xy) + d(xz) + d(yz) = ydx + xdy + zdx + xdz +$$
$$+ zdy + ydz = (y + z)dx + (x + z)dy + (y + x)dz =$$
$$= f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz.$$

Итакъ, мы видимъ, что дифференціалъ отъ функціи сложной имѣетъ тотъ же внѣшній видъ, что и полный дифференціалъ отъ этой функціи, только будетъ другой смыслъ дифференціаловъ аргументовъ dx, dy, dz . . . Эти дифференціалы будутъ выражаться по формуламъ

$$dx = \varphi'(t)dt, \; dy = \psi'(t)dt, \; dz = \omega'(t)dt, \; . \; .$$

и заключать одну только произвольную величину dt; кромѣ того, эти дифференціалы зависятъ отъ самой перемѣнной независимой t, которая можетъ входить въ производныя

$$\varphi'(t), \psi'(t), \omega'(t), \; . \; . \; .$$

§ 124. Разсмотримъ теперь самый общій случай сложной функціи $f(x, y, z, \; . \; . \; .)$, въ которой аргументы $x, y, z, \; . \; . \; .$ суть функціи отъ ряда настоящихъ перемѣнныхъ независимыхъ

$$\xi, \eta, \zeta, \; . \; . \; .$$

Ясное дѣло, что, если мы будемъ дифференцировать нашу функцію по ξ, считая η, ζ, . . . постоянными, то дифференціалы по ξ будутъ браться по правиламъ предыдущаго §-а, только вмѣсто обыкновенныхъ дифференціаловъ отъ одной перемѣнной независимой придется брать частные дифференціалы, т. е. будетъ

$$(1) \qquad d_\xi f = \frac{\partial f}{\partial x} d_\xi x + \frac{\partial f}{\partial y} d_\xi y + \frac{\partial f}{\partial z} d_\xi z + \ldots$$

Совершенно подобнымъ же образомъ получимъ частные дифференціалы по другимъ перемѣннымъ независимымъ

$$(2) \qquad \begin{aligned} d_\eta f &= \frac{\partial f}{\partial x} d_\eta x + \frac{\partial f}{\partial y} d_\eta y + \frac{\partial f}{\partial z} d_\eta z + \ldots \\ d_\zeta f &= \frac{\partial f}{\partial x} d_\zeta x + \frac{\partial f}{\partial y} d_\zeta y + \frac{\partial f}{\partial z} d_\zeta z + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Если мы сложимъ формулы (1) и (2), то можемъ суммы частныхъ дифференціаловъ замѣнить полными дифференціалами, и мы получаемъ формулу

$$(3) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots$$

Мы замѣчаемъ, что формула для полнаго дифференціала остается той же самой.

Итакъ, формула (3) можетъ быть употребляема во всѣхъ случаяхъ, какое бы значеніе ни имѣли аргументы $x, y, z, \ldots$. Если эти аргументы будутъ независимыми перемѣнными, то въ формулѣ (3) $dx, dy, dz, \ldots$ суть произвольныя величины; если аргументы эти зависятъ отъ одной независимой перемѣнной, то формула даетъ дифференціалъ сложной функціи отъ одной независимой перемѣнной. Наконецъ, если аргументы суть функціи отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, то формула (3) даетъ выраженіе для полнаго дифференціала сложной функціи $f(x, y, z, \ldots)$, причемъ $dx, dy, dz, \ldots$ будутъ уже полными дифференціалами аргументовъ.

§ 125. Предположимъ, что формула (3) предыдущаго §-а примѣняется къ случаю сложной функціи отъ одной независимой перемѣнной t. Тогда, раздѣляя обѣ части на dt, получаемъ правило нахожденія производной сложной функціи:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \ldots$$

Совершенно подобнымъ образомъ можно воспользоваться формулами (1) и (2) предыдущаго §-а для нахожденія частныхъ производныхъ сложныхъ функцій отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi} + \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta} + \ldots$$

. . . . . .

Пояснимъ нашу теорію примѣромъ. Возьмемъ функцію

(1) $$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

гдѣ

(2) $$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Примѣняя предыдущія правила, будемъ имѣть

$$\frac{df}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} =$$

$$= 2\left\{\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2)(-2t)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} + \frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2).2-2t.2t}{(1+t^2)^2}\right\} =$$

$$= 0.$$

Этотъ результатъ можно было предвидѣть, ибо послѣ подстановки въ формулу (1) выраженій (2), получаемъ

$$f(x, y) = 1.$$

Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ функціи отъ одной перемѣнной.

§ 126. Пусть

$$y = f(x)$$

есть нѣкоторая функція отъ независимой перемѣнной x. Производная

$$y' = f'(x)$$

есть, вообще говоря, новая функція отъ той же перемѣнной x. Производная отъ этой новой функціи y' называется *производной второго порядка* или *второй производной* отъ первоначальной функціи y и обозначается знаками

$$(y')' = y'' = f''(x).$$

Производная отъ второй производной называется производной третьяго порядка или третьей производной и обозначается черезъ

$$y''' = f'''(x).$$

Составляя послѣдовательно производныя четвертаго, пятаго и т. д. порядковъ, мы можемъ дойти до производной какого угодно порядка n, которая обозначается черезъ

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

Такъ, напримѣръ, если

$$y = x^5,$$

то

$$y' = 5x^4,\ y'' = 20x^3,\ y''' = 60x^2,$$
$$y^{\text{IV}} = 120x,\ y^{\text{V}} = 120,\ y^{\text{VI}} = 0.$$

§ 127. Разсмотримъ дифференціалъ отъ дифференціала функціи. Будемъ называть такой дифференціалъ *дифференціаломъ второго порядка* или *вторымъ дифференціаломъ* функціи и обозначать его

$$d^2 y,$$

такъ что

$$d(dy) = d^2 y.$$

Имѣемъ, слѣдовательно,

$$d^2 y = d(dy) = d[f'(x)\,dx] = df'(x)\,dx + f'(x)\,d(dx).$$

Но дифференціалъ независимаго перемѣннаго dx есть произвольная величина, независящая отъ той перемѣнной, по которой мы дифференцируемъ, значитъ, его надо разсматривать, какъ произвольную *постоянную*, слѣдовательно, $d(dx) = 0$, и мы имѣемъ

$$d^2 y = df'(x)\,dx = [f''(x)\,dx]\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

Дифференцируя дальше, будемъ получать дифференціалы третьяго, четвертаго и т. д. порядковъ, которыя мы будемъ обозначать знаками

$$d^3 y,\ d^4 y,\ \ldots$$

Очевидно, что мы будемъ получать формулы

$$d^3 y = f'''(x)\,dx^3,$$
$$d^4 y = f^{\text{IV}}(x)\,dx^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

§ 128. Необходимо замѣтить, что существуетъ одно соглашеніе, не претерпѣвающее исключенія, строго различать знаки

$$dy^n,\ d^n y,\ d(y^n),$$

причемъ знакъ dy^n обозначаетъ всегда n-ую степень дифференціала y, знакъ $d^n y$ обозначаетъ всегда n-ый дифференціалъ отъ

функціи y, и, наконецъ, знакъ $d(y^n)$ обозначаетъ дифференціалъ функціи y^n.

§ 129. Итакъ, мы видимъ, что производная n-аго порядка можетъ быть символически обозначена такъ:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{d x^n}.$$

Формула Leibniz'a.

§ 130. Будемъ дифференцировать произведеніе двухъ функцій

$$y = u v.$$

Тогда первый дифференціалъ напишется такъ:

$$dy = u\,dv + v\,du,$$

второй дифференціалъ будетъ

$$d^2 u = d(u\,dv + vdu) = u\,d^2 v + du\,dv + v\,d^2 u + dv\,du =$$
$$= u\,d^2 v + 2\,du\,dv + v\,d^2 u.$$

Для третьяго дифференціала получимъ

$$d^3 y = u\,d^3 v + 3\,du\,d^2 v + 3\,d^2 u\,dv + v d^3 u.$$

Получаемъ вообще формулу

$$d^n y = u\,d^n v + \frac{n}{1} du d^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d^2 u d^{n-2} v +$$
$$\ldots + \frac{n}{1} d^{n-1} u\,dv + d^n u.v.$$

Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ функцій отъ функцій.

§ 131. Мы видѣли въ § 99, что, дифференцируя равенство

(1) $$y = f(u),$$

получаемъ

(2) $$dy = f'(u)\,du$$

совершенно независимо отъ того, есть ли u перемѣнная независимая или функція.

Если мы хотимъ дифференцировать формулу (2) еще нѣсколько разъ, тогда надо указать значеніе аргумента u. Мы разсмотрѣли уже въ §§ 126—129 случай, когда аргументъ былъ независимой перемѣнной. Теперь мы переходимъ къ случаю, когда

аргументъ u есть функція отъ настоящей перемѣнной независимой x:

$$u = \varphi(x).$$

Можно, однако, продолжать дифференцированіе, не вводя явнымъ образомъ въ разсмотрѣніе x. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя равенство (2), получаемъ

$$d^2 y = d\,[f'(u)\,du] = d\,[f'(u)]\,du + f'(u)\,d\,(du) =$$
$$= f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2 u.$$

Если мы раздѣлимъ обѣ части равенства (3) на dx^2 и замѣнимъ дифференціалы производными, т. е. напишемъ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'', \frac{du}{dx} = u', \frac{d^2 u}{dx^2} = u'',$$

то получимъ формулу

(4) $$y'' = f''(u)\,(u')^2 + f'(u)\,u''.$$

Формулу (4) мы можемъ еще разъ дифференцировать. Для разнообразія продифференцируемъ ее безъ знаковъ дифференціала, тогда имѣемъ

$$y''' = [f''(u)\,(u')^2]' + [f'(u)\,u'']' = [f''(u)]'\,(u')^2 + f''(u)\,[(u')^2]' +$$
$$+ [f'(u)]'\,u'' + f'(u)\,u''' = f'''(u)\,(u')^3 + 3\,f''(u)\,u'\,u'' + f'(u)\,u'''.$$

Подобнымъ образомъ можемъ продолжать дальнѣйшее дифференцированіе.

§ 132. Поясним сказанное примѣромъ. Будемъ дифференцировать функцію

(1) $$y = u^4,$$

гдѣ

(2) $$u^2 = x.$$

Получаемъ

$$dy = 4\,u^3\,du,$$

(3) $$d^2 y = 12 u^2\,du^2 + 4\,u^3\,d^2 u,$$

$$d^3 y = 24\,u\,du^3 + 24\,u^2\,du\,d^2 u + 12\,u^2\,du\,d^2 u + 4\,u^3\,d^3 u =$$
$$= 24\,u\,du^3 + 36\,u^2\,du\,d^2 u + 4\,u^3\,d^3 u.$$

Всѣ дифференціалы порядка выше перваго отъ u можно замѣнить на основаніи тѣхъ соотношеній, которыя получаются отъ дифференцированія равенства (2). Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя это равенство, получимъ

(4) $$2\,u\,du = dx.$$

Такъ какъ x независимая перемѣнная, то dx число постоянное при дальнѣйшемъ дифференцированіи, и мы имѣемъ

$$u\,d^2u + du^2 = 0, \tag{5}$$

$$u\,d^3u + 3\,du\,d^2u = 0. \tag{6}$$

Изъ равенствъ (5) и (6) имѣемъ

$$d^2u = -\frac{du^2}{u},$$

$$d^3u = -\frac{3\,du\,d^2u}{u} = \frac{3\,du^3}{u^2}.$$

Отсюда формулы (3) получаютъ видъ

$$\begin{aligned} dy &= 4\,u^3\,du, \\ d^2y &= 8\,u^2\,du^2, \\ d^3y &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Раздѣляя обѣ части формулъ (7) на dx, dx^2 и dx^3, получимъ

$$y' = 2u^2,\ y'' = 2,\ y''' = 0.$$

Частныя производныя и полные дифференціалы высшихъ порядковъ.

§ 133. Возьмемъ функцію отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Для сокращенія письма ограничимся случаемъ трехъ перемѣнныхъ:

$$u = f(x, y, z).$$

Разсмотримъ три частныя производныя этой функціи

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Эти частныя производныя суть въ свою очередь нѣкоторыя функціи отъ x, y, z, такъ что можно искать отъ нихъ новыя частныя производныя по каждой изъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Производная, взятая по x отъ $\frac{\partial u}{\partial x}$ обозначается такъ:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и носитъ названіе второй частной производной, взятой два раза по x, или частной производной второго порядка, взятой два раза по x.

Подобнымъ образомъ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ обозначаетъ вторую частную про-

изводную отъ u, взятую два раза по y, и знакъ $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ обозначаетъ вторую частную производную, взятую два раза по z. Если возьмемъ производную по y отъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, то получимъ вторую частную производную отъ u, взятую сначала по x, а потомъ по y, которая обозначается такъ:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}.$$

Если мы вторую частную производную возьмемъ въ обратномъ порядкѣ, сначала по y, а потомъ по x, то это мы будемъ обозначать такъ:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

Подобнымъ же образомъ получаются частныя производныя

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}.$$

Очевидно, что если будутъ три перемѣнныя независимыя, то частныхъ производныхъ второго порядка будетъ девять, ибо отъ каждой изъ трехъ частныхъ производныхъ перваго порядка можно взять по три частныхъ производныхъ.

§ 134. Вычислимъ, напримѣръ, вторыя частныя производныя функціи

$$u=x^2y^4+2z^4x+y.$$

Мы получаемъ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^4+2z^4,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=4x^2y^3+1,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=8z^3x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y^4,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=8xy^3,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=8z^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=8xy^3,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12x^2y^2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}=8z^3,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=24z^2x.$$

На нашемъ примѣрѣ мы видимъ, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y},$$

т. е. что *результатъ дифференцированія не измѣняется отъ порядка частнаго дифференцированія*. Это свойство частныхъ производныхъ сохраняется при любомъ числѣ перемѣнныхъ независимыхъ и при производныхъ любого порядка. Мы не будемъ здѣсь доказывать этого свойства, отсылая читателей къ болѣе подробнымъ курсамъ дифференціальнаго исчисленія.

§ 135. Символомъ

$$(1) \qquad \frac{\partial^{m+n+p} u}{\partial x^m\,\partial y^n\,\partial z^p}$$

мы будемъ обозначать производную порядка $m+n+p$, взятую m разъ по x, n разъ по y и p разъ по z. Если мы частную производную (1) умножимъ на произведеніе дифференціаловъ $dx^m\,dy^n\,dz^p$ перемѣнныхъ независимыхъ, то получимъ такъ называемый *частный дифференціалъ* функціи, взятый m разъ по x, n разъ по y, p разъ по z. Этотъ частный дифференціалъ мы будемъ обозначать такъ:

$$d_{\underbrace{xx\ldots x}_{m}\,\underbrace{yy\ldots y}_{n}\,\underbrace{zz\ldots z}_{p}} u = d_{m,n,p}\, u.$$

Сумма всевозможныхъ частныхъ дифференціаловъ нѣкотораго порядка N отъ функціи u, взятыхъ во всевозможныхъ порядкахъ послѣдовательности дифференцированія, носитъ названіе *полнаго дифференціала порядка* N отъ функціи u; онъ обозначается такъ:

$$d^N u.$$

Пояснимъ это понятіе о полномъ дифференціалѣ на примѣрѣ. Возьмемъ случай двухъ перемѣнныхъ независимыхъ:

$$u = f(x, y).$$

Тогда мы получимъ четыре вторыхъ частныхъ дифференціала

$$d_{xx} u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2, \quad d_{xy} u = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\, dx\, dy,$$

$$d_{yx} u = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\, dy\, dx, \quad d_{yy} u = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2.$$

Второй полный дифференціалъ будетъ выражаться по формулѣ

$$d^2 u = d_{xx} u + d_{xy} u + d_{yx} u + d_{yy} u =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2.$$

§ 136. Легко видѣть, что второй полный дифференціалъ можно разсматривать, какъ полный дифференціалъ отъ перваго полнаго дифференціала, если только считать дифференціалы независимыхъ перемѣнныхъ числами постоянными при дифференцированіи. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

откуда

$$d^2 u = d(du) = \frac{\partial (du)}{\partial x} dx + \frac{\partial (du)}{\partial y} dy =$$

$$= \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \right\} dx + \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \right\} dy,$$

т. е. получается какъ разъ та формула, которая была выведена выше.

§ 137. Очевидно, что при нахожденіи высшихъ дифференціаловъ сложныхъ функцій полные дифференціалы высшихъ порядковъ будутъ играть такую же роль, какъ полный дифференціалъ перваго порядка при разсужденіяхъ § 124.

Дифференцированіе функцій неявныхъ.

§ 138. Пусть задано уравненіе

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Это уравненіе даетъ каждую изъ буквъ x, y, какъ функцію отъ другой буквы.

Извѣстно, что лишь немногія уравненія допускаютъ удобное рѣшеніе относительно неизвѣстной, а потому на каждомъ шагу на практикѣ встрѣчается надобность разсматривать неявныя функціи, опредѣляемыя уравненіями, которыхъ мы рѣшать въ общемъ видѣ не умѣемъ. Оказывается, что мы можемъ найти производную отъ y по x, не обращая функцію y предварительно въ явную.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы въ уравненіи (1) будемъ разумѣть подъ y ту функцію, которая этимъ уравненіемъ опредѣляется, то это уравненіе (1) мы должны будемъ считать тождествомъ относительно x, причемъ въ первой части этого тождества мы имѣемъ функцію $f(x, y)$ отъ двухъ аргументовъ, изъ которыхъ одинъ x есть независимая перемѣнная, а другой y нѣкоторая опредѣленная ея функція. Такъ какъ мы имѣемъ право всякое тождество диф-

ференцировать по любой изъ входящихъ въ него буквъ, то дифференцируя по x, мы получимъ

$$f_x'(x, y)\,dx + f_y'(x, y)\,dy = 0,$$

откуда

(2) $$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)}.$$

Конечно, получилось выраженіе для производной, заключающее обѣ перемѣнныя, какъ x, такъ и y, но это неудобство не представляется особенно существеннымъ, ибо, если мы хотимъ найти частныя значенія производной (2) при частномъ значеніи x_0 перемѣнной независимой, придется вычислить соотвѣтственное значеніе y_0 по уравненію

(3) $$f(x_0, y) = 0.$$

Вопросъ о нахожденіи численнаго значенія неизвѣстнаго представляется вопросомъ болѣе простымъ. Существуютъ общіе методы приближеннаго рѣшенія уравненій (3) съ однимъ неизвѣстнымъ y, дающіе возможность вычислить съ какой угодно степенью точности корни какъ алгебраическихъ, такъ и трансцендентныхъ уравненій.

Кромѣ сказаннаго выраженіе (2) даетъ возможность вмѣстѣ съ уравненіемъ (1) судить объ измѣненіи производной y', ибо, дифференцируя уравненіе (2), можно получить выраженіе для производныхъ y'', y''' и т. д.

§ 139. Напримѣръ, пусть будетъ задано уравненіе

(1) $$x^3 + y^3 - 3\,xy = 0,$$

опредѣляющее неявно функцію y.

Хотя это уравненіе можно рѣшить по формуламъ Cardan'а относительно y и обратить такимъ образомъ функцію въ явную, но въ виду неудобства дифференцированія радикальныхъ выраженій можно посовѣтовать примѣнять вышеизложенныя правила дифференцированія функцій неявныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя по x, получимъ

$$3\,x^2 + 3\,y^2\,y' - 3\,y - 3\,xy' = 0,$$

откуда

(2) $$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Найдемъ численное значеніе производной y', соотвѣтствующее значенію $x = \frac{3}{2}$. Подставляя это значеніе въ уравненіе (1), получимъ

$$y^3 - \frac{9}{2}y + \frac{27}{8} = 0.$$

Это уравненіе можно представить въ видѣ

$$\left(y - \frac{3}{2}\right)\left(y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{9}{4}\right) = 0;$$

получаемъ значеніе y:

$$y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{3}{4}\left(-1 + \sqrt{5}\right), y_3 = \frac{3}{4}\left(-1 - \sqrt{5}\right).$$

Получаемъ три соотвѣтственныхъ значенія производной: для значеній $x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2}$ получается

$$y' = -1,$$

для значеній $x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{4}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$ получимъ

$$y' = \frac{5 + 7\sqrt{5}}{10}.$$

и, наконецъ, для значеній $= \frac{3}{2}, y = \frac{3}{4}\left(-1 - \sqrt{5}\right)$ получимъ

$$y' = \frac{5 - 7\sqrt{5}}{10}.$$

Если мы хотимъ найти вторую производную, то придется дифференцировать равенство (2), и мы имѣемъ

$$y'' = \frac{(y^2 - x)(y' - 2x) - (y - x^2)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2}.$$

Въ это выраженіе придется подставить значеніе первой производной изъ равенства (2). Тогда для второй производной получимъ окончательное выраженіе

$$y'' = -2\,\frac{x(y^2 - x)^2 - (y^2 - x)(y - x^2) + y(y - x^2)^2}{(y^2 - x)^3}.$$

§ 140. Правила для дифференцированія неявныхъ функцій отъ одной перемѣнной независимой распространяются на случай какого угодно числа перемѣнныхъ независимыхъ. Въ виду того,

что обобщеніе это представляется совершенно очевиднымъ, мы ограничимся разсмотрѣніемъ частнаго примѣра.

Пусть задано уравненіе

(1) $$x^2+y^2+z^2=1,$$

которое опредѣляетъ неявнымъ образомъ букву z, какъ функцію отъ двухъ перемѣнныхъ x и y. Будемъ искать частныя производныя функціи z по этимъ перемѣннымъ независимымъ. Дифференцируя уравненіе (1) по x, получаемъ

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

или

(2) $$x+z\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

Здѣсь мы, конечно, при дифференцированіи по x считали y постояннымъ. Дифференцируя по y, получимъ

(3) $$y+z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

откуда частныя производныя имѣютъ видъ

(4) $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

Если мы желаемъ вычислить вторую производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, то придется первое изъ уравненій (4) дифференцировать по y; мы будемъ имѣть

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{z^3}.$$

Формулы Taylor'a и Maclaurin'a.

§ 141. Пусть $f(x)$ есть цѣлая функція $(n-1)$-ой степени отъ x, такъ что

(1) $$f(x)=p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n,$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n$ постоянныя величины. Замѣнивъ x черезъ $x+h$, получимъ

$$f(x+h)=p_1(x+h)^{n-1}+p_2(x+h)^{n-2}+\ldots+p_{n-1}(x+h)+p_n.$$

Раскрывая степени двучлена $x+h$ по формулѣ бинома Newton'а и собирая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ h, получимъ результатъ вида

$$(2)\quad f(x+h)=X_0+X_1h+X_2h^2+\ldots+X_{n-2}h^{n-2}+X_{n-1}h^{n-1},$$

гдѣ $X_0, X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$ не содержатъ h и суть нѣкоторыя функціи отъ x. Для нахожденія ихъ дифференцируемъ тождество (2) $n-1$ разъ по h, разсматривая x, какъ постоянное; тогда

$$f'(x+h)=X_1+2X_2h+3X_3h^2+\ldots+(n-1)X_{n-1}h^{n-2},$$

$$f''(x+h)=2X_2+3.2X_3h+4.3X_4h^2+\ldots$$

$$\ldots+(n-1)(n-2)X_{n-1}h^{n-3},$$

$$(3)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n-2)}(x+h)=(n-2)(n-3)\ldots.2.1.X_{n-2}+$$

$$+(n-1)(n-2)\ldots.2.1.X_{n-1}h,$$

$$f^{(n-1)}(x+h)=(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.2.1.X_{n-1}.$$

Полагая въ формулахъ (2) и (3) $h=0$, получимъ

$$X_0=f(x),$$

$$X_1=f'(x),$$

$$X_2=\frac{f''(x)}{1.2},$$

$$X_{n-2}=\frac{f^{(n-2)}(x)}{1.2\ldots.(n-2)},$$

$$X_{n-1}=\frac{f^{(n-1)}(x)}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Подставляя найденныя значенія коэффиціентовъ въ формулу (2), получимъ *формулу Taylor'а* для цѣлой функціи степени $n-1$:

$$(4)\quad f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x).$$

Замѣняя въ этой формулѣ букву x буквой a и полагая затѣмъ $h=x-a$, можно написать формулу Taylor'а въ слѣдующемъ видѣ:

$$(5)\qquad f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a).$$

§ 142. Возьмемъ теперь произвольную функцію $f(x)$, не цѣлую. Тогда, очевидно, формула Taylor'a (5) предыдущаго §-а уже не имѣетъ мѣста. Въ этомъ случаѣ будетъ имѣть мѣсто такая формула:

$$(1)\qquad f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+R_n,$$

гдѣ R_n, вообще говоря, не будетъ равно нулю ни при какомъ значеніи n. Это число R_n носитъ названіе *дополнительнаго* или *остаточнаго члена* формулы Taylor'a.

Lagrange сдѣлалъ весьма важное замѣчаніе относительно величины этого члена, послужившее исходнымъ пунктомъ для продолжающихся до сихъ поръ изслѣдованій о формулѣ Taylor'a. Приступимъ къ изложенію соображеній Lagrange'a. Положимъ

$$(2)\qquad R_n=(x-a)^n N.$$

Тогда, перенося всѣ члены формулы (1) въ первую часть, получаемъ

$$(3)\qquad f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)-\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)-\ldots$$
$$\ldots-\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)-(x-a)^n N=0.$$

Разсмотримъ теперь нѣкоторую вспомогательную функцію $\varphi(z)$, выраженіе для которой получается замѣной буквы a буквой z въ равенствѣ (3), т. е. другими словами, положимъ

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-(x-z)f'(z)-\frac{(x-z)^2}{1.2}f''(z)-\ldots$$
$$\ldots-\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(z)-(x-z)^n N.$$

Относительно этой функціи $\varphi(z)$ замѣтимъ, что имѣютъ мѣсто равенства

$$\varphi(a) = 0, \varphi(x) = 0;$$

первое равенство есть не что иное, какъ равенство (3), второе очевидно по самому выраженію функціи $\varphi(z)$. Предположимъ, что непрерывны функціи $f(z), f'(z), \ldots f^{(n)}(z)$; тогда будутъ непрерывны функціи $\varphi(z)$ и $\varphi'(z)$, и по теоремѣ Rolle'я мы заключаемъ, что $\varphi'(z)$ должно обратится въ нуль для нѣкотораго значенія z, промежуточнаго между a и x, т. е. при

$$z = a + \theta(x - a),$$

гдѣ θ положительная правильная дробь. Составляя производную $\varphi'(z)$, мы замѣчаемъ, что сокращается цѣлый рядъ членовъ, и эта производная выражается очень просто:

$$\varphi'(z) = n(x - z)^{n-1}\left(N - \frac{1}{1.2\ldots(n-1)n} f^{(n)}(z)\right).$$

Подставляя сюда $z = a + \theta(x - a)$ и приравнивая на основаніи вышесказаннаго результатъ подстановки нулю, получимъ

$$N = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n} f^{(n)}\left(a + \theta(x - a)\right).$$

Отсюда дополнительный членъ формулы Taylor'a будетъ имѣть видъ

$$(4) \qquad R_n = \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots(n-1)n} f^{(n)}\left(a + \theta(x - a)\right).$$

Эта формула (4) представляетъ весьма важную теорему Lagrange'a. Оказывается, что для полученія величины дополнительнаго члена придется взять членъ формулы Taylor'a

$$\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a),$$

непосредственно слѣдующій за написанными, и замѣнить въ немъ аргументъ a производной выраженіемъ $a + \theta(x - a)$.

Это выраженіе дополнительнаго члена даетъ возможность судить о той ошибкѣ, которую мы дѣлаемъ, вычисляя функцію $f(x)$ по суммѣ

$$(5) \qquad f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a).$$

Очень часто можно замѣтить, что при возрастаніи значка n R_n стремится къ нулю. Тогда формула Taylor'a при возрастающихъ значеніяхъ цѣлаго числа n представляетъ безконечный рядъ, имѣющій суммой заданную функцію $f(x)$. Главное значеніе формулы Taylor'a однако состоитъ не въ указанномъ обстоятельствѣ, т. е. не въ томъ, что она даетъ возможность разложенія функціи въ безконечный рядъ, а въ томъ, что она позволяетъ замѣнять вычисленіе функціи $f(x)$ сложнаго вида вычисленіемъ частныхъ значеній цѣлой функціи (5), такъ что формула Taylor'a является формулой *итерполяціонной*, т. е. такой формулой, которая сводитъ вычисленіе однихъ функцій на вычисленіе функцій болѣе простыхъ. О задачахъ интерполированія будетъ сказано въ дальнѣйшемъ.

Послѣ Lagrange'a были даны другія формулы для дополнительнаго члена. Особенное значеніе имѣетъ формула, дающая возможность представить дополнительный членъ при помощи интегральнаго исчисленія. Объ этомъ будетъ также сказано далѣе.

§ 143. Переписывая формулу Taylor'a (1) предыдущаго § въ видѣ (4) § 141, получимъ

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+R_n,$$

гдѣ

$$R_n=\frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)n}f^{(n)}(x+\theta h).$$

Приращеніе h можно считать дифференціаломъ dx независимаго перемѣннаго. Тогда

$$hf'(x)=df,$$
$$h^2f''(x)=d^2f,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

$$f(x+h)-f(x)=\Delta f,$$

т. е. приращеніе функціи, и мы получаемъ

$$\Delta f=df+\frac{d^2f}{1.2}+\frac{d^3f}{1.2.3}+\ldots \tag{1}$$

Отсюда мы замѣчаемъ, что та безконечно малая величина высшаго порядка, на которую дифференціалъ функціи отличается отъ приращенія функціи, представляется рядомъ

$$\frac{d^2 f}{1.2} + \frac{d^3 f}{1.2.3} + \ldots$$

Формула (1) сохраняетъ свой видъ и для функцій многихъ перемѣнныхъ независимыхъ; въ этомъ случаѣ df, $d^2 f$, $d^3 f$, . . . суть полные дифференціалы перваго, второго и т. д. порядка.

§ 144. Полагая въ формулѣ (1) § 142

$$a = 0,$$

получаемъ *формулу Maclaurin'a*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3.} f'''(0) + \ldots,$$

дающую непосредственно разложеніе функціи $f(x)$ въ рядъ по степенямъ x.

§ 145. Примѣнимъ формулу Maclaurin'a къ разложенію наиболѣе важныхъ функцій въ ряды.

I. Возьмемъ функцію

$$f(x) = e^x.$$

Тогда будемъ имѣть

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, .$$

получаемъ

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \ldots,$$

откуда

$$(1) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

II. Возьмемъ функцію

$$f(x) = \sin x.$$

Мы имѣемъ

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{IV}(x) = \sin x, .$$

откуда

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{IV}(0) = 0, \ldots,$$

получаемъ, слѣдовательно,

$$(2) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} +$$

$$+ \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

III. Разсмотримъ, наконецъ, функцію

$$f(x) = \cos x.$$

Мы имѣемъ

$$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x, f^{IV}(x) = \cos x, \ldots$$

значитъ

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0, f^{IV}(0) = 1, \ldots$$

и разложеніе получается въ такомъ видѣ:

$$(3) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

Основы интегральнаго исчисленія.

§ 146. Мы видѣли, что дифференціальное исчисленіе имѣло своей главной задачей нахожденіе предѣла отношенія $\frac{\beta}{\alpha}$ двухъ безконечно малыхъ величинъ. Интегральное исчисленіе, къ изложенію котораго мы приступаемъ, будетъ имѣть главной задачей разсмотрѣніе предѣловъ суммъ

$$\Sigma \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

безконечно малыхъ слагаемыхъ α_i, когда число этихъ слагаемыхъ безпредѣльно возрастаетъ.

Оказывается, что разсмотрѣніе такихъ суммъ тѣсно связано съ задачей, обратной задачѣ нахожденія производной заданной функціи, т. е. съ такой задачей: задана функція $f(x)$, ищется новая функція $F(x)$ такимъ образомъ, чтобы ея производная $F'(x)$ равнялась заданной функціи, т. е. чтобы было

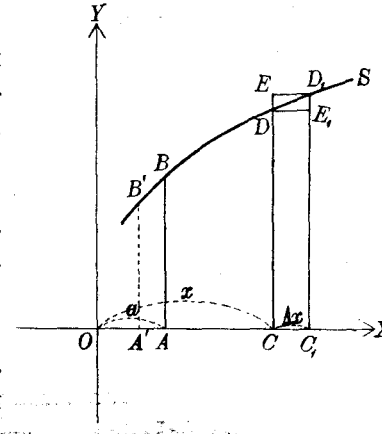
$$F'(x) = f(x).$$

Тогда искомая функція $F(x)$ носитъ названіе *первообразной функціи*.

Напримѣръ, если $f(x) = \cos x$, то очевидно, что за первообразную функцію $F(x)$ можно будетъ принять $\sin x$.

§ 147. Основнымъ является вопросъ, существуетъ ли для всякой заданной функціи опредѣленная первообразная. Первый свѣтъ на этотъ вопросъ проливается изъ геометрическихъ соображеній. Будемъ разсматривать функцію $f(x)$, изображаемую кривою линіей, такъ что въ плоскости прямоугольныхъ координатъ построена кривая S (черт. 66), опредѣляемая уравненіемъ

$$y = f(x).$$



Черт. 66.

Возьмемъ нѣкоторую ординату AB этой кривой, соотвѣтствующую $x = a$, и перемѣнную ординату CD, соотвѣтствующую перемѣнной абсциссѣ x. Будемъ разсматривать площадь V части плоскости $ABDC$, ограниченной осью x-овъ, двумя ординатами AB и CD и частью BD заданной кривой. Эта площадь будетъ, очевидно, функціей отъ x. Покажемъ, что производная этой функціи по x будетъ равняться какъ разъ ординатѣ CD.

Въ самомъ дѣлѣ, дадимъ перемѣнной независимой приращеніе $\Delta x = CC_1$. Тогда приращеніе функціи будетъ $\Delta V = CDD_1C_1$. Мы всегда имѣемъ право предположить, что при достаточно маломъ приращеніи x функція $f(x)$ остается или возрастающей, или убывающей. Для опредѣленности рѣчи предположимъ, что функція возрастаетъ, какъ это и указано на чертежѣ. Тогда мы имѣемъ неравенство

$$CDE_1C_1 < \Delta V < CED_1C_1,$$

или иначе

$$f(x)\,\Delta x < \Delta V < f(x + \Delta x)\,\Delta x;$$

отсюда

$$f(x) < \frac{\Delta V}{\Delta x} < f(x + \Delta x).$$

Такъ какъ мы нашу функцію предполагаемъ непрерывною, то

$$\lim_{\Delta x = 0} f(x + \Delta x) = f(x),$$

и мы получаемъ

$$\frac{dV}{dx} = f(x), \tag{1}$$

т. е. другими словами, мы видимъ, что площадь V будетъ первообразной функціей отъ заданной функціи $f(x)$.

Это разсужденіе убѣждаетъ насъ въ томъ, что первообразная функція существуетъ для всѣхъ такихъ непрерывныхъ функцій, которыя изображаются кривыми линіями.

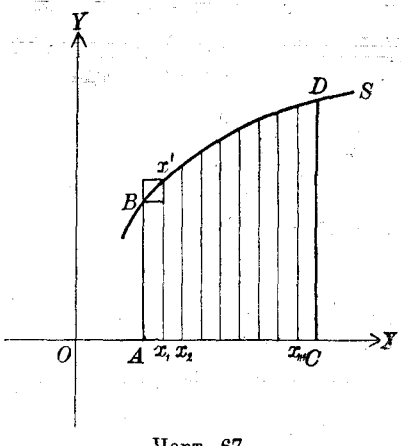
Такъ какъ отъ прибавленія къ первообразной функціи постояннаго числа производная не мѣняется, то мы замѣчаемъ, что задача нахожденія первообразной функціи есть задача неопредѣленная, т. е., другими словами, если для заданной функціи $f(x)$ существуетъ первообразная функція $F(x)$, то будетъ существовать безчисленное множество первообразныхъ функцій, причемъ всѣ эти функціи выражаются по формулѣ

$$F(x) + C,$$

гдѣ C произвольная постоянная величина. Геометрически неопредѣленность первообразной функціи сводится къ тому, что за начальную ординату AB можно выбирать любую изъ ординатъ, т. е., другими словами, если мы выбираемъ другую начальную ординату $A'B'$, то мы къ перемѣнной площади V прибавляемъ постоянное число

$$C = ABB'A'.$$

§ 148. Геометрическое толкованіе первообразной функціи, какъ площади, даетъ возможность вычислять эту функцію при помощи новой операціи, состоящей въ нахожденіи предѣла суммы безконечно большого числа безконечно малыхъ слагаемыхъ.



Черт. 67.

Будемъ предполагать, что функція, изображаемая кривою S (черт. 67), возрастаетъ между ординатами AB и CD. Тогда для вычисленія площади V можемъ поступить такъ: разстояніе AC между основаніями крайнихъ ординатъ разобьемъ на нѣкоторое число n промежутковъ. Аналитически это приведется къ указанію ряда чиселъ

(1) $$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1},$$

заключающихся въ промежуткѣ между

$$a = OA \text{ и } b = OC,$$

такъ что

$$a < x_1, x_{n-1} < b.$$

Тогда наша площадь разобьется ординатами, соотвѣтствующими числамъ (1) на рядъ криволинейныхъ трапецій, подобныхъ $ABx'x_1$, у которыхъ одна сторона Bx' есть кусокъ заданной кривой, а остальныя стороны прямыя. Площадь каждой изъ этихъ трапецій будетъ заключаться между площадями двухъ прямоугольниковъ, которые мы получимъ, проведя изъ концовъ криволинейной стороны трапеціи прямыя, параллельныя оси x-овъ. Тогда очевидно, что площадь V будетъ больше площади внутреннихъ и меньше площади внѣшнихъ прямоугольниковъ, и мы получаемъ неравенства

(1) $V > f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1})$,

(2) $V < f(x)(x_1 - a) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(b)(b - x_{n-1})$.

Покажемъ теперь, что, если мы будемъ увеличивать такимъ образомъ число n промежутковъ, что при возрастаніи этого числа и наибольшій по длинѣ изъ всѣхъ промежутковъ можетъ быть сдѣланъ сколь угодно малымъ, то суммы въ правыхъ частяхъ неравенствъ (1) и (2) необходимо стремятся къ общему предѣлу V. Въ самомъ дѣлѣ, переписывая неравенства (1) и (2) въ видѣ

$$V > \Sigma_1, V < \Sigma_2,$$

получимъ

$$0 < V - \Sigma_1 < \Sigma_2 - \Sigma_1,$$

и значитъ

(3) $$0 < V - \Sigma_1, < [f(x_1) - f(a)](x_1 - a) +$$
$$+ [f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) + \ldots + [f(b) - f(x_{n-1})](b - x_{n-1}).$$

Предполагая функцію $f(x)$ непрерывною и предполагая, что при достаточно большомъ числѣ промежутковъ всѣ эти промежутки достаточно малы, мы можемъ эти промежутки увеличеніемъ ихъ числа настолько уменьшить, чтобы было

$$f(x_1) - f(a) < \varepsilon,$$
$$f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f(b) - f(x_{n-1}) < \varepsilon,$$

гдѣ ε произвольно малое положительное число. Тогда неравенство (3) принимаетъ видъ

$$0 < V - \Sigma_1 < \varepsilon\,[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})].$$

Полагая

$$\varepsilon\,(b - a) < \eta,$$

получаемъ неравенство

$$0 < V - \Sigma_1 < \eta, \tag{4}$$

которое показываетъ, что площадь V есть предѣлъ суммы Σ_1. Аналогичныя разсужденія приводятъ къ неравенству

$$0 < \Sigma_2 - V < \eta, \tag{5}$$

такъ что V оказывается общимъ предѣломъ двухъ суммъ Σ_1 и Σ_2.

Сумму Σ_1 можно записать такимъ образомъ:

$$\Sigma_1 = \Sigma f(x)\,\Delta x,$$

гдѣ сумма во второй части обозначаетъ не что иное, какъ сумму, стоящую во второй части неравенства (1). Въ виду этого употребляется такой знакъ для обозначенія площади, какъ предѣла суммы:

$$V = \int f(x)\,dx.$$

Этотъ знакъ носитъ названіе знака *интеграла*. Онъ происходитъ, конечно, отъ латинской буквы S, начальной буквы слова *summa*.

Чтобы указать, между какими ординатами берется разсматриваемая площадь, пишутъ такой знакъ:

$$V = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

который носитъ названіе *опредѣленнаго интеграла*, причемъ абсциссы a и b крайнихъ ординатъ площади носятъ названіе *предѣловъ* интеграла. Предѣлъ a называется *нижнимъ предѣломъ*, предѣлъ b *верхнимъ предѣломъ*, функція $f(x)$ называется *подинтегральной функціей*, и формула (6) читается такъ: *V равняется опредѣленному интегралу, взятому отъ a до b, отъ функціи $f(x)$*.

Если верхній предѣлъ опредѣленнаго интеграла оставляется произвольнымъ:

$$V = \int_a^x f(x)\,dx, \tag{7}$$

то мы приходимъ къ понятію о такъ называемомъ *неопредѣленномъ*

интегралъ. Этотъ интегралъ мы разсматривали въ § 147, когда считали одну изъ ординатъ перемѣнной. Значитъ формула (7) опредѣляетъ V, какъ функцію отъ предѣла x такую, что

$$\frac{dV}{dx} = f(x). \tag{8}$$

Неопредѣленный интегралъ, который представляетъ не что иное, какъ одно изъ значеній первообразной функціи, часто пишется безъ знаковъ предѣла, т. е.

$$V = \int f(x)\,dx.$$

На основаніи равенства (8) эту формулу можно написать еще такъ:

$$V = \int dV,$$

откуда мы замѣчаемъ, что знаки интеграла и дифференціала взаимно уничтожаются.

§ 149. Формула (7) предыдущаго §-а показываетъ, что интегралъ допускаетъ двоякое опредѣленіе: во-первыхъ, какъ первообразная функція отъ подинтегральной, во вторыхъ, какъ предѣлъ суммы. Второе понятіе объ интегралѣ, какъ предѣлѣ суммы, древнѣе, чѣмъ понятіе объ операціи, обратной дифференцированію. Послѣднее понятіе восходитъ къ Leibniz'у (1675). Необходимо признать, что еще у Архимеда (287—212 до Р. Х.) существуютъ примѣры опредѣленія площадей при помощи суммъ, аналогичныхъ интеграламъ, именно въ сочиненіи о квадратурѣ параболы, а также въ найденномъ въ 1906 году сочиненіи о механическихъ теоремахъ.

§ 150. Легко видѣть, что формулу для площадей можно написать еще такъ:

$$V = f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(b - x_{n-1}),$$

гдѣ $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ суть числа, лежащія въ соотвѣтственныхъ промежуткахъ, а именно

$$a < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < \xi_n < b.$$

Riemann поставилъ себѣ цѣлью изучить условія, необходимыя и достаточныя для такъ называемой *интегрируемости* заданной функціи $f(x)$. Подъ интегрируемостью разумѣется свойство функціи давать для суммы

$$(1) \qquad \sum_a^b f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

гдѣ

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i,$$

опредѣленный предѣлъ, не зависящій отъ закона раздѣленія промежутка (a, b) числами x_i на частичные промежутки и отъ закона выбора числа ξ_i въ промежуткѣ (x_{i-1}, x_i). Итакъ, если сумма (1) имѣетъ опредѣленный предѣлъ, не зависящій отъ указаннаго закона заданія чиселъ ξ_i, то функція $f(x)$ называется *интегрируемой* а искомый предѣлъ носитъ названіе опредѣленнаго интеграла и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim \sum_a^b f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Здѣсь мы не можемъ входить въ подробное изложеніе изслѣдованій Riemann'a, замѣтимъ лишь, что всякая конечная и непрерывная функція въ промежуткѣ (a, b) есть функція интегрируемая.

Riemann'овское понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ было обобщено Lebesgue'омъ.

§ 151. Резюмируя сказанное въ предыдущихъ §-ахъ, мы устанавливаемъ слѣдующія положенія.

I. Интегралъ

$$\int_a^x f(x)\,dx,$$

гдѣ $f(x)$ конечная и непрерывная функція, есть конечная и непрерывная функція отъ x.

II. Этотъ интегралъ для каждаго значенія x имѣетъ опредѣленную производную, равную подинтегральной функціи $f(x)$.

III. Справедливо равенство

$$(1) \qquad \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a),$$

гдѣ $F(x)$ есть одна изъ первообразныхъ функцій подинтегральной функціи.

Чтобы доказать третье положеніе, достаточно замѣтить, что будетъ имѣть мѣсто равенство

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C,$$

гдѣ C постоянная. При приближеніи x къ a, т. е. при уменьшеніи промежутка (a, x) опредѣленный интегралъ, очевидно, приближается къ нулю, ибо приближается къ нулю площадь кривой линіи, и мы получаемъ при $x = a$

$$0 = F(a) + C,$$

откуда

$$C = -F(a),$$

и формула (1) оказывается справедливой.

Интегрированіе простѣйшихъ функцій.

§ 152. Приведенная въ § 110 таблица производныхъ даетъ въ то же время таблицу интеграловъ простѣйшихъ функцій.

Прежде всего мы замѣчаемъ, что *постоянный множитель можетъ быть вынесенъ изъ-подъ знака интеграла.* Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\int d(au) = au$$

$$a\int du = au,$$

слѣдовательно

$$\int d(au) = a\int du,$$

или, полагая

$$du = f(x)\,dx,$$

получаемъ

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

Здѣсь мы разсматриваемъ интегралы неопредѣленные и пропускаемъ добавочную постоянную.

§ 153. Получаемъ слѣдующую таблицу простѣйшихъ интеграловъ

$$dx^{n+1} = (n+1)\,x^n\,dx, \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$$

$$de^x = e^x\,dx, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C;$$

$$d\,a^x = a^x\,lg\,a\,dx, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{lga} + C;$$

$$d\,(lg\,x) = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dx}{x} = lg\,x + C;$$

$$d\,sin\,x = cos\,x\,dx \qquad \int cos\,x\,dx = sin\,x + C;$$

$$d\,cos\,x = -\,sin\,x\,dx, \qquad \int sin\,x\,dx = -\,cos\,x + C;$$

$$d\,tg\,x = \frac{dx}{cos^2 x}, \qquad \int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\,x + C;$$

$$d\,cotg\,x = -\frac{dx}{sin^2 x}, \qquad \int \frac{dx}{sin^2 x} = -\,cotg\,x + C.$$

$$d\,arc\,sin\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ (x<1), \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,sin\,x + C,$$

$$d\,arc\,tg\,x = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x + C.$$

По поводу приведенной таблицы необходимо сдѣлать слѣдующее замѣчаніе. Формула

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

при $n = -1$ дѣлается невозможной. Причиной этого обстоятельства является то, что

$$\int \frac{dx}{x}$$

оказывается трансцендентной функціей $lg\ x$.

§ 154. То обстоятельство, что производная суммы равняется суммѣ производныхъ, влечетъ за собой, какъ слѣдствіе, аналогичное свойство для интеграловъ, а именно: *интегралъ отъ суммы функцій является суммой интеграловъ отъ слагаемыхъ функцій.*

Напримѣръ

$$\int (4\,x^3 - 3\,x + 7)\,dx = \int 4\,x^3\,dx - \int 3\,x\,dx + \int 7\,dx + C =$$

$$= x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7x + C.$$

По этому правилу берется просто интегралъ отъ всякаго полинома.

Интегрированіе при помощи подстановки.

§ 155. Очень часто бываетъ, что интегралъ сводится замѣной перемѣнной къ новому интегралу, который мы умѣемъ находить. Тогда говорятъ, что интегралъ взятъ при помощи подстановки. Если мы сдѣлаемъ подстановку

$$x = \varphi(t),$$

то интегралъ преобразуется слѣдующимъ образомъ:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt.$$

Поясним указанное правило на примѣрахъ.

Требуется взять интегралъ

$$\int (ax+b)^m\,dx;$$

положимъ

$$ax + b = t,$$

тогда

$$dx = \frac{dt}{a},$$

и мы имѣемъ

$$\int (ax+b)^m\,dx = \frac{1}{a}\int t^m\,dt =$$

$$= \frac{t^{m+1}}{a(m+1)} + C = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + C.$$

II. Возьмемъ интегралъ

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q}.$$

Вслѣдствіе тождества

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

можно ввести новое перемѣнное при помощи равенства

$$x+\frac{p}{2}=t\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},$$

откуда

$$dx=dt\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},$$

и искомый интегралъ получитъ видъ

$$\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,arc\,tg\,t+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,arc\,tg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Интегрированіе по частямъ.

§ 156. Пусть u и v двѣ произвольныя функціи; тогда мы имѣемъ

$$d(uv)=u\,dv+v\,du,$$

откуда, интегрируя, получимъ

$$uv=\int u\,dv+\int v\,du$$

или

$$\int u\,dv=u\,v-\int v\,du.$$

Эта формула приводитъ вычисленіе интеграла $\int u\,dv$ къ вычисленію другого $\int v\,du$ и представляетъ собою очень часто употребляемую методу интегрированія. Эта метода называется *интегрированіемъ по частямъ.*

Напримѣръ

$$\int lg\,x\,dx=x\,lg\,x-\int x\,d(lg\,x)=$$

$$=lg\,x-\int\frac{x\,dx}{x}=x\,lg\,x-x+C=x(lg\,x-1)+C.$$

Интегрированіе раціональныхъ дробей.

§ 157. Подъ раціональной дробью понимается выраженіе вида

$$(1)\qquad \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n},$$

гдѣ въ числителѣ и знаменателѣ находятся цѣлыя функціи степеней m и n отъ x.

Обозначая для сокращенія дробь (1) черезъ

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

будемъ разсматривать интегралъ

$$(2)\qquad \int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx.$$

Замѣчательно, что какія бы функціи $\varphi(x)$ и $f(x)$ ни были, интегралъ (2), какъ говорятъ, берется въ конечномъ видѣ, т. е. выражается при помощи конечнаго числа функцій, извѣстныхъ въ элементарной математики. Необходимо при этомъ замѣтить, что интегральное исчисленіе приводитъ къ новымъ трансцендентнымъ функціямъ въ томъ случаѣ, когда интегралъ не берется въ конечномъ видѣ. Въ этомъ отношеніи интегральное исчисленіе раздѣляетъ участь всѣхъ обратныхъ дѣйствій; мы видѣли уже, что обратное сложенію дѣйствіе вычитанія приводитъ къ новымъ числамъ, такъ называемымъ отрицательнымъ; дѣленіе, будучи обратнымъ умноженію, приводитъ къ числамъ дробнымъ; извлеченіе корня приводитъ къ числамъ ирраціональнымъ; подобно этому, интегральное исчисленіе, будучи обратнымъ дифференціальному, приводитъ къ новымъ трансцендентнымъ функціямъ, которыя не выражаются при помощи конечнаго числа знаковъ элементарной математики.

Итакъ, обращаемся къ разсмотрѣнію интеграла отъ раціональныхъ дробей. Если степень многочлена $\varphi(x)$, стоящаго въ числителѣ, больше степени знаменателя $f(x)$, то, производя дѣленіе $\varphi(x)$ на $f(x)$, получимъ частное $\varphi_1(x)$ и остатокъ $\psi(x)$ степени, меньшей дѣлителя.

Тогда будемъ имѣть

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \varphi_1(x) + \frac{\psi(x)}{f(x)},$$

откуда

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx = \int \varphi_1(x)\, dx + \int \frac{\psi(x)}{f(x)} dx.$$

Интегралъ

$$\int \varphi_1(x)\, dx$$

берется просто, какъ интегралъ отъ полинома. Обратимся поэтому къ интегрированію раціональныхъ функцій въ томъ случаѣ, когда степень числителя меньше степени знаменателя. Найдемъ всѣ корни знаменателя, и пусть знаменатель раскладывается на простыя множители такъ:

$$f(x) = (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^r \ldots,$$

гдѣ

$$p + q + r + \ldots = n.$$

Существуетъ замѣчательное разложеніе всякой раціональной функціи разсматриваемаго вида на простѣйшія дроби. Это разложеніе имѣетъ видъ

$$(1)\quad \begin{aligned} \frac{\psi(x)}{f(x)} = {} & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \qquad + \frac{A_p}{(x-a)^p} + \\ & + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_q}{(x-b)^q} + \\ & + \frac{C_1}{x-c} + \frac{C_2}{(x-c)^2} + \ldots + \frac{C_r}{(x-c)^r} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Чтобы доказать возможность такого разложенія, нужно показать, что равенство (1) можетъ быть обращено въ тождество выборомъ постоянныхъ $A_1, A_2, \ldots A_p, B_1, B_2, \ldots B_q, \ldots$

Въ самомъ дѣлѣ, умножая обѣ части равенства (1) на $f(x)$, мы получимъ въ обѣихъ частяхъ многочлены. Въ первой части окажется многочленъ $\psi(x)$ степени не выше $n-1$, съ заданными коэффиціентами, во второй части получится многочленъ $(n-1)$-ой степени, потому что выраженія

$$\frac{f(x)}{x-a}, \frac{f(x)}{x-b}, \frac{f(x)}{x-c}, \ldots$$

будутъ $(n-1)$-ой степени. Собирая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ правой части и приравнивая ихъ соотвѣтственнымъ коэффиціентамъ въ лѣвой части, мы получимъ n уравненій (потому что цѣлая функція $(n-1)$-ой степени имѣетъ n коэффиціентовъ) первой степени съ неизвѣстными

$$A_1, A_2, \ldots A_p, B_1, B_2, \ldots B_q, \ldots$$

Этихъ неизвѣстныхъ также n, ибо

$$p+q+r \ldots = n.$$

Для коэффиціентовъ A_i, B_i, C_i, . . . въ равенствѣ (1) получаются, слѣдовательно, формулы, раціонально выражающіяся черезъ коэффиціенты функціи $\varphi(x)$ и корни знаменателя $f(x)$.

Напримѣръ:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-2}.$$

Приведя къ одному знаменателю, получаемъ

$$x^2 = A_1(x-1)(x-2) + A_2(x-2) + B(x-1)^2$$

или

$$x^2 = (A_1+B)x^2 + (-3A_1+A_2-2B)x + (2A_1-2A_2+B);$$

получаемъ, слѣдовательно, уравненія

$$A_1+B=1,$$
$$-3A_1+A_2-2B=0,$$
$$2A_1-2A_2+B=0,$$

откуда

$$A_1=-3, A_2=-1, B=4,$$

и разложеніе получится въ такомъ видѣ:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{3}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-2}.$$

Интегрируя равенство (1), получаемъ окончательное выраженіе интеграла раціональной функціи:

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx = A_1 \lg(x-a) - \frac{A_2}{x-a} - \ldots - \frac{A_p}{(p-1)(x-a)^{p-1}} +$$
$$+ B_1 \lg(x-b) - \frac{B_2}{x-b} - \ldots - \frac{B_q}{(q-1)(x-a)^{q-1}} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§ 158. Что касается интеграловъ отъ выраженій ирраціональныхъ и трансцендентныхъ, то лишь немногіе интегралы отъ болѣе простыхъ выраженій такого вида берутся въ конечномъ видѣ, большинство же интеграловъ не берутся въ конечномъ видѣ и представляютъ новыя трансцендентныя.

Интегрированіе при помощи рядовъ.

§ 159. Положимъ, что подинтегральная функція $f(x)$ разлагается въ безконечный рядъ функцій

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots \tag{1}$$

Степенные ряды, которые мы видѣли при разложеніи по формулѣ Maclaurin'а представляютъ собою частный случай рядовъ функцій.

Старые математики, не долго думая, выводили изъ равенства (1) равенство

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x u_1(x)\,dx + \int_a^x u_2(x)\,dx + \int_a^x u_3(x)\,dx + \ldots$$

Такимъ образомъ они поступали при интегрированіи безконечнаго ряда такъ же, какъ при интегрированіи конечныхъ суммъ. Можно однако указать рядъ простыхъ примѣровъ, гдѣ такое интегрированіе ряда приводитъ къ абсурднымъ результатамъ. Для того, чтобы можно было рядъ интегрировать почленно, необходимо, чтобы этотъ рядъ былъ *равномѣрно* сходящимся. Подъ равномѣрной сходимостью мы понимаемъ слѣдующее свойство ряда: представимъ формулу (1) въ такомъ видѣ:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_{n-1}(x) + R_n,$$

гдѣ дополнительный членъ R_n выражается по формулѣ

$$R_n = u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots$$

Для сходимости ряда необходимо, чтобы

$$lim\ R_n = 0.$$

т. е. другими словами, чтобы всякому малому положительному числу ε можно было сопоставить такое большое n, что

$$|R_n| < \varepsilon.$$

Если такое сопоставленіе цѣлаго числа n числу ε не зависитъ отъ значеній, которыя можетъ принимать x въ данныхъ границахъ отъ a до b, то сходимость называется равномѣрной, и

рядъ можно интегрировать. Если же n, сопоставляемое числу ε, есть функція, какъ отъ ε, такъ и отъ x, то рядъ не будетъ равномѣрно сходиться.

§ 160. Сдѣлаемъ нѣсколько примѣровъ на интегрированіе при помощи рядовъ, которые будутъ не столько относиться къ задачѣ нахожденія интеграловъ, сколько къ задачѣ разложенія функцій въ ряды.

I. Возьмемъ интегралъ

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = lg\,(1+x).$$

Предположимъ, что x заключается въ предѣлахъ

(1) $$0 < x < 1.$$

При помощи простого дѣленія мы получаемъ формулу

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1+x},$$

откуда, интегрируя, получимъ

(2) $$lg\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \\ + (-1)^n \int_0^x \frac{x^n\,dx}{1+x}.$$

Такъ какъ при неравенствахъ (1)

$$\frac{x^n}{1+x} < x^n,$$

то

$$\int_0^x \frac{x^n\,dx}{1+x} < \int_0^x x^n\,dx, \\ < \frac{x^{n+1}}{n+1}, \\ < \frac{1}{n+1}.$$

Итакъ, мы видимъ, что дополнительный членъ

$$\int_0^x \frac{x^n\,dx}{1+x}$$

будетъ меньше ε, если положимъ

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

и мы получаемъ разложеніе $lg(1+x)$ въ рядъ

$$lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

который остается сходящимся и при $x=1$; мы имѣемъ

$$lg\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

что подтверждаетъ сказанное въ § 48.

II. Возьмемъ интегралъ

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x.$$

Дѣленіе даетъ

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 -$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

Интегрируя, получаемъ

(3) $$arc\,tg\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{1+x^2}.$$

Послѣдній рядъ, какъ показываетъ дополнительный членъ, будетъ сходиться при

$$-1 < x \leqq 1.$$

Когда $x > 1$, то для вычисленія $arc\,tg\,x$ можно употребить формулу

$$arc\,tg\,x + arc\,co\,tg\,x = \frac{\pi}{2}$$

или

$$arc\,tg\,x + arc\,tg\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$arc\,tg\,x = \frac{\pi}{2} - arc\,tg\,\frac{1}{x},$$

и если $x > 1$, то $\frac{1}{x} < 1$.

§ 161. Подставляя въ формулу (3) предыдущаго §-а $x = 1$, получаемъ

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Эта формула неудобна для вычисленія π вслѣдствіе плохой сходимости. Самой удобной формулой для вычисленія π является формула Machin'а

$$\frac{\pi}{4} = 4\,arc\,tg\,\frac{1}{5} - arc\,tg\,\frac{1}{239},$$

такъ какъ ряды для $arc\,tg\,\frac{1}{5}$ и $arc\,tg\,\frac{1}{239}$ очень быстро сходятся.

Мною была предложена такая задача въ 1895 г. въ журналѣ „Intermédiaire des mathématiciens“:

Найти всѣ рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ уравненія

$$(1) \qquad \frac{\pi}{4} = m\,arc\,tg\,\frac{1}{p} + n\,arc\,tg\,\frac{1}{q}.$$

Уже давно было извѣстно пять рѣшеній:

$m = 1, n = 1, p = 2, q = 3;$
$m = 2, n = 1, p = 1, q = -1:$
$m = 2, n = 1, p = 2, q = -7;$
$m = 2, n = 1, p = 3, q = 7$ (Euler);
$m = 4, n = 1, p = 5, q = -239$ (Machin).

Изъ соображеній, относящихся къ дѣлителямъ чиселъ вида $x^2 + 1$, я догадался, что больше цѣлыхъ рѣшеній уравненія (1) не существуетъ. Эту теорему доказалъ вполнѣ студентъ университета въ Христіаніи C. Stoermer, нынѣ профессоръ этого университета. Послѣ этого доказательства можно считать формулу Machin'а дѣйствительно лучшей формулой для вычисленія π.

Опредѣленные интегралы.

§ 162. Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію главнѣйшихъ свойствъ опредѣленныхъ интеграловъ.

I. Очевидно, что при перестановкѣ предѣловъ интегрированія опредѣленный интегралъ мѣняетъ свой знакъ, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

ибо при измѣненіи направленія интегрированія значенія подинтегральной функціи входятъ въ сумму въ прежнемъ видѣ, тогда какъ приращеніе независимаго перемѣннаго измѣняетъ свой знакъ; отсюда мѣняетъ знакъ и вся сумма.

II. Очевидно, справедливы формулы

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^b f(x)\,dx$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx + \int_{c_k}^b f(x)\,dx.$$

III. Если $f(x)$ функція четная, т. е. такая, которая обладаетъ свойствомъ

$$f(-x) = f(x),$$

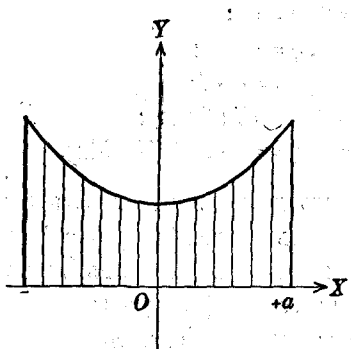
то имѣетъ мѣсто равенство

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

ибо при переходѣ черезъ отрицательныя значенія отъ $-a$ до 0 подинтегральная функція пробѣгаетъ тѣ же самыя численныя значенія, что и въ положительномъ промежуткѣ отъ 0 до a. Геометрически это сводится къ тому (черт. 68), что площадь, опредѣляемая интеграломъ

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$$

равняется удвоенной площади, опредѣляемой интеграломъ



Черт. 68.

$$\int_0^a f(x)\,dx.$$

Если подинтегральная функція нечетная, т. е. если она удовлетворяетъ условію

$$f(-x) = -f(x),$$

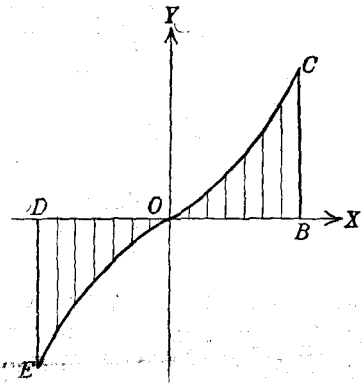
то имѣетъ мѣсто равенство

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0.$$

Въ этомъ случаѣ площадь, опредѣляемая интеграломъ

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$$

состоитъ изъ двухъ частей, положительной площади OBC (черт. 69) и равновеликой ей по абсолютной величинѣ отрицательной площади ODE которыя въ суммѣ взаимно уничтожаются*).



Черт. 69.

Несобственные опредѣленные интегралы.

§ 163. Riemann'овское опредѣленіе перестаетъ имѣть мѣсто въ двухъ случаяхъ: во-первыхъ, когда подинтегральная функція обращается въ безконечность внутри промежутка интегрированія, во-вторыхъ, когда промежутокъ интегрированія дѣлается безконечно большимъ.

Если, несмотря на такія исключительныя обстоятельства, возможно бываетъ путемъ новыхъ опредѣленій все таки установить понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

---

*) Названіе „четная функція" происходитъ отъ того, что къ четнымъ функціямъ принадлежатъ всѣ полиномы, имѣющіе только четные показатели, напримѣръ

$$A x^4 + A_1 x^2 + A_2,$$

а къ нечетнымъ функціямъ принадлежатъ всѣ полиномы съ одними нечетными показателями, напримѣръ

$$3 x^5 - 4 x^3 + x.$$

то тогда такой интегралъ будемъ называть *несобственнымъ интеграломъ*.

Понятіе о несобственномъ интегралѣ было впервые разъяснено Cauchy.

Разсмотримъ случай, когда въ промежуткѣ интегрированія (a, b), гдѣ $a < b$, подинтегральная функція $f(x)$ обращается въ ∞ только при одномъ значеніи $x = c$, между тѣмъ какъ въ двухъ промежуткахъ $(a, c-\delta)$, $(c+\varepsilon, b)$ функція интегрируема, какъ бы малы ни были положительныя числа δ и ε. Если два интеграла

$$\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx\,,\ \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

стремятся къ опредѣленнымъ конечнымъ предѣламъ при уменьшеніи δ и ε, причемъ эти предѣлы не зависятъ отъ закона приближенія чиселъ δ и ε къ нулю, тогда мы приходимъ къ несобственному интегралу, опредѣляемому слѣдующимъ образомъ:

$$(1)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = lim \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + lim \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Понятіе о несобственномъ интегралѣ съ одною безконечностью въ промежуткѣ интегрированія, конечно, непосредственно обобщается на случай нѣкотораго конечнаго числа такихъ безконечностей. Оказывается возможнымъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ ввести понятіе о несобственномъ интегралѣ съ безконечнымъ числомъ безконечностей въ промежуткѣ интегрированія.

Иногда встрѣчается слѣдующее обстоятельство, на которое обратилъ вниманіе Cauchy, а именно формула (1) не даетъ возможности установить понятіе о несобственномъ интегралѣ, ибо не существуетъ опредѣленныхъ предѣловъ для интеграловъ

$$(2)\qquad \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx \ \text{ и } \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

при произвольныхъ δ и ε; между тѣмъ, если мы установимъ нѣкоторое соотношеніе между δ и ε, то получимъ нѣкоторое предѣльное значеніе для суммы интеграловъ (2). Напримѣръ, разсматривая интегралъ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}\,,$$

мы замѣчаемъ, что подинтегральная функція $\frac{1}{x}$ обращается въ ∞ при $x=0$. Тогда, если бы мы захотѣли разсматривать формулу

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = lim \left\{ \int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x} \right\},$$

то получили бы

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = lim \left\{ \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} - \int_{\delta}^{1} \frac{dx}{x} \right\} =$$

$$= lim \left\{ lg\, 1 - lg\, \varepsilon - (lg\, 1 - lg\, \delta) \right\} = lim\, lg \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Если мы установимъ соотношеніе

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = a,$$

гдѣ a нѣкоторое постоянное число, тогда можно написать

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = lg\, a.$$

Cauchy предложилъ называть главнымъ значеніемъ несобственнаго интеграла послѣдняго вида то значеніе, которое соотвѣтствуетъ соотношенію

$$\varepsilon = \delta, \text{ т. е. } a = 1.$$

Хотя Dirichlet употреблялъ это понятіе о главномъ значеніи интеграла, тѣмъ не менѣе Riemann и Kronecker оспариваютъ необходимость такого понятія.

§ 164. Что касается другого обстоятельства, когда промежутокъ интегрированія дѣлается безконечно большимъ, то тутъ нужно разсматривать три случая: когда, во первыхъ, безконеченъ верхній предѣлъ, во-вторыхъ нижній предѣлъ, въ третьихъ оба предѣла.

Несобственные интегралы съ безконечными предѣлами опредѣляются, очевидно, при помощи формулъ

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b=\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx,$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a=-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

и, наконецъ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a=-\infty \\ b=+\infty}} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Въ третьемъ случаѣ предѣлъ не долженъ зависѣть отъ закона увеличенія чиселъ a и b. Здѣсь также можетъ случиться, что предѣлъ существуетъ только при извѣстномъ соотношеніи между a и b. Значеніе

$$\lim_{a=\infty} \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$$

называется главнымъ значеніемъ интеграла.

Если несобственные интегралы существуютъ и конечны, т. е. существуютъ тѣ предѣлы, о которыхъ шла рѣчь выше, то интегралъ называется *сходящимся*. Можно наблюдать замѣчательную аналогію сходящихся интеграловъ со сходящимися рядами, а именно интегралъ называется абсолютно сходящимся, если будетъ сходящимся другой интегралъ, гдѣ подинтегральная функція есть абсолютная величина подинтегральной функціи перваго интеграла, и условно сходящимся, если это не имѣетъ мѣста.

Теорема Cauchy. Признакъ Ермакова.

§ 165. Вопросъ о сходимости несобственныхъ интеграловъ находится въ большой связи съ вопросомъ о сходимости рядовъ. Въ этомъ направленіи большое значеніе имѣетъ слѣдующая теорема Cauchy.

Теорема. *Безконечный рядъ*

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots,$$

гдѣ $f(x)$ убывающая до нуля съ возрастаніемъ x до ∞ положительная функція, будетъ сходящимся или расходящимся смотря по тому, будетъ ли

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

число конечное или безконечное, и обратно.

По условію убыванія функціи мы имѣемъ при $a < x < a+1$

$$f(a) > f(x) > f(a+1),$$

отсюда

$$\int_a^{a+1} f(a)\,dx > \int_a^{a+1} f(x)\,dx > \int_a^{a+1} f(a+1)\,dx,$$

т. е.

$$f(a) > \int_a^{a+1} f(x)\,dx > f(a+1);$$

отсюда получаемъ

$$f(a)+f(a+1)+\ldots+f(a+n-1) > \int_a^{a+n} f(x)\,dx > f(a+1)+\ldots$$
$$\ldots+f(a+n).$$

Эти неравенства показываютъ, что если n возрастаетъ безпредѣльно, то интегралъ сходится одновременно съ рядомъ.

166. Изъ теоремы Cauchy вытекаетъ принадлежащій профессору Ермакову весьма важный признакъ сходимости рядовъ съ положительными членами.

Пусть $\varphi(x)$ обозначаетъ функцію обусловленную только тѣмъ, что при $x > a$, гдѣ a достаточно большое положительное число, имѣетъ мѣсто неравенство

$$\varphi(x) > x.$$

Разсмотримъ рядъ изъ положительныхъ членовъ

$$(1) \qquad f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots$$

Получается такая теорема Ермакова.

Если при всѣхъ $x > a$, гдѣ a достаточно большое положительное чис[illegible] имѣетъ мѣсто неравенство

$$\frac{\varphi'(x)\,f(\varphi(x))}{f(x)} < a < 1,$$

то рядъ (1) будетъ сходящимся. Если же имѣетъ мѣсто неравенство

$$\frac{\varphi'(x)\,f(\varphi(x))}{f(x)} > 1,$$

то рядъ (1) расходится.

Въ самомъ дѣлѣ, при произвольномъ числѣ b, большемъ a, будемъ, очевидно, имѣть

$$\int_a^b \varphi'(x)\,f(\varphi(x))\,dx < a\int_a^b f(x)\,dx.$$

Положивъ $\varphi(x) = z$, получимъ

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\,dz < a\int_a^b f(x)\,dx.$$

Возвращаясь отъ обозначенія подинтегральной функціи z къ обозначенію x и разбивая первый интегралъ на части, можно написать

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{\varphi(b)} f(x)\,dx - \int_a^{\varphi(a)} f(x)\,dx < \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

Интегралъ

$$\int_b^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

представляетъ собою положительное число, ибо $\varphi(b) > b$, значитъ, получаемъ

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^{\varphi(a)} f(x)\,dx < \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\,dx < \frac{1}{1-\alpha} \int_a^{\varphi(a)} f(x)\,dx,$$

и у насъ получается конечность интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

при $b = \infty$.

Совершенно подобнымъ же образомъ мы убѣждаемся въ расходимости ряда при второмъ неравенствѣ.

Если мы положимъ въ признакѣ Ермакова

$$\varphi(x) = x + 1,$$

то получаемъ

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} = \frac{f(x+1)}{f(x)},$$

что представляетъ собою не что иное, какъ указанный въ § 43 признакъ D'Alembert'a.

Теорема о среднемъ значеніи. (Mittelwertsatz).

§ 167. Приведемъ теперь одну основную теорему, имѣющую большія приложенія: положимъ, что функція $f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ (a, b) интегрированія, а $\varphi(x)$—интегрируемая въ этомъ промежуткѣ функція, сохраняющая опредѣленный знакъ. Тогда существуетъ слѣдующая формула:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

гдѣ ξ нѣкоторое число, лежащее въ промежуткѣ интегрированія.

Обозначимъ черезъ m и M наименьшее и наибольшее значеніе функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (a, b). Тогда имѣемъ очевидныя неравенства

$$m \Sigma \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leqq \Sigma f(\xi_i) \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leqq M \Sigma \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Отсюда получаемъ неравенства

$$m \int_a^b \varphi(x)\, dx \leqq \int_a^b f(x) \varphi(x)\, dx \leqq M \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

откуда имѣемъ

$$\int_a^b f(x) \varphi(x)\, dx = \mathrm{m} \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

гдѣ m удовлетворяетъ неравенствамъ

$$m \leqq \mathrm{m} \leqq M.$$

Такъ какъ функція $f(x)$ по предположенію непрерывна, то она должна проходить всѣ промежуточныя значенія между своимъ наименьшимъ и наибольшимъ значеніемъ, значитъ, должно существовать нѣкоторое число ξ въ промежуткѣ интегрированія, для котораго будетъ

$$\mathrm{m} = f(\xi),$$

и теорема доказана.

§ 168. Къ этой давно извѣстной теоремѣ въ настоящее время присоединяютъ къ курсахъ интегральнаго исчисленія другую теорему, которую называютъ второй теоремой о среднемъ значеніи.

Будемъ называть функцію $f(x)$ *монотонною* въ нѣкоторомъ промежуткѣ, если она или все время возрастаетъ въ этомъ промежуткѣ или все время убываетъ.

Имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема.

Если

$$f(x) \text{ и } \varphi(x)$$

двѣ функціи, интегрируемыя въ промежуткѣ (a, b) *и* $f(x)$ *монотонна, то существуетъ въ этомъ промежуткѣ такое среднее значеніе* ξ, *для котораго имѣетъ мѣсто равенство*

$$\int_a^b f(x) \varphi(x)\, dx = f(a) \int_a^\xi \varphi(x)\, dx + f(b) \int_\xi^b \varphi(x)\, dx.$$

Интегрированіе и дифференцированіе подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла.

§ 169. Если функція $f(x, t)$ отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ, измѣняющихся въ промежуткахъ

$$a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

интегрируема, если ее разсматривать, какъ функцію отъ x, и непрерывна, если ее разсматривать, какъ функцію отъ t, то

$$\int_a^b f(x, t)\, dx$$

представляетъ непрерывную функцію отъ t въ промежуткѣ (α, β), причемъ этотъ промежутокъ можетъ быть безконечно большимъ.

Эту функцію можно интегрировать въ промежуткѣ отъ α до β подъ знакомъ интеграла, т. е. получается формула

$$\int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(x,t)\, dx \right] dt = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x, t)\, dt \right] dx.$$

Это равенство выражаетъ теорему о такъ называемомъ измѣненіи порядка интегрированія въ опредѣленныхъ интегралахъ.

§ 170. Если частная производная

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$$

непрерывна въ разсматриваемыхъ границахъ для перемѣнныхъ, то можно интегралъ, разсматриваемый какъ функцію отъ t, дифференцировать по такой формулѣ:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\, dx.$$

Если предѣлы a и b будутъ также функціи отъ t, то получается теорема:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\, dx + f(b, t) \frac{db}{dt} - f(a, t) \frac{da}{dt}.$$

Всѣ эти теоремы обобщаются для несобственныхъ интеграловъ.

Неравенства Чебышева.

§ 171. Чебышеву принадлежитъ слѣдующая весьма важная по приложеніямъ теорема.

Если функціи u, v въ границахъ интегрированія отъ 0 до 1 обѣ убываютъ, то имѣетъ мѣсто неравенство

$$\int_0^1 u\, v\, dx > \int_0^1 u\, dx \int_0^1 v\, dx.$$

Раздѣлимъ промежутокъ интегрированія на n частей, гдѣ n большое цѣлое число. Тогда можно положить

$$dx = \frac{1}{n},$$

и если мы обозначимъ черезъ $u_1, u_2, \ldots u_n, v_1, v_2, \ldots v_n$ значенія функцій въ соотвѣтственныхъ промежуткахъ, то задача приведется къ доказательству неравенства

$$\frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n}{n} >$$

$$> \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} \cdot \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}$$

при условіи

(1) $$u_1 > u_2 > \ldots > u_n,$$
$$v_1 > v_2 > \ldots > v_n.$$

Итакъ, подлежитъ доказательству при условіи (1) неравенство

(2) $$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) <$$
$$< n(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n).$$

Докажемъ это неравенство по индукціи.

При $n = 2$ неравенство

$$(u_1 + u_2)(v_1 + v_2) < 2(u_1 v_1 + u_2 v_2)$$

есть простое слѣдствіе очевиднаго неравенства

$$(u_1 - u_2)(v_1 - v_2) > 0.$$

Допустимъ теперь, что неравенство (2) справедливо при $n - 1$, т. е. что будетъ

(3) $$UV < (n-1)W,$$

гдѣ

$$U = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},$$
$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1},$$
$$W = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_{n-1} v_{n-1}.$$

На основаніи убыванія функцій u и v мы получаемъ очевидныя неравенства

$$u_n < \frac{U}{n-1}, \quad v_n < \frac{V}{n-1}.$$

Разсмотримъ еще такое очевидное неравенство:

$$\{U-(n-1)\,u_n\}\{V-(n-1)\,v_n\}>0,$$

или, раскрывая,

$$U\,V-(n-1)\,(V.\,u_n+U.\,v_n)+(n-1)^2\,u_n\,v_n>0.$$

Примѣняя неравенство (3) и сокращая на $n-1$, получимъ

(4) $$W-(V.\,u_n+U.\,v_n)+(n-1)\,u_n\,v_n>0.$$

Тождество

$$U\,V+u_n\,V+v_n\,U+u_n\,v_n=(U+u_n)\,(V+v_n)$$

на основаніи неравенства (3) даетъ

(5) $$(n-1)\,W+u_n\,V+v_n\,U+u_n\,v_n>(U+u_n)\,(V+v_n).$$

Сложеніе неравенствъ (4) и (5) даетъ неравенство

$$(U+u_n)\,(V+v_n)<n\,(W+u_n\,v_n),$$

доказывающее теорему.

Пріемы вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ.

§ 172. Если мы знаемъ неопредѣленный интегралъ, то величина опредѣленнаго интеграла вычисляется непосредственно по формулѣ

(1) $$\int_b^a f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

гдѣ $F(x)$ есть первообразная функція подинтегральной функціи $f(x)$.

Въ высшей степени важно то обстоятельство, что величину опредѣленнаго интеграла можно вычислить, не умѣя находить неопредѣленный, ибо мы имѣемъ другое происхожденіе опредѣленнаго интеграла, какъ предѣла суммы. Приближенно вычислить такой предѣлъ мы всегда умѣемъ; очень часто, однако, можно указать точныя значенія опредѣленныхъ интеграловъ, не умѣя находить соотвѣтственныхъ неопредѣленныхъ интеграловъ. Примѣромъ такого вычисленія можетъ служить формула

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

тогда какъ неопредѣленный интегралъ

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

не выражается въ конечномъ видѣ.

Въ виду сказаннаго теорія опредѣленныхъ интеграловъ представляетъ большой математическій интересъ по разнообразію пріемовъ вычисленія. Теорія опредѣленныхъ интеграловъ являлась предметомъ лекцій самыхъ выдающихся математиковъ, а именно Dirichlet, Kronecker'a и Thomae. Полное изложеніе этихъ методовъ можно видѣть въ книгѣ Bierens de Haan: „Exposé de la théorie des intégrales définies" (1862). Тотъ же авторъ далъ большое собраніе извѣстныхъ до настоящаго времени формулъ подъ заглавіемъ „Table des intégrales définies" (1867).

§ 173. Покажемъ на простомъ примѣрѣ возможность двоякаго вычисленія опредѣленнаго интеграла. Возьмемъ интегралъ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx.$$

Примѣняя формулу (1) предыдущаго §-а, получимъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Съ другой стороны

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \lim_{n=\infty} \Big\{ \alpha \cos\alpha + \alpha \cos 2\alpha +$$

$$\alpha \cos 3\alpha + \ldots + \alpha \cos (n-1)\alpha \Big\},$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{\pi}{2n}.$$

Отсюда мы видимъ, что интегралъ представляетъ собою предѣлъ такого выраженія

$$\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \Big\{ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha + \ldots$$

$$\ldots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(n-1)\alpha \Big\}.$$

По извѣстной формулѣ тригонометріи это выраженіе перепишется такъ:

$$\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left\{\sin\frac{3}{2}\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{5}{2}\alpha-\sin\frac{3}{2}\alpha+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\sin\frac{2n-1}{2}\alpha-\sin\frac{2n-3}{2}\alpha\right\}$$

и, слѣдовательно, интегралъ вычислится такимъ образомъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\lim_{n=\infty}\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left\{\sin\frac{2n-1}{2}\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}\right\}=$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\cdot\lim_{n=\infty}\left\{\sin\left(\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\sin\frac{\pi}{4n}\right\}=$$

$$=1\,.\,(1-0)=1.$$

Теорія ансамблей.

§ 174. Въ заключеніе главы, трактующей объ анализѣ безконечно малыхъ, мы должны упомянуть еще объ одной теоріи, которая имѣетъ большое приложеніе въ интегральномъ исчисленіи, а именно *о теоріи ансамблей или множествъ* (Mengenlehre).

Основателемъ этой теоріи былъ профессоръ Georg Cantor въ Halle. Здѣсь мы должны оговорить, что не надо смѣшивать Georg'a Cantor'a съ Heidelberg'скимъ профессоромъ Moritz'омъ Cantor'омъ, извѣстнымъ историкомъ математики, написавшимъ очень полезную книгу подъ заглавіемъ „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" (Leipzig 1880).

§ 175. Подъ *ансамблемъ* или *множествомъ* разумѣется совокупность нѣкотораго конечнаго или безконечнаго числа предметовъ. Такими предметами могутъ быть числа, точки, уравненія и т. д. Каждый изъ предметовъ называется *элементомъ* ансамбля. Ансамбль называется *конечнымъ*, если онъ состоитъ изъ конечнаго числа элементовъ и *безконечнымъ*, если онъ состоитъ изъ безконечнаго числа элементовъ.

При разсмотрѣніи безконечныхъ ансамблей явилось желаніе обобщить понятіе о числѣ элементовъ конечнаго ансамбля на случай ансамбля безконечнаго. Cantor вводитъ понятіе о *мощности* безконечнаго ансамбля, причемъ устанавливаетъ слѣдующее понятіе о *равенствѣ мощностей* у двухъ ансамблей.

Разсмотримъ два конечныхъ ансамбля A и B съ одинаковымъ числомъ n элементовъ. Возьмемъ по одному элементу изъ обоихъ ансамблей, элементъ a_1 изъ ансамбля A и элементъ b_1 изъ ансамбля B_1, и составимъ изъ нихъ нѣкоторую пару, которую назовемъ $\alpha_1 = (a_1, b_1)$; изъ оставшихся элементовъ беремъ опять одну пару $\alpha_2 = (a_2, b_2)$ и т. д. Послѣ n такихъ операцій мы получимъ n паръ и исчерпаемъ всѣ элементы обоихъ ансамблей. Будемъ называть указанную операцію образованія паръ *сопоставленіемъ* элементовъ обоихъ ансамблей. Указанное нами сопоставленіе можетъ быть названо *однозначнымъ* въ томъ смыслѣ, что каждый элементъ одного изъ ансамблей получаетъ одинъ вполнѣ опредѣленный парный элементъ изъ другого ансамбля.

Понятіе о такомъ однозначнымъ сопоставленіи двухъ ансамблей переносится и на случай двухъ безконечныхъ ансамблей. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ ансамбль, составленный изъ членовъ нѣкотораго ряда

(1) $$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$$

и кромѣ того ансамбль, составленный изъ натуральныхъ чиселъ

(2) $$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

Мы видимъ, что эти два ансамбля можно однозначно сопоставить, если мы каждому элементу n ансамбля (2) сопоставимъ, какъ парный, элементъ u_n ансамбля (1).

Опредѣленіе. *Говорятъ, что два ансамбля имѣютъ одну и ту же мощность, если ихъ элементы можно однозначно сопоставить.*

§ 176. Характерное свойство безконечнаго ансамбля состоитъ въ возможности имѣть одинаковую мощность со своей частью. Такъ напримѣръ, элементы безконечнаго ансамбля натуральныхъ чиселъ можно однозначно сопоставить съ элементами его части

$$2, 4, 6, 8, \ldots\ldots,$$

составленной изъ четныхъ чиселъ, ибо всякій элементъ n перваго ансамбля можетъ быть сопоставленъ съ элементомъ $2n$ второго.

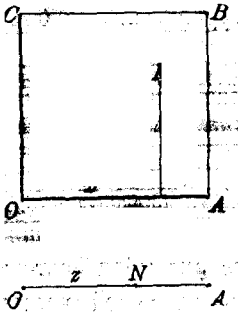
§ 177. Если бы мы, исходя изъ замѣченнаго свойства мощности безконечнаго ансамбля, быть одинаковой съ мощностью его части, сдѣлали предположеніе, не есть ли мощность такое понятіе, которое одинаково для всѣхъ ансамблей, то это предположеніе оказалось бы невѣрнымъ; напримѣръ, если мы ансамбль натуральныхъ чиселъ

(1) $$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

сравнимъ съ ансамблемъ точекъ нѣкотораго отрѣзка, то легко доказать *), что эти два ансамбля не будутъ имѣть одинаковой мощности. Оказывается, что мощность ансамбля точекъ будетъ больше мощности ансамбля (1). Ансамбли, имѣющіе одинаковую мощность съ мощностью ансамбля (1), носятъ названіе *перечислимыхъ* или *нумерованныхъ* ансамблей. Мощность же ансамбля точекъ нѣкотораго отрѣзка носитъ названіе *мощности непрерывности*. Мощность нумерованнаго ансамбля есть самая малая мощность ансамблей, ибо всякій безконечный ансамбль заключаетъ, какъ часть, нѣкоторый нумерованный.

Теорема Cantor'a.

§ 178. *Ансамбль точекъ M (черт. 70), лежащихъ внутри квадрата OACB и на двухъ его сторонахъ OA и OB имѣетъ ту же мощность, что и ансамбль точекъ N, лежащихъ на одной сторонѣ OA квадрата.*



Черт. 70.

Для доказательства теоремы предположимъ длину стороны квадрата равной единицѣ. Опредѣлимъ положеніе точки M внутри квадрата координатами x и y, а положеніе соотвѣтствующей точки N на отрѣзкѣ OA координатой z.

Очевидно, что всѣ три координаты будутъ правильныя положительныя дроби.

Всякое вещественное положительное число можно представить однимъ только способомъ въ видѣ десятичной дроби; единственную двузначность въ предсталеніи чиселъ десятичными дробями даютъ дроби съ періодомъ 9, напримѣръ

$$2{,}375 = 2{,}374999\ldots$$

Если мы условимся никогда не писать дробей съ періодомъ 9, а всегда писать равныя имъ конечныя дроби, тогда можно утверждать, что при такомъ ограниченіи всякое число представляется только однимъ способомъ въ видѣ десятичной дроби.

*) Граве. Введеніе въ анализъ.

Пусть координаты x и y представляются въ видѣ десятичныхъ дробей, тогда будемъ имѣть

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$
$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots$ суть послѣдовательныя цифры дроби, выражающей координату x, а $b_1, b_2, b_3, \ldots$ суть послѣдовательныя цифры дроби, выражающей координату y. Если мы напишемъ равенство

$$z = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots,$$

т. е. будемъ всегда дробь, выражающую координату z, писать такъ: на первое мѣсто послѣ запятой ставить первую цифру a_1 координаты x, на второе мѣсто первую цифру b_1 координаты y, на третье мѣсто слѣдующую по порядку, т. е. вторую цифру a_2 координаты x, на четвертое мѣсто вторую цифру координаты y, т. е. b_2, на пятое мѣсто третью цифру a_3 координаты x и т. д., то произойдетъ однозначное соотвѣтствіе между парой чиселъ (x, y) съ одной стороны и числомъ z съ другой, и теорему можно считать доказанной вполнѣ.

Очевидно, что доказанная для двухъ перемѣнныхъ теорема тѣмъ же пріемомъ доказательства можетъ быть распространена на случай какого угодно числа перемѣнныхъ. Итакъ, ансамбль, который даютъ n перемѣнныхъ

$$(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

причемъ каждая изъ этихъ перемѣнныхъ принимаетъ непрерывный рядъ вещественныхъ значеній въ данныхъ границахъ, имѣетъ ту же мощность, что и ансамбль частныхъ значеній одной вещественной перемѣнной

$$x,$$

измѣняющейся непрерывно въ нѣкоторыхъ границахъ.

Теорема Cantor'а приводитъ къ такому заключенію, что теорія функцій многихъ перемѣнныхъ можетъ быть съ нѣкоторой точки зрѣнія сведена на теорію функцій одного перемѣннаго, или, лучше сказать, теорія функцій многихъ перемѣнныхъ не представляетъ больше общности, чѣмъ теорія функцій одной перемѣнной.

Теорема Weierstrass'а.

§ 179. Будемъ разсматривать безконечный ансамбль комплексныхъ чиселъ, причемъ для большей наглядности будемъ эти числа называть точками плоскости. Будемъ ансамбль называть ограни-

ченнымъ, если всѣ его точки находятся внутри нѣкотораго сомкнутаго контура Σ. Назовемъ нѣкоторую точку α плоскости *точкой сгущенія* этого ансамбля, если вблизи этой точки находится безчисленное множество точекъ ансамбля, причемъ эти точки находятся на такомъ близкомъ разстояніи отъ точки α, что какимъ бы малымъ радіусомъ мы ни описали вокругъ точки α кругъ φ, внутри этого круга окажется безчисленное множество точекъ ансамбля.

Weierstrass доказалъ такую теорему.

Всякій ограниченный безконечный ансамбля имѣетъ по крайней мѣрѣ одну точку сгущенія.

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ на плоскости настолько большой квадратъ, чтобы всѣ точки заданнаго ансамбля были внутри его. Разобьемъ дѣленіемъ сторонъ пополамъ квадратъ на четыре равновеликихъ меньшихъ квадрата. Можно утверждать, что внутри одного изъ этихъ меньшихъ квадратовъ будетъ заключаться безчисленное число элементовъ ансамбля. Возьмемъ тотъ изъ меньшихъ квадратовъ, въ которомъ будетъ безчисленное множество точекъ ансамбля. Дѣлимъ его на четыре новыхъ и продолжаемъ эту операцію до безконечности; тогда мы получаемъ безчисленное множество уменьшающихся до нѣкоторой предѣльной точки квадратовъ, внутри которыхъ находится безчисленное множество элементовъ ансамбля. Предѣльная точка, до которой уменьшаются квадраты, и будетъ искомая точка сгущенія.

§ 180. Совокупность всѣхъ точекъ сгущенія даннаго ограниченнаго ансамбля образуетъ новый ансамбль, который носитъ названіе *производнаго ансамбля*. Такъ напримѣръ, если мы разсмотримъ ансамбль изъ раціональныхъ чиселъ, то очевидно, что производный ансамбль будетъ ансамбль всѣхъ вещественныхъ чиселъ, какъ раціональныхъ, такъ и ирраціональныхъ, ибо, какъ извѣстно изъ элементовъ, около всякаго вещественнаго числа, какъ раціональнаго, такъ и ирраціональнаго сгущаются раціональныя числа.

Трансфинитныя числа.

§ 181. Cantor предложилъ вводить въ разсмотрѣніе такъ называемая *трансфинитныя числа*, которыя какъ будто представляются числами, большими безконечности.

Покажемъ на одномъ примѣрѣ, какъ можно притти къ понятію о трансфинтныхъ числахъ. Будемъ разсматривать такія положительныя функціи $\varphi(x)$, которыя безпредѣльно возрастаютъ съ возрастаніемъ до безконечности положительной перемѣнной x. Установимъ понятіе о *степени возрастанія* функціи, причемъ степень возрастанія функцій будетъ обладать слѣдующимъ свойствомъ вещественныхъ чиселъ, состоящимъ въ томъ, что, если заданы два вещественныхъ числа, то мы всегда можемъ сказать, которое изъ нихъ больше; подобнымъ же образомъ установимъ понятіе о степени возрастанія функцій такъ, чтобы, если заданы двѣ функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, существовали правила, по которымъ можно было бы указать, степень возрастанія которой изъ функцій больше.

Опредѣленіе. *Мы будемъ говорить, что степень возрастанія положительной функціи $\varphi(x)$ больше степени возрастанія функціи $\psi(x)$, если*

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty .$$

Тогда въ примѣненіи къ степеннымъ функціямъ мы замѣтимъ, что изъ двухъ функцій

$$\varphi(x) = x^a, \ \psi(x) = x^b,$$

гдѣ a и b два положительныхъ вещественныхъ числа, степень возрастанія той больше, у которой показатель больше, такъ что для степенной функціи

$$x^a$$

можно степень возрастанія задавать числомъ a.

Рядъ функцій

(1) $$x, x^2, x^3, \ldots x^n, \ldots$$

съ цѣлыми показателями обладаетъ такимъ свойствомъ, что степень возрастанія всякаго члена ряда больше степени предыдущаго члена. Легко убѣдиться, что степень возрастанія функціи e^x больше степени возрастанія каждаго изъ членовъ ряда (1), ибо изъ разложенія функціи e^x въ рядъ при положительныхъ значеніяхъ x получается

$$e^x > \frac{x^{n+l}}{(n+l)!},$$

ибо сумма всего ряда больше каждаго изъ членовъ. Отсюда получаемъ

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x^l}{(n+l)!}$$

увеличивая безпредѣльно x, получаемъ

$$\lim_{x=\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty,$$

причемъ это равенство имѣетъ мѣсто, каково бы цѣлое число n ни было; значитъ, степень возрастанія функціи e^x больше степени возрастанія функціи x^n, сколь бы великъ ни былъ показатель n.

Итакъ, если мы задаемъ показателемъ n степень возрастанія функціи x^n, то должны, на основаніи только что сказаннаго, притти къ заключенію, что степень возрастанія функціи e^x есть безконечно большая, большая всякаго цѣлаго числа n. Но если мы напишемъ рядъ функцій

$$e^x, e^{x^2}, e^{x^3}, \ldots\ldots e^{x^n},$$

то въ этомъ рядѣ степень возрастанія всякой функціи больше степени возрастанія предыдущей, а потому, если бы мы хотѣли продолжать сопоставлять степенямъ возрастанія нѣкоторыя числа то пришлось бы разсматривать возрастающій рядъ чиселъ, большихъ безконечности.

Еще къ болѣе высокимъ степенямъ возрастанія приводитъ разсмотрѣніе слѣдующихъ рядовъ функцій:

$$e^{e^x}, e^{e^{x^2}}, e^{e^{x^3}}, \ldots e^{e^{x^n}}, \ldots$$

$$e^{e^{e^x}}, e^{e^{e^{x^2}}}, e^{e^{e^{x^3}}}, \ldots e^{e^{e^{x^n}}}, \ldots$$

Относительно допустимости и цѣлесообразности введенія въ науку чиселъ трансфинитныхъ мнѣнія математиковъ расходятся.

§ 182. Здѣсь мы считаемъ полезнымъ упомянуть объ изслѣдованіяхъ Euler'а, относящихся къ предѣламъ перемѣнной, опредѣляемой значеніями.

$$a^x, a^{a^x}, a^{a^{a^x}}, \ldots$$

Если число a задано, и если мы обозначимъ

$$\omega_1(x) = a^x, \omega_2(x) = a^{\omega_1(x)} = a^{a^x}, \omega_3 = a^{\omega_2(x)} = a^{a^{a^x}}, \ldots\ldots,$$

то предѣлъ $\omega_n(x)$ при n равномъ безконечности будетъ, очевидно,

нѣкоторой функціей отъ x, которую мы обозначимъ $\Omega(x)$. Euler указываетъ подробно свойства этой предѣльной функціи.

Чтобы убѣдиться, что предѣлъ дѣйствительно зависитъ отъ числа x, достаточно разсмотрѣть случай $a = \sqrt{2}$. Тогда

$$\omega_n(2) = 2,$$
$$\omega_n(4) = 4.$$

Очевидно

$$\Omega(2) = 2,$$
$$\Omega(4) = 4.$$

Euler высказалъ свои заключенія безъ доказательствъ. Я далъ доказательство теоремѣ Euler'a *).

*) D. Gravé. Sur les expressions dites surpuissances. Nouvelles annales des mathématiques. Troisième série, vol. XVII. Février 1898.

ГЛАВА IV.

Алгебраическій анализъ.

§ 1. Алгебраическій анализъ имѣетъ своей главной задачей изученіе свойствъ цѣлыхъ функцій. Его главное значеніе состоитъ въ томъ, что цѣлыя функціи являются простѣйшими и, какъ таковыя, имѣютъ большія приложенія какъ въ чистой, такъ и въ прикладной математикѣ. Не менѣе важное значеніе представляетъ собою то обстоятельство, что въ алгебраическомъ анализѣ выясняется значеніе цѣлаго ряда понятій, которыя употребляются и въ общемъ трансцендентномъ анализѣ. Такъ напримѣръ, въ трансцендентномъ анализѣ употребляется понятіе объ исключеніи перемѣнныхъ изъ системы уравненій; оказывается, что это понятіе можно вполнѣ строго установить только въ алгебраическомъ анализѣ для алгебраическихъ уравненій. Подобнымъ же образомъ только въ алгебраическомъ анализѣ мы выясняемъ вопросъ о рѣшеніи n уравненій съ n неизвѣстными. Нѣкоторые пріемы рѣшенія задачъ алгебраическаго анализа оказываются приложимыми для уравненій въ трансцендентномъ анализѣ.

§ 2. Изученіе цѣлыхъ функцій начинается, естественно, съ разсмотрѣнія функцій простѣйшихъ, а именно, цѣлыхъ функцій съ одной перемѣнной независимой. Въ § 43 гл. I мы указали на основную теорему Gauss'a, согласно которой всякое алгебраическое уравненіе съ одной неизвѣстной имѣетъ такое число корней, сколько единицъ въ показателѣ степени. Такъ какъ съ другой стороны рѣшеніе уравненій въ радикалахъ оказывается невозможнымъ для уравненій выше четвертой степени, то первой основной задачей алгебраическаго анализа является отысканіе пріемовъ,

дающихъ возможность вычислить вещественный или мнимый корень уравненія съ какой угодно степенью точности.

Эта задача, имѣющая весьма большое значеніе въ приложеніяхъ, привела къ важнымъ теоретическимъ результатамъ. Математики XVIII столѣтія разбили задачу вычисленія корня алгебраическаго уравненія на двѣ задачи: на задачу такъ называемаго *отдѣленія корня* и на собственную задачу вычисленія уже отдѣленнаго корня. Подъ отдѣленіемъ вещественнаго корня α разумѣется нахожденіе такихъ двухъ чиселъ a и b, чтобы въ промежуткѣ (a, b) заключался только одинъ этотъ корень α уравненія. Задача отдѣленія мнимаго корня состоитъ въ проведеніи такого сомкнутаго контура на плоскости комплексныхъ чиселъ, чтобы внутри этого контура заключался только одинъ корень уравненія.

Возможность рѣшенія задачи отдѣленія корня при помощи конечнаго числа дѣйствій была уже давно замѣчена, не существовало только удобныхъ пріемовъ рѣшенія ея на практикѣ. Нахожденію такихъ пріемовъ были посвящены серьезныя изслѣдованія Fourier, относящіяся къ первой половинѣ XIX столѣтія. Эти изслѣдованія Fourier имѣютъ въ исторіи науки главнымъ образомъ то значеніе, что несомнѣнно подъ вліяніемъ этихъ изслѣдованій Sturm, ученикъ Fourier, нашелъ свою знаменитую теорему. Эта теорема, о которой будетъ дальше сказано, представляетъ одно изъ самыхъ блестящихъ открытій XIX столѣтія.

Теорема Sturm'а дастъ возможность при помощи конечнаго числа дѣйствій указать точное число вещественныхъ корней уравненія, лежащихъ въ какомъ-нибудь промежуткѣ (a, b). Cauchy показалъ приложеніе теоремы Sturm'а къ нахожденію числа мнимыхъ корней внутри даннаго контура. Кромѣ того узко-прикладного значенія, которое теорема Sturm'а можетъ имѣть въ задачѣ отдѣленія корней, эта теорема дала возможность доказывать цѣлый рядъ общихъ предложеній относительно алгебраическихъ уравненій, въ чемъ, конечно, и состоитъ ея главное научное значеніе.

Что касается задачи вычисленія отдѣленнаго корня, то тутъ имѣется цѣлый рядъ пріемовъ, восходящихъ къ Newton'у. Далѣе мы приведемъ указанія на главныя изъ нихъ.

§ 3. Параллельно съ изученіемъ вопроса о численномъ вычисленіи корней уравненія двигалось изученіе свойства новой опе-

рацій анализа, которую представляетъ собою рѣшеніе алгебраическихъ уравненій. Прежде всего, конечно, обратилъ на себя вниманіе вопросъ о рѣшеніи уравненій въ радикалахъ. Этотъ вопросъ представилъ цѣлый рядъ трудныхъ задачъ.

Мы замѣтимъ прежде всего, что уже Lagrange подчеркнулъ необходимость раздѣлять всѣ алгебраическія уравненія на двѣ категоріи; *буквенныя* уравненія и *численныя* уравненія.

Подъ буквеннымъ уравненіемъ разумѣется уравненіе, всѣ коэффиціенты котораго обозначаются буквами, т. е., другими словами, они считаются независимыми перемѣнными, такъ что ни одному изъ этихъ коэффиціентовъ не придается опредѣленнаго численнаго значенія и не указывается никакихъ зависимостей между коэффиціентами. Подъ численными уравненіями разумѣются уравненія, въ которыхъ коэффиціенты представляютъ собою нѣкоторыя опредѣленныя числа, или, выражаясь болѣе общимъ образомъ, между коэффиціентами существуютъ нѣкоторыя соотношенія.

Послѣ того какъ Abel доказалъ, что буквенныя уравненія выше четвертой степени не рѣшаются въ радикалахъ, получилъ основное значеніе вопросъ о рѣшеніи численныхъ уравненій въ радикалахъ. Тутъ прежде всего является задача для всякой степени уравненія найти всѣ классы уравненій, рѣшающихся въ радикалахъ. Далѣе, необходимо рѣшить такую задачу: если задано численное уравненіе, то сказать, рѣшается оно въ радикалахъ, или нѣтъ, и, наконецъ, если доказано, что заданное уравненіе рѣшается въ радикалахъ, то найти радикальныя выраженія корней.

Изслѣдованія всѣхъ этихъ вопросовъ, начавшіяся съ Lagrange'a, Gauss'a, Abel'я и Galois, привели къ большому прогрессу математики. Я имѣю въ виду созданіе новаго отдѣла математики, носящаго названіе *теоріи группъ*.

§ 4. Въ 1801 г. появилось знаменитое сочиненіе Gauss'a „Disquisitiones arithmeticae", посвященное такъ называемой теоріи чиселъ. До Gauss'a подъ теоріей чиселъ разумѣлась совокупность доктринъ, относящихся къ свойствамъ натуральныхъ чиселъ. Disquisitiones arithmeticae и дальнѣйшія изслѣдованія Gauss'a по алгебрѣ и теоріи чиселъ представили въ наукѣ эпоху, съ которой начинается сближеніе теоріи чиселъ съ алгебраическимъ анализомъ. Впродолженіи XIX столѣтія вырабатывалась новая часть математики, которую нынѣ называютъ по примѣру Kronecker'a *ариѳметической теоріей алгебраическихъ величинъ*. Если разсматривать

эту теорію, какъ часть алгебры, то можно ее характеризовать, какъ изучающую свойства корней алгебраическихъ уравненій съ натуральными коэффиціентами; если ее разсмаривать, какъ часть теоріи чиселъ, то ее приходится считать непосредственнымъ обобщеніемъ основныхъ классическихъ предложеній теоріи чиселъ. Ариѳметическая теорія алгебраическихъ величинъ способствовала прогрессу математики введеніемъ въ науку новыхъ, такъ называемыхъ *идеальныхъ* чиселъ.

§ 5. Въ предыдущихъ §-хъ мы вкратцѣ резюмировали тѣ теоріи, которыя связаны съ разсмотрѣніемъ функцій отъ одного перемѣннаго независимаго. Теперь мы обращаемся къ исторіи изученія цѣлыхъ функцій отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ. Тутъ мы должны подчеркнуть двѣ основныя теоріи, *теорію инваріантовъ* и *теорію алгебраическихъ функцій*.

Теорія инваріантовъ изучаетъ такія свойства коэффиціентовъ цѣлой функціи, которыя не мѣняются отъ извѣстныхъ преобразованій перемѣнныхъ. Эта теорія создалась подъ вліяніемъ геометрическихъ соображеній, взятыхъ изъ аналитической геометріи.

Что касается теоріи алгебраическихъ функцій, то она замѣчательна тѣмъ, что привела къ весьма важной математической теоріи, а именно къ теоріи такъ называемыхъ Abel'евыхъ функцій. Abel'евы функціи получили свое происхожденіе при разсмотрѣніи интеграловъ отъ алгебраическихъ функцій.

Комбинаторика. Биноміальные коэффиціенты.

§ 6. Изъ гимназическаго курса мы знаемъ, что число *перемѣщеній* изъ n элементовъ выражается по формулѣ

$$P_n = 1.2.3. \ldots n.$$

Во всемъ дальнѣйшемъ мы такое выраженіе будемъ обозначать однимъ изъ слѣдующихъ знаковъ:

$$n! \text{ или } \Pi(n).$$

Далѣе, число *размѣщеній* изъ n элементовъ по m, причемъ эти размѣщенія могутъ отличаться между собою какъ самими элементами, такъ и порядкомъ ихъ, вычисляется по формулѣ

$$A_n^m = n(n-1) \ldots (n-m+1) = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)},$$

и наконецъ, число *сочетаній* изъ n элементовъ по m, гдѣ каждое очетаніе отличается отъ другихъ непремѣнно входящими въ него

элементами, порядокъ же элементовъ безразличенъ, представляется по формулѣ

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-m+1)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ m} = \frac{\Pi(n)}{\Pi(m)\,\Pi(n-m)}.$$

§ 7. Число сочетаній C_n^m называется также *биноміальнымъ коэффиціентомъ*, потому что, согласно данной Newton'омъ формулѣ возвышенія двучлена въ цѣлую степень, мы имѣемъ

$$(1)\qquad (a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ .\ .\ .$$
$$.\ .\ .\ + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Всѣ биноміальные коэффиціенты можно составить при помощи простого правила, носящаго названіе Pascal'ева треугольника (Pascal. Traité du triangle arithmétique. Paris 1665):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Каждое число, входящее въ треугольникъ, равняется суммѣ двухъ чиселъ, стоящихъ непосредственно выше него. Числа всякой $(n+1)$-ой горизонтали даютъ биноміальные коэффиціенты для разложенія $(a+b)^n$.

Это свойство коэффиціентовъ можетъ быть выражено формулой

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m.$$

Примѣняя послѣднюю формулу къ числамъ $n, n-1, n-2, n-3, \ .\ .\ .\ m+1$,
получимъ рядъ формулъ

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m.$$
$$C_{n-1}^m = C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^m$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$C_{m+1}^m = C_m^{m-1} + C_m^m,$$

складывая, получаемъ

$$(2)\qquad C_n^m = C_{m-1}^{m-1} + C_m^{m-1} + \ .\ .\ .\ + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-1}^{m-1},$$

ибо

$$C_m^m = 1 = C_{m-1}^{m-1}.$$

§ 8. Если мы подставимъ въ формулу (1) предыдущаго §-а $a=1, b=1$, то получимъ

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n,$$

что даетъ возможность вычислить сумму всѣхъ биноміальныхъ коэффиціентовъ.

Если мы подставимъ $a=1, b=-1$, то получимъ

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots$$

т. е. сумма биноміальныхъ коэфиціентовъ нечетнаго порядка равняется суммѣ биноміальныхъ коэффиціентовъ порядка четнаго.

§ 9. Формула (2) § 7 даетъ возможность рѣшить задачу относительно числа ядеръ треугольной кучи.

Для составленія треугольной кучи складывается на плоскости треугольный слой ядеръ подобно тому, какъ это дѣлается при игрѣ на билліардѣ. Если мы обозначимъ черезъ n число шаровъ въ сторонѣ такого треугольника ядеръ, то число шаровъ во всемъ треугольникѣ будетъ, очевидно,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2.$$

Если мы теперь на этотъ слой ядеръ положимъ новый треугольный слой такимъ образомъ, что въ его сторонѣ будетъ на единицу меньшее число ядеръ, то число ядеръ въ новомъ слоѣ выразиться черезъ C_n^2, число ядеръ въ третьемъ слоѣ будетъ C_{n-1}^2 и т. д., чтобы, наконецъ, мы не дойдемъ до случая $n=1$, соотвѣтствующаго вершинѣ кучи.

Итакъ, число ядеръ всей кучи выразится суммой

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \ldots + C_n^2 + C_{n+1}^2.$$

На основаніи только что указанной формулы (2) § 7 послѣдняя сумма будетъ ничѣмъ инымъ, какъ

$$C_{n+2}^3 = \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3},$$

и мы получаемъ окончательное выраженіе для числа ядеръ въ разсматриваемой кучѣ.

Возвышеніе въ степень полинома.

§ 10. Формула бинома Newton'а обобщается и на случай возвышенія въ цѣлую степень любого многочлена. Начнемъ со случая возвышенія въ степень трехчлена:

$$(a+b+c)^n.$$

Обозначимъ одной буквой сумму первыхъ двухъ членовъ, т. е.

$$a+b=A.$$

Тогда по формулѣ Newton'а имѣемъ

$$(1)\qquad (A+c)^n=\sum_{\gamma=0}^{\gamma=n}\frac{\Pi(n)}{\Pi(\gamma)\,\Pi(n-\gamma)}A^{n-\gamma}c^{\gamma},$$

причемъ мы предполагаемъ, что

$$\Pi(0)=\Pi(1)=1.$$

Но съ другой стороны мы имѣемъ

$$(2)\qquad A^{n-\gamma}=(a+b)^{n-\gamma}=\sum_{\beta=0}^{\beta=n-\gamma}\frac{\Pi(n-\gamma)}{\Pi(\beta)\,\Pi(\alpha)}a^{\alpha}b^{\beta},$$

гдѣ для сокращенія обозначено

$$\alpha=n-\gamma-\beta,$$

или

$$\alpha+\beta+\gamma=n.$$

Подставляя выраженіе (2) въ формулу (1), получимъ

$$(3)\qquad (a+b+c)^n=\sum\frac{\Pi(n)}{\Pi(\alpha)\,\Pi(\beta)\,\Pi(\gamma)}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma},$$

гдѣ сумма распространена на всѣ положительныя или равныя нулю значенія показателей α, β, γ, удовлетворяющія равенству

$$\alpha+\beta+\gamma=n.$$

§ 11. Получается самая общая формула въ такомъ видѣ:

$$(1)\,(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\sum\frac{\Pi(n)}{\Pi(\lambda_1)\,\Pi(\lambda_2)\ldots(\lambda_m)}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_m^{\lambda_m},$$

гдѣ

$$(2)\qquad \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m=n.$$

Числа, выражаемыя формулой

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(\lambda_1)\,\Pi(\lambda_2)\ldots\Pi(\lambda_m)}$$

при условіи (2), всегда цѣлыя и носятъ названіе *полиноміальныхъ*

коэффиціентовъ. Ихъ сумма для степени n будетъ равна m^n, ибо эта сумма получается изъ формулы (1), если положить

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1.$$

Число членовъ цѣлой функціи.

§ 12. Будемъ разсматривать цѣлую функцію степени n отъ m независимыхъ перемѣнныхъ

$$x_1, x_2, \ldots x_m.$$

Если цѣлая функція такова, что степени всѣхъ ея членовъ одинаковы и равны n, то цѣлая функція носитъ названіе *однородной* цѣлой функціи или *формы*.

Формы первой степени называются *линейными*, второй степени — *квадратичными*, третьей степени—*кубичными*. Формы съ двумя перемѣнными носятъ названіе *бинарныхъ*, формы съ тремя перемѣнными называются *тройничными*; напримѣръ,

$$x^3 + y^3$$

есть бинарная кубичная форма, а форма

$$x^2 + 3xy + y^2 - yz + 2z^2$$

есть тройничная квадратичная.

§ 13. Будемъ разсматривать цѣлыя функціи, какъ однородныя, такъ и неоднородныя самаго общаго вида, т. е. такія, въ которыхъ ни одинъ изъ коэффиціентовъ не равенъ нулю, такъ что форма самаго общаго вида будетъ выражаться по формулѣ

$$\Sigma A x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_m^{\lambda_m},$$

гдѣ показатели представляютъ собою всевозможныя комбинаціи чиселъ, удовлетворяющихъ равенству

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = n.$$

Если мы въ формѣ самаго общаго вида положимъ единицей одну перемѣнную, напримѣръ x_m, то получится цѣлая функція степени n самаго общаго вида отъ $m-1$ перемѣнныхъ

$$x_1, x_2, \ldots x_{m-1}.$$

Такъ, напримѣръ, самый общій видъ тройничной квадратичной формы будетъ

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2.$$

Если мы положимъ $z = 1$, то мы получимъ самый общій видъ цѣлой функціи второй степени съ двумя перемѣнными:

(1) $$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Значитъ, вопросъ нахожденія числа членовъ цѣлой функціи неоднородной равносиленъ нахожденію числа членовъ формы съ бо́льшимъ на единицу числомъ перемѣнныхъ.

Разсматривая выраженіе (1) мы замѣчаемъ, что оно состоитъ изъ трехъ формъ: квадратичной

$$ax^2+bxy+cy^2,$$

линейной

$$dx+ey$$

и нулевой степени

$$f.$$

Вообще говоря, всякая цѣлая функція отъ m перемѣнныхъ состоитъ изъ ряда формъ отъ тѣхъ же перемѣнныхъ, т. е. можетъ быть представлена въ видѣ

(2) $$\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_i+\ldots+\varphi_n,$$

гдѣ φ_i нѣкоторая форма i-ой степени.

Обозначимъ черезъ N_n^m число членовъ неоднородной цѣлой функціи n-ой степени общаго вида отъ m буквъ. Очевидно, что то же самое число N_n^m изображаетъ число членовъ формы съ $m+1$ перемѣнными.

На основаніи только что сказаннаго о разложеніи неоднородной цѣлой функціи на формы (2), получаемъ

(3) $$N_n^m=N_0^{m-1}+N_1^{m-1}+\ldots N_n^{m-1}.$$

Такъ какъ самый общій видъ цѣлой функціи степени n съ одной перемѣнной независимой есть

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

и, слѣдовательно, заключаетъ $n+1$ членовъ, то мы имѣемъ

(4) $$N_n^1=n+1.$$

Отсюда на основаніи формулы (3) получаемъ

(5) $$N_n^2=N_0^1+N_1^1+\ldots+N_n^1=$$

$$=1+2+3+\ldots+(n+1)=\frac{(n+2)(n+1)}{1.2}=C_{n+2}^2.$$

У насъ является предположеніе, не будетъ ли существовать равенство

(6) $$N_n^m=C_{n+m}^m.$$

Дѣйствительно, такое равенство существуетъ, потому что оно непосредственно провѣряется при $m=1$ и при $m=2$ на основа-

ніи формулъ (4) и (5), слѣдовательно, можно примѣнить индукцію, показавши, что если равенство (6) справедливо для $m-1$, то оно будетъ справедливо и для m. Возможность же примѣненія такой индукціи слѣдуетъ изъ того, что формула (3) послѣ подстановки вмѣсто N_n^m выраженія C_{n+m}^m обращается въ справедливую формулу (2) § 7.

Теорема Euler'а объ однородныхъ функціяхъ.

§ 14. Разсмотримъ форму

$$f(x_1, x_2 \ldots x_m)$$

нѣкоторой степени n. Мы замѣчаемъ, что будетъ существовать очевидное тождество

$$(1) \qquad f(tx_1, tx_2, \ldots tx_m) = t^n f(x_1, x_2, \ldots x_m),$$

т. е., другими словами, отъ умноженія всѣхъ аргументовъ формы на общаго множителя t вся форма получаетъ этого множителя въ степени, равной степени формы.

Дифференцируя послѣднее тождество по t, мы получаемъ

$$f'_{x_1}(tx_1, tx_2, \ldots) x_1 + f'_{x_2}(tx_1, tx_2, \ldots) x_2 + \ldots$$
$$\ldots + f'_{x_m}(tx_1, tx_2, \ldots) x_m = n\, t^{n-1} f(x_1, x_2, \ldots x_m).$$

Подставивъ въ это тождество $t=1$, получимъ извѣстную формулу Euler'а относительно однородныхъ функцій:

$$(2) \qquad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = nf.$$

Напримѣръ,

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2, \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3,$$

откуда

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

§ 15. Формула (1) предыдущаго §-а даетъ возможность обобщить понятіе объ однородныхъ функціяхъ на случай какихъ угодно функцій не цѣлыхъ. Мы будемъ произвольную функцію называть однородной степени n, если она удовлетворяетъ тождеству (1).

полагая въ этомъ тождествѣ $t = \frac{1}{x_1}$, получимъ

$$x_1^n f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots \frac{x_m}{x_1}\right) = f(x_1, x_2, \ldots x_m).$$

Отсюда вытекаетъ самое общее выраженіе для однородной функціи, а именно

$$x_1^n f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots \frac{x_m}{x_1}\right),$$

гдѣ f совершенно произвольная функція отъ отношеній

$$\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots \frac{x_m}{x_1}.$$

Опредѣлители.

§ 16. Разсмотримъ слѣдующую систему двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными:

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &= b_2. \end{aligned}$$

Рѣшая эти уравненія, получаемъ

$$(2) \qquad x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}.$$

Если мы общій знаменатель представимъ символомъ

$$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix},$$

то этотъ символъ носитъ названіе символа *опредѣлителя*. Таблица четырехъ чиселъ

$$\begin{matrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{matrix}$$

носитъ названіе матрисы этого опредѣлителя. Эта матриса состоитъ изъ четырехъ чиселъ, расположенныхъ по двумъ горизонталямъ

$$a_{11}, a_{12} \text{ и } a_{21}, a_{22},$$

и двумъ колоннамъ

$$\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix} \text{ и } \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22}. \end{matrix}$$

У каждаго элемента матрисы первый индексъ обозначаетъ номеръ горизонтали, въ которой этотъ элементъ находится, а второй индексъ номеръ колонны.

Если мы примемъ знакъ опредѣлителя, то формулы (2) перепишутся такъ:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1, & a_{12} \\ b_2, & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}, & b_1 \\ a_{21}, & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix}}.$$

§ 17. Разсмотримъ случай трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными.

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Рѣшая нашу систему по правиламъ, изложеннымъ въ элементарной математикѣ, мы замѣчаемъ, что въ формулахъ дробнаго вида, дающихъ неизвѣстныя, получается общій знаменатель, составленный изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ.

Непосредственныя вычисленія показываютъ, что этотъ знаменатель будетъ

$$(2) \qquad \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Это выраженіе мы будемъ обозначать символомъ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix}$$

и называть *опредѣлителемъ третьяго порядка*. Матрица опредѣлителя третьяго порядка состоитъ изъ девяти чиселъ, располагающихся по тремъ колоннамъ, причемъ въ каждомъ элементѣ a_{ik} матрисы первой индексъ i обозначаетъ горизонталь, въ которой этотъ элементъ находится, а второй колонну.

Непосредственное вычисленіе показываетъ, что рѣшеніемъ уравненій (1) мы получаемъ формулы

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1, a_{12}, a_{13} \\ b_2, a_{22}, a_{23} \\ b_3, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}, b_1, a_{13} \\ a_{21}, b_2, a_{23} \\ a_{31}, b_3, a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, b_1 \\ a_{21}, a_{22}, b_2 \\ a_{31}, a_{32}, b_3 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

§ 18. Случай трехъ перемѣнныхъ даетъ возможность сдѣлать догадку о выраженіи опредѣлителей съ большимъ, чѣмъ три, числомъ горизонталей и колоннъ. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая выраженіе (2) предыдущаго §-а, мы замѣчаемъ, что число членовъ опредѣлителя третьяго порядка равно числу перемѣщеній трехъ индексовъ, т. е. равно

$$1.2.3 = 6.$$

Буквенную часть этихъ шести членовъ можно написать такъ:

$$a_{1k}\, a_{2l}\, a_{3m},$$

причемъ первые индексы написаны въ натуральномъ порядкѣ возрастанія 1, 2, 3, вторые же индексы представляютъ собою въ разныхъ членахъ опредѣлителя различныя перемѣщенія индексовъ 1, 2, 3, т. е. слѣдующія шесть системъ такихъ индексовъ:

$$123,\ 213,\ 312,$$
$$132,\ 231,\ 321.$$

Итакъ, буквенная часть различныхъ членовъ опредѣлителя получается безъ затрудненій, вопросъ состоитъ только въ томъ, при какихъ членахъ надо поставить знакъ $+$ и при какихъ знакъ $-$. Обращаясь къ той же формулѣ (2) предыдущаго §-а, мы приходимъ къ такому простому правилу указанія знака, которое остается справедливымъ и при опредѣлителяхъ болѣе высокого порядка. Разсмотримъ одно изъ перемѣщеній вторыхъ индексовъ, напримѣръ 2 3 1, и будемъ говорить, что въ этомъ перемѣщеніи два индекса образуютъ *порядокъ*, если меньшій индексъ стоитъ налѣво отъ большаго, и *безпорядокъ*, если обратно, большій индексъ лежитъ налѣво отъ меньшаго. Такъ въ нашемъ перемѣщеніи 2 3 1 индексы 2, 3 образуютъ порядокъ, а индексы 2, 1 и 3, 1 образуютъ безпорядки. Тогда правило знаковъ можетъ быть высказано такъ: въ опредѣлителѣ долженъ стоять передъ членомъ знакъ $+$, если въ размѣщеніи вторыхъ индексовъ четное число безпорядковъ, и $-$, если число безпорядковъ нечетное. Напримѣръ, въ данномъ случаѣ перемѣщенія 2 3 1 долженъ быть знакъ $+$, что, дѣйствительно, провѣряется на формулѣ (2) предыдущаго §-а.

§ 19. Отсюда можно дать такое общее опредѣленіе опредѣлителя какого угодно порядка n.

Подъ знакомъ

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

опредѣлителя порядка n разумѣется сумма

$$\Sigma\,(-1)^I a_{1i}\, a_{2k}\, a_{3l} \ldots a_{nr},$$

гдѣ сумма распространена на всевозможныя перемѣщенія

(1) $$i, k, l, \ldots r$$

чиселъ

$$1, 2, 3, \ldots n,$$

причемъ I равняется числу безпорядковъ въ рядѣ (1). Такъ, напримѣръ, для опредѣлителя пятаго порядка, если мы хотимъ указать знакъ члена, имѣющаго буквенное выраженіе

$$a_{13}\, a_{25}\, a_{31}\, a_{44}\, a_{52},$$

то придется разсмотрѣть перемѣщеніе

$$3\,5\,1\,4\,2.$$

Безпорядки этого перемѣщенія суть

$$31, 32, 51, 54, 52, 42.$$

Такъ какъ число этихъ безпорядковъ есть четное (6), то долженъ быть поставленъ знакъ $+$.

§ 20. Укажемъ главнѣйшія свойства опредѣлителей, ограничиваясь разсмотрѣніемъ опредѣлителей третьяго порядка.

Разсматривая формулу (2) § 17, мы замѣчаемъ, что въ каждомъ членѣ опредѣлителя попадается только по одному элементу изъ каждой горизонтали и изъ каждой колонны, причемъ если мы возьмемъ какую нибудь горизонталь, то существуютъ непремѣнно члены опредѣлителя, въ которыя входитъ каждый элементъ этой горизонтали. Поэтому опредѣлитель можно разложить по элементамъ каждой изъ горизонталей; если мы разложимъ его по элементамъ каждой изъ горизонталей, то получимъ

(1)
$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}, \\ \Delta &= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}, \\ \Delta &= a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}, \end{aligned}$$

гдѣ числа A_{ik}, очевидно, будутъ слѣдующія:

$$
\begin{aligned}
&A_{11} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}, \quad A_{21} = a_{13}\,a_{32} - a_{12}\,a_{33},\\
&A_{12} = a_{23}\,a_{31} - a_{21}\,a_{33}, \quad A_{22} = a_{11}\,a_{33} - a_{13}\,a_{31},\\
(2)\qquad &A_{13} = a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}; \quad A_{23} = a_{12}\,a_{31} - a_{11}\,a_{32};\\
&\qquad A_{31} = a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22},\\
&\qquad A_{32} = a_{13}\,a_{21} - a_{13}\,a_{23},\\
&\qquad A_{33} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}.
\end{aligned}
$$

Числа A_{ik} называются *минорами* опредѣлителя. Легко убѣдиться, что A_{ik} будетъ взятый со знакомъ $+$ или $-$ опредѣлитель, который получается изъ всего опредѣлителя пропускомъ i-ой горизонтали и k-ой колонны. Такъ напримѣръ, для полученія A_{22} надо будетъ вычеркнуть изъ всего опредѣлителя горизонталь и колонну, на пересѣченіи которыхъ находится элементъ a_{22}:

$$
\begin{vmatrix} a_{11}, & \underline{a_{12}} & a_{13} \\ \underline{a_{21}}, & \underline{a_{22}} & \underline{a_{23}} \\ a_{31}, & \underline{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}.
$$

Тогда получаемъ опредѣлитель

$$
\begin{vmatrix} a_{11}, a_{13} \\ a_{31}, a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{33} - a_{13}\,a_{31},
$$

который и будетъ въ данномъ случаѣ равенъ числу A_{22}. Вообще говоря, придется опредѣлитель, который получается путемъ вычеркиванія i-ой горизонтали и k-ой колонны, умножить на выраженіе

$$
(-1)^{i+k}.
$$

Такимъ образомъ, получается простое правило для нахожденія чиселъ таблицы (2), которое остается въ силѣ и для опредѣлителей какого угодно порядка.

§ 21. Опредѣлитель можно опрокинуть, т. е. его горизонтали замѣнить колоннами, а колонны горизонталями, такъ что существуетъ тождество

$$
\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{21}, a_{31} \\ a_{12}, a_{22}, a_{32} \\ a_{13}, a_{23}, a_{33} \end{vmatrix}.
$$

Такимъ образомъ, мы замѣчаемъ, что опредѣлитель можно раскладывать не только по элементамъ какой-либо горизонтали, какъ это мы дѣлали въ предыдущемъ §-ѣ, но также по элементамъ любой колонны, такъ что мы получаемъ

$$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31},$$
$$\Delta = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32},$$
$$\Delta = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33}.$$

×§ 22. Разсматривая выраженіе (2) § 17, мы приходимъ къ къ слѣдующему важному соображенію, что перемѣщеніе двухъ горизонталей (а тѣмъ самымъ и двухъ колоннъ) опредѣлителя приводитъ къ тому, что опредѣлитель мѣняетъ свой знакъ, ибо положительные члены обращаются въ отрицательные и обратно.

Отсюда получается, что если въ опредѣлителѣ двѣ горизонтали (колонны) тождественны, т. е. состоятъ изъ одинаковыхъ чиселъ, то опредѣлитель долженъ тождественно равняться нулю, ибо если мы помѣняемъ другъ съ другомъ эти одинаковыя горизонтали, то съ одной стороны опредѣлитель по сказанному выше долженъ измѣнить знакъ, а съ другой стороны онъ остается безъ измѣненія, такъ какъ перемѣщеніе одинаковыхъ горизонталей не производитъ никакого измѣненія въ составѣ опредѣлителя, и у насъ получается

$$-\Delta = \Delta,$$

откуда

$$2\Delta = 0,$$

т. е.

$$\Delta = 0.$$

§ 23. На основаніи сказаннаго въ предыдущемъ §-ѣ мы получаемъ въ добавленіе къ равенствамъ (1) § 20 еще 6 слѣдующихъ:

$$a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13} = 0,$$
$$a_{31} A_{11} + a_{32} A_{12} + a_{33} A_{13} = 0,$$
$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0,$$
$$a_{31} A_{21} + a_{32} A_{22} + a_{33} A_{23} = 0,$$
$$a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33} = 0,$$
$$a_{21} A_{31} + a_{22} A_{32} + a_{23} A_{33} = 0,$$

потому что эти формулы выражаютъ разложенія по элементамъ одной горизонтали опредѣлителя, имѣющаго двѣ одинаковыя горизонтали.

Итакъ, резюмируя все сказанное, мы получаемъ

(1) $$\Delta = a_{k1} A_{k1} + a_{k2} A_{k2} + a_{k3} A_{k3},$$

(2) $$0 = a_{l1} A_{k1} + a_{l2} A_{k2} + a_{l3} A_{k3},$$

или, опрокидывая опредѣлитель, приходимъ къ формуламъ

(3) $$\Delta = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + a_{3k} A_{3k},$$

(4) $$0 = a_{1l} A_{1k} + a_{2l} A_{2k} + a_{3l} A_{3k}.$$

§ 24. Опредѣлитель не мѣняется, если мы къ элементамъ какой-нибудь горизонтали (колонны) прибавляемъ соотвѣтственныя элементы другой горизонтали (колонны), умноженные на нѣкоторое постоянное число k, напримѣръ

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21}, & a_{12} + ka_{22}, & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} + ka_{21}) A_{11} + (a_{12} + ka_{22}) A + (a_{13} + ka_{23}) A_{13} =$$
$$= \Delta + k.0 = \Delta.$$

§ 25. Если всѣ элементы какой-либо горизонтали (колонны) имѣютъ множителя k, то этотъ множитель k можно вынести за знакъ опредѣлителя.

Умноженіе опредѣлителей

§ 26. Иногда полезно писать для большей наглядности элементы опредѣлителя только съ однимъ индексомъ, напримѣръ вторымъ, первый же индексъ указывать измѣненіемъ буквы.

Итакъ разсмотримъ опредѣлитель

(1) $$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Возьмемъ другой подобный:

(2) $$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Оказывается, что произведеніе опредѣлителей (1) и (2) можетъ быть написано въ видѣ слѣдующаго опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3, & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3, & a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3, & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3, & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3, & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3, & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Рѣшеніе системы линейныхъ уравненій.

§ 27. Формулы § 17 показываютъ, что получается опредѣленное рѣшеніе системы въ томъ случаѣ, если общій знаменатель Δ въ выраженіяхъ для неизвѣстныхъ не равенъ нулю. Если же этотъ общій знаменатель равенъ нулю, тогда можетъ произойти одно изъ двухъ: или получается неопредѣленность, если всѣ неизвѣстныя имѣютъ видъ $\frac{0}{0}$, или невозможность, когда не равенъ нулю одинъ изъ опредѣлителей, стоящихъ въ числителяхъ формулъ (3) § 17.

§ 28. Особенно важный случай представляютъ собою такъ называемыя *однородныя* уравненія:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ получается единственное рѣшеніе

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0,$$

если опредѣлитель Δ, составленный изъ коэффиціентовъ, не равенъ нулю, какъ это мы видимъ изъ формулъ (3) § 17. Если же $\Delta = 0$, тогда однороднымъ уравненіямъ можно удовлетворить значеніями x_1, x_2, x_3, отличными отъ нуля.

§ 29. Все сказанное относительно уравненій съ тремя неизвѣстными можетъ быть перенесено на случай уравненій съ любымъ числомъ неизвѣстныхъ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n,$$

причемъ возможность опредѣленнаго рѣшенія системы зависитъ отъ неравенства нулю опредѣлителя, составленнаго изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ.

Вычисленіе опредѣлителей.

§ 30. Изложенныя въ предыдущихъ §-хъ свойства опредѣлителей даютъ возможность получить хорошіе пріемы вычисленія опредѣлителей, не прибѣгая къ вычисленію опредѣлителя по одной его формулѣ, что связано съ большимъ числомъ дѣйствій.

Напримѣръ, требуется вычислить опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 4, 2, 3, 5 \\ 2, 0, 7, 8 \\ 3, 4, 2, 1 \\ 1, 5, 0, 7 \end{vmatrix}.$$

Проще всего поступить такъ: вычитаемъ или прибавляемъ элементы одной горизонтали или колонны къ другой, причемъ стараемся уменьшить эти элементы такимъ образомъ, чтобы въ одной горизонтали или колоннѣ всѣ элементы кромѣ одного оказались равными нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, вычтя изъ третьей горизонтали удвоенную первую, получимъ

$$\begin{vmatrix} 4, 2, & 3, & 5 \\ 2, 0, & 7, & 8 \\ -5, 0, & -4, & -9 \\ 1, 5, & 0, & 7 \end{vmatrix}.$$

Вычитая далѣе изъ четвертой горизонтали удвоенную первую, получимъ

$$\begin{vmatrix} 4, 2, & 3, & 5 \\ 2, 0, & 7, & 8 \\ -5, 0, & -4, & -9 \\ -7, 1, & -6, & -3 \end{vmatrix}$$

и, наконецъ, вычитая изъ первой горизонтали удвоенную послѣднюю, будемъ имѣть

$$\begin{vmatrix} 18, 0, & 15, & 11 \\ 2, 0, & 7, & 8 \\ -5, 0, & -4, & -9 \\ -7, 1, & -6, & -3 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая опредѣлитель по элементамъ второй колонны, получаемъ

$$1.(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 18, & 15, & 11 \\ 2, & 7, & 8 \\ -5, & -4, & -9 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя ко второй горизонтали третью получимъ

$$\begin{vmatrix} 18, & 15, & 11 \\ -3, & 3, & -1 \\ -5, & -4, & -9 \end{vmatrix}.$$

Наконецъ, прибавляя къ первой колоннѣ вторую, а ко второй утроенную третью, вычислимъ окончательный результатъ

$$\begin{vmatrix} 33, & 48, & 11 \\ 0, & 0, & -1 \\ -9, & -31, & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -1.(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 33, & 48 \\ -9, & -31 \end{vmatrix} = 33(-31)-(-9).48 = -591.$$

Основныя положенія высшей алгебры.

§ 31. Будемъ разсматривать рѣшеніе алгебраическихъ уравненій съ одной перемѣнной независимой

$$f(x) = 0,$$

гдѣ

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n.$$

Мы видѣли уже, что цѣлая функція $f(x)$ разлагается на n линейныхъ множителей вида $x-\alpha$, гдѣ α изображаетъ одинъ изъ корней уравненія.

Прежде всего мы замѣчаемъ, что *цѣлая функція есть непрерывная функція* отъ независимаго перемѣннаго x, ибо она состоитъ изъ конечнаго числа членовъ вида

$$p_i x^{n-i},$$

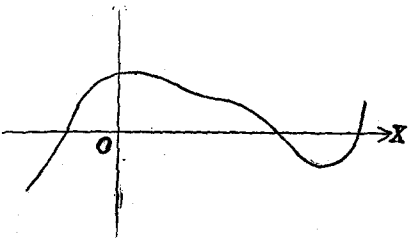
которые суть функціи непрерывныя.

Цѣлая функція можетъ обращаться въ безконечность только при безконечно большихъ значеніяхъ x, ибо при всякомъ конечномъ x получаются конечныя значенія функціи.

Особеннаго вниманія достоинъ случай, когда коэффиціенты p_i суть числа вещественныя. Тогда уравненіе

(1) $\qquad y = f(x),$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція, даетъ нѣкоторую алгебраическую кривую на плоскости (черт. 71), и нахожденіе вещественныхъ корней уравненія $f(x) = 0$ сводится къ нахожденію точекъ пересѣченія кривой (1) съ осью x-овъ.



Черт. 71.

§ 32. Итакъ, будемъ ограничиваться во всемъ дальнѣйшемъ лишь вещественными значеніями коэффиціентовъ цѣлой функціи.

Если мы перепишемъ эту цѣлую функцію такъ:

$$f(x) = p_0 x^n \left[1 + \frac{p_1}{p_0} \frac{1}{x} + \frac{p_2}{p_0} \frac{1}{x^2} + \quad . \; . \; . \right],$$

то при достаточно большихъ по абсолютной величинѣ значеніяхъ x сумма

$$\frac{p_1}{p_0} \frac{1}{x} + \frac{p_2}{p_0} \frac{1}{x^2} + \; . \; . \; . \; ,$$

состоящая изъ конечнаго числа членовъ будетъ величиной безконечно малой, а, значитъ, знакъ выраженія, стоящаго въ ломанныхъ скобкахъ будетъ положительный, т. е. совпадать со знакомъ перваго члена 1. Значитъ, можно утверждать, что *знакъ всей функціи $f(x)$ при достаточно большихъ по абсолютной величинѣ значеніяхъ x совпадаетъ со знакомъ главнаго ея члена $p_0 x^n$.*

§ 33. Теорема. *Уравненіе нечетной степени имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ вещественный корень.*

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ при большихъ по абсолютной величинѣ значеніяхъ x знакъ функціи совпадаетъ со знакомъ $p_0 x^n$, то, если n число нечетное, при $x = +\infty$ мы получаемъ знакъ, одинаковый со знакомъ p_0, а при $x = -\infty$ получаемъ знакъ, обратный знаку p_0. Значитъ, если мы предположимъ p_0 числомъ положительнымъ, то мы получимъ

$$f(+\infty) = +\infty,$$
$$f(-\infty) = -\infty.$$

Вслѣдствіе непрерывности функціи она должна перейти отъ отрицательныхъ къ положительнымъ значеніямъ, переходя черезъ нуль, т. е. должно существовать такое число c, что

$$f(c) = 0.$$

§ 34. Весьма важно обратить вниманіе на то обстоятельство, что при непрерывномъ измѣненіи коэффиціентовъ уравненія корни измѣняются также непрерывно, такъ что говорятъ, что *корни уравненія суть непрерывныя функціи отъ коэффиціентовъ.*

Въ теоріи алгебраическихъ функцій мы разсматриваемъ тотъ случай, когда коэффиціенты предполагаются цѣлыми функціями отъ одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ. Тогда свойство непрерывности корней можетъ быть формулировано такъ: алгебраическая функція есть, вообще говоря, непрерывная функ-

ція отъ независимыхъ перемѣнныхъ, которая можетъ обращаться въ безконечность только при нѣкоторыхъ опредѣленныхъ значеніяхъ независимыхъ перемѣнныхъ. Алгебраическія функціи, конечно, будутъ функціями многозначными, ибо алгебраическое уравненіе имѣетъ нѣсколько корней.

§ 35. Если k послѣднихъ коэффиціентовъ уравненія

$$(1)\quad p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-k} x^k + p_{n-k+1} x^{k-1} + \ldots + p_n = 0,$$

а именно

$$(2)\qquad p_{n-k+1}, p_{n-k+2}, \ldots p_n$$

непрерывно измѣняясь приближаются къ нулю, то уравненіе (1) непрерывнымъ измѣненіемъ переходитъ въ уравненіе

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x^k = 0,$$

которое имѣетъ k корней равныхъ нулю, ибо первая часть уравненія дѣлится на x^k. Мы можемъ высказать такое соображеніе, что при непрерывномъ уменьшеніи до нуля k послѣднихъ коэффиціентовъ k корней уравненія непрерывно приближаются къ нулю.

Замѣнимъ x на $\frac{1}{y}$, тогда у насъ получается уравненіе

$$(3)\qquad p_n y^n + p_{n-1} y^{n-1} + \ldots + p_1 y + p_0 = 0,$$

коэффиціенты котораго суть тѣ же, что и въ уравненіи (1), только написанные въ обратномъ порядкѣ.

Если x приближается къ нулю, то y приближается къ безконечности, а отсюда, разсматривая уравненіе (3), мы получаемъ слѣдующую теорему.

Если k старшихъ коэффиціентовъ (2) уравненія (3) приближаются непрерывно къ нулю, то k корней уравненія (3) дѣлаются безконечно большими.

§ 36. Особенно важнымъ свойствомъ уравненій съ вещественными коэффиціентами является попарная сопряженность мнимыхъ корней; другими словами, если уравненіе имѣетъ корень

$$\alpha + \beta i,$$

то оно должно имѣть также корень

$$\alpha - \beta i.$$

Итакъ предположимъ, что существуетъ тождество

$$f(\alpha + \beta i) = 0.$$

Дѣлимъ $f(x)$ на

$$(x-a)^2+\beta^2=[x-\alpha-\beta i][x-\alpha+\beta i];$$

получимъ

(1) $$f(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]\varphi(x)+mx+n,$$

гдѣ коэффиціенты m и n остатка числа вещественныя, ибо происходятъ при помощи раціональныхъ дѣйствій изъ вещественныхъ коэффиціентовъ заданной функціи $f(x)$ и вещественныхъ чиселъ α и β.

Полагая въ тождествѣ (1) $x=\alpha+\beta i$, получимъ тождество

$$m(\alpha+\beta i)+n=0,$$

которое распадается на два

$$m\alpha+n=0,$$
$$m\beta=0;$$

эти же тождества даютъ

$$m=0, n=0,$$

т. е. остатокъ отъ дѣленія тождественно равенъ нулю, и первая часть разсматриваемаго уравненія имѣетъ видъ

$$f(x)=[x-\alpha-\beta i][x-\alpha+\beta i]\varphi(x),$$

что показываетъ, что уравненіе имѣетъ также корень $\alpha-\beta i$.

О кратныхъ корняхъ.

§ 37. Теорема Taylor'а даетъ возможность написать общій видъ остатка отъ дѣленія функціи $f(x)$ на $(x-a)^k$. Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ формулу Taylor'а въ такомъ видѣ:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\ldots+$$
$$+\frac{(x-a)^{k-1}}{1.2\ldots(k-1)}f^{(k-1)}(a)+\frac{(x-a)^k}{1.2\ldots k}f^{(k)}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a).$$

Мы видимъ, что остаткомъ отъ дѣленія на $(x-a)^k$ функціи $f(x)$ является сумма k первыхъ членовъ, т. е.

(1) $$f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{k-1}}{1.2\ldots(k-1)}f^{(k-1)}(a).$$

Если мы хотимъ, чтобы число a было корнемъ функціи $f(x)$ кратности k, то остатокъ (1) долженъ тождественно равняться нулю, и мы получаемъ

(2) $$f(a)=0, f'(a)=0, f''(a)=0, \ldots f^{(k-1)}(a)=0.$$

Эти равенства въ связи съ неравенствомъ

(3) $$f^{(k)}(a) \text{ не} = 0$$

даютъ условія необходимыя и достаточныя, чтобы корень a имѣлъ

кратность k. Очевидно, что корень кратности k функціи $f(x)$ будетъ корнемъ кратности $k-1$ производной $f'(x)$, ибо если мы обозначимъ

$$f'(x) = \varphi(x),$$

то условія (2) и (3) перепишутся въ такомъ видѣ:

$$\varphi(a) = 0, \varphi'(a) = 0, \ldots \varphi^{(k-2)}(a) = 0;$$
$$\varphi^{(k-1)}(a) \text{ не} = 0.$$

§ 38. Соображенія предыдущаго §-а позволяютъ освободить уравненія отъ кратныхъ корней, т. е. перейти отъ уравненій съ кратными корнями къ новымъ уравненіямъ, у которыхъ эти кратные корни оказываются простыми. Это освобожденіе уравненій отъ кратныхъ корней совершается при помощи конечнаго числа раціональныхъ дѣйствій, состоящихъ въ нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ функцій.

Обозначимъ черезъ X_1 произведеніе линейныхъ множителей

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots,$$

гдѣ $a, b, c, \ldots$ суть простые корни, т. е. корни первой кратности заданной функціи $f(x)$. Черезъ X_2 обозначимъ подобное произведеніе

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots,$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ различные корни второй кратности функціи $f(x)$, черезъ X_3 аналогичное произведеніе для корней третьей кратности и т. д. Тогда, считая единицей коэффиціентъ при старшей степени въ функціи $f(x)$, получимъ

$$(1) \qquad f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4 \ldots X_m^m.$$

Такъ какъ кратные корни будутъ корнями производной, причемъ кратность понижается на единицу, то можно будетъ производную заданной функціи представить такъ:

$$f'(x) = \varphi(x) X_2 X_3^2 X_4^3 \ldots X_m^{m-1},$$

гдѣ $\varphi(x)$ представляетъ совокупность множителей, соотвѣтствующихъ такимъ корнямъ производной, которые не удовлетворяютъ первообразной функціи.

Найдемъ общій наибольшій дѣлитель $f_1(x)$ функціи $f(x)$ и ея производной $f'(x)$; мы получаемъ

$$(2) \qquad f_1(x) = l_1 X_2 X_3^2 X_4^3 \ldots X_m^{m-1},$$

гдѣ l_1 постоянное число. Совершенно подобнымъ же образомъ, находя общій наибольшій дѣлитель $f_2(x)$ функціи $f_1(x)$ и производной $f_1'(x)$, получимъ

$$f_2(x) = l_2 X_3 X_4^2 \ldots X_m^{m-2}.$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы придемъ къ ряду цѣлыхъ функцій

$$f_3(x) = l_3 X_4 X_5^2 \ . \ . \ . \ X_m^{m-3},$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$f_{m-1}(x) = l_{m-1} X_m.$$

Тогда простое алгебраическое дѣленіе дастъ намъ цѣлыя функціи

$$D_1 = \frac{l_1 f(x)}{f_1(x)} = X_1 X_2 X_3 \ . \ . \ . \ X_m,$$

$$D_2 = \frac{l_2 f_1(x)}{l_1 f_2(x)} = X_2 X_3 \ . \ . \ . \ X_m,$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$D_{m-1} = \frac{l_{m-1} f_{m-2}(x)}{l_{m-2} f_{m-1}(x)} = X_{m-1} X_m,$$

$$D_m = \frac{f_{m-1}(x)}{l_{m-1}} = X_m,$$

откуда черезъ дѣленіе D_i на D_{i+1} получимъ отдѣльно всѣ функціи

$$X_1, X_2, X_3, \ . \ . \ . \ X_m.$$

Итакъ при помощи элементарной выкладки нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ функцій, разсматриваемой въ средней школѣ, мы привели рѣшеніе заданнаго уравненія $f(x) = 0$ съ кратными корнями къ рѣшенію уравненій

$$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, \ . \ . \ . \ X_m = 0$$

съ простыми корнями.

Поэтому во всемъ дальнѣйшемъ мы можемъ предполагать подлежащими разсмотрѣнію уравненія, не имѣющія кратныхъ корней

Теорема Sturm'a.

§ 39. Fourier, занимаясь задачей отдѣленія вещественныхъ корней, положилъ въ основу своихъ изслѣдованій теорему Budan'a (1803), которую можно формулировать такъ.

Будемъ разсматривать рядъ функцій

(1) $$f(x), f'(x), f''(x), \ . \ . \ . \ f^{(n)}(x),$$

который будемъ для краткости называть рядомъ Budan'a. Подста-

вимъ въ рядъ (1) нѣкоторое вещественное число a; напишемъ рядъ знаковъ ($+$ или $-$) численныхъ значеній

$$f(a), f'(a), f''(a), \ldots f^{(n)}(a).$$

Пусть этотъ рядъ знаковъ будетъ

(2) $$++--+-+\ldots$$

Будемъ говорить, что переходъ отъ одного знака ряда (2) къ ближайшему направо слѣдующему знаку представляетъ *постоянство знака*, если оба знака одинаковы, и *перемѣну знака*, если эти знаки различны. Такъ напримѣръ, въ рядѣ (2) перемѣнамъ соотвѣтствуютъ переходы отъ второго члена къ третьему, отъ четвертаго къ пятому и т. д.

Теорема Budan'a. *При переходѣ отъ вещественнаго числа α къ бо́льшему числу β рядъ Budan'a для функціи $f(x)$ теряетъ такое число перемѣнъ знака, которое или равно числу вещественныхъ корней функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (α, β), или больше этого числа на четное число.*

§ 40. Приведенная теорема Budan'a имѣетъ важное значеніе. Между прочимъ она интересна въ томъ отношеніи, что изъ нея получается, какъ слѣдствіе, знаменитое правило знаковъ Descartes'a.

Правило знаковъ Descartes'a. *Число положительныхъ корней функціи $f(x)$ не превосходитъ числа перемѣнъ знака въ рядѣ коэффиціентовъ функціи $f(x)$ и, если оно меньше, то на четное число.*

Примѣняя формулу Maclaurin'a, получаемъ

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(0),$$

такъ что знаки коэффиціентовъ функціи $f(x)$ не отличаются отъ знаковъ ряда

$$f(0), f'(0), f''(0), \ldots f^{(n)}(0).$$

Итакъ, число перемѣнъ знака въ коэффиціентахъ функціи $f(x)$ равно числу перемѣнъ знака въ рядѣ Budan'a для этой функціи при $x = 0$. По теоремѣ Budan'a число положительныхъ корней функціи $f(x)$ можетъ отличаться на четное число отъ числа потерь перемѣнъ знака въ рядѣ

$$f(x), f(x), \ldots f^{(n)}(x)$$

при переходѣ x отъ 0 до $+\infty$; но при $x = +\infty$ этотъ рядъ

представляетъ одни повторенія знака, слѣдовательно, число положительныхъ корней функціи $f(x)$ будетъ отличаться на четное число отъ числа перемѣнъ знака въ рядѣ

$$f(0), f'(0), f''(0), \ldots f^{(n)}(0).$$

§ 41. При всей важности теоремы Budan'а въ ней остается значительное неудобство, состоящее въ томъ, что, когда число корней отличается на четное число отъ числа потерь перемѣнъ знака, то это четное число остается совершенно неизвѣстнымъ. Sturm'у удалось вмѣсто ряда Budan'а указать такой рядъ функцій, составленный инымъ образомъ по заданной функціи $f(x)$, число потерь перемѣнъ знаковъ котораго, соотвѣтствующее переходу отъ α къ β, даетъ точное число корней въ промежуткѣ (α, β).

Sturm составляетъ свой рядъ функцій такимъ образомъ. Пусть дано уравненіе

$$f(x) = 0,$$

освобожденное отъ кратныхъ корней. За первую функцію V ряда онъ беретъ первую часть уравненія, т. е. $f(x)$, за вторую функцію V_1 онъ беретъ производную $f'(x)$; дальнѣйшія функціи онъ составляетъ такимъ образомъ: дѣлитъ первую функцію V на вторую V_1 и остатокъ отъ дѣленія съ обратнымъ знакомъ беретъ за третью функцію V_2; подобнымъ же образомъ остатокъ отъ дѣленія V_1 на V_2, взятый съ обратнымъ знакомъ, беретъ за четвертую функцію V_3 и т. д. Такъ какъ способъ Sturm'а составленія функцій $V, V_1, V_2, \ldots$ есть не что иное, какъ способъ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя функціи $f(x)$ и ея производной $f'(x)$, то вслѣдствіе отсутствія кратныхъ корней функціи $f(x)$, другими словами, вслѣдствіе отсутствія общихъ дѣлителей функцій $f(x)$ и ея производной $f'(x)$, мы должны притти къ послѣднему остатку V_n, равному отличному отъ нуля постоянному числу.

Итакъ, мы получаемъ рядъ функцій

$$(1) \qquad V, V_1, V_2, V_3, \ldots V_n,$$

которыя мы будемъ называть функціями Sturm'а соотвѣтствующими заданной первой

$$V = f(x).$$

Функціи Sturm'а удовлетворяютъ слѣдующимъ равенствамъ:

$$V = f(x), \; V_1 = f'(x),$$
$$V = V_1 Q_1 - V_2,$$

(2) $$V_1 = V_2 Q_2 - V_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$V_{n-2} = V_{n-1} Q_{n-1} - V_n,$$

гдѣ $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-1}$ суть частныя отъ дѣленія.

Теорема Sturm'a. *Если $a < b$, то въ рядѣ функцій Sturm'a*

(3) $$V(a), V_1(a), V_2(a), \ldots V_n(a)$$

перемѣнъ знаковъ не менѣе, чѣмъ въ рядѣ

(4) $$V(b), V_1(b), V_2(b), \ldots V_n(b),$$

и разность числа перемѣнъ знаковъ въ обоихъ рядахъ точно равна числу корней функціи $f(x)$ въ промежуткѣ отъ a до b.

§ 42. Предварительно докажемъ одну лемму, которою намъ придется пользоваться при доказательствѣ теоремы Sturm'a.

Лемма. *Если для $x = a$*

$$f(x) = 0,$$

то $f(x)$ до обращенія въ нуль имѣетъ знакъ отличный отъ знака производной $f'(x)$, а послѣ обращенія въ нуль знакъ одинаковый.

Называя черезъ h достаточно малую положительную величину, для того чтобы въ предѣлахъ $a-h$ и $a+h$ функція $f(x)$ не имѣла другихъ корней, кромѣ a, покажемъ, что функціи $f(a-h)$ и $f'(a-h)$ имѣютъ знаки различные, а функціи $f(a+h)$ и $f'(a+h)$ одинаковые. Разложимъ функціи $f(a+h)$ и $f'(a+h)$ въ ряды по формулѣ Taylor'a:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a).$$

$$f'(a+h) = f'(a) + hf''(a) + \frac{h^2}{1.2} f'''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(a).$$

Замѣтивъ, что $f(a) = 0$ по условію, въ выраженіи $f(a+h)$ вынесемъ h за скобку и составимъ дробь

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+h)} = h\left[\frac{f'(a) + \frac{h}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a)}{f'(a) + \frac{h}{1} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(a)}\right].$$

При достаточно малой величинѣ h знакъ дроби во второй части полученнаго равенства одинаковъ со знакомъ дроби

$$\frac{f'(a)}{f'(a)} = 1,$$

т. е. дробь есть положительная величина. Отсюда слѣдуетъ, что знакъ дроби въ лѣвой части зависитъ отъ знака h. При h положительномъ эта дробь положительна, слѣдовательно, функціи $f(a+h)$ и $f'(a+h)$ одного знака, при h отрицательномъ дробь отрицательна, слѣдовательно, функціи $f(a-h)$ и $f'(a-h)$ разныхъ знаковъ.

§ 43. Обращаемся теперь къ доказательству теоремы Sturm'a.

Прежде всего мы замѣчаемъ, что двѣ рядомъ стоящія функціи V_i, V_{i+1} не могутъ обращаться одновременно въ нуль при $x=c$, потому что тогда при этомъ значеніи c на основаніи равенствъ (2) § 41 обращались бы въ нуль всѣ послѣдующія функціи

$$V_{i+2}, V_{i+3}, \ldots V_n,$$

что противорѣчитъ предположенію, ибо V_n постоянное число, отличное отъ нуля. Во-вторыхъ, мы замѣчаемъ, что, если одна изъ функцій Sturm'a обращается въ нуль, то двѣ смежныя функціи имѣютъ противоположные знаки. Это также легко усматривается изъ формулъ (2) § 41.

Теорема Sturm'a будетъ доказана, если мы покажемъ, что, во-первыхъ, число перемѣнъ знака въ ряду функцій Sturm'a не мѣняется при переходѣ x черезъ значеніе, обращающее въ нуль одну или нѣсколько среднихъ функцій, во-вторыхъ, всякій разъ когда x переходитъ черезъ значеніе, обращающее въ нуль начальную функцію $f(x)$, теряется одна перемѣна знака.

Пусть при $x=\alpha$ обращается въ нуль средняя функція $V_\kappa(x)$. По первому свойству функцій Sturm'a смежныя функціи при $x=\alpha$ въ нуль обратиться не могутъ. Выбравъ настолько малое число h, чтобы въ предѣлахъ $(\alpha-h, \alpha+h)$ функція $V_\kappa(x)$ не имѣла ни одного корня кромѣ α, и чтобы въ тѣхъ же предѣлахъ не имѣли ни одного корня функціи $V_{\kappa-1}(x)$ и $V_{\kappa+1}(x)$, разсмотримъ слѣдующіе три ряда значеній функцій $V_{\kappa-1}$, V_κ и $V_{\kappa+1}$:

$$\begin{array}{lll} V_{\kappa-1}(\alpha-h), & V_\kappa(\alpha-h), & V_{\kappa+1}(\alpha-h); \\ V_{\kappa-1}(\alpha), & V_\kappa(\alpha), & V_{\kappa+1}(\alpha); \\ V_{\kappa-1}(\alpha+h), & V_\kappa(\alpha+h), & V_{\kappa+1}(\alpha+h). \end{array}$$

Во второмъ рядѣ на основаніи второго свойства функцій Sturm'а есть одна перемѣна знаковъ, а именно $V_{\kappa-1}(\alpha)$ и $V_{\kappa+1}(\alpha)$ имѣютъ разные знаки. Функція $V_{\kappa-1}(x)$ имѣетъ одинъ и тотъ же знакъ во всѣхъ рядахъ, ибо по предположенію она не имѣетъ корней въ промежуткѣ $(\alpha-h, \alpha+h)$. Точно такъ же сохраняетъ свой знакъ функція $V_{\kappa+1}(x)$. Поэтому функціи $V_{\kappa-1}(x)$ и $V_{\kappa+1}(x)$ во всѣхъ рядахъ имѣютъ знаки различные. Слѣдовательно, каковы бы ни были знаки функцій $V_\kappa(\alpha-h)$ и $V_\kappa(\alpha+h)$, какъ въ первомъ, такъ и въ третьемъ рядахъ будетъ по одной перемѣнѣ знаковъ. Такимъ образомъ мы видимъ, что число перемѣнъ знаковъ въ ряду функцій Sturm'а не мѣняется при переходѣ x черезъ значенія, обращающія въ нуль одну изъ среднихъ функцій.

Совсѣмъ иное мы видимъ, когда x переходитъ черезъ значеніе α, обращающее въ нуль начальную функцію $f(x)=V$. Выбравъ h настолько малымъ, чтобы въ промежуткѣ $(\alpha-h, \alpha+h)$ функція $f(x)$ не имѣла другихъ корней кромѣ α, и чтобы въ этомъ промежуткѣ не имѣла ни одного корня производная $f'(x)=V_1(x)$, мы видимъ, что на основаніи доказанной леммы функціи $f(x-h)$ и $f'(x-h)$ имѣютъ различные знаки, такъ что составляютъ *одну перемѣну*, функціи же $f(x+h)$ и $f'(x+h)$ имѣютъ знаки одинаковые, т. е. *перемѣны знаковъ нѣтъ*. Слѣдовательно, при переходѣ x черезъ корень α функціи $f(x)$ пропала одна перемѣна, что и требовалось доказать.

Допустимъ теперь, что въ рядѣ (3) § 41 функцій Sturm'а на m перемѣнъ знаковъ больше, чѣмъ въ рядѣ (4). Число перемѣнъ знаковъ по доказанному не можетъ измѣниться отъ перехода черезъ корни среднихъ функцій; онѣ пропадаютъ только при переходѣ черезъ корень данной функціи $f(x)$. Слѣдовательно, чтобы въ рядѣ (3) было на m перемѣнъ знаковъ больше, чѣмъ въ рядѣ (4), функція $f(x)$ должна перейти черезъ m корней, т. е. въ промежуткѣ (a, b) она должна имѣть m корней. Такимъ образомъ, теорема Sturm'а доказана.

§ 44. Пояснимъ изложенную теорію примѣромъ. Предложимъ себѣ отдѣлить корни уравненія

$$f(x)=x^3-6x+2=0.$$

Сохраняя предыдущія обозначенія, найдемъ

$$\frac{1}{3}f'(x)=\frac{V_1}{3}=x^2-2,\ \frac{V_2}{2}=2x-1,\ V_3=+7.$$

Число перемѣнъ знаковъ опредѣляемъ изъ слѣдующей таблицы.

	$f(x)$	V_1	V_2	V_3	
$x=-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3 перемѣны.
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	2 перемѣны.
$x=+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	ни одной.

Слѣдовательно ,при переходѣ x отъ $-\infty$ до $+\infty$ пропадаютъ три перемѣны, и данное уравненіе имѣетъ три вещественныхъ корня, другими словами, всѣ корни его вещественные. Изъ нихъ одинъ меньше нуля и два больше нуля, ибо при переходѣ x черезъ всѣ значенія, меньшія нуля, отъ $-\infty$ до нуля пропадаетъ одна перемѣна, а при переходѣ x отъ нуля до $+\infty$ пропадаютъ двѣ перемѣны.

Подставляя вмѣсто x рядъ чиселъ 1, 2, 3, . . . , найдемъ

	$f(x)$	V_1	V_2	V_3	
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	2 перемѣны.
$x=1$	$-$	$-$	$+$	$+$	1 перемѣна.
$x=2$	$-$	$+$	$+$	$+$	1 перемѣна.
$x=3$	$+$	$+$	$+$	$+$	ни одной.

Отсюда мы видимъ, что предѣлы одного корня суть 0 и 1, другого 2 и 3.

Подставляя вмѣсто x рядъ чиселъ 0,1; 0,2; 0,3; . . . 0,9, мы сузили бы еще болѣе предѣлы перваго корня; точно такъ же могли бы опредѣлить болѣе узкіе предѣлы для второго положительнаго и для отрицательнаго корня.

Приближенное вычисленіе корней.

Regula falsi.

§ 45. Приступая къ разсмотрѣнію главнѣйшихъ пріемовъ приближеннаго вычисленія корней, мы должны обратить вниманіе, что эти пріемы по характеру своему таковы, что могутъ прилагаться какъ къ алгебраическимъ, такъ и къ трансцендентнымъ уравненіямъ.

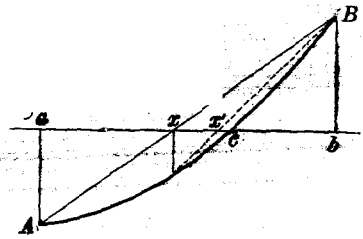
Начнемъ со стараго правила, носившаго названіе „regula falsi". Дадимъ для ясности этому правилу геометрическое толкованіе. Разсмотримъ кривую линію AB (черт. 72), опредѣляемую уравненіемъ

(1) $$y = f(x),$$

гдѣ $f(x)$ первая часть уравненія

(2) $$f(x) = 0,$$

подлежащаго нашему разсмотрѣнію. Корень этого уравненія c соотвѣтствуетъ абсциссѣ точки, въ которой кривая AB пересѣкаетъ ось x-овъ. Мы будемъ предполагать, что корень отдѣленъ, т. е. найдены два числа a и b, между которыми заключается одинъ только этотъ корень c уравненія (2). Очевидно, что два значенія $f(a)$ и $f(b)$ должны быть разныхъ знаковъ, ибо эти значенія соотвѣтствуютъ точкамъ A и B, лежащимъ по разныя стороны относительно оси x-овъ.



Черт. 72.

Чѣмъ меньше промежутокъ (a, b), тѣмъ часть AB разсматриваемой алгебраической линіи будетъ ближе къ прямой. Поэтому первая мысль, которая можетъ явиться при приближенномъ вычисленіи, состоитъ въ томъ, чтобы кривую линію AB замѣнить ея хордой. При этомъ мы считаемъ за приближенное значеніе корня c абсциссу x точки встрѣчи съ осью x-овъ хорды AB. Такъ какъ координаты точки A суть $(a, f(a))$, а координаты точки b суть $(b, f(b))$, то уравненіе хорды будетъ имѣть видъ

(3) $$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Полагая $y=0$, получаемъ изъ уравненія (3) приближенное значеніе корня

$$x=\frac{a f(b)-b f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Повторяя операцію для значенія x и для одного изъ значеній a и b, получаемъ другое значеніе x', болѣе близкое къ искомому корню c. Такое вычисленіе, повторенное достаточное число разъ, даетъ возможность вычисленія корней съ любой точностью.

Способъ Newton'a.

§ 46. Уже Newton'омъ указанъ весьма важный способъ приближеннаго вычисленія, дающій возможность болѣе быстраго приближенія къ искомому корню.

Пусть извѣстно нѣкоторое приближенное значеніе a корня. Тогда, обозначая черезъ u поправку, которую нужно придать къ a, чтобы получить корень $a+u$ уравненія $f(x)=0$, и раскладывая по формулѣ Taylor'a, получаемъ

$$f(a+u)=f(a)+u f'(a)+\frac{u^2}{1\,.\,2}f''(u)+\ldots=0$$

Рѣшая послѣднее уравненіе относительно u, мы имѣемъ

$$u=-\frac{f(a)}{f'(a)}-u^2\frac{f''(a)}{f'(a)}-\ldots$$

Если приближенное значеніе a достаточно близко къ корню, то число u будетъ малое, его высшими степенями можно пренебречь въ первомъ приближеніи. Тогда можно будетъ предположить

$$u=-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Отсюда получается для корня послѣ первой поправки такое приближенное значеніе

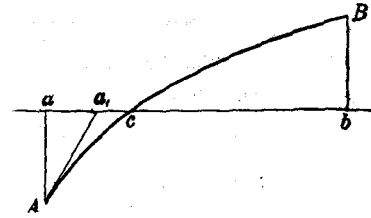
$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Поступая съ этимъ новымъ приближеніемъ a_1 по предыдущему, получимъ новое приближеніе

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

и такимъ образомъ повтореніемъ этой операціи мы будемъ приближаться сколь угодно близко къ корню.

§ 47. Легко убѣдиться, что первое приближеніе a_1 къ корню c, вычисленное по способу Newton'a, состоитъ въ томъ, что мы вмѣсто точки пересѣченія кривой съ осью x-овъ ищемъ точку пересѣченія касательной, проведенной къ кривой $y = f(x)$ въ точкѣ A (черт. 73), имѣющей координаты $(a, f(a))$.



Черт. 73.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе касательной въ этой точкѣ можетъ быть написано такъ:

(1) $y - f(a) = m(x - a)$,

гдѣ угловой коэффиціентъ m есть, какъ извѣстно (§ 84 гл. III), не что иное, какъ производная, и, слѣдовательно, уравненіе касательной можетъ быть написано въ видѣ

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Полагая $y = 0$ и рѣшая относительно x, получаемъ дѣйствительно

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

§ 48. Способъ regula falsi и способъ Newton'a являются частными случаями широкаго пріема, употребляемаго въ математикѣ и носящаго названіе метода *итераціи* или повторенія операцій.

Замѣчательный примѣръ такого рода повторенія операціи представляетъ число, названное Gauss'омъ *ариѳметически-геометрической средней* величиной изъ двухъ положительныхъ чиселъ a и b.

Составляемъ рядъ чиселъ

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + b), \qquad b_1 = \sqrt{ab},$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2), \qquad b_3 = \sqrt{a_2 b_2},$$

. . . . . .

тогда числа a_n и b_n имѣютъ при возрастаніи значка n общій предѣлъ; свойства этого предѣла связаны съ теоріей эллиптическихъ функцій.

Способъ Lagrange'a.

§ 49. Lagrange предлагаетъ вычислять приближенную величину вещественнаго корня съ вещественными коэффиціентами при помощи разложенія его въ *непрерывную дробь*. Пусть уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ λ положительныхъ корней между цѣлыми числами g и $g+1$; полагая $x=g+\frac{1}{x_1}$, получимъ новое уравненіе $f_1(x_1)=0$ для x_1, которое имѣетъ λ корней большихъ единицы; подберемъ цѣлое число g_1 такъ, чтобы въ промежуткѣ между g_1 и g_1+1 былъ по крайней мѣрѣ одинъ корень уравненія $f_1(x_1)=0$, тогда, полагая $x_1=g_1+\frac{1}{x_2}$, получимъ для x_2 новое уравненіе $f_2(x_2)=0$, имѣющее корень бо́льшій единицы. Продолжая такія операціи мы приходимъ къ разложенію корня заданнаго уравненія $f(x)=0$ въ непрерывную дробь

$$x=g+\cfrac{1}{g_1+\cfrac{1}{g_2+\cdots}}.$$

§ 50. Эта метода имѣетъ то преимущество, что, если разлагаемый корень x соизмѣримый, то послѣ конечнаго числа операцій мы его находимъ, ибо въ этомъ случаѣ дробь будетъ конечная.

Въ элементарномъ курсѣ мы видѣли, что при помощи конечныхъ непрерывныхъ дробей можно рѣшить вопросъ о рѣшеніи въ цѣлыхъ числахъ неопредѣленныхъ уравненій первой степени

$$ax+by+cz+\ldots=f,$$

гдѣ коэффиціенты $a, b, c, \ldots f$ числа цѣлыя.

§ 51. Если непрерывная дробь окажется *періодическою*, то корень x заданнаго уравненія будетъ также удовлетворять квадратному уравненію

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

съ цѣлыми коэффиціентами.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ *чистую* періодическую дробь, т. е. такую, у которой періодъ начинается съ перваго числа g.

$$x = g + \cfrac{1}{g_1 + \cfrac{1}{g_2 + \ddots + \cfrac{1}{g_{k-1} + \cfrac{1}{g + \cfrac{1}{g_1 + \ddots}}}}}$$

Можно будетъ написать такое равенство

$$= g + \cfrac{1}{g_1 + \cfrac{1}{g_2 + \ddots + \cfrac{1}{g_{k-1} + \cfrac{1}{x}}}}.$$

Обращая правую часть въ обыкновенную дробь, получимъ

$$x = \frac{Ax + B}{Cx + D},$$

гдѣ A, B, C, D цѣлыя числа, вычисляемыя въ качествѣ числителей и знаменателей подходящихъ дробей по правиламъ, излагаемымъ въ элементарномъ курсѣ.

Итакъ x удовлетворяетъ квадратному уравненію

$$Cx^2 + (D - A)x - B = 0.$$

Если дробь *смѣшанная* періодическая, то можно написать

$$x = g + \cfrac{1}{g_1 + \ddots + \cfrac{1}{g_e + \cfrac{1}{y}}}, \tag{2}$$

гдѣ y обозначаетъ для сокращенія чистую періодическую дробь.

Дробь y есть корень квадратнаго уравненія, а значитъ, выражая y черезъ x при помощи уравненія (2), получимъ и для x квадратное уравненіе вида (1).

Lagrange доказалъ также обратное предложеніе, а именно, что корень всякаго уравненія вида (I) разлагается въ періодическую непрерывную дробь.

§ 52. Подобно тому какъ *конечныя* непрерывныя дроби помогаютъ при рѣшеніи въ цѣлыхъ числахъ уравненій *первой* степени, такъ *періодическія* дроби играютъ первостепенную роль въ теоріи неопредѣленныхъ уравненій *второй* степени. Въ этой теоріи имѣетъ особенное значеніе уравненіе

$$x^2 - Dy^2 = 1, \tag{1}$$

носящее названіе уравненія Pell'я.

Число D предполагается цѣлымъ числомъ, не представляющимъ полнаго квадрата цѣлаго числа.

Будемъ раскладывать въ непрерывную дробь $\sqrt{D}$, получаемъ

$$\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{\omega}, \tag{2}$$

гдѣ ω чистая періодическая дробь. Пусть періодъ этой дроби заключаетъ n звеньевъ, такъ что

$$\sqrt{D} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\omega}}}}. \tag{3}$$

Обозначая конечныя дроби

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}, \qquad \frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}},$$

получимъ изъ равенства (3) слѣдующее

$$\sqrt{D} = \frac{\omega P_{n+1} + P_n}{\omega Q_{n+1} + Q_n}; \tag{4}$$

исключая ω изъ двухъ уравненій (2) и (4) получимъ

$$\sqrt{D} = \frac{P_{n+1} + P_n(\sqrt{D} - a_0)}{Q_{n+1} + Q_n(\sqrt{D} - a_0)}.$$

Освобождаясь отъ дроби и сравнивая раціональныя и ирраціональныя части, получимъ два равенства

$$P_n = Q_{n+1} - Q_n a_0, \tag{5}$$

$$DQ_n = P_{n+1} - P_n a_0; \tag{6}$$

умножая уравненіе (5) на P_n, а уравненіе (6) на $-Q_n$ и складывая, получимъ

$$P_n^2 - DQ_n^2 = (-1)^n,$$

ибо на основаніи элементарнаго курса мы имѣемъ

$$P_n Q_{n+1} - Q_n P_{n+1} = (-1)^n.$$

Число n мы можемъ предполагать четнымъ, ибо, если періодъ состоитъ изъ нечетнаго числа звеньевъ, то достаточно взять двойной періодъ.

Итакъ, мы получаемъ

$$P_n^2 - D Q_n^2 = 1,$$

и уравненіе Pell'я (1) рѣшено

$$x = P_n, y = Q_n.$$

Напримѣръ, требуется найти рѣшеніе уравненія

$$x^2 - 10 y^2 = 1.$$

Раскладывая $\sqrt{10}$ въ непрерывную дробь, мы имѣемъ

$$\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}$$

Такъ какъ наименьшій періодъ состоитъ изъ одного звена 6, то надо будетъ взять два періода.

Откидывая изъ двойнаго періода послѣднее звено, получаемъ

$$3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6},$$

откуда

$$x = 19, y = 6.$$

§ 53. Послѣ Lagrange'а проходитъ черезъ все XIX столѣтіе тенденція обобщить алгоритмъ непрерывныхъ дробей. Въ частности желали получить періодическій алгоритмъ для вычисленія корней кубическаго уравненія

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

съ цѣлыми коэффиціентами. При этомъ желали получить такой алгоритмъ, который бы для кубической области игралъ роль, аналогичную роли непрерывныхъ дробей для квадратичной.

Эта задача успѣшно рѣшена лишь въ послѣднее время (1896) русскимъ ученымъ Г. Ѳ. Воронымъ.

Нужно признать, что идея обобщенія уже найдена, и дальнѣйшія обобщенія на алгебраическія числа, опредѣленныя уравненіями высшихъ степеней, есть дѣло времени.

Способъ Graeffe.

§ 54. Пусть задано уравненіе $f(x) = 0$, корни котораго $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ всѣ вещественные и различные.

Переписавъ заданное уравненіе въ такомъ видѣ

$$\varphi(x^2) + x\psi(x^2) = 0,$$

получимъ уравненіе

$$(1) \qquad [\varphi(x^2)]^2 - x^2[\psi(x^2)]^2 = 0.$$

Если мы подставимъ $x^2 = y$, то получимъ уравненіе

$$(2) \qquad [\varphi(y)]^2 - y[\psi(y)]^2 = 0,$$

имѣющее корни

$$\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots \alpha_n^2.$$

Повторяя нѣсколько разъ операцію составленія уравненій (1) и (2) придемъ къ уравненію

$$p_0 u^n + p_1 u^{n-1} + \ldots + p_n = 0$$

съ корнями

$$\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \ldots \alpha_n^\nu,$$

гдѣ $\nu = 2^\lambda$.

Если корни заданнаго уравненія удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > |\alpha_3| > \ldots > |\alpha_n|,$$

то можно будетъ приближенно положить

$$\alpha_1^\nu = -\frac{p_1}{p_0}, \alpha_2^\nu = -\frac{p_2}{p_1}, \ldots \alpha_n^\nu = -\frac{p_n}{p_{n-1}},$$

и приближенныя значенія корней найдены.

Эта метода Graeffe была разработана Encke, причемъ получилась возможность такъ видоизмѣнить способъ, чтобы рѣшать уравненія въ случаѣ кратныхъ и мнимыхъ корней.

Способъ Graeffe есть лучшій способъ въ практическомъ отношеніи и очень удобенъ для логариѳмическихъ вычисленій. Въ моемъ курсѣ Алгебраическаго анализа можно найти способъ Graeffe въ изложеніи профессора Морской Академіи А. Н. Крылова.

Теорія группъ.

§ 55. Хотя понятіе о группѣ надо считать столь же старымъ, какъ и понятіе о математической мысли вообще, но впервые это понятіе является ясно формулированнымъ и облеченнымъ въ видѣ конкретной теоріи у Lagrange'a.

Разсматривая извѣстные до него пріемы рѣшенія уравненій первыхъ четырехъ степеней, Lagrange стремился уловить общія идеи этихъ пріемовъ съ цѣлью выработать правила для рѣшенія уравненій болѣе высокихъ степеней.

Хотя его попытки не привели къ нахожденію общихъ способовъ рѣшенія уравненій выше 4-ой степени, тѣмъ не менѣе они дали понять, въ чемъ должна состоять суть такого рѣшенія въ тѣхъ случаяхъ, когда оно возможно.

Lagrange показалъ, что дѣло сводится къ разсмотрѣнію вопроса, какъ мѣняется видъ раціональной функціи

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

отъ корней $x_1, x_2, \ldots x_n$ заданнаго уравненія n-ой степени при всевозможныхъ перестановленіяхъ корней.

Эти операціи, состоящія въ перестановленіи корней мы будемъ называть *подстановками* корней.

Очевидно, что число всѣхъ возможныхъ подстановокъ n корней будетъ

$$N = 1.2.3 \ldots n.$$

§ 56. Lagrange обратилъ вниманіе на то обстоятельство, что совокупность подстановокъ, не мѣняющихъ вида нѣкоторой раціональной функціи $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что результатъ производства надъ функціей одной за другою двухъ изъ числа подстановокъ разсматриваемой совокупности даетъ также подстановку, не мѣняющую вида функціи. Выражаясь современнымъ языкомъ, можемъ сказать, что подстановки, не мѣняющія вида функціи, образуютъ *группу*.

Опредѣленіе группы.

§ 57. Пусть задана система G какихъ либо элементовъ. Эти элементы могутъ быть какими угодно предметами, числами, формулами, математическими операціями, геометрическими движеніями и тому подобное.

Мы устанавливаемъ понятіе о *символическомъ произведеніи*

$$AB$$

двухъ элементовъ A и B системы; т. е. мы даемъ правила, по которымъ каждымъ двумъ элементамъ A и B сопоставляется третій C, причемъ мы пишемъ

$$C = AB.$$

§ 58. Опредѣленіе группы можетъ быть формулировано такъ.

Элементы системы G составляютъ *группу* если:

1) Символическое произведеніе двухъ элементовъ G принадлежитъ также къ G.

2) Символическое умноженіе есть операція, обладающая *) распредѣлительнымъ закономъ

$$(AB)C = A(BC).$$

3) Въ системѣ G существуетъ элементъ I, обладающій такимъ свойствомъ, что для всякаго элемента A системы G существуетъ равенство $AI = A$ (элементъ I называется *единицей* группы).

4) Если существуютъ элементы I, то для одного опредѣленнаго изъ нихъ I и для всякаго A уравненіе $AX = I$ допускаетъ рѣшеніе относительно X, причемъ X принадлежитъ также къ системѣ G и называется *обратнымъ элементомъ* относительно A.

§ 59. Группа называется *конечной*, если она состоитъ изъ конечнаго числа элементовъ. Это число называется *порядкомъ группы*.

§ 60. Если символическое умноженіе всѣхъ элементовъ группы обладаетъ закономъ *перемѣстительнымъ*

$$AB = BA,$$

то группа называется *абелевой* или *коммутативной*.

§ 61. Примѣръ *безконечной не-абелевой* группы представляетъ совокупность всѣхъ преобразованій координатъ въ пространствѣ.

*) Вообще говоря символическое умноженіе есть дѣйствіе непереставочное, т. е. AB не равно BA.

Въ этомъ случаѣ подъ символическимъ произведеніемъ AB двухъ преобразованій A и B разумѣется результатъ послѣдовательнаго производства одного за другимъ этихъ двухъ преобразованій, причемъ первымъ совершается преобразованіе A.

Примѣръ *конечной не-абелевой* группы даютъ подстановки корней $x_1, x_2, \ldots x_n$, не мѣняющія вида функціи $\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$.

Какъ на примѣръ *безконечной абелевой* группы можно указать на совокупность всѣхъ *комплексныхъ чиселъ* $a+ib$, причемъ *обыкновенное сложеніе* этихъ чиселъ разсматривается какъ символическое умноженіе, опредѣляющее группу. Эта группа имѣетъ единственную единицу $I=0$. Всякому элементу $(a+ib)$ соотвѣтствуетъ ему обратный $-(a+ib)$.

Конечную абелеву группу получаемъ, разсматривая совокупность чиселъ

$$1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{n-1},$$

гдѣ $\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, причемъ символическимъ умноженіемъ является обыкновенное умноженіе.

§ 62. Абстрактное понятіе о группѣ имѣетъ дѣло, если такъ можно выразиться, лишь съ внутренней структурой группы, то есть съ тѣми законами, по которымъ при символическомъ умноженіи воспроизводятся элементы группы; что представляютъ изъ себя эти элементы сами по себѣ, является второстепеннымъ для теоріи группъ. Могутъ существовать двѣ группы, элементы которыхъ будутъ различной природы, между тѣмъ эти группы будутъ имѣть одинаковую структуру. Подобныя группы называются *изоморфными* и считаются за одну группу.

Пусть элементу A_i одной группы G соотвѣтствуетъ элементъ A'_i другой G'; тогда изоморфизмъ двухъ группъ можно выразить совмѣстнымъ существованіемъ двухъ равенствъ

$$A_k A_l = A_m, \; A'_k A'_l = A'_m,$$

при всевозможныхъ k, l и соотвѣтствующемъ m.

§ 63. Пояснимъ сказанное на одномъ важномъ примѣрѣ. Разсмотримъ группу подстановокъ четырехъ элементовъ

$$1, 2, 3, 4.$$

Получаемъ 24 подстановки, состоящія въ переходѣ отъ одного изъ 24 слѣдующихъ перемѣщеній:

	1234	2134	3124	4123
	1243	2143	3142	4132
(1)	1324	2314	3214	4213
	1342	2341	3241	4231
	1423	2413	3412	4312
	1432	2431	3421	4321.

Если мы обозначимъ знакомъ

$$(a_1\, a_2\, a_3\, .\ .\ .\ a_к)$$

такъ называемую *циклическую* подстановку, которая замѣняетъ элементъ a_1 на a_2, a_2 на a_3 и такъ далѣе и наконецъ послѣдній элементъ $a_к$ на первый a_1, то переходъ отъ перваго изъ перемѣщеній (1) ко всѣмъ остальнымъ можно будетъ написать въ видѣ слѣдующей таблицы подстановокъ

	1	(12)	(132)	(1432)
	(34)	(12) (34)	(1342)	(142)
(2)	(23)	(123)	(13)	(143)
	(234)	(1234)	(134)	(14)
	(243)	(1243)	(13) (24)	(1423)
	(24)	(124)	(1324)	(14) (23

Знакомъ 1 обозначена *тождественная* подстановка, переводящая перемѣщеніе 1 2 3 4 въ то же самое 1 2 3 4, другими словами, подстановка, неперемѣщающая элементовъ. Это есть единица группы. Элементы, которые остаются на своихъ мѣстахъ, на таблицѣ (2) не указаны, такъ напримѣръ, при подстановкѣ (34) элементы 1 и 2 не мѣняютъ своего мѣста.

Подъ символическимъ произведеніемъ $S_1\, S_2$ двухъ подстановокъ мы будемъ разумѣть новую подстановку, которая получается, какъ результатъ перемѣщеній буквъ, полученный, если сначала буквы перемѣстимъ на основаніи подстановки S_1, а потомъ на основаніи S_2.

Такъ напримѣръ, пусть будетъ

$$S_1 = (1432),\ S_2 = (142).$$

Чтобы составить $S_1\, S_2$, начнемъ съ какого нибудь элемента, напримѣръ 1. Этотъ элементъ переходитъ по подстановкѣ S_1 въ 4, а послѣдній по подстановкѣ S_2 переходитъ въ 2, такъ что подстановка $S_1\, S_2$ переводитъ 1 въ 2. Разсматриваемъ далѣе переходъ

элемента 2 по нашимъ подстановкамъ и продолжаемъ далѣе, пока не исчерпаемъ всѣ элементы.

Получаемъ

$$S_1 S_2 = (1243).$$

Перемножая подстановки S_1 и S_2 въ обратномъ порядкѣ, получаемъ

$$S_2 S_1 = (1324);$$

мы видимъ, слѣдовательно, что $S_1 S_2$ не равно $S_2 S_1$.

Простое вычисленіе показываетъ, что таблица (2) подстановокъ четырехъ элементовъ можетъ быть представлена въ видѣ слѣдующихъ цикловъ

$$(3)\quad \begin{aligned} &\sigma_1 = (1234),\ \sigma_1^2 = (13)(24),\ \sigma_1^3 = (1432),\ \sigma_1^4 = 1,\\ &\sigma_2 = (1243),\ \sigma_2^2 = (14)(23),\ \sigma_2^3 = (1342),\ \sigma_2^4 = 1,\\ &\sigma_3 = (1324),\ \sigma_3^2 = (12)(34),\ \sigma_3^3 = (1423),\ \sigma_3^4 = 1; \end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{aligned} &\tau_1 = (123),\ \tau_1^2 = (132),\ \tau_1^3 = 1,\\ &\tau_2 = (124),\ \tau_2^2 = (142),\ \tau_2^3 = 1,\\ &\tau_3 = (134),\ \tau_3^2 = (143),\ \tau_3^3 = 1,\\ &\tau_4 = (234),\ \tau_4^2 = (243),\ \tau_4^3 = 1; \end{aligned}$$

$$(5)\quad \begin{aligned} &\rho_1 = (12),\ \rho_1^2 = 1;\ \rho_4 = (23),\ \rho_4^2 = 1;\\ &\rho_2 = (13),\ \rho_2^2 = 1;\ \rho_5 = (24),\ \rho_5^2 = 1;\\ &\rho_3 = (14),\ \rho_3^2 = 1;\ \rho_6 = (34),\ \rho_6^2 = 1. \end{aligned}$$

§ 64. Разсмотримъ теперь вращеніе правильнаго тѣла *октаэдра* около центра. Если будемъ разсматривать только тѣ вращенія, послѣ которыхъ октаэдръ сливается со своимъ первоначальнымъ положеніемъ, причемъ одни грани накладываются на другія, то очевидно, что эти вращенія образуютъ группу. Очевидно, что эта группа 24-го порядка, ибо октаэдръ имѣетъ 8 граней, каждая грань есть треугольникъ, слѣдовательно на всемъ октаэдрѣ будетъ 24 угла граней. Совмѣщая одинъ опредѣленный изъ этихъ угловъ со всѣми остальными и съ самимъ собою, получимъ всѣ 24 вращенія, образующія группу. Эта группа оказывается изоморфной съ разобранной нами группой подстановокъ четырехъ элементовъ. Для сличенія структуры обѣихъ группъ достаточно указать, чему соотвѣствуютъ циклы (3), (4) и (5) предыдущаго §-а.

Четверные циклы вращенія (3) мы получимъ, если будемъ разсматривать вращенія октаэдра вокругъ осей, соединяющихъ противоположныя вершины. Такъ какъ вершинъ октаэдръ имѣетъ шесть,

то, соединяя попарно, получаемъ три оси вращенія. Такъ какъ около каждой вершины сходятся четыре грани, то при непрерывномъ вращеніи октаэдра на уголъ въ 360^0 октаэдръ четыре раза сольется съ первоначальнымъ своимъ положеніемъ, ибо одна изъ его четырехъ сходящихся на оси вращенія граней займетъ послѣдовательно положенія остальныхъ граней и на четвертый разъ совпаденія вернется въ первоначальное положеніе.

Тройные циклы (4) мы получимъ, если будемъ разсматривать вращенія около осей, соединяющихъ центры противоположныхъ граней, ибо при вращеніи около такой оси треугольная грань, черезъ центръ которой проходитъ ось, на третьемъ своемъ совпаденіи возвращается въ первоначальное свое положеніе. Такъ какъ граней октаэдръ имѣетъ 8, то, соединяя попарно, получимъ 4 оси вращенія октаэдра, что соотвѣтствуетъ четыремъ цикламъ (4). Двойные циклы (5) мы получимъ, взявъ за оси вращенія середины противоположныхъ реберъ.

§ 65. Оказывается, что часть группы подстановокъ четырехъ элементовъ, а именно часть, состоящая изъ подстановокъ

$$1, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \tau_1, \tau_1^2, \tau_2, \tau_2^2, \tau_3, \tau_3^2, \tau_4, \tau_4^2,$$

сама образуетъ группу и эта группа оказывается изоморфной съ группой вращенія тетраэдра.

§ 66. Группы вращеній многогранниковъ сводятся къ тремъ группамъ, группѣ тетраэдра, группѣ октаэдра и группѣ икосаэдра, ибо вращенія куба даютъ, какъ легко догадаться, ту же группу, что и вращенія октаэдра, а додекаэрдъ даетъ ту же группу, что и икосаэдръ.

§ 67. Группа икосаэдра состоитъ изъ 60 элементовъ, ибо икосаэдръ имѣетъ 20 граней, а каждая грань, будучи треугольникомъ, имѣетъ три угла. Если мы разсмотримъ группу подстановокъ изъ 5 элементовъ, то мы получимъ группу порядка

$$120 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.$$

Замѣчательно, что группа икосаэдра, состоящая изъ 60 элементовъ, играетъ ту же роль относительно общей группы 120 подстановокъ пяти элементовъ, какую играетъ группа тетраэдра относительно группы октаэдра.

Группа икосаэдра имѣетъ, слѣдовательно, громадное значеніе при разсмотрѣніи уравненій пятой степени. Невозможность рѣшенія уравненія пятой степени въ радикалахъ обнаруживается съ наглядн-

ностью изъ свойствъ группы икосаэдра. Оказывается, что въ теоріи уравненій четвертой степени играютъ роль группы октаэдра и тетраэдра, для уравненіи же пятой степени происходитъ слѣдующее: общая группа 120 подстановокъ пяти корней не имѣетъ геометрическаго аналога, группа же икосаэдра, аналогичная группѣ тетраэдра для уравненій четвертой степени, имѣетъ структуру, подчиненную совершенно другимъ закономъ.

Уравненія пятой степени играютъ совершенно исключительную роль среди уравненій различныхъ степеней. Съ одной стороны, эти уравненія не имѣютъ общаго радикальнаго рѣшенія, значитъ, они кореннымъ образомъ отличаются по свойствамъ отъ уравненій первыхъ четырехъ степеней. Съ другой стороны, уравненія пятой степени имѣютъ нѣчто общее съ уравненіями низшихъ степеней, ибо въ ихъ теоріи фигурируетъ группа правильнаго многогранника икосаэдра, и, слѣдовательно, геометрическія соображенія, которыя играютъ роль въ теоріи уравненій четвертой степени, продолжаются въ нѣкоторомъ отношеніи и въ теоріи уравненій пятой степени. Въ виду такого промежуточнаго положенія уравненій пятой степени, они очень часто въ высшемъ университетскомъ преподаваніи служатъ предметомъ особаго курса. Можно указать на книгу проф. Klein'a „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade" (1884).

Симметрическія функціи и теорія Galois.

§ 68. Возвращаясь къ теоріи Lagrange'a, мы замѣчаемъ, что первый вопросъ, который является при разсмотрѣніи значеній, принимаемыхъ функціей при различныхъ подстановкахъ корней, состоитъ въ *числѣ* этихъ значеній. Тутъ могутъ быть два крайнихъ случая: или при всѣхъ подстановкахъ корней функція имѣетъ только одно значеніе, и тогда функція называется *симметрической*, или же всѣ N ея значеній различны между собою; тогда функція называется *функціей Galois*.

Относительно промежуточныхъ случаевъ Lagrange доказалъ теорему, что число различныхъ значеній функціи при подстановкахъ корней должно быть непремѣнно дѣлителемъ числа.

$$N = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, .\, .\, n,$$

гдѣ n степень буквеннаго уравненія.

§ 69. Что касается симметрическихъ функцій отъ корней уравненія

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0,$$

то простѣйшими такими функціями являются, очевидно, коэффиціенты самого уравненія, ибо

$$(1) \qquad \begin{aligned} p_1 &= -\Sigma x_i, \\ p_2 &= \Sigma x_i x_k, \\ p_3 &= -\Sigma x_i x_k x_e, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n, \end{aligned}$$

гдѣ въ правыхъ частяхъ равенствъ стоятъ суммы сочетаній изъ всѣхъ корней по одному, по два, по три и т. д.

Въ справедливости формулъ (1) мы убѣдимся, раскрывая первую часть уравненія

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0$$

по степенямъ x и сравнивая съ первой частью заданнаго уравненія.

Замѣчательно, что всѣ раціональныя симметрическія функціи отъ корней выражаются раціонально черезъ эти коэффиціенты $p_1, p_2, \ldots p_n$. Отсюда получается такое общее заключеніе.

Если считать заданные коэффиціенты числами раціональными, то окажется раціональнымъ числомъ всякая симметрическая функція отъ корней нашего уравненія.

§ 70. Въ теоріи рѣшенія уравненій въ радикалахъ задача рѣшенія уравненія трактуется обыкновенно такъ. Требуется подвергнуть систему n уравненій (1) предыдущаго §-а съ n неизвѣстными такимъ преобразованіямъ, чтобы послѣ ряда ихъ получились уравненія вида

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(p_1, p_2, \ldots p_n), \\ x_2 &= f_2(p_1, p_2, \ldots p_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= f_n(p_1, p_2, \ldots p_n), \end{aligned}$$

причемъ функціи $f_1, f_2, \ldots f_n$ должны быть функціями, образованными изъ коэффиціентовъ p при помощи конечнаго числа дѣйствій сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія радикаловъ.

Оказывается, что такое преобразованіе системы (1) § 69 въ систему (2) невозможно при $n > 4$, если $p_1, p_2, \ldots p_n$ предпо-

лагаются перемѣнными независимыми. Это было въ первый разъ показано Abel'емъ. Но мы видѣли въ § 42 гл. I примѣръ уравненія пятой степени съ опредѣленными численными коэффиціентами, которое допускаетъ рѣшеніе въ радикалахъ. Отсюда является важнымъ разсмотрѣть *численныя* уравненія и ихъ рѣшимость въ радикалахъ.

Полная теорія такихъ уравненій была создана знаменитымъ математикомъ Evariste Galois, умершимъ въ возрастѣ 21 года. Заслуга Galois состоитъ главнымъ образомъ въ томъ, что онъ былъ родоначальникомъ современной теоріи группъ. Что касается алгебраическихъ уравненій, то тутъ заслуга Galois состоитъ въ обобщеніи теоріи Lagrange'a. При этомъ Galois получилъ теорію, обнимающую какъ буквенныя, такъ и численныя уравненія, причемъ теорія Lagrange'a буквенныхъ уравненій оказывается какъ бы частнымъ случаемъ этой болѣе общей теоріи.

Чтобы показать въ двухъ словахъ характерныя черты теоріи Galois, мы должны обратить вниманіе на слѣдующее. Если мы желаемъ перейти отъ буквенныхъ уравненій къ численнымъ, то должны будемъ вмѣсто алгебраической неизмѣнности функцій при подстановкахъ корней, т. е. другими словами вмѣсто неизмѣнности вида функцій (теорія Lagrange'a) разсматривать неизмѣнность численнаго значенія функцій.

Предыдущій примѣръ покажетъ намъ, что подстановки корней, не мѣняющія численнаго значенія функціи, могутъ и не образовывать группы. Пусть напримѣръ, будетъ задано уравненіе

$$\frac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

корни котораго суть (см. § 31 гл. I)

$$x_\kappa=e^{\frac{2\kappa\pi i}{7}}.$$

Очевидно, что

$$x_1 x_6=1.$$

Произведеніе $x_1 x_6$ не мѣняетъ своей численной величи т. е. остается равнымъ единицѣ, при двухъ подстановкахъ

$$S=(x_1 x_2)(x_6 x_5),\quad T=(x_1 x_6)(x_2 x_3),$$

ибо отъ подстановки S оно переходитъ въ

$$x_2 x_5=1,$$

а отъ подстановки T оно переходитъ въ

$$x_6 x_1=1.$$

Подстановка же

$$ST$$

переводитъ первоначальную функцію $x_1 x_6$ въ $x_3 x_5$, а эта величина уже не равна единицѣ, и, значитъ, произведеніе подстановокъ S и T, не мѣняющихъ численнаго значенія функціи, представляетъ подстановку, уже мѣняющую численное значеніе.

Galois показалъ, что если мы для численнаго уравненія вмѣсто общей группы всѣхъ подстановокъ будемъ разсматривать нѣкоторую опредѣленную группу, которую онъ называетъ группой самого уравненія и правила составленія которой онъ указываетъ, то теорія Lagrange'а остается справедливой для этой группы. Оказывается, что изъ подстановокъ группы, указанной Galois, тѣ подстановки, которыя не мѣняютъ численнаго значенія функціи, образуютъ также группу.

§ 71. *Несмотря на большой прогрессъ алгебры, связанный* съ изслѣдованіями Lagrange'а, Gauss'а, Abel'я и Galois, вопросъ о рѣшеніи численныхъ уравненій въ радикалахъ остается до сихъ поръ не вполнѣ рѣшеннымъ. Мы здѣсь обратимъ вниманіе читателя только на главнѣйшіе результаты, полученные вышеуказанными авторами.

Существуетъ большой классъ уравненій, рѣшающихся въ радикалахъ и носящихъ названіе Abel'евыхъ уравненій. Это тѣ уравненія, которыя обладаютъ свойствомъ, что одинъ изъ корней выражается раціонально черезъ другой. Эти уравненія называются Abel'евыми, потому что Abel показалъ способъ ихъ рѣшенія. Если мы примѣнимъ къ Abel'евымъ уравненіямъ теорію группъ Galois, то оказывается, что этимъ уравненіямъ соотвѣтствуетъ коммутаціонная группа, отсюда коммутаціонныя группы получили названіе Abel'евыхъ.

Затѣмъ большую важность представляетъ теорема Galois, относящая къ рѣшенію въ радикалахъ уравненій простыхъ степеней 5, 7, 11, . . . а именно, уравненіе простой степени тогда и только тогда рѣшается въ радикалахъ, когда одинъ изъ корней выражается раціонально черезъ два другихъ.

Исключеніе перемѣнныхъ.

§ 72. Въ элементарной алгебрѣ устанавливается понятіе объ исключеніи нѣкоторой буквы, напр. x, изъ двухъ уравненій, причемъ указываются, главнымъ образомъ, два пріема такого исклю-

ченія. Одинъ изъ этихъ пріемовъ носитъ названіе пріема подстановки, другой—пріема сравненія неизвѣстныхъ. Напримѣръ, если требуется исключить букву x изъ двухъ уравненій.

$$ax+by+c=0 \text{ и } lg\,x=y,$$

то, рѣшая второе уравненіе относительно x, получаемъ $x=e^y$ и подставляемъ въ первое уравненіе. Получаемъ искомый результатъ исключенія въ такомъ видѣ:

$$a\,e^y+by+c=0.$$

Способъ сравненія неизвѣстныхъ состоитъ въ томъ, что мы рѣшаемъ оба уравненія относительно x; получаемъ

$$x=e^y \text{ и } x=-\frac{by+c}{a},$$

откуда сравненіе даетъ

$$e^y=-\frac{by+c}{a}.$$

§ 73. Вопросъ объ исключеніи буквъ изъ нѣсколькихъ уравненій является весьма важнымъ вопросомъ анализа, не только алгебраическаго, но и трансцендентнаго. Какъ общій принципъ, взятый по аналогіи съ простѣйшими случаями исключенія, извѣстными [illegible]атарной математики, выставляется слѣдующее предложеніе. Если мы желаемъ изъ n уравненій исключить k величинъ, то въ результатѣ получается $n-k$ уравненій, связывающихъ остальныя не исключенныя величины. При этомъ число k предполагается, очевидно, меньшимъ числа n.

Механизмъ исключенія обыкновенно предполагается такой. Рѣшаемъ k изъ n уравненій относительно k неизвѣстныхъ и подставляемъ полученныя выраженія въ остальныя $n-k$ уравненій. То, что получится послѣ подстановки, и будетъ результатомъ исключенія. Иногда бываетъ возможно исключить k величинъ изъ меньшаго, чѣмъ k, числа уравненій.

§ 74. Такъ какъ въ большинствѣ случаевъ уравненія, какъ алгебраическія, такъ и особенно трансцендентныя не рѣшаются относительно тѣхъ величинъ, которыя мы желаемъ исключить, то вопросъ объ исключеніи требуетъ прежде всего опредѣленія, что значитъ сдѣлать такое исключеніе.

Трансцендентный анализъ не даетъ отвѣта на то, что понимать въ общемъ случаѣ подъ исключеніемъ перемѣнныхъ изъ уравненій. Алгебраическій же анализъ не только вполнѣ точно

опредѣляетъ, что значитъ исключить k перемѣнныхъ изъ n алгебраическихъ уравненій, но и указываетъ пріемы такого исключенія.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ случая двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными x, y. Поднимая вопросъ объ исключеніи перемѣнной x, мы можемъ наши заданныя два уравненія написать въ видѣ

(1) $$f(x) = 0,$$

(2) $$\varphi(x) = 0,$$

причемъ f и φ считаются цѣлыми функціями отъ x. Мы предполагаемъ, что другая буква y заключается въ коэффиціентахъ.

Пусть первыя части нашихъ уравненій въ раскрытомъ видѣ будутъ

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n,$$
$$\varphi(x) = x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_m,$$

такъ что коэффиціенты p_i и q_i суть цѣлыя функціи отъ буквы y.

Алгебраическій анализъ беретъ за исходный пунктъ разъясненія понятія объ исключеніи буквы x изъ двухъ уравненій (1) и (2) правило сравненія неизвѣстныхъ, причемъ устанавливается такое опредѣленіе результата исключенія.

Подъ результатомъ исключенія буквы x изъ двухъ уравненій (1) и (2) разумѣется такое соотношеніе между коэффиціентами p_i и q_i обоихъ уравненій, которое представляетъ собою условіе необходимое и достаточное для существованія у двухъ уравненій одинаковаго корня x.

Для того чтобы указанное опредѣленіе осуществить на самомъ дѣлѣ, поступаютъ обыкновенно такъ. Если искомый результатъ исключенія выражается равенствомъ,

(3) $$R = 0,$$

гдѣ R есть раціональная функція отъ коэффиціентовъ, то эта функція R носитъ названіе *результанта* двухъ уравненій (1) и (2). Значитъ, вопросъ исключенія приводится къ вопросу вычисленія результанта.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ будутъ корни уравненія (1), а $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ корни уравненія (2). Тогда легко видѣть, что два выраженія

(4) $$f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_m)$$

и

(5) $$\varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_n),$$

могутъ отличаться между собою только знакомъ, ибо очевидно, что выраженіе (4) есть не что иное, какъ произведеніе $\Pi(\beta_j - \alpha_\kappa)$, а выраженіе (5) есть $\Pi(\alpha_\kappa - \beta_j)$, гдѣ произведеніе Π распространяется на всѣ корни α_κ уравненія (1) и на всѣ корни β_j уравненія (2).

Очевидно, что за результантъ R можно принять одно изъ выраженій (4), (5), такъ что получимъ

$$R = f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_m), \tag{6}$$

ибо уравненія (1) и (2) будутъ имѣть тогда и только тогда общій корень, когда одинъ изъ множителей,

$$f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots f(\beta_m)$$

равенъ нулю.

Выраженіе R изъ формулы (6) представляетъ собою, очевидно, цѣлую раціональную функцію отъ коэффиціентовъ p_i и q_i. Что коэффиціенты p_i входятъ раціонально въ выраженіе R, слѣдуетъ изъ того, что каждый изъ множителей $f(\beta_e)$ содержитъ эти коэффиціенты раціонально, а что въ эту функцію R входятъ раціонально коэффиціенты q_i, слѣдуетъ изъ того, что выраженіе (6) есть симметрическая функція отъ корней $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$, ибо при подстановкѣ корней перемѣщаются множители, произведеніе же остается безъ перемѣны.

§ 75. Покажемъ вычисленіе результата на примѣрѣ. Пусть

$$f(x) = x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3,$$
$$\varphi(x) = x^2 + q_1 x + q_2.$$

Тогда

$$R = f(\beta_1) f(\beta_2) = [\beta_1^3 + p_1 \beta_1^2 + p_2 \beta_1 + p_3]\,[\beta_2^3 + p_1 \beta_2^2 + p_2 \beta_2 + p_3] =$$
$$= \beta_1^3 \beta_2^3 + p_1 \beta_1^2 \beta_2^2 (\beta_1 + \beta_2) + p_2 \beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) + p_3 (\beta_1^3 + \beta_2^3) +$$
$$+ p_1^2 \beta_1^2 \beta_2^2 + p_1 p_2 \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2) + p_1 p_3 (\beta_1^2 + \beta_2^2) + p_2 p_3 (\beta_1 + \beta_2) +$$
$$+ p_2^2 \beta_1 \beta_2 + p_3^2.$$

Извѣстно, что

$$\beta_1 + \beta_2 = -q_1,$$
$$\beta_1 \beta_2 = q_2,$$

а также

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = (\beta_1 + \beta_2)^2 - 2\beta_1 \beta_2 = q_1^2 - 2q_2$$
$$\beta_1^3 + \beta_2^3 = (\beta_1 + \beta_2)^3 - 3\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2) = -q_1^3 + 3 q_1 q_2.$$

Подставляя эти значенія, получимъ для R выраженіе

$$R = q_2^3 - p_1 q_2^2 q_1 + p_2 q_1^2 q_2 - 2 p_2 q_2^2 - p_3 q_1^3 + 3 p_3 q_1 q_2 +$$
$$+ p_1^2 q_2^2 - p_1 p_2 q_1 q_2 + p_1 p_3 q_1^2 - 2 p_1 p_3 q_2 + p_2^2 q_2 - p_2 p_3 q_1 + p_3^2.$$

Теорія инваріантовъ.

§ 76. Задачи алгебраическаго анализа, а также задачи аналитической геометріи алгебраическихъ линій и поверхностей привели къ разсмотрѣнію слѣдующей общей задачи, относящейся къ алгебраическимъ формамъ.

Пусть разсматривается форма

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

нѣкоторый степени m отъ n перемѣнныхъ.

Перемѣнныя подвергаются нѣкоторому линейному преобразованію

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1^{(1)} x_1' + \alpha_2^{(1)} x_2' + \ldots + \alpha_n^{(1)} x_n' \\ x_2 &= \alpha_1^{(2)} x_1' + \alpha_2^{(2)} x_2' + \ldots + \alpha_n^{(2)} x_n' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_1^{(n)} x_1' + \alpha_2^{(n)} x_2' + \ldots + \alpha_n^{(n)} x_n', \end{aligned}$$

гдѣ $x_1', x_2', \ldots x_n'$ новыя перемѣнныя, а коэффиціенты $\alpha_i^{(k)}$ суть заданныя числа. Опредѣлитель

$$\rho = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, & \ldots & \alpha_n^{(1)} \\ \alpha_2^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, & \ldots & \alpha_n^{(2)} \\ & \ldots\ldots & \\ \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, & \ldots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

мы будемъ называть *модулемъ преобразованія*.

Вопросъ идетъ о нахожденіи такъ называемыхъ инваріантовъ формы φ. Подъ *инваріантомъ* разумѣется нѣкоторая функція $\Omega(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ отъ коэффиціентовъ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ формы φ, которая удовлетворяетъ уравненію

$$\Omega(A_1, A_2, A_3, \ldots) = \rho^l \, \Omega(A_1', A_2', A_3', \ldots),$$

гдѣ $A_1', A_2', \ldots$ новые коэффиціенты формы, т. е. тѣ коэффиціенты, которые форма получаетъ послѣ преобразованія. Другими словами, инваріантомъ формы называется такая функція ея коэффиціентовъ, которая послѣ линейнаго преобразованія получаетъ множитель, равный степени модуля преобразованія.

§ 77. Напримѣръ, форма

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

имѣетъ инваріантъ

$$B^2 - AC,$$

потому что, если сдѣлаемъ преобразованіе

$$x = \alpha x' + \beta y',$$
$$y = \gamma x' + \delta y',$$

модуль котораго

$$\rho = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

то получимъ новую форму

$$A' x'^2 + 2B' x' y' + C' y'^2,$$

въ которой

$$A' = A\alpha^2 + 2B\alpha\gamma + C\gamma^2,$$
$$B' = A\alpha\beta + B(\alpha\delta - \beta\gamma) + C\gamma\delta,$$
$$C' = A\beta^2 + 2B\beta\delta + C\delta^2.$$

Простыя выкладки убѣждаютъ въ справедливости равенства

$$B'^2 - A'C' = \rho^2 (B^2 - AC),$$

выражающаго то свойство, что $B^2 - AC$ есть инваріантъ.

§ 78. *Коваріантомъ* называется такая функція

$$\psi(x_1, x_2, \ldots x_n, A_1, A_2, \ldots)$$

отъ независимыхъ перемѣнныхъ и отъ первоначальныхъ коэффиціентовъ формы, которая послѣ линейнаго преобразованія перемѣнныхъ получаетъ множителемъ степень модуля преобразованія.

Основная задача теоріи инваріантовъ состоитъ въ нахожденіи всѣхъ инваріантовъ и коваріантовъ для формъ данной степени и даннаго числа перемѣнныхъ.

§ 79. Понятіе объ инваріантахъ линейныхъ преобразованій обобщается, и мы приходимъ къ понятію объ инваріантахъ нѣкоторой группы преобразованій. Подъ инваріантомъ группы разумѣется выраженіе, не мѣняющееся отъ преобразованій группы.

Sophus Lie и Klein разсматривали всю геометрію, какъ теорію инваріантовъ преобразованія координатъ.

ГЛАВА V.

Теорія чиселъ.

§ 1. Основанія теоріи чиселъ находятся въ извѣстной книгѣ Эвклида, названной „Начала“ (Στοιχεῖα). Здѣсь мы встрѣчаемъ вполнѣ научное изложеніе началъ ученія о натуральныхъ числахъ. Эти начала въ настоящее время вводятся въ курсы ариѳметики среднихъ учебныхъ заведеній.

Въ основаніи теоріи Эвклида лежитъ ученіе о *дѣлимости* чиселъ.

§ 2. Числа, дѣлящіяся только на самихъ себя и единицу носятъ названіе *простыхъ*. Получается безконечный рядъ такихъ простыхъ чиселъ.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

Законъ, по которому эти простыя числа слѣдуютъ одно за другимъ, остается въ продолженіе 2000 лѣтъ неразгаданнымъ. Въ XIX столѣтіи появились замѣчательныя изслѣдованія Чебышева и Riemann'a о простыхъ числахъ, гдѣ разсматриваются свойства функціи $\theta(x)$, представляющей число простыхъ чиселъ, не превосходящихъ числа x, такъ, напримѣръ,

$$\theta(10) = 5, \theta(20) = 9, \ldots$$

Въ послѣднее время вышло въ свѣтъ большое сочиненіе профессора Landau „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen“.

§ 3. Существуютъ таблицы простыхъ чиселъ, проведенныя до 9000000.

Эратосѳену принадлежитъ способъ составленія таблицъ простыхъ чиселъ, состоящій въ вычеркиваніи изъ написанныхъ подрядъ натуральныхъ чиселъ кратныхъ сначала числу 2, оставляя число 2 незачеркнутымъ, затѣмъ кратныхъ слѣдующему незачеркну-

тому числу 3, далѣе кратныхъ слѣдующему незачеркнутому числу 5 и т. д. Послѣ вычеркиванія этихъ кратныхъ остаются только простыя числа. Этотъ способъ носитъ названіе *рѣшета Эратосѳена.*

Нужно признаться, что до сихъ поръ этотъ способъ остается единственнымъ способомъ для составленія таблицъ простыхъ чиселъ, причемъ усовершенствованы только его детали.

§ 4. Простыя числа являются тѣми элементами, изъ которыхъ составляются другія числа, такъ называемыя составныя. Всякое составное число единственнымъ способомъ раскладывается на простые множители. Получается формула

$$n = p^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma} \ldots, \tag{1}$$

выражающая, что цѣлое число n имѣетъ α множителей, равныхъ p, β множителей, равныхъ q, γ множителей, равныхъ r, и т. д. Когда число разложено на простые множители, тогда рѣшаются очень просто различные вопросы. Напримѣръ, всякій дѣлитель числа (1) можетъ быть представленъ въ такомъ видѣ:

$$d = p^{\lambda} q^{\mu} r^{\nu} \ldots,$$

гдѣ

$$\lambda \leqq \alpha, \mu \leqq \beta, \nu \leqq \gamma, \ldots$$

Если мы напишемъ такіе многочлены:

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^{\alpha} = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1},$$

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{\beta} = \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1}, \tag{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и перемножимъ эти равенства, то получимъ

$$\Sigma d = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1} \ldots, \tag{3}$$

гдѣ въ первой части находится сумма всѣхъ дѣлителей числа n, включая въ число дѣлителей единицу и само число n.

Такъ какъ при перемноженіи многочленовъ, стоящихъ въ лѣвыхъ частяхъ равенствъ (2) никакихъ сокращеній членовъ не происходитъ, то число членовъ въ суммѣ Σd будетъ, очевидно,

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots \tag{4}$$

т. е. равно произведенію чиселъ членовъ во всѣхъ перемножаемыхъ многочленахъ.

Итакъ, формула (4) даетъ число различныхъ дѣлителей заданнаго числа n, а формула (3) сумму этихъ дѣлителей.

Въ XVIII столѣтіи называли *совершенными* такія числа, у которыхъ сумма дѣлителей равняется удвоенному самому числу, напримѣръ.

$$2 \,.\, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 \,.$$

§ 5. Что касается разложенія числа на простые множители, то это задача, которую надо считать трудной, потому что до сихъ поръ мы не имѣемъ другого способа для рѣшенія ея, какъ пробовать дѣлить число на всѣ простыя числа, не превосходящія корня квадратнаго изъ этого числа. Нетрудно убѣдиться, что если число достаточно велико, то такая проба вслѣдствіе большого числа вычисленій можетъ потребовать времени, которымъ мы располагать не можемъ.

§ 6. Простою является задача нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ заданныхъ чиселъ. Она совпадаетъ по характеру съ задачей нахожденія общей мѣры двухъ отрѣзковъ, изложенной въ § 11 гл. I.

Эта задача рѣшается при помощи алгоритма послѣдовательныхъ дѣленій, называемаго нынѣ *алгоритмомъ Эвклида*; этотъ алгоритмъ излагается во всѣхъ курсахъ элементарной математики.

О сравненіяхъ.

§ 7. Несмотря на блестящія изслѣдованія и открытія, сдѣланныя въ теоріи чиселъ Fermat, Lagrange'емъ, Euler'омъ, нужно считать за начало теоріи чиселъ, какъ науки, геніальное сочиненіе Gauss'a „Disquisitiones arithmeticae".

Одно изъ весьма важныхъ нововведеній, сдѣланныхъ Gauss'омъ состоитъ въ понятіи о такъ называемыхъ сравненіяхъ.

§ 8. Если разность $a-b$ двухъ цѣлыхъ чиселъ a и b дѣлится на k, то Gauss такія два числа называетъ *сравнимыми между собою по модулю* k и вводится обозначеніе

$$a \equiv b \pmod{k}, \tag{1}$$

причемъ эта формула носитъ названіе *сравненія* *).

---

*) Нѣкоторые авторы предлагаютъ знакомъ $a \equiv b$ обозначать тождественное равенство въ отличіе отъ обыкновеннаго равенства $a = b$. Въ виду первостепенной важности въ математикѣ Gauss'овскаго понятія о

Напримѣръ

$$17 \equiv 2 \ (mod\, 3).$$

Оказывается, что сравненія обладаютъ свойствами, аналогичными свойствамъ уравненій алгебры. Такъ, напримѣръ, два сравненія можно почленно складывать, вычитать и умножать, т. е. изъ двухъ сравненій

$$a \equiv b \ (mod\, k),$$
$$a_1 \equiv b_1 \ (mod\, k),$$

вытекаютъ, какъ слѣдствія, слѣдующія три сравненія:

$$a + a_1 \equiv b + b_1 \ (mod\, k),$$
$$a - a_1 \equiv b - b_1 \ (mod\, k),$$
$$aa_1 \equiv bb_1 \ (mod\, k).$$

§ 9. Изъ соображеній предыдущаго §-а вытекаетъ, что обѣ части сравненія можно умножать на одно и то же число, а также возвышать въ какую угодно цѣлую положительную степень, т. е. изъ сравненія

$$a \equiv b \ (mod\, k)$$

получается

$$ca \equiv cb \ (mod\, k)$$

и

$$a^n \equiv b^n \ (mod\, k).$$

Вообще говоря, если мы обозначимъ черезъ $f(x)$ цѣлую функцію отъ x съ цѣлыми коэффиціентами, напримѣръ

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ . \ . \ . + p_n,$$

гдѣ $p_0, p_1, \ . \ . \ . \ p_n$ числа цѣлыя, то изъ сравненія

$$x \equiv a \ (mod\, k)$$

получаемъ

$$f(x) \equiv f(a) \ (mod\, k).$$

§ 10. Если задано сравненіе

(1) $$f(x) \equiv 0 \ (mod\, k),$$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція съ цѣлыми коэффиціентами, то можетъ быть поставлена задача о рѣшеніи этого сравненія, задача, аналогичная задачѣ рѣшенія уравненія въ алгебрѣ.

сравненіи едва ли можно рекомендовать употреблять знакъ сравненія для обозначенія тождества, тѣмъ болѣе, что, по моему мнѣнію, особенной надобности въ подчеркиваніи различія между равенствомъ и тождествомъ нѣтъ.

Подъ корнемъ сравненія (1) мы будемъ, очевидно, разумѣть также цѣлое число a, при которомъ

$$f(a) \equiv 0 \,(mod\, k).$$

Напримѣръ, сравненіе

$$x^2 - x + 1 \equiv 0 \,(mod\, 7)$$

имѣетъ корнемъ $x = 5$, ибо послѣ подстановки вмѣсто x числа 5 получимъ тождественное сравненіе

$$21 \equiv 0 \,(mod\, 7).$$

На основаніи соображеній предыдущаго §-а мы замѣчаемъ, что если сравненіе (1) имѣетъ корень a, то это сравненіе можно переписать такъ

$$f(x) \equiv f(a) \,(mod\, k),$$

а тогда послѣднему сравненію будетъ удовлетворять всякое число x, удовлетворяющее сравненію

(2) $$x \equiv a \,(mod\, k).$$

Различныя числа x, удовлетворяющія сравненію (2), представляютъ собою безконечный рядъ чиселъ

(3) $$\ldots a - 2k, a - k, a, a + k, a + 2k, \ldots$$

распространяющійся въ обѣ стороны. Числа (3) представляютъ собою такъ называемый *классъ чиселъ по модулю* k.

Мы видимъ, слѣдовательно, что съ точки зрѣнія рѣшенія сравненій всѣ числа класса (3) можно считать какъ бы за одно число. Значитъ, когда въ теоріи чиселъ идетъ вопросъ о нахожденіи всѣхъ рѣшеній сравненія (1), то дѣло идетъ о нахожденіи различныхъ классовъ чиселъ.

Очевидно, что среди чиселъ класса (3) существуетъ всегда одно и только одно число, которое заключается среди чиселъ

(4) $$0, 1, 2, 3, \ldots, k \quad 1.$$

Это число носитъ названіе *вычета по модулю* k всѣхъ чиселъ разсматриваемаго класса, и его можно принять за представителя класса.

Итакъ, задача рѣшенія сравненія 1) приводится къ нахожденію тѣхъ изъ чиселъ (4), которыя удовлетворяютъ сравненію (1). Очевидно, что эта задача рѣшается при помощи конечнаго числа пробъ, стоитъ только перепробовать подставить въ заданное сравненіе вмѣсто x всѣ числа (4). Конечно, рѣшеніе вопроса

при помощи пробъ дѣлается неудобнымъ при большомъ значеніи модуля.

§ 11. Замѣчательно, что для сравненій развивается теорія, совершенно аналогичная теоріи уравненій алгебры. Надо отмѣтить тотъ замѣчательный фактъ, что аналогія въ своемъ полномъ видѣ идетъ только для случая простого модуля, въ случаѣ же сложнаго модуля аналогія затемняется.

Существуетъ такое предложеніе. Какъ показалъ Lagrange, *всякое сравненіе степени n по простому модулю не можетъ имѣть болѣе n корней.*

Случай, когда сравненіе имѣетъ какъ разъ n корней, аналогиченъ случаю всѣхъ вещественныхъ корней уравненія. Когда число корней сравненія меньше степени его, то, какъ показалъ Galois, можно развить теорію мнимыхъ корней сравненія, аналогичную теоріи мнимыхъ корней уравненія.

§ 12. При разсмотрѣніи показательныхъ сравненій

$$a^x \equiv b \,(mod\, k)$$

получается теорія, аналогичная теоріи логариѳмовъ. Скажемъ нѣсколько словъ объ этой теоріи.

Пусть a число взаимно простое съ модулемъ k. Разсмотримъ рядъ степеней.

(1) $$a, a^2, a^3, a^4, \ldots$$

Всѣ эти степени дадутъ числа, взаимно простыя съ модулемъ k.

Существуетъ конечное число классовъ чиселъ по модулю k, взаимно простыхъ съ k. Число такихъ классовъ, которое мы обозначимъ $\varphi(k)$, очевидно, равняется числу чиселъ, находящихся въ рядѣ

(2) $$0, 1, 2, \ldots k-1$$

и взаимно простыхъ съ k. Очевидно, поэтому, что всѣ числа безконечнаго ряда (1) не могутъ принадлежать къ различнымъ классамъ, ибо классовъ только конечное число. Слѣдовательно, въ рядѣ (1) непремѣнно должны быть числа, принадлежащія къ одному классу, и мы получаемъ

$$a^{n+m} \equiv a^n \,(mod\, k);$$

откуда, раздѣляя обѣ части на a^n, имѣемъ

(3) $$a^m \equiv 1 \,(mod\, k).$$

Итакъ, мы видимъ, что всегда должно существовать нѣкоторое число m, удовлетворяющее сравненію (3).

Euler называетъ число a *принадлежащимъ къ показателю* m, если m наименьшее число, при которомъ имѣетъ мѣсто сравненіе (3), и показываетъ затѣмъ, что показатель, къ которому принадлежитъ число a, взаимно простое съ модулемъ k, долженъ быть дѣлителемъ числа

$$\varphi(k) = \lambda.$$

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ изъ ряда (2) всѣ числа, взаимно простыя съ k. Пусть эти числа будутъ

$$a_1, a_2, \quad . \quad a\lambda.$$

Тогда разсмотримъ произведенія

(4) $$aa_1, aa_2, \quad . \quad . \quad . \quad aa\lambda$$

и обозначимъ черезъ $b_1, b_2, \quad . \quad . \quad b\lambda$ вычеты чиселъ (4) по модулю k. Получимъ сравненія

(5) $$\begin{aligned} aa_1 &\equiv b_1 \,(mod\, k), \\ aa_2 &\equiv b_2 \,(mod\, k), \\ &\ldots\ldots \\ aa\lambda &\equiv b\lambda \,(mod\, k). \end{aligned}$$

Такъ какъ числа $b_1, b_2, \quad . \quad . \quad . \quad b\lambda$ должны быть различными числами изъ ряда (2), взаимно простыми съ k, то очевидно, что эти числа совпадаютъ съ числами $a_1, a_2 \quad . \quad . \quad . \quad a_\lambda$ и могутъ отличаться отъ нихъ только порядкомъ.

Перемножая сравненія (5) и сокращая обѣ части на одно и то же произведеніе, получаемъ

$$a^\lambda \equiv 1 \,(mod\, k)$$

или

(6) $$a^{\varphi(k)} \equiv 1 \,(mod\, k).$$

Это равенство представляетъ собою извѣстную теорему Euler'a. Если k простое число p, то очевидно, что

$$\varphi(p) = p - 1,$$

ибо всѣ числа

$$1, 2, 3, \quad . \quad . \quad p - 1,$$

меньшія p, суть числа взаимно простыя съ p. Отсюда теорема Euler'a принимаетъ видъ

(7) $$a^{p-1} \equiv 1 \,(mod\, p).$$

Въ этомъ видѣ теорема высказана Fermat'омъ.

§ 13. Число a Euler называетъ *первообразнымъ корнемъ* модуля k, если оно принадлежитъ къ показателю $\varphi(k)$.

Если модуль простое число p, то всегда существуютъ первообразные корни, т. е. такія числа a, не дѣлящіяся на p, которыя принадлежатъ къ показателю $p-1$; другими словами, по теоремѣ Fermat'a существуетъ сравненіе

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\, p)$$

и не существуетъ никакого числа m, меньшаго $p-1$, при которомъ было бы

$$a^m \equiv 1 \ (mod\, p).$$

§ 14. Оказывается, что если a будетъ первообразный корень числа p, то показательное сравненіе

$$a^x \equiv b \ (mod\, p)$$

можно рѣшить при всякомъ числѣ b, не дѣлящемся на p.

Число x носитъ названіе *индекса* числа b, а первообразный корень a называется *основаніемъ индексовъ*.

Индексы въ теоріи чиселъ даютъ возможность достигать вычислительныхъ выгодъ, аналогичныхъ тѣмъ, которыя даютъ логарифмы, а именно, умноженіе чиселъ замѣняется сложеніемъ индексовъ, возвышеніе въ степень замѣняется умноженіемъ индекса на число. Извѣстнымъ математикомъ *Jacobi* составлены таблицы индексовъ для всѣхъ простыхъ модулей до 1000*).

Сравненія различныхъ степеней съ простымъ модулемъ.

§ 15. Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію сравненій различныхъ степеней по простому модулю.

Что касается сравненій *первой степени*

$$ax + b \equiv 0 \ (mod\, p),$$

то очевидно, что если a не дѣлится на p, то сравненіе имѣетъ всегда *одно* рѣшеніе. Въ самомъ дѣлѣ, если мы въ выраженіе $ax+b$ вмѣсто x будемъ подставлять числа

$$0, 1, 2, \ldots p-1,$$

то будемъ получать числа

(1) $$b, a+b, a.2+b, \ldots a(p-1)+b,$$

---

*) Таблицы Jacobi продолжены по моему предложенію студентами Кіевскаго Университета для простыхъ модулей до 2000. При вычисленіяхъ пользовались счетными машинами. Эти таблицы до сихъ поръ не опубликованы.

которыя, очевидно, принадлежатъ къ различнымъ классамъ, потому что разность между каждыми двумя изъ чиселъ (1) не можетъ дѣлиться на p. Слѣдовательно, среди этихъ чиселъ навѣрное одно принадлежитъ къ классу, сравнимому съ нулемъ по модулю p, и заданное сравненіе имѣетъ одинъ и только одинъ корень.

§ 16. Сравненія *квадратныя*, по аналогіи съ уравненіями, всегда могутъ быть приведены къ неполнымъ квадратнымъ сравненіямъ вида

$$x^2 \equiv q \pmod{p}, \tag{1}$$

причемъ оказывается, что такое сравненіе или имѣетъ два корня, или ни одного.

Если сравненіе (1) имѣетъ два корня, т. е. другими словами, если оно возможно, то число q носитъ названіе *квадратичнаго вычета* модуля p. Если же сравненіе (1) невозможно, тогда число q называется *квадратичнымъ невычетомъ* числа p. Legendre ввелъ въ науку весьма полезный символъ

$$\left(\frac{q}{p}\right),$$

который опредѣляется равенствомъ

$$\left(\frac{q}{p}\right) = +1,$$

если q вычетъ, и равенствомъ

$$\left(\frac{q}{p}\right) = -1,$$

если q невычетъ.

Уже задолго до появленія „Disquisitiones arithmeticae“ сдѣлалась ясной важность разсмотрѣнія такой задачи: даны два простыхъ числа p и q; требуется разсмотрѣть два сравненія

$$x^2 \equiv q \pmod{p},$$
$$x^2 \equiv p \pmod{q}$$

и найти условія возможности ихъ рѣшенія.

Эта задача привела къ весьма важному въ наукѣ закону, носящему названіе *закона взаимности двухъ простыхъ чиселъ*.

Gauss былъ первымъ, который далъ вполнѣ удовлетворительное доказательство этого закона. Первое доказательство Gauss'а находится въ „Disquisitiones arithmeticae“ art. 131. Признавая

большое значеніе закона взаимности, Gauss далъ ему еще шесть другихъ доказательствъ. Доказательства Gauss'а видоизмѣнены и упрощены послѣдующими математиками.

Законъ взаимности формулируется въ трехъ равенствахъ

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

гдѣ q и p нечетныя простыя числа.

Ариѳметическая теорія алгебраическихъ величинъ.

§ 17. Желая обобщить законъ взаимности квадратичныхъ вычетовъ для высшихъ степеней, причемъ подъ вычетомъ степени n разумѣется такое число q, при которомъ возможно сравненіе

$$x^n \equiv q \pmod{p},$$

Гаусъ сдѣлалъ важное по своей мысли нововведеніе, а именно расширилъ кругъ чиселъ, съ которыми имѣетъ дѣло теорія чиселъ. Разсматривая такъ называемые биквадратичные вычеты, т. е. вычеты четвертой степени, Gauss ввелъ въ разсмотрѣніе числа *цѣлыя комплексныя*, т. е. числа вида

$$a + b\sqrt{-1}, \tag{1}$$

гдѣ a и b цѣлыя числа.

Оказывается, что если мы будемъ называть числа вида (1) цѣлыми, если у нихъ вещественная часть a и мнимая часть b цѣлыя числа, и дробными въ томъ случаѣ, если оба или одно изъ чиселъ a и b дробное, то для такихъ цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ вся эвклидовская теорія дѣлимости, вытекающая изъ алгоритма общаго наибольшаго дѣлителя, остается въ силѣ.

Теоремы Gauss'а были окончательно доказаны Eisenstein'омъ въ бытность послѣдняго студентомъ университета. Eisenstein обобщилъ далѣе разсужденія Gauss'а на случай кубическихъ вычетовъ, причемъ эти обобщенія были продолжены и для вычетовъ высшихъ степеней.

§ 18. Разсматривая цѣлыя комплексныя числа вида

$$x = a + b\sqrt{-1},$$

мы замѣчаемъ, что они суть корни уравненія

$$(x - a)^2 + b^2 = 0$$

или

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0,$$

т. е. уравненія вида

$$x^2 + Ax + B = 0,$$

гдѣ при старшемъ членѣ коэффиціентъ единица, а другіе два коэффиціента A и B суть числа цѣлыя.

Въ настоящее время еще болѣе расширенъ кругъ чиселъ, надъ которыми оперируетъ теорія чиселъ, и введены такъ называемыя *цѣлыя алгебраическія числа*.

Подъ цѣлымъ алгебраическимъ числомъ разумѣется корень всякаго уравненія вида

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

гдѣ коэффиціентъ при старшей степени равенъ единицѣ, всѣ же остальные коэффиціенты числа цѣлыя въ обыкновенномъ смыслѣ слова. Число алгебраическое носитъ названіе дроднаго, если оно удовлетворяетъ уравненію

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a^n = 0,$$

причемъ всѣ коэффиціенты цѣлые, не имѣющіе общаго дѣлителя, и коэффиціентъ при старшемъ членѣ не равенъ единицѣ.

Легко убѣдиться, что всякое дробное алгебраическое число умноженіемъ на нѣкоторое натуральное число обращается въ цѣлое алгебраическое.

Въ самомъ дѣлѣ, если алгебраическое число ω не цѣлое, то оно удовлетворяетъ уравненію

$$(1) \qquad \omega^n + A_1 \omega^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

гдѣ раціональные коэффиціенты $A_1, A_2, \ldots A_n$ не всѣ цѣлые. Обозначивъ черезъ a общій знаменатель всѣхъ дробныхъ коэффиціентовъ, уравненіе (1) можно представить въ такомъ видѣ:

$$(a\omega)^n + A_1 a (a\omega)^{n-1} A_2 a^2 (a\omega)^{n-2} + \ldots + A_n a^n = 0,$$

и, значитъ, число $a\omega$ будетъ цѣлымъ алгебраическимъ.

§ 19. Обыкновенно разсматриваются числа нѣкоторой опредѣленной *области*, причемъ подъ областью чиселъ разумѣется совокупность всѣхъ раціональныхъ функцій $\varphi(\Theta)$ съ цѣлыми въ обыкновенномъ смыслѣ коэффиціентами, гдѣ Θ есть цѣлое алгебраическое число, т. е. корень нѣкотораго неприводимаго уравненія

$$\Theta^n + a_1 \Theta^{n-1} + a_2 \Theta^{n-1} + \ldots + a^n = 0.$$

Такъ напримѣръ, цѣлыя комплексныя числа Gauss'а суть числа области, опредѣляемой уравненіемъ

$$\Theta^2 + 1 = 0.$$

Разсматривая для каждаго числа $\varphi(\Theta)$ данной области то алгебраическое уравненіе, которому оно удовлетворяетъ, мы можемъ узнать, будетъ ли это число цѣлымъ алгебраическимъ или дробнымъ. Всѣ числа области раздѣляются на цѣлыя и дробныя.

Основною задачей является убѣдиться, остаются ли въ силѣ основныя положенія теоріи дѣлимости для цѣлыхъ чиселъ алгебраическихъ данной области. Оказывается, что лишь для немногихъ областей сохраняются основные законы [illegible] большинство же областей представляютъ новыя явленія.

[illegible]казывается, что вообще говоря, разложеніе цѣлаго алгебраическаго числа на простые множители, далѣе неразлагаемые, можетъ происходить не однимъ способомъ, т. е. [illegible] въ областяхъ справедливо [illegible]

$$\alpha\beta = \gamma\delta,$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ различныя между собою цѣлыя числа области, не разложимыя далѣе на множители.

У Kummer'а явилась счастливая мысль ввести новыя несуществующія, такъ называемыя *идеальныя* числа, причемъ эти числа, группируясь въ произведенія, могутъ давать числа существующія. Потому двойное разложеніе на простые множители, выражаемое равенствомъ (1), можно себѣ объяснить такъ, что въ данномъ случаѣ число раскладывается на четыре идеальныхъ множителя $\alpha_0 \alpha_1 \beta_0 \beta_1$, причемъ

$$\alpha = \alpha_0 \alpha_1, \beta = \beta_0 \beta_1, \gamma = \alpha_0 \beta_0, \delta = \alpha_1 \beta_1.$$

Теорія идеальныхъ чиселъ представляетъ собою кульминаціонный пунктъ современной теоріи чиселъ. Въ этой теоріи получили извѣстность Dedekind, Kronecker и Hensel.

Вмѣсто идеальныхъ чиселъ Dedekind ввелъ новое понятіе объ „идеалѣ“, причемъ подъ идеалами разумѣются нѣкоторые числовые ансамбли.

Школа Kronecker'a, въ которой особенно выдѣлились Weber, Frobenius и Hensel, сблизила теорію идеаловъ съ теоріей алгебраическихъ функцій. Hensel'ю, принадлежитъ честь введенія въ науку новыхъ символовъ, названныхъ имъ *p-адическими* числами.

Аналитическая теорія чиселъ.

§ 20. Въ XIX столѣтіи при развитіи идей Gauss'a, находящихся въ его сочиненіи „Disquisitiones arithmeticae“, произошло сближеніе теоріи чиселъ съ анализомъ безконечно малыхъ. Это сближеніе выразилось въ появленіи особенной части теоріи чиселъ, которая въ настоящее время называется *аналитической теоріей чиселъ*.

Несомнѣнно, что первыя начала этой теоріи были положены Dirichlet, который связалъ Gauss'овскую задачу опредѣленія числа классовъ бинарныхъ квадратичныхъ формъ съ вопросами теоріи рядовъ и интегральнаго исчисленія. Подъ вліяніемъ изслѣдованій Eisenstein'a и Kronecker'a явились изслѣдованія [redacted] теорію чиселъ съ теоріей эллиптическихъ функцій и служившія обобщеніемъ теоріи двучленныхъ уравненій. Наконецъ, необходимо упомянуть о начатыхъ Чебышевымъ изслѣдованіяхъ о числѣ простыхъ чиселъ, не превосходящихъ даннаго предѣла. [redacted] приложенія къ этому вопросу разсмотрѣнія интеграла

$$\int \frac{dx}{lg\, x}.$$

Изслѣдованія Чебышева были продолжены Riemann'омъ.

ГЛАВА VI.

Различныя теченія въ геометріи.

Analysis situs.

§ 1. Геометрія положенія, названная Leibnitz'омъ и Euler'омъ *analysis situs* и называемая въ настоящее время также *топологіей*, представляетъ изъ себя доктрину, получившую теперь большое развитіе и имѣющую рядъ важныхъ приложеній. Давать полную характеристику этой части геометріи представляло бы задачу, не соотвѣтствующую цѣлямъ нашего изложенія; мы ограничимся лишь указаніемъ на нѣкоторыя задачи, разсматриваемыя въ этой части геометріи, которыя могутъ служить для характеристики методовъ, употребляемыхъ въ геометріи положенія. Въ настоящее время при систематическомъ изложеніи геометріи положенія ее дѣлятъ обыкновенно на три части, которымъ даютъ слѣдующія названія: 1) *complexus* 2) *nexus* и 3) *connexus*.

§ 2. Геометрію положенія можно характеризовать, хотя не совсѣмъ строго, такъ: эта геометрія изучаетъ тѣ свойства геометрическихъ объектовъ, которыя не зависятъ отъ точнаго вида и точныхъ размѣровъ разсматриваемаго объекта. Лучше всего мы укажемъ на характеръ вопросовъ геометріи положенія, разсмотрѣвши задачи, приведенныя ниже.

Теорема Euler'а о многогранникахъ.

§ 3. Будемъ разсматривать произвольно выбранный сомкнутый многогранникъ. Грани этого многогранника могутъ быть совершенно произвольными плоскими многоугольниками, и число этихъ граней можетъ быть совершенно произвольно выбраннымъ. Несмотря на такую произвольность формы многогранника суще-

ствуетъ замѣчательное соотношеніе между слѣдующими тремя числами: числомъ A реберъ (arêtes), числомъ F граней (faces) и числомъ S вершинъ (sommets) многогранника.

Euler показалъ, что независимо отъ вида многогранника, всегда существуетъ слѣдующее соотношеніе

(1) $$A+2=F+S.$$

Приведемъ здѣсь очень простое доказательство теоремы Euler'a, указанное Cauchy. Вынемъ изъ многогранника нѣсколько смежныхъ между собой граней и назовемъ такую фигуру открытымъ многогранникомъ; легко убѣдиться, что для всякаго открытаго многогранника будетъ имѣть мѣсто формула

(2) $$A+1=F+S.$$

Докажемъ формулу (2) по индукціи: мы замѣчаемъ, что она справедлива въ томъ случаѣ, когда открытый многогранникъ состоитъ изъ одной грани, представляющей многоугольникъ съ n сторонами. Для такого случая $F=1$, а какъ число вершинъ S, такъ и число реберъ A равно n, значитъ равенство (2) удовлетворяется. Покажемъ теперь, что если фомула (2) будетъ справедливой для нѣкотораго числа F граней, то она останется справедливой, если мы къ открытому многограннику приставимъ еще одну грань. Пусть эта грань будетъ m-угольникъ и пусть она приставлена къ остальнымъ p сторонами, такъ что эти p сторонъ совпадаютъ со сторонами другихъ граней, а $m-p$ сторонъ остаются свободными. Тогда очевидно, что совпадутъ $p+1$ вершинъ послѣдней грани съ вершинами предыдущихъ граней. Обозначимъ для новаго открытаго многогранника числа граней, реберъ и вершинъ черезъ F', A', S'. Очевидно, будетъ

(3) $$F'=F+1,$$

такъ какъ въ новомъ многранникѣ число граней на одну больше. Подобнымъ же образомъ

(4) $$A'=A+m-p$$

и, наконецъ,

(5) $$S'=S+m-(p+1).$$

Мы замѣчаемъ отсюда, что, если имѣетъ мѣсто равенство (2), то числа F', A' и S' удовлетворяютъ тому же равенству (2), т. е.

$$A'+1=F'+S',$$

въ чемъ легко убѣдиться.

Итакъ, равенство (2) оказывается всегда справедливымъ. Чтобы перейти къ теоремѣ Euler'a, предположимъ, что въ открытомъ многогранникѣ существуетъ только одно отверстіе, состоящее въ удаленіи одной грани. Это удаленіе одной грани не уменьшаетъ ни числа реберъ, ни числа вершинъ, только число граней дѣлается на единицу меньше; поэтому въ формулу (2) надо подставить вмѣсто F число $F-1$, и мы получимъ формулу Euler'a (1).

§ 4. Теорема Euler'a даетъ возможность очень просто получить цѣлый рядъ весьма важныхъ заключеній, относящихся къ произвольнымъ замкнутымъ многогранникамъ. Мы считаемъ полезнымъ привести наиболѣе важныя изъ такихъ свойствъ. Распредѣлимъ грани многогранника по числу ихъ сторонъ. Пусть t будетъ число треугольныхъ граней, q — четыреугольныхъ, p — пятиугольныхъ, h — шестиугольныхъ, h' — семиугольныхъ, o — восьмиугольныхъ и т. д. Подобнымъ же образомъ обозначимъ T, Q, P, H, H', O, и т. д. число вершинъ или число тѣлесныхъ угловъ многогранника, имѣющихъ 3, 4, 5 и т. д. реберъ. Тогда мы получаемъ слѣдующій рядъ очевидныхъ формулъ:

(1) $$F = t + q + p + h + h' + o + \ldots$$

(2) $$2A = 3t + 4q + 5p + 6h + 7h' + 8o + \ldots$$

(3) $$S = T + Q + P + H + H' + O + \ldots$$

(4) $$2A = 3T + 4Q + 5P + 6H + 7H' + 8O +$$

Въ формулахъ (2) и (4) въ первой части появляется при числѣ A множитель 2 потому, что на каждомъ ребрѣ сходятся двѣ грани, и каждое ребро соединяетъ двѣ вершины.

Первое слѣдствіе, которое можно вывести изъ формулъ (2) и (4) состоитъ въ томъ, что двѣ суммы

$$t + p + h' + \ldots$$

и

$$T + P + H' + \ldots$$

суть числа четныя.

Исключая числа A и S изъ формулы Euler'a и изъ формулъ (3) и (4) мы получимъ

(5) $$2F = 4 + T + 2Q + 3P + 4H + 5H' + 6O + \ldots$$

Подобнымъ же образомъ, исключая числа A и F изъ формулы Euler'a и изъ формулъ (1) и (2) мы получимъ

(6) $$2S = 4 + t + 2q + 3p + 4h + 5h' + 6o + \ldots$$

Умножая формулу Euler'a на 4, получаемъ

(7) $$4F + 4S = 4A + 8.$$

Подставляемъ въ это равенство выраженія F и S изъ уравненій (1) и (3); въ первой части равенства получаемъ:

$$4(t+T) + 4(q+Q) + 4(p+P) + \ldots,$$

для составленія же второй части равенства (7) складываемъ равенства (2) и (4); получаемъ выраженіе

$$8 + 3(t+T) + 4(q+Q) + 5(p+P) + \ldots;$$

отсюда

(8) $$t + T = 8 + (p+P) + 2(h+H) + 3(h'+H') + 4(o+O) + \ldots$$

Равенство (8) показываетъ, что

(9) $$t + T \geqslant 8;$$

мы приходимъ, слѣдовательно, къ такой теоремѣ.

Во всякомъ многогранникѣ должны находиться или треугольныя грани или трехгранные углы, такъ какъ на основаніи неравенствъ (9) числа t и T оба сразу не могутъ равняться нулю.

§ 5. На основаніи равенствъ (3) и (4) предыдущаго §-а мы имѣемъ неравенство

$$2A \geqslant 3S;$$

подставляя сюда вмѣсто A и S ихъ значенія изъ равенствъ (2) и (6) получимъ

$$3t + 4q + 5p + \ldots \geqslant \frac{3}{2}(4 + t + 2q + 3p + \ldots),$$

откуда

(1) $$3t + 2q + p \geqslant 12 + h' + 2o + \ldots$$

Формула (1) показываетъ, что не могутъ равняться нулю одновременно всѣ три числа t, q и p, и мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ: *не можетъ существовать многогранникъ, всѣми гранями котораго служатъ многоугольники съ числомъ сторонъ бо́льшимъ, чѣмъ пять.*

§ 6. На основаніи соображеній, аналогичныхъ соображеніямъ предыдущаго §-а, получаемъ

$$2A \geqslant 3F,$$

откуда вытекаетъ

(1) $$3T + 2Q + P \geqslant 12 + H' + 2O + \ldots$$

Мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ: *не можетъ существовать многогранникъ, всѣ тѣлесные углы котораго имѣли бы число реберъ бо́льшее, чѣмъ пять.*

§ 7. Читатель уже замѣтилъ, конечно, взаимность, существующую между тѣлесными углами многогранника и соотвѣтствующими имъ вершинами съ одной стороны и гранями его съ другой.

§ 8. Поставимъ себѣ задачей найти всѣ многогранники, имѣющіе гранями n—угольники, при вершинахъ которыхъ находятся тѣлесные углы, заключающіе всѣ, положимъ, m реберъ; получаемъ въ этомъ случаѣ

(1) $$nF = 2A,$$

(2) $$mS = 2A;$$

присоединяя къ этимъ равенствамъ равенство Euler'a

(3) $$A + 2 = F + S,$$

можемъ рѣшить уравненія (1), (2) и (3) относительно трехъ неизвѣстныхъ A, F и S:

(4) $$F = \frac{4m}{2(n+m) - nm}.$$

Разсмотримъ сначала случай $n = 3$, т. е. тотъ случай, когда всѣ грани многогранника треугольники; тогда

$$F = \frac{4m}{6-m};$$

для числа m мы получаемъ три возможныхъ значенія:

$$m = 3, m = 4, m = 5;$$
$$F = 4, F = 8, F = 20.$$

Получаемъ тетраэдръ, октаэдръ и икосаэдръ. Обращаясь къ случаю $n = 4$, т. е. къ тѣлу, ограниченному четыреугольниками, мы получаемъ

$$F = \frac{2m}{4-m};$$

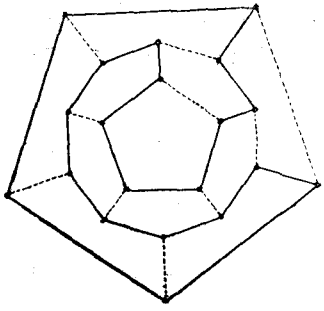
единственный возможный случай получимъ при $m = 3$, $F = 6$; получается гексаэдръ. Наконецъ при $n = 5$, т. е. если тѣло ограничено пятиугольниками мы имѣемъ

$$F = \frac{4m}{10-3m};$$

единственный возможный случай при $m = 3$, $F = 12$; получается додекаэдръ.

§ 9. Мы вошли въ нѣкоторыя подробности относительно вопросовъ, связанныхъ съ теоремой Euler'a о многогранникахъ, въ виду ихъ большой важности. Но къ геометріи положенія относится

очень много вопросовъ аналогичнаго характера, которые часто задавались, какъ математическія развлеченія, и рядъ задачъ, предлагавшихся для испытанія ясности пространственныхъ представленій. Я упомяну о двухъ изъ нихъ; въ первой задачѣ Euler'a, извѣстной подъ именемъ задачи Кенигсбергскихъ мостовъ, разсматривается рядъ мостовъ черезъ отдѣльные рукава дельты нѣкоторой рѣки, причемъ требуется непрерывнымъ движеніемъ обойти всѣ эти мосты, не пройдя дважды ни по одному изъ нихъ; вторая задача, на которую я обращаю вниманіе, есть такъ называемая игра съ додекаэдромъ Hamilton'a. Дѣло идетъ о непрерывномъ обходѣ по ребрамъ додекаэдра такимъ образомъ, чтобы пройти по одному разу черезъ всѣ вершины. Рѣшеніе этой задачи показано на чертежѣ 74.



Черт. 74.

Односторонняя поверхность Möbius'a.

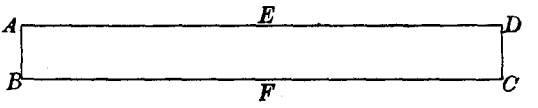
§ 10. Существуетъ два различныхъ вида поверхностей въ трехмѣрномъ пространствѣ: двухсторонніе и односторонніе.

Если мы разсмотримъ, напримѣръ, шаровую поверхность, то мы отличаемъ въ ней двѣ стороны: внѣшнюю и внутреннюю, лицевую и изнанку; если мы разрѣжемъ резиновый мячъ, на которомъ нарисованы красками фигуры, то обнаружимъ его изнанку, которая остается незакрашеной. Möbius обратилъ первый вниманіе на существованіе одностороннихъ поверхностей, т. е. такихъ, относительно которыхъ не можетъ быть установлено различіе между лицевой стороной и изнанкой. Можно по примѣру Möbius'a дать очень простой и наглядный примѣръ односторонней поверхности.

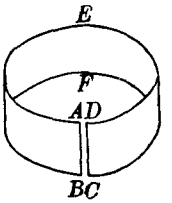
Вырѣжемъ изъ бумаги прямоугольникъ $ABCD$ (черт. 75). Если мы его согнемъ въ цилиндрическое кольцо такъ, что совмѣстимъ D съ A и C съ B, то получимъ обыкновенную цилиндрическую поверхность, имѣющую двѣ стороны. Если же мы воспользуемся гибкостью бумаги и изогнемъ нашу полосу въ такое кольцо, чтобы уголъ D совпалъ съ угломъ B, а C съ A, тогда получится такая поверхность, по которой непрерывнымъ движені-

емъ по лицевой сторонѣ можно попасть на изнанку. Легко убѣдиться еще въ такомъ отличіи поверхности 3 отъ кольца 2. Кольцо 2 имѣетъ двѣ граничныя кривыя, два края AED и BFC, а поверхность 3 имѣетъ только одинъ край $AEDBFCA$.

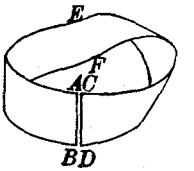
§ 11. Оканчивая нашъ краткій обзоръ геометріи положенія мы должны обратить вниманіе читателя на то обстоятельство, что эта геометрія во второй половинѣ XIX столѣтія получила большое значеніе въ теоріи алгебраическихъ функцій вслѣдствіе весьма важнаго открытія, сдѣланнаго Riemann'омъ. Riemann ввелъ въ разсмотрѣніе при изученіи алгебраическихъ функцій и интеграловъ отъ нихъ особеннаго рода поверхности, носящія названіе Римановыхъ поверхностей. Оказывается, что въ теоріи алгебраическихъ функцій имѣютъ значеніе не сами по себѣ эти поверхности, а лишь такія ихъ свойства, которыя относятся къ геометріи положенія.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

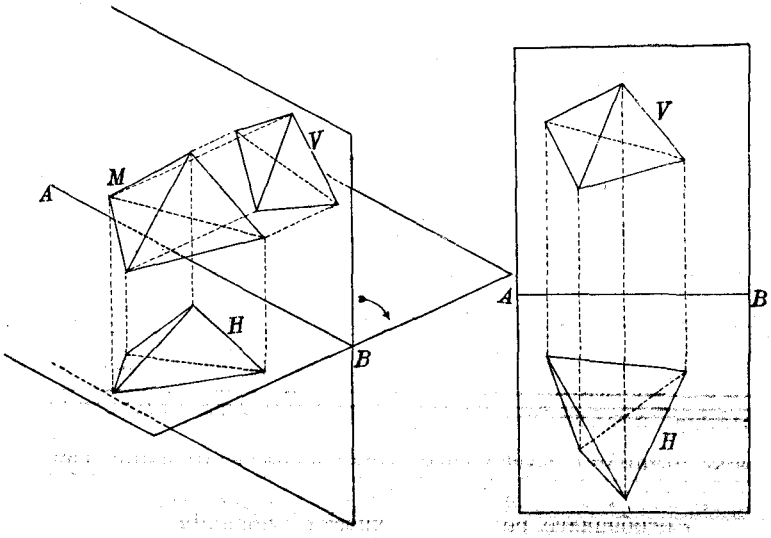
Черт. 75.

Начертательная геометрія.

§ 12. Подъ названіемъ *начертательной геометріи* мы разумѣемъ въ настоящее время пріемы изученія пространственныхъ фигуръ при помощи плоскихъ построеній. Изобрѣтеніе начертательной геометріи принадлежитъ извѣстному математику Monge'у. Основная идея этой геометріи въ высшей степени проста.

Возьмемъ въ пространствѣ двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости (черт. 76 на слѣд. стр.), пересѣкающіяся по прямой AB. Пусть одна изъ нихъ будетъ, напримѣръ, горизонтальна, а другая вертикальна. Возьмемъ въ пространствѣ нѣкоторую фигуру и будемъ проектировать точки этой фигуры на обѣ плоскости при помощи перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ этихъ точекъ на разсматриваемыя плоскости. Мы получимъ двѣ проекціи нашей фигуры M на двухъ

плоскостяхъ: одну проекцію V на вертикальной, а другую H на горизонтальной; назовемъ проекцію V вертикальной проекціей фигуры M, а проекцію H горизонтальной проекціей фигуры M. Откинемъ вертикальную плоскость на горизонтальную при помощи



Фиг. 1. Фиг. 2.

Черт. 76.

поворота на 90° около прямой AB. Тогда у насъ получится фигура 2, причемъ проекціи V и H будутъ находиться уже на одной плоскости. Начертательная геометрія учитъ по виду проекцій V и H, начерченныхъ на одной плоскости, и по ихъ расположенію относительно линіи AB составлять полное представленіе относительно той пространственной фигуры M, которая послужила основаніемъ для построенія проекцій. Мы не будемъ распространяться болѣе подробно о пріемахъ начертательной геометріи, такъ какъ эти пріемы очень просты и непосредственно вытекаютъ изъ той задачи, которую ставитъ себѣ начертательная геометрія.

§ 13. Плоскій чертежъ, представляющій изъ себя совокупность двухъ проекцій, вертикальной и горизонтальной, пространственнаго предмета, носитъ названіе *эпюры*. Въ виду первостепенной важности для техника умѣнья читать эпюры, т. е. переходить отъ разсмотрѣнія эпюры къ тѣмъ пространственнымъ предметамъ, которые онъ изучаетъ, начертательная геометрія является

однимъ изъ самыхъ важныхъ предметовъ преподаванія въ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ и по справедливости носитъ названіе глаза техника.

§ 14. Что касается проектированія пространственныхъ предметовъ на плоскости проекцій, то въ настоящее время въ начертательной геометріи не ограничиваются *ортогональной проекціей*, т. е. проектированіемъ при помощи перпендикуляровъ, а разсматриваютъ самые разнообразные виды проектированія; наиболѣе замѣчательны проектированіе линіями, параллельными между собою, такъ называемая *аксонометрическая проекція*, и проектированіе линіями, выходящими изъ одной точки—*линейная или коническая перспектива*.

Проективная геометрія.

§ 15. Послѣ изобрѣтенія аналитической геометріи было вскорѣ замѣчено, что при всѣхъ своихъ достоинствахъ аналитическій способъ имѣетъ серьезные недостатки, состоящіе въ томъ, что при рѣшеніи геометрическихъ задачъ вводятся трудности вычислительнаго алгебраическаго характера, и часто трудности геометрической задачи такимъ путемъ преувеличиваются. Въ виду этого явилось у математиковъ направленіе, опозиціонное аналитической геометріи, которое выставило тезисомъ необходимость возвращенія къ чисто геометрическимъ методамъ рѣшенія задачъ. Математика этого направленія стремились создать новую, такъ называемую *синтетическую* геометрію, которая, оставаясь въ области чистой геометріи, давала бы общіе методы для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ. Сторонники синтетической геометріи думали возстановить геометрическій анализъ древнихъ грековъ, такъ какъ по нѣкоторымъ сочиненіямъ древне-греческихъ математиковъ, дошедшихъ до насъ въ отрывкахъ, можно было предполагать, что греческіе математики, сдѣлавшіе столько дошедшихъ до насъ открытій въ геометріи, повидимому, обладали нѣкоторыми общими методами изслѣдованія. На такія мысли наводятъ дошедшіе до насъ отрывки книги Эвклида подъ названіемъ „Поризмы“. Особенно большое развитіе синтетическихъ пріемовъ въ геометріи имѣло мѣсто въ XIX столѣтіи, и самымъ яркимъ представителемъ этого направленія былъ французскій математикъ Chasles, написавшій исторію геометріи и выпустившій большую книгу подъ названіемъ „Синтетическая Геометрія“. Въ послѣднее время антагонизмъ между аналитической и синтети-

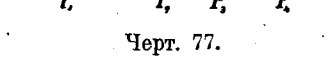
ческой геометріей значительно уменьшился, такъ какъ распространяется все болѣе убѣжденіе о полезности пользованія при рѣшеніи задачъ самыми разнообразными пріемами, будутъ ли они аналитическими или синтетическими. Съ другой стороны выяснилось, что методы синтетической геометріи не такъ разнообразны и приводятъ главнымъ образомъ къ преобразованію фигуръ при помощи перспективы. Въ виду этого въ настоящее время синтетической геометріи даютъ чаще названіе *проективной* геометріи.

§ 16. Начала проективной геометріи относятся уже къ изслѣдованію Appolonius'а о коническихъ сѣченіяхъ. Если мы помѣстимъ точку глаза въ вершинѣ прямого кругового конуса, то коническое сѣченіе окажется перспективой круга основанія конуса на сѣкущей плоскости. Отсюда является одной изъ важныхъ задачъ проективной геометріи вывести свойства коническаго сѣченія изъ свойствъ круга. Чтобы характеризовать въ небольшомъ числѣ словъ задачи проективной геометріи, а также методы, которыми она пользуется, мы дадимъ понятіе о такъ называемомъ *ангармоническомъ или двойномъ отношеніи* четырехъ точекъ на прямой.

Будемъ называть двойнымъ отношеніемъ четырехъ точекъ P_1, P_2, P_3, P_4 (черт. 77) такую формулу:

$$\frac{P_3 P_1}{P_3 P_2} : \frac{P_4 P_1}{P_4 P_2}. \tag{1}$$

При этомъ подъ знакомъ $P_3 P_1$ разумѣется отрѣзокъ, имѣющій началомъ P_3, а концомъ P_1 или же соотвѣтствующее ему число (см. § 16 гл. II). Двойное отношеніе (1) оказывается всецѣло нѣкоторымъ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, могущимъ обращаться въ 0 или въ ∞, судя по тому, обращается ли въ 0 отрѣзокъ, стоящій въ числителѣ или знаменателѣ.



Черт. 77.

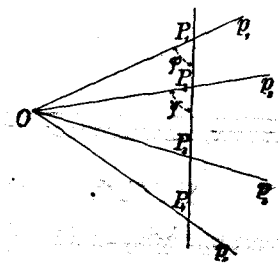
§ 17. Основная теорема проективной геометріи состоитъ въ томъ, что при перспективѣ одной плоской фигуры на другую плоскость двойное отношеніе всякихъ четырехъ точекъ, лежащихъ на прямой, не мѣняется; это обстоятельство иначе выражаютъ словомъ, что двойное отношеніе есть *инваріантъ* перспективнаго преобразованія фигуры. Элементарную планаметрію можно характеризовать, какъ геометрію, изучающую тѣ свойства плоскихъ фигуръ, которыя не мѣняются отъ перемѣщенія фигуръ съ одной

части плоскости на другую; къ числу такихъ не мѣняющихся свойствъ относятся разстоянія между точками, углы, площади и т. д. Проективная же геометрія изучаетъ такія преобразованія, при которыхъ длины и углы могутъ измѣняться, неизмѣннымъ же остается двойное отношеніе.

§ 18. Чтобы проще доказать теорему предыдущаго §-а введемъ въ разсмотрѣніе двойное отношеніе четырехъ лучей Op_1, Op_2, Op_3, Op_4, выходящихъ изъ одной точки O (черт. 78). Подъ двойнымъ отношеніемъ такихъ четырехъ лучей мы разумѣемъ выраженіе:

$$\frac{\sin(p_3 p_1)}{\sin(p_3 p_2)} : \frac{\sin(p_4 p_1)}{\sin(p_4 p_2)},$$

гдѣ подъ знакомъ $(p_3 p_1)$ разумѣется уголъ между лучомъ Op_3 и Op_1, причемъ этотъ уголъ отсчитывается отъ Op_3 въ сторону къ Op_1. Выбирается нѣкоторое положительное направленіе отсчета угловъ, напримѣръ въ сторону движенія часовой стрѣлки, а тогда знакъ угла $(p_3 p_1)$, а значитъ и знакъ соотвѣтствующаго синуса легко узнать.



Черт. 78.

Возьмемъ произвольную сѣкущую прямую P, и пусть точки P_1, P_2, P_3 и P_4 будутъ точками встрѣчи ея съ лучами Op_1, Op_2, Op_3 и Op_4. Покажемъ, что двойное отношеніе четырехъ точекъ P_1, P_2, P_3, P_4 будетъ равно двойному отношенію соотвѣтственныхъ лучей p_1, p_2, p_3, p_4. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{P_3 P_1}{Op_3} = \frac{\sin(p_3 p_1)}{\sin\varphi};$$

$$\frac{P_3 P_2}{Op_3} = \frac{\sin(p_3 p_2)}{\sin\psi};$$

отсюда

$$\frac{P_3 P_1}{P_3 P_2} = \frac{\sin(p_3 p_1)}{\sin(p_3 p_2)} \cdot \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}. \tag{1}$$

Совершенно подобнымъ же образомъ выведемъ изъ треугольниковъ OP_4P_1 и OP_4P_2:

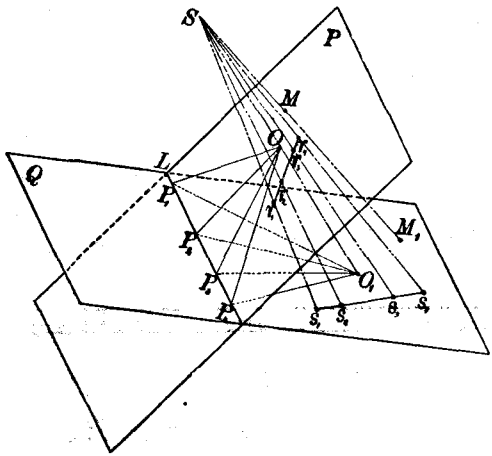
$$\frac{P_4 P_1}{P_4 P_2} = \frac{\sin(p_4 p_1)}{\sin(p_4 p_2)} \cdot \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}. \tag{2}$$

Дѣля почленно равенство (1) на равенство (2) получимъ

$$(3) \qquad \frac{P_3 P_1}{P_3 P_2} : \frac{P_4 P_1}{P_4 P_2} = \frac{sin\,(p_3 p_1)}{sin\,(p_3 p_2)} : \frac{sin\,(p_4 p_1)}{sin\,(p_4 p_2)},$$

что и требовалось доказать.

§ 19. Для доказательства общаго положенія, что при перспективѣ сохраняется двойное отношеніе, представимъ себѣ двѣ плоскости P и Q (черт. 79), пересѣкающіяся по нѣкоторой прямой L. Разсмотримъ нѣкоторый пучекъ четырехъ лучей (1) OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 на плоскости P, имѣющій вершину въ точкѣ O; чтобы получить перспективу этого пучка на плоскости Q, придется взять нѣкоторую точку S пространства за точку глаза. Тогда получимъ, какъ перспективу, такой пучекъ, который имѣетъ вершиной точку O_1 встрѣчи луча SO съ плоскостью Q. Такъ какъ лучи (1) проектируются при помощи плоскостей, выходящихъ изъ точки глаза S, то очевидно, что эти лучи пучка будутъ представлять изъ себя не что иное, какъ лучи (2) $O_1 P_1$, $O_1 P_2$, $O_1 P_3$, $O_1 P_4$ т. е. другими словами лучи (1) заданнаго пучка будутъ встрѣчаться со своими перспективными изображеніями на прямой L. Изъ сказаннаго очевидно, что двойное отношеніе пучка O, лежащаго въ плоскости P, будетъ равняться двойному отношенію перспективнаго пучка O_1 на плоскости Q, такъ какъ оба эти пучка опираются на одну и ту же систему четырехъ точекъ, такъ что двойныя отношенія обоихъ пучковъ равны



Черт. 79.

$$\frac{P_1 P_3}{P_2 P_3} : \frac{P_1 P_4}{P_2 P_4}.$$

§ 20. Совершенно подобнымъ же образомъ мы убѣдимся, что двойное отношеніе четырехъ точекъ r_1, r_2, r_3, r_4, лежащихъ

на прямой въ одной плоскости P (черт. 79), будетъ равно двойному отношенію соотвѣтствующихъ имъ четырехъ точекъ, s_1, s_2, s_3, s_4 на перспективной плоскости Q, потому что оба этихъ двойныхъ отношенія равны двойному отношенію четырехъ проектирующихъ лучей.

§ 21. Разсмотримъ въ плоскости P (черт. 79) нѣкоторую систему координатъ x, y. Подобнымъ же образомъ возьмемъ нѣкоторую другую систему координатъ x_1, y_1 въ плоскости Q. Если мы зададимъ нѣкоторую точку M въ плоскости P ея координатами x и y, то этой точкѣ M будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая опредѣленная перспективная точка M_1 на плоскости Q. Очевидно, что координаты x_1 и y_1 должны быть нѣкоторыми функціями координатъ x и y, т. е.

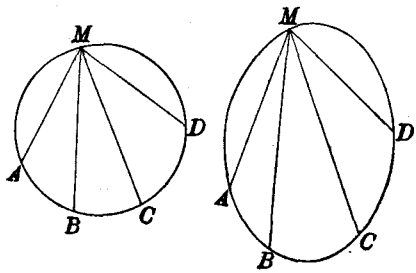
$$x_1 = \varphi(x, y); \; y_1 = \psi(x, y).$$

Разнымъ функціямъ φ и ψ будутъ соотвѣтствовать разные виды изображенія точекъ плоскости P на плоскости Q. Перспективѣ соотвѣтствуютъ слѣдующія выраженія функцій φ и ψ:

$$x_1 = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}; \; y_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma}.$$

§ 22. Особенное значеніе методы проективной геометріи имѣютъ въ приложеніи къ тѣмъ линіямъ, которыя мы называемъ коническими сѣченіями и которыя мы разсматривали въ §§ 71—84 гл. II. Очевидно, что если мы примемъ вершину прямого кругового конуса за точку глаза, то коническое сѣченіе можно разсматривать, какъ перспективу въ сѣкущей плоскости круга основанія конуса. Отсюда является важнымъ получить черезъ проектированіе при помощи перспективы свойства коническихъ сѣченій изъ соотвѣтствующихъ свойствъ круга.

Мы ограничимся здѣсь доказательствомъ одной изъ основныхъ теоремъ проективной теоріи коническихъ сѣченій.



Черт. 80.

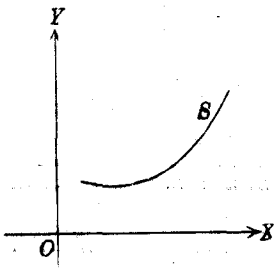
Теорема Chasles'я. *Если заданы четыре точки A, B, C, D (черт. 80) на коническомъ сѣченіи, то гдѣ бы ни была взята пятая точка M на немъ, двойное отношеніе четырехъ лучей MA, MB, MC, MD не мѣняется.*

Если коническое сѣченіе есть кругъ, то неизмѣнность двойного отношенія очевидна, потому что отъ перемѣщенія точки M по кругу углы между лучами MA, MB, MC, MD не мѣняются, а значитъ двойное отношеніе четырехъ лучей не будетъ мѣняться и въ перспективѣ круга, въ произвольномъ коническомъ сѣченіи.

Дифференціальная геометрія.

О касательной и нормали къ кривымъ линіямъ.

§ 23. Пусть нѣкоторая кривая S (черт. 81) отнесена къ прямоугольной системѣ координатъ x, y, причемъ ея уравненіе въ этихъ координатахъ



Черт. 81.

$$(1) \qquad f(x, y) = 0.$$

Рѣшивъ это уравненіе относительно y, можно представить его въ видѣ

$$(2) \qquad y = F(x).$$

Кривая S можетъ быть еще задана третьимъ способомъ. Такъ какъ x въ уравненіи (2) есть перемѣнная независимая, то мы можемъ положить

$$(3) \qquad x = \varphi(t),$$

гдѣ φ произвольно выбранная функція отъ новой перемѣнной независимой t. Подставляя выраженіе (3) для независимой перемѣнной x въ уравненіе (2), получимъ

$$y = F(\varphi(t)),$$

откуда, обозначая функцію $F(\varphi(t))$ черезъ $\psi(t)$, представимъ нашу кривую S въ такъ называемомъ *параметрическомъ* видѣ

$$(4) \qquad \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \varphi(t), \end{aligned}$$

причемъ t есть нѣкоторый *произвольный параметръ*, различнымъ численнымъ значеніямъ котораго соотвѣтствуютъ различныя точки на кривой.

Очень важный частный случай такого параметрическаго представленія (4) кривой встрѣчается въ механикѣ. Тамъ за этотъ параметръ берется время, и считается извѣстнымъ движеніе нѣкоторой точки въ плоскости, если координаты x и y этой точки указаны, какъ функціи отъ времени. Съ измѣненіемъ времени t мѣняются значенія функціи φ и ψ, и точка двигается въ плоскости

по кривой S. Въ этомъ случаѣ кривая S носитъ названіе *траекторіи движенія.*

Какъ на примѣръ параметрическаго представленія кривой, можно указать на уравненіе эллипса

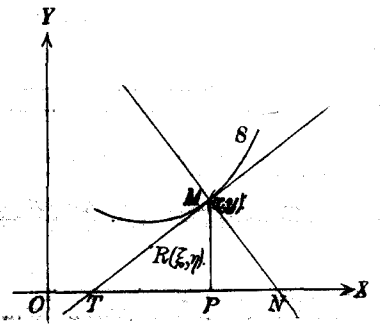
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

которое можно представить въ видѣ такихъ двухъ параметрическихъ уравненій:

$$(5)\qquad \begin{aligned} x &= a\cos t,\\ y &= b\sin t. \end{aligned}$$

Исключая параметръ t изъ двухъ уравненій (4) мы возвращаемся къ первоначальному уравненію (1) линіи S.

§ 24. Проведемъ касательную къ кривой S въ точкѣ M (черт. 82), соотвѣтствующей ординатѣ PM; если мы продолжимъ эту касательную до пересѣченія въ точкѣ T съ осью x-овъ, то отрѣзокъ MT носитъ названіе *длины касательной*, а отрѣзокъ TP называется *подкасательной.* Если мы въ точкѣ M касанія проведемъ перпендикуляръ MN къ касательной, то этотъ перпендикуляръ носитъ названіе *нормали* кривой S въ точкѣ M. Если мы обозначимъ черезъ N точку встрѣчи нормали съ осью x-овъ, то отрѣзокъ MN будетъ называться *длиною нормали*, а отрѣзокъ PN *поднормалью.*



Черт. 82.

§ 25. Напишемъ теперь уравненіе касательной къ кривой S, заданной уравненіемъ

$$(1)\qquad y=F(x),$$

причемъ за точку касанія возьмемъ нѣкоторую точку x_0, y_0 этой кривой.

Касательная, какъ прямая, проходящая черезъ точку x_0, y_0, будетъ имѣть уравненіе (§ 43 гл. II)

$$(2)\qquad y-y_0=m(x-x_0).$$

На основаніи соображеній § 84 гл. III угловой коэффиціентъ m, какъ тангенсъ угла касательной съ осью x-овъ долженъ равняться значенію производной

$$m = F'(x_0),$$

и мы получаемъ такое уравненіе касательной

$$y - y_0 = F'(x_0)(x - x_0),$$

или окончательно

(3) $$y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0).$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что коэффиціенты уравненія касательной заключаютъ одинъ произвольный параметръ x_0, представляющій абсциссу точки касанія. Если мы будемъ мѣнять этотъ параметръ, то коэффиціенты уравненія (3) будутъ мѣняться, прямая (3) будетъ перемѣщаться по плоскости, оставаясь постоянно касательной къ кривой S, или, какъ говорятъ, эта прямая будетъ *огибать* кривую S.

Будемъ перемѣнный параметръ x_0 обозначать черезъ x, а соотвѣтствующую ему координату y_0 черезъ y; вмѣсто x и y въ уравненіи (3) возьмемъ какія нибудь другія обозначенія, напримѣръ ξ и η; уравненіе касательной приметъ видъ

(4) $$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$$

или иначе

(5) $$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy}.$$

Очевидно, что при выбранныхъ нами обозначеніяхъ координаты x и y соотвѣтствуютъ точкѣ касанія и удовлетворяютъ уравненію кривой (1), а ξ и η суть координаты какой нибудь точки R на касательной, причемъ не указывается, какой именно.

§ 26. Если уравненія линіи S, заданной въ параметрическомъ видѣ,

$$x = \varphi(t), y = \psi(t),$$

тогда уравненіе касательной можно будетъ написать въ такомъ видѣ:

(1) $$\frac{\xi - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\eta - \psi(t)}{\psi'(t)}.$$

Для того, чтобы получить уравненіе касательной для общаго случая заданія кривой уравненіемъ $f(x, y) = 0$, будемъ дифференцировать это уравненіе; получаемъ

$$f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy = 0.$$

Мы получимъ уравненіе касательной, если изъ послѣдняго уравненія исключимъ дифференціалы dx, dy при помощи уравненія

(5) предыдущаго §-а. Получаемъ окончательное уравненіе касательной

(2) $$f'_x(x, y)(\xi - x) + f'_y(x, y)(\eta - y) = 0.$$

Въ послѣднемъ уравненіи входятъ два перемѣнныхъ параметра x и y. Но не надо забывать, что произвольнымъ остается только одинъ, потому что между этими параметрами существуетъ соотношеніе $f(x, y) = 0$, представляющее уравненіе кривой.

§ 27. Послѣ того, какъ указаны правила для составленія уравненія касательной, уравненіе нормали пишется, какъ уравненіе перпендикуляра къ касательной. Въ самомъ дѣлѣ, пусть уравненіе къ касательной написано въ такомъ видѣ:

(1) $$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x).$$

Уравненіе нормали, какъ прямой, проходящей черезъ точку (x, y) касанія, напишется такъ:

(2) $$\eta - y = m(\xi - x).$$

Угловой коэффиціентъ m нормали надо будетъ опредѣлить изъ условія перпендикулярности прямыхъ (1) и (2), т. е. изъ условія (§ 42, гл. II)

$$1 + m\frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда

$$m = -\frac{dx}{dy},$$

и мы получаемъ уравненіе нормали:

(3) $$dx(\xi - x) + dy(\eta - y) = 0.$$

Для параметрическаго вида уравненій кривой, уравненіе (3) принимаетъ видъ

$$\varphi'(t)[\xi - \varphi(t)] + \psi'(t)[\eta - \psi(t)] = 0,$$

и, наконецъ, для общаго вида уравненія $f(x, y) = 0$ кривой получаемъ уравненіе нормали

$$\frac{\xi - x}{f'_x(x, y)} = \frac{\eta - y}{f'_y(x, y)}.$$

§ 28. Составимъ теперь выраженіе для подкасательной и поднормали. Такъ какъ точка T (черт. 82), для которой $\eta = 0$, лежитъ на касательной, то очевидно, что подкасательная равна разности $x - \xi$ между абсциссой x точки касанія и абсциссой ξ точки T.

Подставляя поэтому $\eta = 0$ въ уравненіе (1) предыдущаго §-а получимъ для подкасательной $(x - \xi)$ выраженіе

$$\frac{ydx}{dy}. \tag{1}$$

Совершенно подобнымъ же образомъ выраженіе для поднормали получится, какъ разность $(\xi - x)$, взятая изъ уравненія (3) нормали послѣ подстановки въ него $\eta = 0$.

Мы получаемъ для поднормали выраженіе

$$\frac{ydy}{dx}. \tag{2}$$

§ 29. Длины касательной и нормали мы получимъ, какъ гипотенузы треугольниковъ TMP и PMN, имѣющихъ общимъ катетомъ ординату y. Получаемъ для длины касательной выраженіе

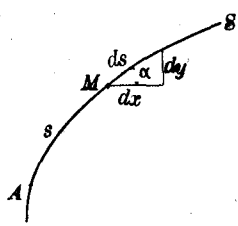
$$\sqrt{y^2 + y^2 \frac{dx^2}{dy^2}} = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}},$$

а для длины нормали выраженіе

$$\sqrt{y^2 + y^2 \frac{dy^2}{dx^2}} = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Дифференціалъ дуги.

§ 30. Возьмемъ на кривой S (черт. 83) нѣкоторую точку A за начало счета дугъ, причемъ длину дуги AM обозначимъ черезъ s. Будемъ считать дугу положительною въ одномъ какомъ нибудь опредѣленномъ направленіи по разсматриваемой кривой S. Тогда при прямоугольной системѣ координатъ мы получаемъ



Черт. 83.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{1}$$

гдѣ ds есть дифференціалъ дуги, а dx и dy суть дифференціалы координатъ. Отсюда

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Знакъ передъ корнемъ не можетъ быть указанъ до тѣхъ поръ, пока не указана та независимая перемѣнная, при измѣненіи которой конецъ дуги M перемѣщается по кривой. Если же перемѣнная независимая указана, такъ что

$$x = \varphi(t), y = \psi(t),$$

то получаемъ

$$dx = \varphi'(t)\,dt, dy = \psi'(t)\,dt,$$

откуда

(2) $$ds = \pm\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,dt.$$

Очевидно, что въ послѣдней формулѣ надо будетъ поставить знакъ плюсъ въ томъ случаѣ, если съ возрастаніемъ перемѣнной t дуга возрастаетъ, и знакъ минусъ въ обратномъ случаѣ.

Черезъ интегрированіе получаемъ изъ формулы (2) слѣдующее выраженіе для конечной дуги кривой:

$$s = \int \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,dt.$$

§ 31. Если α будетъ обозначать уголъ, составляемый касательною въ точкѣ M съ осью x-овъ то мы получаемъ

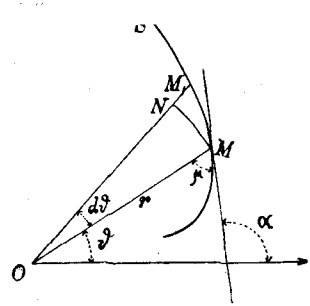
(1) $$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

Касательныя въ полярныхъ координатахъ.

§ 32. Пусть кривая линія S **(черт. 84) задана уравненіемъ**

(1) $$r = f(\vartheta)$$

въ полярныхъ координатахъ r и ϑ. При этихъ координатахъ удобнѣе вычислять уголъ μ касательной съ радіусомъ векторомъ $r = OM$. Дадимъ полярному углу ϑ приращеніе $d\vartheta$, тогда получаемъ новый радіусъ векторъ OM_1. Если мы проведемъ дугу MN круга, имѣющаго центръ O и радіусъ, равный r, то отрѣзокъ NM_1 будетъ приращеніемъ радіуса r, т. е. dr. Дуга NM круга, равная углу, помноженному на радіусъ, выразится черезъ $rd\vartheta$.



Черт. 84.

Такъ какъ намъ придется разсматривать предѣлъ отношенія двухъ безконечно малыхъ, то мы имѣемъ право откидывать безконечно малыя высшаго порядка, причемъ приращенія замѣнять дифференціалами съ одной стороны, а съ другой стороны криволинейный треугольникъ MNM_1 при очень малыхъ значеніяхъ $d\vartheta$

считать за прямолинейный съ прямымъ угломъ при точкѣ N, причемъ для дифференціала дуги s мы получимъ формулу

(2) $$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\vartheta^2.$$

Далѣе мы получаемъ

$$tg\,\mu = lim\, tg\, NM_1 M = lim \frac{NM}{NM_1} = \frac{rd\vartheta}{dr},$$

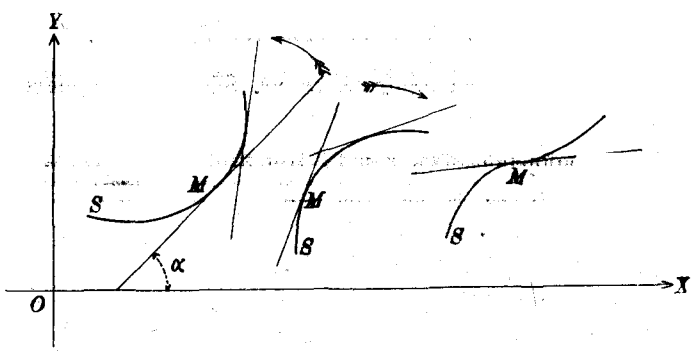
откуда получаемъ такую формулу:

$$tg\mu = \frac{rd\vartheta}{dr};$$

послѣдняя формула даетъ возможность вычислять уголъ μ, образованный касательною съ радіусомъ векторомъ.

О выпуклости и вогнутости линій.

§ 33. Будемъ разсматривать прямоугольную систему координатъ (черт. 85); будемъ перемѣщать точку касанія вдоль по ли-



Черт. 85.

ніи S при помощи увеличенія абсциссы x этой точки касанія. Тогда можетъ произойти одно изъ трехъ: 1) или уголъ α касательной съ осью x-овъ будетъ возрастать, 2) или этотъ уголъ будетъ убывать, 3) или происходитъ при точкѣ M смѣна возрастанія убываніемъ или обратно.

Въ первомъ случаѣ говорятъ, что *вогнутость* линіи S около точки касанія M обращена въ сторону положительныхъ y-овъ, а *выпуклость*—въ сторону отрицательныхъ y-овъ.

Во второмъ случаѣ происходитъ обратное явленія, а именно вогнутость обращена въ сторону отрицательныхъ y-овъ.

въ третьемъ случаѣ при точкѣ M происходитъ такъ называемый перегибъ линіи, и точка M носитъ названіе *точки перегиба*.

§ 34. Если мы хотимъ узнать по виду уравненія $y=f(x)$, который изъ трехъ вышеприведенныхъ случаевъ имѣетъ мѣсто, то найдется разсмотрѣть формулу $tg\alpha = y'$, откуда

$$\alpha = arctg\, y'.$$

Дифференцируя по x, получаемъ

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2}.$$

Если вогнутость обращена въ сторону положительныхъ y-овъ, то уголъ α долженъ быть возрастающей функціей отъ x. Подобный случай будетъ имѣть мѣсто, когда производная $\frac{d\alpha}{dx}$ положительна, т. е. когда $y''>0$.

Подобнымъ же образомъ мы замѣчаемъ, что при неравенствѣ $y''<0$ вогнутость обращена въ сторону отрицательныхъ y-овъ.

Точки перегиба могутъ получаться, конечно, въ случаѣ $y''=0$, когда производная $\frac{d\alpha}{dx}$ мѣняетъ свой знакъ, проходя черезъ 0.

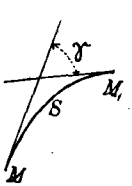
О кривизнѣ линій.

§ 35. Понятіе о кривизнѣ линій принадлежитъ къ числу первоначальныхъ. Изъ жизненнаго опыта мы устанавливаемъ представленіе о томъ, когда одну линію можно считать имѣющей меньшую кривизну, чѣмъ другая. Въ математикѣ является вопросъ лишь объ установленіи мѣры кривизны, т. е. другими словами о сопоставленіи всякой точкѣ M кривой нѣкотораго числа k, которое мы будемъ считать за мѣру кривизны кривой S въ точкѣ M.

§ 36. Если мы разсмотримъ дугу MM_1 кривой S (черт. 86), то уголъ γ между касательными въ ея концахъ мы будемъ называть *полной кривизной* дуги S. Отношеніе

$$\frac{\gamma}{\smile MM_1}$$

полной кривизны къ длинѣ самой дуги носитъ названіе *средней кривизны дуги*.



Черт. 86.

При одномъ и томъ же углѣ γ средняя кривизна той дуги будетъ меньше, длина которой будетъ больше. Это вполнѣ соот-

вѣтствуетъ обычному представленію о кривизнѣ, ибо тѣмъ меньше будетъ кривизна линіи въ обычномъ смыслѣ слова, чѣмъ на большемъ протяженіи дуги происходитъ данное отклоненіе касательной. Обратно, при одной и той же длинѣ дуги кривизна будетъ тѣмъ больше, чѣмъ на бо́льшій уголъ γ касательная отклоняется. Поэтому, является вполнѣ естественнымъ опредѣлить среднюю кривизну дуги какъ число, прямо пропорціональное отклоненію касательной и обратно пропорціональное длинѣ дуги.

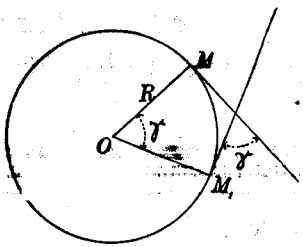
§ 37. Если мы будемъ точку M_1 приближать къ точкѣ M по кривой S, то естественно разсматривать предѣлъ

$$k = lim \frac{\gamma}{\smile MM_1}.$$

Этотъ предѣлъ k и носитъ названіе *кривизны линіи S въ точкѣ M.*

§ 38. Примѣнимъ приведенное понятіе о кривизнѣ къ случаю круга радіуса R.

Возьмемъ (черт. 87) на кругѣ нѣкоторую точку M и безконечно близкую къ ней точку M_1. Очевидно, что уголъ γ между касательной будетъ равняться углу между радіусами OM и OM_1; мы получаемъ



Черт. 87.

$$\smile MM_1 = \gamma R,$$

откуда для средней кривизны круга получаемъ

$$\frac{\gamma}{\smile MM_1} = \frac{1}{R},$$

т. е. средняя кривизна дугъ круга есть величина постоянная, а значитъ постоянною будетъ кривизна круга въ каждой его точкѣ, и мы получаемъ

$$k = \frac{1}{R}. \tag{1}$$

§ 39. Обращаемся теперь къ нахожденію кривизны для произвольной кривой.

Возьмемъ нѣкоторую опредѣленную точку M этой кривой. Пусть ея абсцисса будетъ x. Дадимъ этой абсциссѣ приращеніе dx; тогда уклоненіе касательной, соотвѣтствующее дугѣ ds, будетъ равняться $d\alpha$, гдѣ α выражается по формулѣ.

$$\alpha = arc\,tg\,y'.$$

Приращеніе $d\alpha$ угла α касательной съ осью x-овъ называютъ *угломъ смежности*. Мы видимъ слѣдовательно, что кривизна линіи S въ точкѣ M будетъ выражаться по формулѣ

$$k = \frac{d\alpha}{ds}, \tag{1}$$

т. е. будетъ равна углу смежности, дѣленному на дифференціалъ дуги.

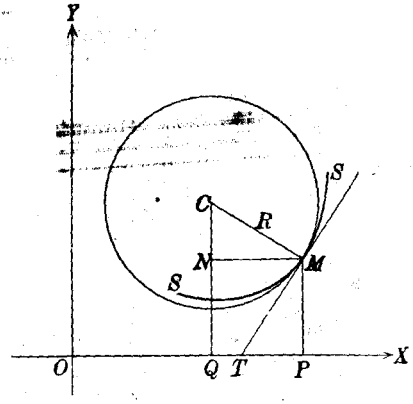
Для удобства вычисленія можно формулу (1) преобразовать такимъ образомъ:

$$k = \frac{d\,arc\,tg\,y'}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{(arc\,tg\,y')'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

О кругѣ кривизны.

§ 40. Построимъ (черт. 88) кругъ, обладающій слѣдующими свойствами: 1) онъ проходитъ черезъ точку M кривой S; 2) онъ имѣетъ съ кривою S общую касательную, такъ что его центръ C находится на нормали точки M; 3) этотъ кругъ имѣетъ кривизну, равную кривизнѣ кривой S въ точкѣ M.

Построенный такимъ образомъ кругъ называется *кругомъ кривизны*, соотвѣтствующимъ точкѣ M. Его радіусъ носитъ названіе *радіуса кривизны* кривой S въ точкѣ M. Центръ C круга кривизны носитъ названіе *центра кривизны*.



Черт. 88.

§ 41. На основаніи вышеизложеннаго легко вычислить радіусъ кривизны и координаты X, Y центра кривизны C. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая радіусъ кривизны черезъ R, получаемъ его выраженіе, если сравнимъ кривизну $\frac{1}{R}$ круга съ кривизной (2) предыдущаго §-а.

$$(1) \qquad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

§ 42. Что касается координатъ X, Y центра кривизны, то мы имѣемъ изъ чертежа 88

$$(1) \qquad \begin{aligned} X &= OQ = OP - QP = x - R\sin\alpha \\ Y &= QC = PM + NC = y + R\cos\alpha. \end{aligned}$$

Припоминая съ одной стороны формулу $R = \frac{ds}{d\alpha}$, а съ другой стороны формулы (1) §-а 31, получаемъ окончательно слѣдующія выраженія для координатъ центра кривизны:

$$(2) \qquad X = x - \frac{dy}{d\alpha}; \quad Y = y + \frac{dx}{d\alpha}.$$

Эти формулы даютъ возможность выразить черезъ перемѣнный параметръ t координаты X и Y. Получается параметрическое представленіе линіи геометрическаго мѣста центровъ кривизны. Эта линія, опредѣляемая уравненіями

$$X = \Phi(t), \; Y = \Psi(t),$$

носитъ названіе *эволюты* заданной кривой S. Эволюта Σ (черт. 89) обладаетъ весьма важными свойствами, о которыхъ слѣдуетъ упомянуть.

Первое свойство. Нормаль заданной кривой есть касательная къ эволютѣ. Будемъ диффѣренцировать формулу (1) предыдущаго §-а.

$$dX = dx - \cos\alpha\, R\, d\alpha - \sin\alpha\, dR = ds\cos\alpha - \cos\alpha\, R\, d\alpha - \sin\alpha\, dR,$$
$$dY = dy - \sin\alpha\, R\, d\alpha + \cos\alpha\, dR = ds\sin\alpha - \sin\alpha\, R\, d\alpha + \cos\alpha\, dR,$$

откуда окончательно

$$(2) \qquad dX = -\sin\alpha\, dR, \; dY = \cos\alpha\, dR.$$

Легко убѣдиться, что изъ формулы (2) вытекаетъ, какъ слѣдствіе, тождество

$$(3) \qquad dx\, dX + dy\, dY = 0,$$

выражающее справедливость высказанной теоремы, ибо

$$dx = ds\cos\alpha, \text{ а } dy = ds\sin\alpha.$$

Тождество (3) выражаетъ условіе перпендикулярности (см. § 41 гл. II) касательной къ эволютѣ и касательной къ заданной кривой.

Второе свойство. Разность радіусовъ кривизны двухъ точекъ данной кривой равна дугѣ эволюты, заключающейся между этими радіусами.

Возвышая въ квадратъ и складывая равенства (2), получаемъ:

$$dX^2 + dY^2 = dR^2,$$

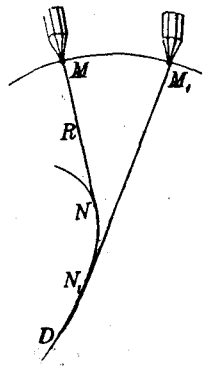
откуда

$$ds^2 = dR^2, \tag{4}$$

гдѣ s есть длина дуги эволюты, отсчитываемая отъ нѣкоторой точки D. Изъ равенства (4) получаемъ $ds = \pm dR$, откуда, интегрируя, получаемъ

$$s = \pm R + C, \tag{5}$$

гдѣ C—постоянная, вводимая интегрированіемъ. Примѣняя формулу (5) къ двумъ дугамъ DN и DN_1 эволюты, получаемъ



Черт. 89.

$$\smile DN = \pm NM + C, \quad \smile DN_1 = + N_1 M_1 + C,$$

откуда, вычитая, получимъ

$$\smile DN - \smile DN_1 = \pm (NM - N_1 M_1)$$

или окончательно

$$\smile NN_1 = \pm (NM - N_1 M_1),$$

что и требовалось доказать.

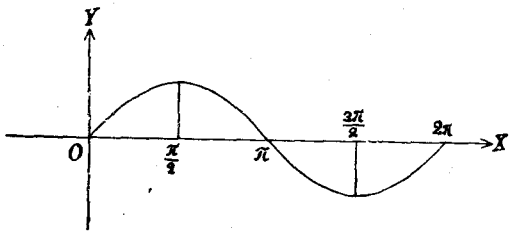
На послѣднемъ свойствѣ эволюты основанъ механическій способъ черченія заданной кривой, когда извѣстна ея эволюта. Закрѣпивъ въ нѣкоторой точкѣ D (черт. 89) эволюты нерастяжимую нить, наматываемъ ее на эволюту до нѣкоторой точки N, остальную же часть нити натягиваемъ по касательной NM. Въ нѣкоторой точкѣ M свободной части нити укрѣпляемъ карандашъ. Если мы поведемъ карандашъ такимъ образомъ, чтобы нить, оставаясь натянутой, сматывалась съ эволюты, то карандашъ опишетъ заданную кривую. Въ виду сказаннаго заданная кривая носитъ названіе *развертки* или *эвольвенты* по отношенію къ эволютѣ.

Синусоида.

§ 43. Разсмотримъ кривую, опредѣляемую уравненіемъ

$$y = \sin x.$$

Эта кривая есть трансцендентная, она носитъ названіе *синусоиды* и прилагается въ физикѣ при разсмотрѣніи гармоническихъ колебаній.



Черт. 90.

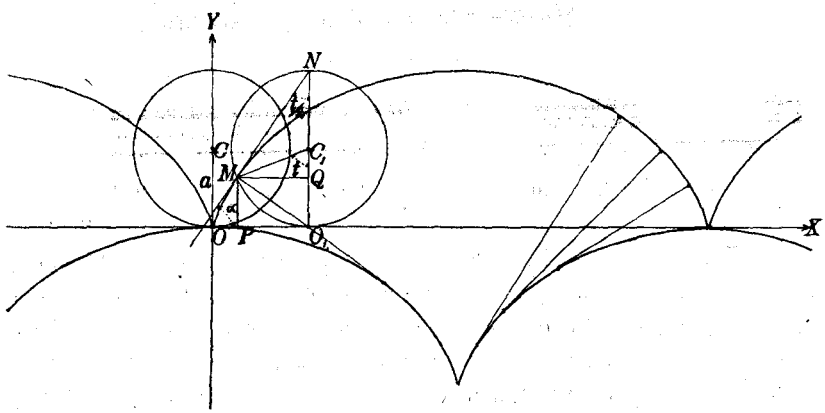
На чертежѣ 90 указанъ видъ этой линіи. Такъ какъ имѣетъ мѣсто равенство

$$y'' = -\sin x,$$

то опредѣляются точки перегиба по уравненію $\sin x = 0$, откуда получается безчисленное множество точекъ перегиба, опредѣляемыхъ равенствомъ $x = k\pi$, гдѣ k произвольное цѣлое число.

Циклоида.

§ 44. ***Циклоидой*** называется кривая, образуемая движеніемъ какой либо точки окружности круга даннаго радіуса a, катящагося безъ скольженія по данной прямой. Примемъ данную прямую за ось x-овъ. Возьмемъ за начало координатъ точку O (черт. 91) каса-



Черт. 91.

нія катящагося круга въ тотъ моментъ, когда съ этой точкой касанія совпадаетъ описывающая циклоиду точка, за движеніемъ которой мы будемъ слѣдить. Возьмемъ за ось y-овъ радіусъ OC, гдѣ C есть центръ круга. Предположимъ, что разсматриваемый

кругъ, прокатившись по оси x-овъ, занялъ новое положеніе O_1MN, причемъ O_1 новая точка касанія круга, M обозначаетъ положеніе на новомъ кругѣ точки, описывающей циклоиду, N есть точка, діаметрально противоположная точкѣ касанія.

Обозначимъ черезъ t уголъ, образованный радіусомъ MC_1 съ вертикальнымъ радіусомъ C_1O_1, тогда условіе каченія безъ скольженія состоитъ въ томъ, что дуга MO_1 круга должна равняться длинѣ OO_1, т. е., другими словами, точка касанія должна пройти одинаковыя длины по прямой и по кругу. Мы получаемъ, слѣдовательно

(1) $$OO_1 = \smile MO_1 = at.$$

Прямоугольныя координаты x, y точки M найдутся по формуламъ

$$x = OP = OO_1 - PO_1 = OO_1 - MQ = a\,t - a \sin t,$$
$$y = PM = C_1O_1 - C_1Q = a - a \cos t.$$

Итакъ, получаются слѣдующія параметрическія уравненія циклоиды

(2) $$x = a\,(t - \sin t),$$
$$y = a\,(1 - \cos t).$$

Для построенія касательной дифференцируемъ формулы (2); получаемъ

(3) $$dx = a\,(1 - \cos t)\,dt,$$
$$dy = a \sin t\,dt.$$

Отсюда

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = cotg\ \frac{t}{2},$$

а слѣдовательно

(4) $$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}.$$

Эта формула даетъ простое построеніе касательной для циклоиды; оказывается, касательная проходитъ черезъ верхнюю точку круга, ибо

$$\angle\, MNO_1 = \frac{t}{2}.$$

Очевидно, что нормаль циклоиды проходитъ черезъ точку касанія.

§ 45. Для вычисленія радіуса кривизны циклоиды замѣтимъ, что этотъ радіусъ выражается по формулѣ

$$R = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Дифференціалъ $d\alpha$ можно вычислить, дифференцируя формулу (4) предыдущаго §-а; получаемъ

$$d\alpha = -\frac{dt}{2}.$$

Отсюда радіусъ кривизны вычислится по формулѣ

$$R = \frac{2\,ds}{dt}.$$

Знакъ — минусъ можно опустить, ибо дифференціалъ ds имѣетъ, какъ корень квадратный, два знака, и, слѣдовательно, окончательно придется выбрать у дифференціала ds тотъ знакъ, который даетъ для выраженія R значеніе положительное. Получаемъ далѣе:

$$R = \frac{2\,ds}{dt} = 2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} =$$

$$= 2\,a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = 4\,a \sin\frac{t}{2} = 2\,MO_1.$$

Итакъ, мы приходимъ къ теоремѣ, что радіусъ кривизны циклоиды равенъ удвоенной нормали. Покажемъ, что эволюта циклоиды будетъ также циклоидой, только иначе расположенной. Мы видѣли уже, что эволюта опредѣляется уравненіями

$$X = x - \frac{dy}{d\alpha},\ Y = y + \frac{dx}{d\alpha},$$

или иначе

$$X = x + 2\frac{dy}{dt},\ Y = y - 2\frac{dx}{dt}.$$

Получаемъ

$$X = a(t - \sin t) + 2\,a \sin t = a(t - \sin t),$$
$$Y = a(1 - \cos t) - 2\,a(1 - \cos t) = -a(1 - \cos t).$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что, дѣйствительно, эволюта есть такая же циклоида, только расположенная такъ, какъ показано на чертежѣ.

Спираль Архимеда.

§ 46. *Спиралью Архимеда* называется кривая линія, опредѣляемая въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ

$$r = a\vartheta. \tag{1}$$

Кривая выходитъ изъ полюса O (черт. 92), въ которомъ она касается полярной оси, и описываетъ вокругъ полюса безчисленное множество завитковъ съ увеличивающимся до безконечности радіусомъ векторомъ. Для построенія касательной придется вычислить уголъ μ по формулѣ

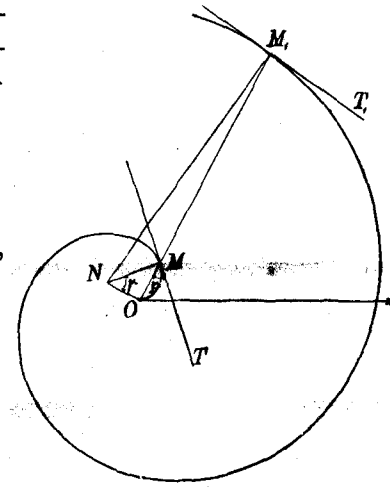
$$tg\,\mu = \frac{r\,d\vartheta}{dr};$$

но, дифференцируя уравненіе (1), получаемъ

$$dr = a\,d\vartheta,$$

слѣдовательно

$$tg\,\mu = \frac{r}{a} = \vartheta.$$



Черт. 92.

Проведемъ черезъ полюсъ O прямую ON, перпендикулярную къ радіусу вектору OM, равному r, до встрѣчи въ точкѣ N съ нормалью NM къ кривой. ON носитъ названіе *полярной поднормали*. Легко убѣдиться, что эта поднормаль есть величина постоянная для спирали Архимеда.

Въ самомъ дѣлѣ

$$ON = \frac{r}{tg\,\mu} = \frac{r\,dr}{r\,d\vartheta} = \frac{dr}{d\vartheta} = a.$$

Постоянство поднормали даетъ простой способъ построенія касательной къ спирали Архимеда.

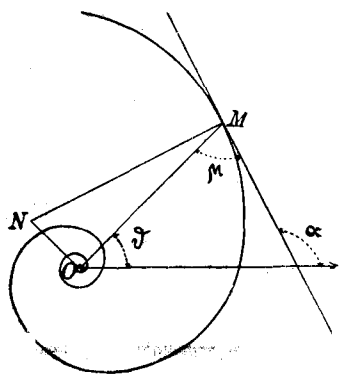
Логариѳмическая спираль.

§ 47. Названіе *логариѳмической спирали* (черт. 93) Iohann Bernoulli далъ кривой, опредѣляемой въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ:

$$r = e^{m\vartheta}.$$

Для построенія касательной находимъ уголъ μ

$$tg\,\mu = \frac{r d\vartheta}{dr} = \frac{e^{m\vartheta} d\vartheta}{m e^{m\vartheta} d\vartheta} = \frac{1}{m}.$$



Черт. 93.

Итакъ, мы видимъ, что касательная къ логариѳмической спирали составляетъ постоянный уголъ μ съ радіусомъ-векторомъ. Легко убѣдиться, что радіусъ кривизны логариѳмической спирали равенъ длинѣ *полярной нормали* $MN\,(ON \perp OM)$. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$R = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Изъ чертежа имѣемъ: $\alpha = \vartheta + \mu$, откуда $d\alpha = d\vartheta$, ибо число постоянное; отсюда

$$R = \frac{ds}{d\vartheta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2} = \sqrt{OM^2 + ON^2} = MN.$$

Очевидно, что полярное уравненіе эволюты, т. е. геометрическаго мѣста центра кривизны N, будетъ опредѣляться координатами

$$r_1 = ON, \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} + \vartheta;$$

Но $ON = \frac{dr}{d\vartheta} = m\,e^{m\vartheta}$; отсюда получаемъ полярное уравненіе эволюты

(1) $$r_1 = m\,e^{m\left(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Легко убѣдиться, что эволюта логариѳмической спирали оказывается новой логариѳмической спиралью, которая можетъ быть совмѣщена съ заданной простымъ поворотомъ на нѣкоторый уголъ. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (1) можно написать такъ:

$$r_1 = e^{m\left(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2}\right) + lg\, m},$$

стоитъ только положить

$$m\left(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2}\right) + lg\, m = m\,\vartheta',$$

какъ уравненіе (1) обратится въ слѣдующее:

(2) $$r_1 = e^{m\vartheta'}.$$

Легко видѣть, что зависимость (2) представляетъ изъ себя простой поворотъ полярной оси на нѣкоторый уголъ, ибо мы имѣемъ

$$\vartheta_1 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{m} lg\, m = \vartheta'.$$

На могилѣ I. Bernoulli изображена логариѳмическая спираль, открытію свойствъ которой онъ придавалъ значеніе.

Поверхности и кривыя въ пространствѣ.

§ 48. Мы видѣли уже въ § 56 гл. II, что уравненіе вида

(1) $$f(x, y, z) = 0$$

между прямоугольными координатами x, y и z опредѣляетъ нѣкоторую поверхность въ пространствѣ. Рѣшивъ уравненіе (1) относительно одной изъ координатъ, напримѣръ относительно z, мы получимъ выраженіе этой координаты въ видѣ функціи отъ двухъ остальныхъ, что можно будетъ выразить уравненіемъ

(2) $$z = F(x, y).$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что поверхность опредѣляется всегда такъ, что остаются произвольными нѣкоторые два параметра, въ данномъ случаѣ координаты x и y. Самый общій видъ параметрическаго опредѣленія поверхности произойдетъ тогда, когда мы независимыя перемѣнныя x, y представимъ въ видѣ произвольныхъ функцій отъ двухъ параметровъ u, v, такъ что

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v).$$

Подставляя послѣднія выраженія въ уравненіе (2), мы выразимъ z черезъ параметры u и v. Въ самомъ дѣлѣ

$$z = F[\varphi(u, v), \psi(u, v)] = \omega(u, v),$$

гдѣ черезъ ω обозначенъ результатъ подстановки.

Резюмируя сказанное, мы видимъ, что получается нѣкоторая поверхность, если три координаты x, y, z заданы, какъ функціи отъ двухъ параметровъ u, v:

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \omega(u, v). \tag{3}$$

Уравненіе поверхности въ декартовыхъ координатахъ получается черезъ исключеніе изъ трехъ уравненій (3) двухъ параметровъ u, v.

§ 49. Линія въ пространствѣ задается, какъ пересѣченіе двухъ поверхностей, т. е. двумя уравненіями

$$f(x, y, z) = 0, f_1(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Если мы рѣшимъ эти два уравненія относительно y, z, то получимъ уравненія линіи въ такомъ видѣ:

$$y = F(x), z = F_1(x). \tag{2}$$

Полагая координату x произвольной функціей отъ нѣкотораго параметра t, т. е. $x = \varphi(t)$ и подставляя это выраженіе въ уравненія (2), получимъ двѣ другія координаты y, z, какъ функціи отъ параметра t. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ параметрическому представленію линіи въ пространствѣ:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t). \tag{3}$$

О касательной къ линіи въ пространствѣ.

§ 50. Возьмемъ на кривой нѣкоторую точку x, y, z, соотвѣтствующую нѣкоторому значенію t параметра. Дадимъ параметру t приращеніе Δt. Тогда получимъ новую точку на кривой, имѣющую приращенныя координаты $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$.

Уравненія сѣкущей, проведенной черезъ двѣ вышеуказанныя точки, можно будетъ написать такъ (§ 45 гл. II):

$$\frac{\xi - x}{(x + \Delta x) - x} = \frac{\eta - y}{(y + \Delta y) - y} = \frac{\zeta - z}{(z + \Delta z) - z},$$

гдѣ ξ, η, ζ — координаты произвольной точки на сѣкущей. Раздѣляя всѣ знаменатели на Δt, получимъ

$$\frac{\xi - x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\eta - y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Подводя приращеніе Δt къ нулю, получимъ слѣдующія уравненія касательной:

$$(1) \qquad \frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Обозначивъ черезъ α, β, γ углы этой касательной съ осями координатъ, мы получимъ на основаніи соображеній § 44 гл. II слѣдующія пропорціи:

$$(2) \qquad \frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz},$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dx}{ds},$$

$$(3) \qquad \cos\beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dy}{ds},$$

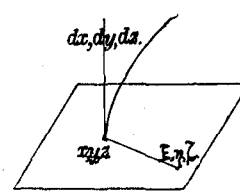
$$\cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dz}{ds},$$

гдѣ s обозначаетъ дугу разсматриваемой кривой, ибо формула (1) § 30 обобщается для пространства въ такомъ видѣ:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

§ 51. Если мы проведемъ черезъ точку касанія касательной плоскость, перпендикулярную къ этой касательной (черт. 94), то очевидно, что уравненіе этой плоскости будетъ имѣть видъ

$$(4) \quad (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$



Черт. 94.

Уравненіе (1) нормальной плоскости выражаетъ не что иное, какъ перпендикулярность элемента кривой dx, dy, dz, направленіе котораго указывается касательной, и прямой, соединяющей точку касанія x, y, z съ произвольной точкой ξ, η, ζ.

О кривизнѣ линій въ пространствѣ.

§ 52. Подъ кривизной линіи въ пространствѣ мы будемъ разумѣть предѣлъ, къ которому стремится отношеніе угла смежности, т. е. угла между двумя безконечно близкими касательными, къ дугѣ между ихъ точками касанія; иначе кривизною называется предѣлъ

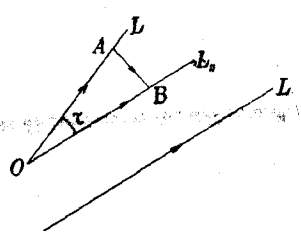
$$lim\left(\frac{\tau}{\Delta s}\right),$$

гдѣ τ уголъ смежности.

Пусть L (черт. 95) будетъ нѣкоторое положеніе касательной, опредѣляемое тремя косинусами (3) §-а 50. Дадимъ дугѣ, отсчитываемой отъ нѣкотораго опредѣленнаго начала до точки касанія, приращеніе Δs; тогда мы получимъ положеніе L_1 касательной, соотвѣтствующіе косинусы котораго будутъ

$$cos\,\alpha + \Delta\,cos\,\alpha,\ cos\,\beta + \Delta\,cos\,\beta,\ cos\,\gamma + \Delta\,cos\,\gamma.$$

Черезъ точку O касательной проведемъ прямую OL_{11}, параллельную новой касательной L_1; тогда искомый уголъ смежности τ будетъ LOL_{11}. На сторонахъ этого безконечно малаго угла отложимъ отрѣзки OA и OB, равные единицѣ длины и соединимъ прямою точки A и B. Придадимъ отрѣзку AB направленіе, идущее отъ прямой L къ прямой L_{11}, т. е. отъ начальнаго положенія касательной къ положенію приращенному. Такъ какъ уголъ τ безконечно малъ, то, пренебрегая безконечно малыми величинами высшихъ порядковъ, можно считать отрѣзокъ AB за дугу круга радіуса единицы, т. е. за τ. Отрѣзокъ OB будетъ замыкающей стороной ломанной линіи OAB.



Черт. 95.

Проектируя на три оси координатъ, получимъ три равенства

$$1.\,(cos\,\alpha + \Delta\,cos\,\alpha) = 1.\,cos\,\alpha + \tau\,cos\,\lambda,$$
$$1.\,(cos\,\beta + \Delta\,cos\,\beta) = 1.\,cos\,\beta + \tau\,cos\,\mu,$$
$$1.\,(cos\,\gamma + \Delta\,cos\,\gamma) = 1.\,cos\,\gamma + \tau\,cos\,\nu,$$

гдѣ λ, μ, ν суть углы, составляемые осями координатъ съ отрѣзкомъ AB. Эти уравненія проще написать, пренебрегая безконечно малыми величинами, въ такомъ видѣ:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \tau \cos\lambda &= d\cos\alpha, \\ \tau \cos\mu &= d\cos\beta, \\ \tau \cos\nu &= d\cos\gamma. \end{aligned}$$

Возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ

$$\tau^2 = (d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2.$$

Отсюда получаемъ

$$(2)\qquad \begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{d\cos\alpha}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}}, \\ \cos\mu &= \frac{d\cos\beta}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}}, \\ \cos\nu &= \frac{d\cos\nu}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}}. \end{aligned}$$

Если мы проведемъ черезъ точку касанія прямую, образующую съ осями координатъ углы λ, μ, ν, то эта прямая будетъ, очевидно, перпендикулярна къ касательной, что слѣдуетъ уже изъ геометрическихъ соображеній, ибо безконечно малая прямая AB перпендикулярна къ прямой OA. Аналитически это можно доказать такъ. Дифференцируя равенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

получаемъ

$$2\cos\alpha\,(d\cos\alpha) + 2\cos\beta\,(d\cos\beta) + 2\cos\gamma\,(d\cos\gamma) = 0,$$

откуда получается искомое условіе перпендикулярности

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0.$$

Прямая, проведенная черезъ точку касанія и имѣющая углы λ, μ, ν, носитъ названіе *главной нормали* заданной линіи. Ея уравненія могутъ быть написаны такъ:

$$\frac{\xi - x}{\cos\lambda} = \frac{\eta - y}{\cos\mu} = \frac{\zeta - z}{\cos\nu}.$$

Итакъ, принимая во вниманіе уравненіе (3) § 50, получаемъ для кривизны линіи въ пространствѣ такое выраженіе:

$$(3)\qquad \lim\left(\frac{\tau}{\Delta s}\right) = \frac{1}{ds}\sqrt{\left[d\frac{dx}{ds}\right]^2 + \left[d\frac{dy}{ds}\right]^2 + \left[d\frac{dz}{ds}\right]^2}.$$

Если за независимпрую перемѣнную принята дуга s, то формула кривизны напишется такъ:

$$(4) \qquad \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

гдѣ R будетъ радіусъ кривизны.

Соприкасающаяся плоскость.

§ 53. Плоскость, проведенная черезъ касательную и главную нормаль, называется *соприкасающейся плоскостью*. Легко написать уравненіе этой плоскости. Такъ какъ эта плоскость проходитъ черезъ точку касанія, то ея уравненіе можно написать такъ:

$$(1) \qquad A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0.$$

Для того, чтобы эта плоскость проходила черезъ касательную и главную нормаль, нужно написать условія ея параллельности съ этими прямыми, т. е.

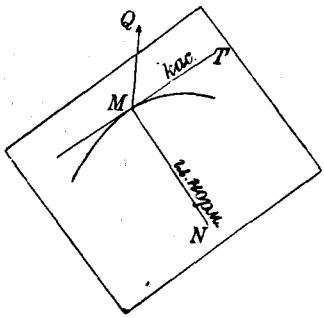
$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0,$$
$$A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu = 0,$$

откуда

$$\frac{A}{\cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu} = \frac{B}{\cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu} =$$
$$= \frac{C}{\cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda},$$

и уравненіе соприкасающейся плоскости напишется такъ:

$$(2) \qquad (\cos\beta.\cos\nu - \cos\gamma.\cos\mu)(\xi - x) +$$
$$+ (\cos\gamma.\cos\lambda - \cos\alpha.\cos\nu)(\eta - y) +$$
$$+ (\cos\alpha.\cos\mu - \cos\beta.\cos\lambda)(\zeta - z) = 0.$$



Черт. 96.

§ 54. По формуламъ (3) § 50 и по формуламъ (2) § 52 можно выразить всѣ косинусы, входящіе въ уравненіе соприкасающейся плоскости, въ видѣ функціи отъ основного перемѣннаго независимаго, черезъ которое выражены координаты x, y, z кривой линіи. Обозначимъ черезъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ углы съ осями координатъ, образованные перпендикуляромъ MQ (черт. 96), возставленнымъ изъ точки касанія къ соприкасающейся

плоскости. На основаніи уравненія (2) предыдущаго §-а будемъ имѣть

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\cos \mathfrak{a} &= \cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu,\\
\cos \mathfrak{b} &= \cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu,\\
\cos \mathfrak{c} &= \cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda.
\end{aligned}
$$

При перемѣщеніи точки касанія M вдоль по кривой соприкающаяся плоскость измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ. Называютъ *второй кривизной* или *крученіемъ линіи* предѣлъ, къ которому стремится выраженіе

$$\frac{\tau_1}{\Delta s},$$

гдѣ τ_1 есть безконечно малый уголъ между двумя соприкасающимися плоскостями. При помощи разсужденій, аналогичныхъ приведеннымъ въ § 52, мы замѣчаемъ, что проекціи безконечно малой дуги τ_1 (радіуса единицы) пропорціональны числамъ

$$d\cos\mathfrak{a},\ d\cos\mathfrak{b},\ d\cos\mathfrak{c}.$$

Значитъ вторая кривизна выразится по формулѣ

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{ds}\sqrt{(d\cos\mathfrak{a})^2 + (d\cos\mathfrak{b})^2 + (d\cos\mathfrak{c})^2},$$

гдѣ T будетъ *радіусъ второй кривизны.*

§ 55. Покажемъ, что, если вторая кривизна равна нулю, то линія плоская. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ по формулѣ (2) предыдущаго §-а имѣемъ

$$(d\cos\mathfrak{a})^2 + (d\cos\mathfrak{b})^2 + (d\cos\mathfrak{c})^2 = 0.$$

Сумма трехъ вещественныхъ квадратовъ можетъ только тогда равняться нулю, когда всѣ эти три квадрата въ отдѣльности равны нулю; мы имѣемъ слѣдовательно

$$d\cos\mathfrak{a} = 0,\ d\cos\mathfrak{b} = 0,\ d\cos\mathfrak{c} = 0.$$

Значитъ, три косинуса $\cos\mathfrak{a}, \cos\mathfrak{b}, \cos\mathfrak{c}$ суть числа постоянныя и мы можемъ положить

$$\cos\mathfrak{a} = A,\ \cos\mathfrak{b} = B,\ \cos\mathfrak{c} = C,$$

гдѣ A, B, C постоянныя величины.

Вслѣдствіе перпендикулярности прямой MQ и касательной имѣемъ равенство (§ 53)

$$\cos\alpha\cos\mathfrak{a}+\cos\beta\cos\mathfrak{b}+\cos\gamma\cos\mathfrak{c}=0,$$

которое можно будетъ переписать такъ:

$$\frac{dx}{ds}A+\frac{dy}{ds}B+\frac{dz}{ds}C=0,$$

или иначе

$$d(Ax+By+Cz)=0.$$

Интегрируя, получаемъ

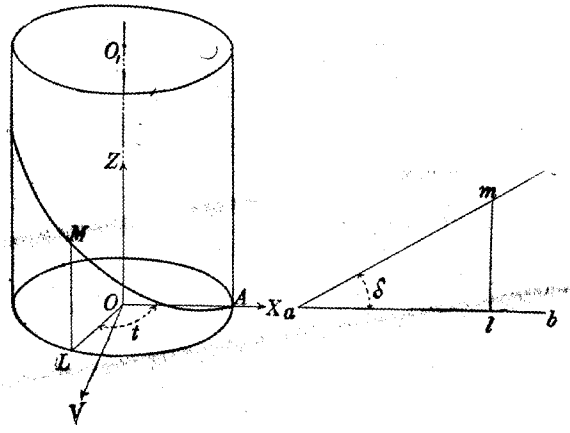
$$Ax+By+Cz=D,$$

гдѣ D постоянное число.

Послѣднее уравненіе есть не что иное, какъ уравненіе плоскости, въ которой должна лежать кривая линія.

Винтовая линія.

§ 56. Возьмемъ (черт. 97) прямой круговой цилиндръ и нѣкоторую плоскость, на которой начерченъ уголъ δ съ вершиной a. Будемъ, предполагая плоскость угла гибкою, напримѣръ листомъ бумаги, наматывать ее на цилиндръ, помѣстивъ точку a въ нѣкоторую точку A основанія цилиндра, такимъ образомъ, чтобы сторона ab угла пошла вдоль основанія цилиндра; тогда другая сторона ac угла расположится на цилиндрѣ по нѣкоторой кривой линіи, которую называютъ *винтовой линіей*. Пояснимъ на примѣрѣ этой винтовой линіи все, что было раньше сказано относительно кривизны и крученія линіи. Напишемъ прежде всего уравненія винтовой линіи. Разсмотримъ нѣкоторую точку m на сторонѣ наматываемаго угла. Перпендикуляръ ml на цилиндръ обратится въ часть ML образующей цилиндра между основаніемъ и винтовой линіей. Возьмемъ прямоугольную систему координатъ, причемъ



Черт. 97.

за плоскость XY возьмемъ плоскость основанія цилиндра, начало координатъ O возьмемъ въ центрѣ основанія и за ось Z возьмемъ ось цилиндра OO_1. Ось X проведемъ черезъ точку A, а ось Y перпендикулярно къ ней. За независимую перемѣнную t возьмемъ уголъ AOL, образованный съ осью X радіусомъ OL. Обозначимъ черезъ ρ радіусъ основанія цилиндра; тогда очевидно, что, если мы обозначимъ черезъ x, y, z координаты точки M винтовой линіи, то будемъ имѣть:

$$x = OL \cos t, y = OL \sin t, z = LM.$$

Но

$$al = \smile AL = \rho t, LM = lm = al\, tg\, \delta = \rho t\, tg\, \delta,$$

и мы получаемъ слѣдующія окончательныя уравненія винтовой линіи

(1) $$x = \rho \cos t, y = \rho \sin t, z = \rho\, tg\, \delta .\, t.$$

Въ этихъ уравненіяхъ t есть независимая перемѣнная, а числа ρ и δ нѣкоторыя постоянныя величины.

Найдемъ длину дуги винтовой линіи. Дифференцируя уравненія (1), получаемъ

$$dx = -\rho \sin t\, dt, dy = \rho \cos t\, dt, dz = \rho\, tg\, \delta\, dt.$$

Отсюда

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2 [\rho^2 \sin^2 t + \rho^2 \cos^2 t + \rho^2 tg^2 \delta] =$$
$$dt^2 \rho^2 [1 + tg^2 \delta] = \rho^2 \sec^2 \delta\, dt^2;$$
$$ds = \rho \sec \delta\, dt.$$

Интегрируя отъ точки A, получимъ

$$s = \rho \sec \delta \int_0^t dt = \rho \sec \delta .\, t.$$

Эту формулу можно было бы сразу написать, исходя изъ того соображенія, что длина дуги винтовой линіи есть не что иное, какъ длина am стороны наматываемаго угла.

Найдемъ теперь направленіе касательной къ винтовой линіи въ точкѣ M. Имѣемъ

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = -\frac{\rho \sin t .\, dt}{\rho \sec \delta .\, dt} = -\sin t \cos \delta,$$

(2) $$\cos \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{\rho \cos t .\, dt}{\rho \sec \delta .\, dt} = \cos t \cos \delta,$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\rho\, tg\,\delta.\, dt}{\rho \sec\delta.\, dt} = \sin\delta.$$

Оказывается, что касательная къ винтовой линіи образуетъ съ осью Z постоянный уголъ, что очевидно также изъ геометрическихъ соображеній.

Для нахожденія кривизны будемъ дифференцировать формулы (2):

$$d\cos\alpha = -\cos t\cos\delta.\, dt,$$
$$d\cos\beta = -\sin t\cos\delta.\, dt,$$
$$d\cos\gamma = 0;$$

отсюда получаемъ выраженіе для кривизны

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{ds}\sqrt{dt^2(\cos^2 t\cos^2\delta + \sin^2 t\cos^2\delta)} = \frac{\cos\delta.\, dt}{\rho\sec\delta.\, dt} = \frac{\cos^2\delta}{\rho}.$$

Итакъ, мы замѣчаемъ, что первая кривизна винтовой линіи есть величина постоянная.

Разсмотримъ теперь главную нормаль, получаемъ

$$\cos\lambda = \frac{d\cos\alpha}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}} = \frac{-\cos\delta\cos t.\, dt}{\cos\delta.\, dt} = -\cos t,$$

(3) $$\cos\mu = \frac{d\cos\beta}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}} = \frac{-\cos\delta\sin t.\, dt}{\cos\delta.\, dt} = -\sin t,$$

$$\cos\nu = 0.$$

Эти формулы показываютъ, что главная нормаль есть не что иное, какъ перпендикуляръ, опущенный на ось цилиндра изъ точки M винтовой линіи.

Подставляя выраженія (2) и (3) въ уравненія

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0,$$
$$A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu = 0,$$

получимъ

$$-A\sin t + B\cos t + C\, tg\,\delta = 0,$$
$$A\cos t + B\sin t = 0,$$

откуда

(4) $$\frac{A}{tg\,\delta\,sin\,t}=\frac{B}{-tg\,\delta\,cos\,t}=\frac{C}{1},$$

такъ что соприкасающаяся плоскость $A(\xi-x)+B(\eta-y)+$ $+C(\zeta-z)=0$ получаетъ уравненіе

$$tg\,\delta\,sin\,t\,(\xi-\rho\,cos\,t)-tg\,\delta\,cos\,t\,(\eta-\rho\,sin\,t)+\zeta-\rho\,tg\,\delta.\,t=0,$$

или окончательно

(5) $$tg\,\delta\,sin\,t.\,\xi-tg\,\delta\,cos\,t.\,\eta+\zeta-\rho\,tg\,\delta.\,t=0.$$

Для полученія второй кривизны будемъ предполагать коэффиціенты A, B, C косинусами угловъ перпендикуляра къ соприкасающейся плоскости (5), т. е. предположимъ, что эти коэффиціенты кромѣ пропорціи (4) удовлетворяютъ еще равенству $A^2+B^2+C^2=1$, тогда получимъ

$$\frac{A}{tg\,\delta\,sin\,t}=\frac{B}{-tg\,\delta\,cos\,t}=\frac{C}{1}=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{tg^2\,\delta\,sin^2\,t+tg^2\,\delta\,cos^2\,t+1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{tg^2\,\delta+1}}=cos\,\delta,$$

откуда

$$A=sin\,\delta\,sin\,t,\;B=-sin\,\delta\,cos\,t,\;C=cos\,\delta;$$

отсюда

$$dA=sin\,\delta\,cos\,t\,dt,\;dB=+sin\,\delta\,sin\,t\,dt,\;dC=0,$$

и вторая кривизна принимаетъ видъ

$$\frac{\sqrt{dA^2+dB^2+dC^2}}{ds}=\frac{\sqrt{sin^2\,\delta\,cos^2\,t+sin^2\,\delta\,sin^2\,t}\,dt}{\rho\,sec\,\delta\,dt}=\frac{sin\,\delta\,cos\,\delta}{\rho},$$

т. е. величина постоянная.

Итакъ, винтовая линія имѣетъ постоянными обѣ кривизны. Оказывается, что винтовая линія есть единственная линія съ постоянными обѣими кривизнами.

Касательная плоскость и нормаль къ поверхности.

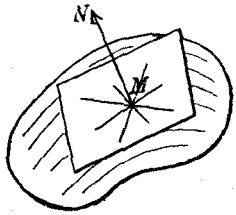
§ 57. Возьмемъ поверхность, опредѣляемую уравненіемъ

(1) $$f(x,y,z)=0,$$

и на ней нѣкоторую точку $M(x,y,z)$ (черт. 98).

Касательныя къ различнымъ кривымъ, проведеннымъ по поверхности (1) черезъ точку M и касающіяся въ точкѣ M будутъ

всѣ лежать въ одной плоскости, называемой *касательною плоскостью* къ поверхности въ точкѣ M.



Черт. 98.

Для проведенія по поверхности нѣкоторой кривой черезъ точку M пересѣкаемъ поверхность (1) другою поверхностью $\varphi(x, y, z) = 0$, проходящею черезъ точку M.

Мы видѣли уже, что касательная прямая къ кривой, опредѣляемой уравненіями

$$f(x, y, z) = 0 \text{ и } \varphi(x, y, z) = 0,$$

опредѣляется двумя уравненіями

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\zeta - z) = 0. \tag{3}$$

Если мы будемъ мѣнять функцію φ, т. е. проводить по поверхности (1) черезъ точку M различныя кривыя, то уравненіе (2) не мѣняется; оно и будетъ уравненіемъ *касательной плоскости* къ поверхности.

Итакъ уравненіе касательной плоскости къ поверхности (1) имѣетъ видъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0. \tag{4}$$

§ 58. Положеніе перпендикуляра MN къ касательной плоскости, возставленнаго изъ точки касанія M будетъ, очевидно, опредѣляться уравненіями

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{1}$$

Этотъ перпендикуляръ носитъ названіе *нормали* поверхности.

Если уравненіе поверхности написано въ видѣ

$$z = F(x, y), \tag{2}$$

т. е. рѣшенномъ относительно z, то предыдущія соображенія приводятъ къ слѣдующимъ выкладкамъ: переписывая уравненіе (2) въ видѣ $z - F(x, y) = 0$, можемъ положить

$$f(x, y, z) = z - F(x, y); \tag{3}$$

обозначимъ для сокращенія двѣ частныя производныя отъ z по x и по y такъ:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}.$$

На основаніи (3) получаемъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-p,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-q,\ \frac{\partial f}{\partial z}=1.$$

Отсюда уравненіе касательной плоскости получаетъ видъ

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y), \tag{4}$$

а уравненія нормали будутъ

$$\frac{\xi-x}{-p}=\frac{\eta-y}{-q}=\frac{\zeta-z}{1}. \tag{5}$$

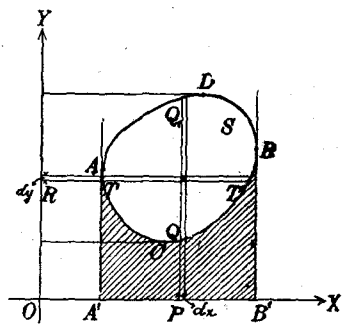
Приложенія интегральнаго исчисленія къ геометріи.

Квадратура площадей.

§ 59. Вопросъ о квадратурѣ площадей разобранъ нами уже въ §§ 147, 148 главы III.

Покажемъ теперь, какъ вычислить площадь какой-нибудь замкнутой фигуры.

Разсмотримъ сомкнутый контуръ S (черт. 99), относительно котораго предположимъ для простоты, что онъ пересѣкается всякой прямой, параллельной одной изъ осей, въ двухъ точкахъ.



Черт. 99.

Такъ, напримѣръ, пусть ордината PQQ_1, параллельная оси y-овъ, пересѣкаетъ контуръ S въ двухъ точкахъ Q и Q_1. Весь контуръ помѣщается между двумя ординатами AA' и BB', касающимися контура въ двухъ точкахъ A и B, и раздѣляется этими точками на двѣ части: нижнюю ACB и верхнюю ADB.

Пусть нижняя часть ACB опредѣляется уравненіемъ $y=\varphi(x)$, а верхняя уравненіемъ $y_1=\varphi_1(x)$, тогда площадь $A'ACBB'$ опредѣляется интеграломъ

$$\int y\,dx,$$

а площадь $A'ADBB'$ интеграломъ

$$\int y_1\,dx.$$

Отсюда площадь искомаго сомкнутаго контура S будетъ выражаться такъ:

$$(1)\qquad \int y_1\,dx-\int y\,dx=\int(y_1-y)\,dx=\int_a^b[\varphi_1(x)-\varphi(x)]\,dx,$$

гдѣ a и b суть абсциссы крайнихъ ординатъ $A'A$ и $B'B$.

Замѣчая, что

$$y_1-y=\int_y^{y_1}dy=\int_{\varphi(x)}^{\varphi_1(x)}dy,$$

мы получаемъ для площади S выраженіе въ видѣ *двойного* интеграла

$$\int_a^b\int_{\varphi(x)}^{\varphi_1(x)}dy\,.\,dx.$$

Итакъ, если мы не будемъ писать предѣловъ у интеграловъ, то всякая площадь выразится двойнымъ интеграломъ

$$(2)\qquad \iint dx\,dy;$$

формула выражаетъ тотъ очевидный фактъ, что всякая криволинейная площадь есть сумма безконечнаго числа безконечно малыхъ прямоугольниковъ $dxdy$. Настоящее же вычисленіе площади по формулѣ (2) начинается съ того момента, когда указаны предѣлы у каждаго изъ интеграловъ.

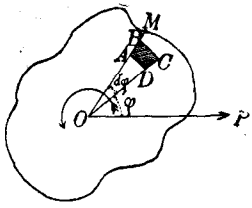
Мѣняя ролями координаты x и y, мы приходимъ къ слѣдующей важной формулѣ, выражающей правило измѣненія порядка интегрированія въ двойномъ интегралѣ:

$$\int_a^b\left[\int_{\varphi(x)}^{\varphi_1(x)}dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_{\psi(y)}^{\psi_1(y)}dx\right]dy,$$

гдѣ уравненіе $x = \psi(y)$ даетъ часть контура CAD, а уравненіе $x = \psi_1(y)$ даетъ часть контура DBC; C и D суть точки касанія прямыхъ, параллельныхъ оси x-овъ и опредѣляемыхъ уравненіями $y = c, y = d$.

§ 60. Разсмотримъ вычисленіе площадей въ полярныхъ координатахъ

$$OD = \rho, \angle DOP = \varphi.$$



Черт. 100.

Разсмотримъ безконечно малый криволинейный четыреугольникъ $ABCD$ (черт. 100), образованный двумя дугами BC, AD круговъ радіуса $\rho + d\rho$ и ρ, а также двумя прямыми AB и DC, соотвѣтствующими полярнымъ угламъ $\varphi + d\varphi$ и φ.

Отсюда

$$AB = d\rho, AD = \rho d\varphi.$$

Откидывая безконечно малыя высшаго порядка, отчего предѣлъ суммы не измѣняется, мы можемъ считать площадь фигуры равною суммѣ

$$S\,ABCD = \int \rho\, d\varphi\, d\rho.$$

Производя интегрированіе по ρ, получаемъ

$$\int_0^{\rho_0} \rho\, d\rho = \frac{\rho_0^2}{2},$$

гдѣ ρ_0 есть значеніе ρ, соотвѣтствующее точкѣ M на контурѣ. Мы получаемъ уравненіе контура въ видѣ $\rho_0 = \psi(\varphi)$. Значитъ, площади въ полярныхъ координатахъ опредѣляются по формулѣ

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\int \rho_0^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int [\psi(\varphi)]^2\, d\varphi.$$

Если полюсъ O лежитъ внутри сомкнутаго контура, площадь котораго подлежитъ опредѣленію, то мы получимъ всю площадь, мѣняя φ отъ 0 до 2π, такъ что такая площадь выразится формулой

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho_0^2\, d\varphi.$$

Примѣнимъ формулу (2) къ нахожденію площади круга радіуса a съ центромъ въ полюсѣ O; тогда $\rho_0 = a$, и мы получаемъ площадь круга по формулѣ

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{a^2}{2}\, 2\pi = \pi a^2,$$

т. е. какъ разъ то выраженіе, которое извѣстно изъ элементарной геометріи.

§ 61. Если мы сравнимъ два выраженія

$$\iint dx\, dy, \iint \rho\, d\varphi\, d\rho$$

для площади фигуры, причемъ намъ извѣстно, что между прямоугольными координатами x, y съ одной стороны и полярными φ и ρ съ другой существуютъ соотношенія

(1) $$x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi,$$

то является весьма важная задача, преобразовать двойной интегралъ при помощи соотношеній (1), т. е., другими словами, догадаться, что подинтегральное выраженіе въ новыхъ координатахъ будетъ $\rho\, d\varphi\, d\rho$ на основаніи разсмотрѣнія только соотношеній (1), не прибѣгая къ геометрическимъ соображеніямъ предыдущаго §-а.

Эта задача была вполнѣ рѣшена для двойныхъ интеграловъ Euler'омъ.

Теорема Euler'a состоитъ въ слѣдующемъ:

если

(2) $$x = \psi(u, v),\ y = \omega(u, v),$$

то двойной интегралъ преобразуется по формулѣ

(3) $$\iint \Omega(x, y)\, dx\, dy = \iint \Omega\Big(\psi(u, v), \omega(u, v)\Big)\, \Delta\, du\, dv,$$

гдѣ Δ есть такъ называемый *функціональный опредѣлитель* двухъ функцій φ и ψ, а именно

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Въ примѣненіи къ случаю уравненія (1) получаемъ

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\varphi . \rho \cos\varphi - [-\rho \sin\varphi] \sin\varphi = \rho.$$

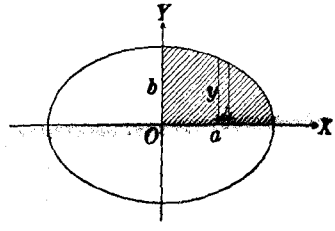
Слѣдовательно, при $\Omega = 1$ формула (3) обращается въ такую

$$\iint dx\, dy = \iint \rho\, d\varphi\, d\rho.$$

Формула (3) Euler'а была обобщена для тройныхъ интеграловъ Lagrange'емъ, и, наконецъ, Jacobi высказалъ ее окончательно для какого угодно числа перемѣнныхъ независимыхъ.

§ 62. Вычислимъ, напримѣръ, площадь эллипса (черт. 101)

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Черт. 101.

Четверть этой площади выразится интеграломъ

$$\frac{1}{4} V = \int_0^a y\, dx,$$

но изъ уравненія (1) получаемъ

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

значитъ

$$\frac{1}{4} V = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx;$$

подставивъ въ этотъ интегралъ $x = a \sin t$, получимъ

$$\frac{1}{4} V = \frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\,.\ a \cos t\, dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{ab}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\, dt\right] =$$

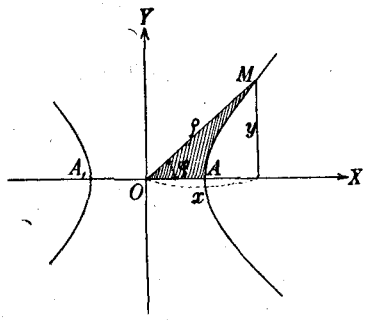
$$= \frac{ab}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\sin 2t}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{ab\pi}{4},$$

такъ какъ $\sin 2.0 = 0$ и $\sin 2\frac{\pi}{2} = \sin \pi = 0$.

Значитъ получаемъ окончательно

(2) $$V = \pi ab.$$

§ 63. Какъ второй примѣръ разсмотримъ *равностороннюю* гиперболу (черт. 102)



Черт. 102.

(1) $x^2 - y^2 = 1\ (AO = a = b = 1)$.

Найдемъ площадь V сектора AOM, соотвѣтствующаго углу φ.

Введемъ полярныя координаты

(2) $x = \rho \cos \varphi,\ y = \rho \sin \varphi$,

тогда по уравненію (1) получимъ $\rho^2 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \rho^2 \cos 2\varphi = 1$, откуда

(3) $$\rho^2 = \frac{1}{\cos 2\varphi}.$$

Площадь V выразится такъ:

$$V = \frac{1}{2}\int^{\varphi} \rho^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)} = -\frac{1}{4}\int_0^{\varphi} \frac{d\, tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)} =$$

$$= -\frac{1}{4}\, lg\, tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right).$$

Отсюда

$$lg\, tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = -4V,$$

и

$$e^{-4V} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \frac{1 - tg\varphi}{1 + tg\varphi} = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi} =$$

$$= \frac{(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = \frac{(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}{\cos 2\varphi};$$

извлекая корень квадратный, имѣемъ на основаніи уравненій (2) и (3)

$$(4)\qquad e^{-2V}=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}=x-y,$$

далѣе

$$(5)\qquad e^{2V}=\frac{1}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y.$$

Изъ уравненій (4) и (5) получаемъ

$$(6)\qquad x=\frac{e^{2V}+e^{-2V}}{2},\ y=\frac{e^{2V}-e^{-2V}}{2}.$$

Эти функціи называются *гиперболическими*; функція $\frac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2}$ называется *гиперболическимъ косинусомъ* и обозначается знакомъ $\cosh yp\,\xi$, а функція $\frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2}$ называется *гиперболическимъ синусомъ* и обозначается $\sinh yp\,\xi$. Равенство (6) можно переписать такъ:

$$x=\cosh yp\,2V,\ y=\sinh yp\,2V.$$

Спрямленіе дугъ.

§ 64. Дуга плоской кривой, какъ мы видѣли, опредѣляется интеграломъ

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Дуга кривой двоякой кривизны въ трехмѣрномъ пространствѣ выражается интеграломъ

$$\int\sqrt{dx^2+dx^2+dz^2}=\int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

§ 65. Найдемъ, напримѣръ, дугу эллипса, опредѣляемаго уравненіями

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t\ ^{*});$$

$$\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=\int_0^t\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,dt=$$

$$=a\int_0^t\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt\ \ (e\text{—эксцентриситетъ}).$$

---

*) Черезъ исключеніе t получается какъ разъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Подставляя сюда $\cos t = -z$, получимъ

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

и слѣдовательно дуга эллипса выражается интеграломъ

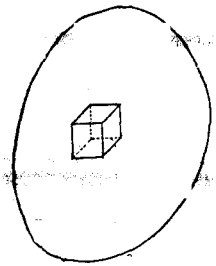
$$\int \frac{\sqrt{1-e^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz,$$

не берущимся въ конечномъ видѣ.

Кубатура объемовъ.

§ 65. Объемы пространственныхъ тѣлъ вычисляются при помощи тройныхъ интеграловъ вида

$$(1) \qquad \iiint dx\,dy\,dz.$$



Черт. 103.

При этомъ искомый объемъ вычисляется, какъ сумма безконечнаго числа объемовъ безконечно малыхъ параллелепипедовъ $dx\,dy\,dz$ (черт. 103).

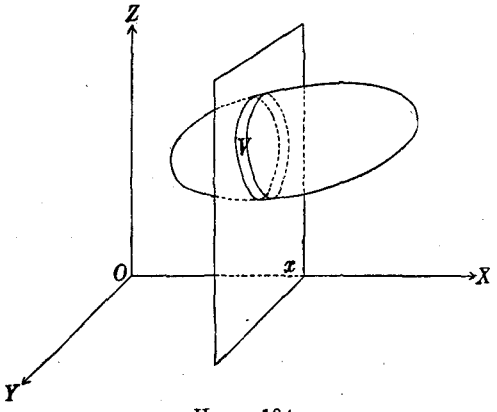
Совершенно подобно тому, что мы видѣли для площадей плоскихъ фигуръ, настоящее вычисленіе объема по интегралу (1) начинается съ того момента, когда устанавливаются предѣлы трехъ послѣдовательныхъ интегрированій по x, по y и по z. Эти предѣлы устанавливаются по виду поверхности, ограничивающей тѣло.

Мы не будемъ входить въ подробности установленія этихъ предѣловъ. Это задача легкая, и читатель, внимательно прочитавшій § 59, разберется безъ труда въ этомъ вопросѣ. Во всякомъ случаѣ эти подробности можно найти во всякомъ болѣе или менѣе полномъ курсѣ анализа.

§ 66. Часто можно бываетъ упростить вычисленіе объема тѣла на основаніи геометрическихъ свойствъ поверхности, ограничивающей этотъ объемъ.

Одинъ изъ важныхъ случаевъ такого рода имѣетъ мѣсто, когда изъ геометрическихъ соображеній намъ извѣстна площадь V сѣченія тѣла плоскостью $x = \alpha$ (черт. 104), гдѣ x одна изъ трехъ прямоугольныхъ координатахъ x, y, z. Очевидно, что площадь V будетъ функціей отъ α, тогда объемъ будетъ, очевидно, выражаться простымъ интеграломъ

$$\int V\, d\alpha.$$



Черт. 104.

§ 67. Найдемъ объемъ *эллипсоида* *)

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

пересѣчемъ этотъ эллипсоидъ плоскостью $x = a$, тогда, очевидно, получается въ сѣченіи эллипсъ, опредѣляемый уравненіемъ

(2) $$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)} = 1.$$

Полуоси этого эллипса будутъ

$$b\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{a^2}}, \quad c\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{a^2}}.$$

Площадь V эллипса на основаніи соображеній § 62 выразится

$$V = \pi b c \left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right).$$

*) Эта поверхность (1) называется эллипсоидомъ, ибо получается эллипсъ во всякомъ ея плоскимъ сѣченіи.

Половина объема эллипсоида выразится по формулѣ

$$\int_0^a V\,d\alpha = \pi b c \int_0^a \left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right) d\alpha =$$

$$= \pi b c \left[\int_0^a d\alpha - \frac{1}{a^2} \int_0^a \alpha^2\, d\alpha \right] =$$

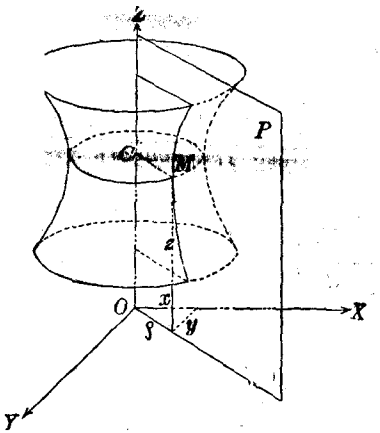
$$= \pi b c \left[a - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\alpha^3}{3} \right)_0^a \right] = \pi b c \left[a - \frac{1}{3} a \right] = \frac{2}{3} \pi abc.$$

Отсюда весь объемъ эллипсоида будетъ равенъ

$$\frac{4}{3} \pi abc.$$

§ 68. Какъ второй примѣръ, разсмотримъ вычисленіе объема *поверхности вращенія*.

Пусть около оси z (черт. 105) вращается *плоскость* P, тогда нѣкоторая кривая, расположенная въ этой плоскости, будетъ описывать вокругъ оси z-овъ нѣкоторую поверхность, называемую *поверхностью вращенія*.



Черт. 105.

Ось z-овъ будетъ для этой поверхности *осью вращенія*. Всякая точка M кривой будетъ описывать въ пространствѣ кругъ съ центромъ на оси z-овъ, и плоскость этого круга будетъ перпендикулярна къ этой оси. Этотъ кругъ называется *параллелью* поверхности, а всякое положеніе вращающейся кривой представляетъ такъ называемый *меридіанъ* поверхности.

Обозначимъ ρ радіусъ параллели точки M; пусть уравненіе меридіана въ его плоскости опредѣляется уравненіемъ между z и ρ

(1) $$\rho = f(z).$$

Такъ какъ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, то окончательное уравненіе поверхности вращенія будетъ

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(z).$$

Площадь параллели, какъ площадь круга радіуса ρ, будетъ равна $\pi\rho^2$.

Слѣдовательно, объемъ поверхности вращенія вычислится при помощи интеграла

$$\int \pi\rho^2\,dz = \pi\int [f(z)]^2\,dz.$$

Нахожденіе площадей кривыхъ поверхностей.

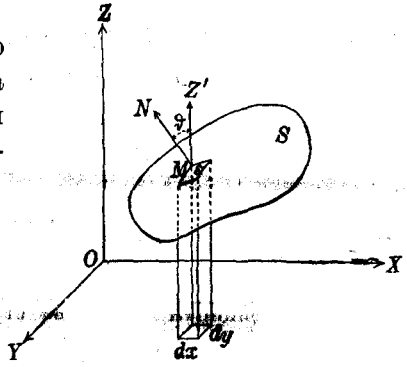
§ 69. Разсмотримъ прямоугольную призму, построенную параллельно оси z-овъ на основаніи прямоугольника со сторонами dx, dy (черт. 106).

Эта призма высѣкаетъ на заданной поверхности криволинейный безконечно малый четыреугольникъ.

Обозначимъ площадь этого четыреугольника черезъ ε, тогда кривая поверхность, ограниченная нѣкоторымъ сомкнутымъ контуромъ, выразится суммой

(1) $$\Sigma\,\varepsilon.$$

Чтобы перейти къ выраженію этой суммы черезъ интегралъ, замѣтимъ слѣдующее.



Черт. 106.

Площадь ε, вслѣдствіе ея безконечно малой величины, мы можемъ считать плоскою, причемъ ея плоскость можно считать за плоскость, касательную къ заданной поверхности въ какой либо ея точкѣ M, лежащей на этой площади. Пусть ϑ будетъ уголъ, который образуетъ касательная плоскость съ плоскостью XY, тогда, очевидно, площадь $dx\,dy$ будетъ проекціей на плоскость XY площади ε, такъ что будемъ имѣть

$$\varepsilon\cos\vartheta = dx\,dy,$$

откуда $\varepsilon = \dfrac{dx\,dy}{\cos\vartheta}$, и площадь всей кривой поверхности выразится двойнымъ интеграломъ

(2) $$\iint \frac{dx\,dy}{\cos\vartheta}.$$

Очевидно, что уголъ ϑ касательной плоскости съ плоскостью XY равенъ углу γ, который образуетъ нормаль къ поверхности съ осью Z. На основаніи уравненій (5) § 58 мы получаемъ

$$\cos\vartheta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Отсюда интегралъ (2) получаетъ видъ

$$(3) \qquad \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy.$$

Покажемъ теперь, какъ преобразовать интегралъ (3) предыдущаго §-а къ новымъ перемѣннымъ независимымъ u, v, если поверхность выражена уравненіями

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \omega(u, v).$$

Обозначимъ для сокращенія

$$(2) \qquad A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\ B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Дифференцируя равенства (1), получимъ

$$(3) \qquad dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv,\ dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv,$$

$$(4) \qquad dz = p\,dx + q\,du = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Подставляя выраженія (3) въ (4) получимъ

$$p\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + q\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv;$$

сравнивъ коэффиціенты при du и dv получаемъ

$$(5) \qquad \begin{aligned} p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial u}, \\ p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned}$$

откуда, рѣшая два уравненія (5) относительно двухъ неизвѣстныхъ p и q получимъ

$$p=\frac{-A}{C},\ q=\frac{-B}{C}.$$

Въ этомъ случаѣ функціональный опредѣлитель Δ есть не что иное, какъ C, и мы получаемъ изъ интеграла (3) предыдущаго параграфа такой новый интегралъ

$$\iint\sqrt{1+\frac{A^2}{C^2}+\frac{B^2}{C^2}}\cdot\Delta\,du\,dv=\iint\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv.$$

На основаніи тождества Lagrange'а мы имѣемъ

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2,$$

гдѣ

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\ G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

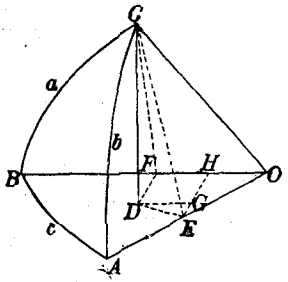
$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Поэтому интегралъ, выражающій поверхность, напишется такъ

$$\iint\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{6}$$

Приложенія къ сферической геометріи.

§ 70. Соединимъ вершины угловъ сферическаго треугольника A, B, C (черт. 107) прямыми съ центромъ O шара и обозначимъ стороны треугольника, противоположныя A, B, C, черезъ a, b, c. Изъ точки C опустимъ перпендикуляръ CD на плоскость AOB и черезъ CD проведемъ плоскости, перпендикулярныя къ радіусамъ OA и OB. Эти плоскости пересѣкутъ плоскости граней AOB, AOC, BOC по линіямъ DE, CE, DF, CF; тогда $\angle\ CED=A$, $\angle\ CFD=B$.



Черт. 107.

Опустимъ еще изъ E перпендикуляръ EH на BO и изъ D перпендикуляръ DG на EH, тогда $\angle DEG=\angle AOB=c$.

Будемъ далѣе имѣть

$$OF = OH + HF, \text{ но } OF = \cos a, OH = OE \cos c = \cos b \cos c,$$
$$HF = DG = DE \sin DEG = CE \cos A \sin c = \sin b \sin c \cos A,$$

слѣдовательно,

(1) $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Теорема. *Косинусъ одной изъ сторонъ сферическаго треугольника равенъ произведенію косинусовъ другихъ двухъ сторонъ плюсъ произведеніе синусовъ тѣхъ же сторонъ на косинусъ угла, противолежащаго первой сторонѣ.*

Далѣе:

$$CD = CE \sin A = CF \sin B,$$

но

$$CE = \sin b, CF = \sin a,$$

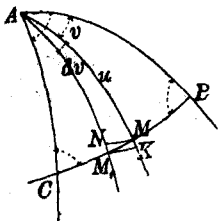
слѣдовательно

(2) $$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Теорема. *Синусы сторонъ относятся между собой, какъ синусы противоположныхъ угловъ.*

Эта теорема напоминаетъ подобную же теорему въ плоской тригонометріи.

§ 71. Найдемъ теперь площадь треугольника, составленнаго дугами большихъ круговъ (черт. 108), прилагая общую формулу (6) § 69.



Черт. 108.

Если мы положимъ $\rho = 1$ въ формулахъ (1) § 64 гл. II, то получимъ формулы

(1) $x = \sin u \cos v, y = \sin u \sin v, z = \cos u,$

выражающія шаръ радіуса единицы въ двухъ параметрахъ u и v.

Мы имѣемъ

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos u \cos v, \frac{\partial y}{\partial u} = \cos u \sin v, \frac{\partial z}{\partial u} = -\sin u,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\sin u \sin v, \frac{\partial y}{\partial v} = \sin u \cos v, \frac{\partial z}{\partial v} = 0;$$

отсюда

$$E = 1, G = \sin^2 u, F = 0,$$

и интегралъ (6) § 69 принимаетъ видъ

(2) $$\iint \sin u \, du \, dv.$$

Предѣлы интегрированія, распространеннаго на площадь сферическаго треугольника, проще установить, если провести ось z-овъ черезъ вершину A треугольника, а главный меридіанъ (ZX) пустить по сторонѣ AB, тогда интегралъ можетъ быть съ предѣлами написанъ такъ

$$\int_0^A dv \int_0^u \sin u\, du.$$

Здѣсь A обозначаетъ величину угла при верщинѣ A. Верхній предѣлъ u внутренняго интеграла есть не что иное, какъ дуга AM произвольнаго меридіана, считаемая отъ вершины A до стороны BC.

Интегрируя по u получимъ

$$(3) \qquad \int_0^A (1 - \cos u)\, dv = A - \int_0^A \cos u\, dv.$$

Разсмотримъ нѣкоторое перемѣнное значеніе долготы v и [illegible] углу v приращеніе dv. Уголъ AMB мы будемъ для простоты обозначать черезъ M. Приращенному значенію $v + dv$ долготы будетъ соотвѣтствовать меридіанъ AM_1, причемъ уголъ AM_1B при точкѣ M_1 будетъ приращеннымъ значеніемъ угла M, т. е. будетъ $M + dM$.

Проведемъ дуги параллелей MN и M_1K; первая имѣетъ радіусъ $\sin u$, а вторая $\sin(u + du)$.

Отсюда

$$NM = \sin u\, dv,\ M_1K = \sin(u + du)\, dv,$$
$$M_1N = du, \qquad MK = du.$$

Изъ треугольника MM_1K получаемъ

$$(4) \qquad tg\, M = \frac{M_1K}{MK} = \frac{\sin(u + du)\, dv}{du}.$$

Прилагая формулу синусовъ (2) § 70 къ треугольнику MM_1A получаемъ

$$\frac{\sin AM_1M}{\sin AMM_1} = \frac{\sin AM}{\sin AM_1}$$

или

$$\frac{\sin(M + dM)}{\sin M} = \frac{\sin u}{\sin(u + du)}.$$

Отсюда

(5) $$\sin(M+dM)\sin(u+du)-\sin u\sin M=0.$$

По формулѣ Taylor'a

$$\sin(M+dM)=\sin M+\cos M\,dM+\ldots$$
$$\sin(u+du)=\sin u+\cos u\,du+\ldots$$

Оставляя въ уравненіи (5) только члены съ первыми степенями дифференціаловъ, получаемъ

$$\sin M\cos u\,du+\cos M\sin u\,dM=0$$

или

$$\sin u\,dM+tg\,M\cos u\,du=0.$$

Подставляя сюда вмѣсто $tg\,M$ его выраженіе (4) получимъ

$$dM\sin u+\sin(u+du)\cos u\,dv=0;$$

откидывая высшія степени дифференціаловъ получаемъ окончательно

$$dM+\cos u\,dv=0.$$

Отсюда формула (3) принимаетъ видъ

$$A+\int_0^A dM=A+(M)_A-(M)_0.$$

Здѣсь знакомъ $(M)_A$ обозначено значеніе угла M при $v=A$, а знакомъ $(M)_0$ обозначено значеніе угла M при $v=0$. Очевидно, что

$$(M)_A=C,\ (M)_0=\pi-B,$$

и мы получаемъ для площади сферическаго треугольника выраженіе

(6) $$A+B+C-\pi,$$

т. е. *площадь сферическаго треугольника равна избытку суммы его угловъ надъ двумя прямыми.*

ГЛАВА VII.

Теорія функцій.

§ 1. Теорія функцій распадается на двѣ большія части, на теорію функцій вещественнаго перемѣннаго и на теорію функцій комплекснаго перемѣннаго, т. е. теорію функцій $f(u)$, гдѣ

$$u = x + \sqrt{-1}\, y.$$

Теорія функцій комплекснаго перемѣннаго получила въ XIX столѣтіи благодаря изслѣдованіямъ Cauchy, Riemann'a и Weierstrass'a первостепенное значеніе, такъ что подъ названіемъ теоріи функцій обыкновенно разумѣютъ теорію функцій комплекснаго перемѣннаго.

§ 2. Теорія функцій комплекснаго перемѣннаго началась съ естественнаго желанія обобщить функціи, извѣстныя изъ элементарной математики, на случай комплексныхъ значеній независимой перемѣнной.

Что касается функцій раціональныхъ, то такое обобщеніе не представляетъ никакого затрудненія. Придется подставить въ раціональную функцію вмѣсто перемѣнной независимой ея комплексное значеніе, т. е. составить выраженіе $f(x+iy)$, и по правиламъ раціональныхъ дѣйствій надъ комплексными числами отдѣлить въ послѣднемъ выраженіи вещественную и мнимую части, такъ что получится

$$f(x+iy) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y),$$

гдѣ $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ будутъ вещественныя раціональныя функціи отъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y. Напримѣръ,

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Что касается обобщенія радикальныхъ выраженій на случай комплексныхъ значеній подрадикальнаго числа, то это обобщеніе было показано въ § 24 гл. I.

§ 3. Euler обобщилъ слѣдующимъ образомъ понятіе о показательной функціи e^u на случай комплекснаго перемѣннаго.

Въ § 145 гл. III мы имѣли

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \ldots$$

Отсюда, полагая $u = iy$, будемъ имѣть

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{i^2 y^2}{1.2} + \frac{i^3 y^3}{1.2.3} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{y^2}{1.2} + + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots + i\left(y - \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots\right).$$

Сравнивая съ формулами (2) и (3) § 145 гл. III, мы получаемъ окончательно слѣдующую формулу Euler'а для возвышенія числа e въ мнимую степень:

(1) $$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Отсюда получаемъ для возвышенія e въ комплексную степень формулу

(2) $$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i\, e^x \sin y.$$

§ 4. Эти формулы Euler'а связали двѣ важныя части элементарной математики, теорію логариѳмовъ и тригонометрію, и показали, что эти двѣ части математики представляютъ въ сущности одну и ту же доктрину, которую можно характеризовать, какъ теорію функцій *съ однимъ періодомъ*.

Подъ функціей періодической съ періодомъ a разумѣется всякая такая функція, которая не мѣняется отъ прибавленія къ перемѣнному независимому этого періода a, т. е., другими словами, такая функція, которая удовлетворяетъ тождеству

$$f(x + a) = f(x).$$

Функціи $\sin x$ и $\cos x$ суть, какъ извѣстно изъ тригонометріи, періодическія съ періодомъ 2π. Періодичность показательной функціи e^x обнаруживается изъ формулы (1) предыдущаго §-а. Періодъ у этой функціи оказывается мнимымъ числомъ $2\pi i$, такъ какъ если мы будемъ считать $\xi = iy$, то

$$e^{\xi+2\pi i} = e^{i(y+2\pi)} = \cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi) =$$
$$= \cos y + i\sin y = e^{iy} = e^{\xi}.$$

§ 5. Хотя распространеніе понятія функціи вещественнаго перемѣннаго на случай комплексныхъ значеній перемѣннаго является нѣкоторымъ обобщеніемъ понятія о функціи, тѣмъ не менѣе приходится признавать теорію функцій *вещественнаго* перемѣннаго болѣе широкой и общей теоріей. Какъ мы увидимъ далѣе, въ основѣ современной теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго лежатъ такія положенія, которыя приводятся къ возможности разложенія функціи въ безконечный рядъ по степенямъ перемѣннаго независимаго, а также къ существованію производныхъ различныхъ порядковъ отъ этихъ функцій, теорія же функцій вещественнаго перемѣннаго ограничивается самымъ общимъ понятіемъ о функціи, независимо отъ существованія производныхъ и какихъ либо разложеній въ ряды. Въ виду этого я и считаю теорію функцій вещественнаго перемѣннаго теорій болѣе общей.

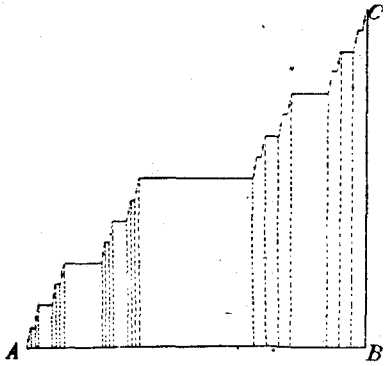
Въ нашемъ краткомъ обзорѣ теоріи функцій я скажу о теоріи функцій вещественнаго перемѣннаго очень немного.

Полигональныя кривыя.

§ 6. Разсмотримъ функцію, которая геометрически строится слѣдующимъ образомъ.

Она опредѣлена для значеній независимаго перемѣннаго, лежащихъ въ промежуткѣ (0, 1), причемъ при $x=0$ также $y=0$, а при $x=1$ и $y=1$. Дѣлимъ промежутокъ на три равныя части и считаемъ для x, лежащаго въ среднемъ промежуткѣ $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $y=\frac{1}{2}$, т. е. среднему ариѳметическому изъ значеній 0, 1, соотвѣтствующихъ краямъ того промежутка, который дѣлится на три части. Остающіеся крайніе промежутки $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ дѣлимъ каждый на три части, причемъ считаемъ функцію постоянной въ среднихъ частяхъ каждаго изъ этихъ промежутковъ и равной среднему ариѳметическому изъ значеній, соотвѣтствующихъ концамъ промежутка, который мы дѣлимъ на три части, такъ что для промежутка $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ получаемъ $y=\frac{1}{4}$, а для $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}, \frac{2}{3}+\frac{2}{9}\right)$

получаемъ $y=\frac{3}{4}$. Продолжая такимъ образомъ далѣе дѣленіе на три части оставшихся нераздѣленными промежутковъ, мы получаемъ непрерывную функцію, которая геометрически представляется въ видѣ лѣстницы со ступенями различной длины.



Черт. 109.

Я обратилъ вниманіе на эту функцію въ статьѣ „Sur les lignes composées des parties réctilignes“ (Comptes Rendus de l'Académie de Paris, 1898, n^0 II) въ виду того, что она даетъ возможность сдѣлать нѣкоторыя достойныя вниманія заключенія относительно понятія о кривой линіи вообще.

Въ самомъ дѣлѣ, построенная геометрически функція можетъ быть слѣдующимъ образомъ просто задана аналитически. Будемъ независимое перемѣнное x писать по тройничной системѣ счисленія

$$x=0,a_1a_2a_3\ldots=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\ldots,$$

гдѣ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ суть цифры, изъ которыхъ каждая можетъ имѣть одно изъ трехъ значеній 0, 1, 2. Будемъ соотвѣтственныя значенія y писать по двойничной системѣ

$$y=0,b_1b_2b_3\ldots=\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{2^3}+\ldots,$$

гдѣ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ суть также цифры, имѣющія одно изъ значеній 0, 1. Тогда мы нашу функцію аналитически можемъ опредѣлить. Разсмотримъ два случая.

Первый случай. Пусть всѣ цифры a_i независимаго перемѣннаго x четныя, т. е. имѣютъ значенія 0 или 2; тогда цифры b_i опредѣлимъ изъ равенства

$$b_i=\frac{a_i}{2}.$$

При этомъ, если разложеніе x имѣло безконечное число цифръ, отличныхъ отъ нуля, то таково же будетъ и разложеніе y.

Второй случай. Пусть среди цифръ числа x будутъ существовать нечетныя, и пусть первая нечетная цифра будетъ $a_\kappa = 1$. Тогда возьмемъ за y значеніе, опредѣляемое цифрами

$$b_1 = \frac{a_1}{2}, b_2 = \frac{a_2}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad b_{\kappa-1} = \frac{a_{\kappa-1}}{2}, b_\kappa = 1,$$

всѣ же остальныя b будемъ считать нулями.

Въ статьѣ „Объ основныхъ предложеніяхъ теоріи функцій двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ“ (Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества, т. VI) я подробно разсматриваю свойства опредѣленной такимъ образомъ функціи и показываю, что наша функція интегрируема, т. е., если мы нашу функцію обозначимъ знакомъ

$$y = \vartheta(x),$$

то легко вычислить интегралъ

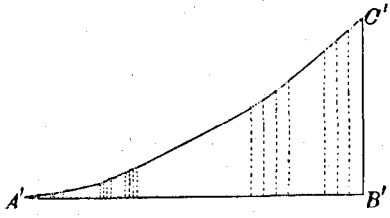
$$\omega(x) = \int_0^x \vartheta(x)\, dx,$$

гдѣ $x < 1$.

Такъ какъ наша функція $\vartheta(x)$ не имѣетъ опредѣленной производной во всѣхъ концахъ ступеней, то функція $\omega(x)$ будетъ обладать тѣмъ свойствомъ, что она будетъ имѣть непрерывную первую производную $\vartheta(x)$, вторая же производная не будетъ существовать для безчисленнаго множества точекъ. Очевидно, что уравненіе

$$y = \omega(x)$$

опредѣлитъ нѣкоторую кривую линію, которая вся будетъ состоять изъ прямолинейныхъ частей, оставаясь въ то же время кривой линіей (черт. 110). Прямолинейныя части будутъ соотвѣтствовать тѣмъ промежуткамъ, въ которыхъ функція $\vartheta(x)$ постоянна.



Черт. 110.

Итакъ, мы замѣчаемъ, что кривую линію можно разсматривать не только, какъ предѣлъ, къ которому стремится ломанная линія, но иногда можно сказать, какъ это мы видимъ въ нашемъ случаѣ, что *кривая линія* есть въ тоже время *ломанная линія*, т. е. линія, состоящая сплошь изъ прямолинейныхъ частей. Очевидно, эти прямо-

линейныя части не упираются другъ въ друга, ибо иначе появлялась бы угловая точка, и касательная не могла бы измѣнять свое направленіе непрерывно вдоль по кривой, между тѣмъ какъ въ дѣйствительности направленіе касательной измѣняется непрерывно вслѣдствіе непрерывности функціи $\vartheta(x)$.

§ 7. Итакъ, если мы захотимъ разсмотрѣть геометрическій образъ, соотвѣтствующій уравненію

$$y = \vartheta(x), \tag{1}$$

и спросимъ себя, можно ли изображенную на черт. 109 лѣстницу считать за линію, то встрѣтимся съ слѣдующимъ затрудненіемъ. Съ одной стороны эта лѣстница вмѣстѣ съ координатами ея конца ограничиваетъ нѣкоторую часть плоскости, такъ что извнѣ нельзя попасть непрерывнымъ движеніемъ во внутрь этой части, не переходя или черезъ прямолинейныя части AB и BC или черезъ какую-нибудь точку, принадлежащую образу, опредѣляемому уравненіемъ (1). Значитъ, эта лѣстница обладаетъ свойствомъ линіи ограничивать часть плоскости. Но, съ другой стороны, вслѣдствіе отсутствія производной въ безчисленномъ числѣ точекъ у функціи $\vartheta(x)$, понятіе о длинѣ дуги линіи (1) отпадаетъ.

Что касается уравненія

$$y = \omega(x),$$

то можно сказать съ полнымъ убѣжденіемъ, что это уравненіе опредѣляетъ дѣйствительно нѣкоторую линію (которую я назвалъ *„полигональной“*), ибо для нея существуетъ уже понятіе о длинѣ дуги между всякими ея двумя точками.

§ 8. Мы привели эти разсужденія для того, чтобы показать, что точное и строгое понятіе о линіи можетъ быть получено только изъ теоріи функцій, т. е. черезъ примѣненіе анализа, геометрическія же наши представленія недостаточно точны и опредѣленны, чтобы можно было разсчитывать на ихъ помощь.

То, что сказано относительно понятія о линіи, очевидно, относится и къ разнымъ другимъ геометрическимъ понятіямъ, напримѣръ, къ понятію о поверхности. Я указалъ на существованіе поверхностей, которыя я назвалъ *полиэдрическими*, и которыя будучи кривыми поверхностями въ смыслѣ непрерывнаго измѣненія касательной плоскости, состоятъ, тѣмъ не менѣе, цѣликомъ изъ плоскихъ частей.

Теорія функцій комплекснаго перемѣннаго.

§ 9. Мы видѣли выше, что при обобщеніи на случай комплекснаго перемѣннаго функцій, извѣстныхъ изъ элементарной математики, приходится для различныхъ видовъ функцій дѣлать отдѣльныя обобщенія. Для того, чтобы установить *общее* понятіе о функціи комплекснаго перемѣннаго, въ наукѣ имѣются три главныхъ пріема, о которыхъ мы въ краткихъ словахъ упомянемъ.

Теорія Cauchy.

§ 10. Cauchy предлагаетъ разсматривать всякое выраженіе вида

$$F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \tag{1}$$

гдѣ i мнимый знакъ, а φ и ψ двѣ произвольныя вещественныя функціи отъ x и y, какъ нѣкоторую функцію отъ комплекснаго перемѣннаго $z = x + iy$, замѣчая вполнѣ естественно, что всякой парѣ значеній x и y будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое опредѣленное значеніе функціи (1).

Далѣе Cauchy вводитъ понятіе о такъ называемыхъ *моногенныхъ* функціяхъ, у которыхъ функціи φ и ψ удовлетворяютъ нѣкоторымъ дифференціальнымъ уравненіямъ. Проще всего можно установить это понятіе слѣдующимъ образомъ. Пусть функція $F(z)$ характеризуется тѣмъ свойствомъ, что она допускаетъ дифференцированіе по буквамъ x и y по правиламъ дифференцированія функціи отъ функціи, т. е.

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = F'(z)\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = F'(z)\frac{\partial z}{\partial y};$$

замѣчая, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \frac{\partial z}{\partial y} = i,$$

получаемъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = F'(z),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+i\frac{\partial\psi}{\partial y}=i\,F'(z),$$

откуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+i\frac{\partial\psi}{\partial y}=i\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Такъ какъ φ и ψ функціи вещественныя, то получимъ, очевидно,

$$(2)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{\partial\psi}{\partial y},\\ \frac{\partial\psi}{\partial x}&=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\end{aligned}$$

Cauchy называетъ функцію $F(z)$ *моногенною* въ томъ случаѣ, если имѣютъ мѣсто равенства (2).

Что касается производной отъ функціи $F(z)$ по буквѣ z, обозначенной черезъ $F'(z)$, то при существованіи равенствъ (2) ея значеніе будетъ

$$(3)\qquad F'(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

§ 11. Названіе *моногенной* функціи въ наукѣ не сохранилось, потому что подъ функціей комплекснаго перемѣннаго принято понимать всегда функцію моногенную. Соотношенія Cauchy (2) предыдущаго §-а приводятъ къ слѣдующему весьма важному опредѣленію.

Дифференцируя соотношенія (2), получимъ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0,$$

откуда видно, что вещественная и мнимая части функціи комплекснаго перемѣннаго суть рѣшенія слѣдующаго уравненія второго порядка

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0,$$

съ частными производными. Это уравненіе имѣетъ громадное значеніе, особенно въ математической физикѣ; оно носитъ названіе уравненія *логариѳмическаго потенціала*, потому что, если мы пожелаемъ искать частное рѣшеніе этого уравненія вида

$$U = f(r),$$

гдѣ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

то для функціи $f(r)$ получимъ lgr. Вещественнымъ рѣшеніямъ уравненія (1) дается часто названіе *гармоническихъ* функцій; слѣдовательно вещественная и мнимая части функціи комплекснаго перемѣннаго суть гармоническія функціи.

Такимъ образомъ задача нахожденія нѣкоторой функціи отъ комплекснаго перемѣннаго равносильна задачѣ нахожденія двухъ гармоническихъ функцій; но легко видѣть, что Cauchy'евскія соотношенія (2) § 10 позволяютъ одну изъ гармоническихъ функцій выразить черезъ другую, ибо если

$$\psi = \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right),$$

то на основаніи равенствъ (2) § 10 получимъ

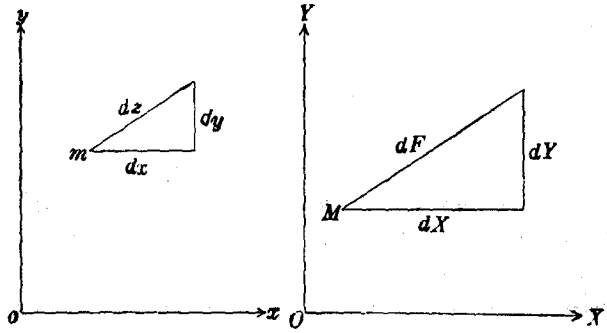
$$\psi = \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx \right),$$

и если φ есть нѣкоторая гармоническая функція, то подинтегральный двучленъ удовлетворяетъ условіямъ интегрируемости, и мы получимъ опредѣленную функцію ψ.

Изъ этихъ разсужденій заключаемъ, что функція комплекснаго перемѣннаго опредѣляется своею вещественною частью такъ, что, если задана функція комплекснаго перемѣннаго, то ея вещественная часть будетъ гармоническая функція, и обратно, всякой гармонической функціи φ будетъ соотвѣтствовать функція комплекснаго перемѣннаго, имѣющая вещественной частью эту гармоническую функцію. Теорія функцій комплекснаго перемѣннаго есть въ то же время теорія гармоническихъ функцій.

Конформное изображеніе.

§ 12. Riemann показалъ, что предыдущія соображенія Cauchy могутъ быть слѣдующимъ образомъ геометрически интерпретированы.



Черт. 111.

Возьмемъ двѣ плоскости xoy и XOY (черт. 111); на одной, xoy, будемъ изображать точками m значенія комплексной перемѣнной $z = x + iy$, на другой, XOY, будемъ изображать точками M соотвѣтствующія значенія функціи

$$F(z) = X + iY,$$

гдѣ $X = \varphi$ и $Y = \psi$ суть гармоническія функціи. Можно сказать, что заданіе функціи комплекснаго перемѣннаго, т. е., другими словами, заданіе функцій φ и ψ даетъ нѣкоторое изображеніе (карту) плоскости m на M, потому что всякой точкѣ m, имѣющей координаты x и y, будетъ соотвѣтствовать одна или нѣсколько точекъ M. Ограничиваясь разсмотрѣніемъ однозначныхъ функцій, мы скажемъ, что точкамъ m будутъ соотвѣтствовать опредѣленныя точки M. Если мы подъ дифференціаломъ перемѣннаго z и функціи $F(z)$ будемъ разумѣть выраженія

$$dz = dx + idy,$$
$$dF(z) = dX + idY,$$

то Riemann показалъ, что, если существуютъ условія моногенности, то отношеніе

$$\frac{dF(z)}{dz}$$

не зависитъ отъ dx и dy. Въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right)}{dx + idy} =$$

$$=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(dx+idy)+i\frac{\partial\psi}{\partial x}(dx+idy)}{dx+idy}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

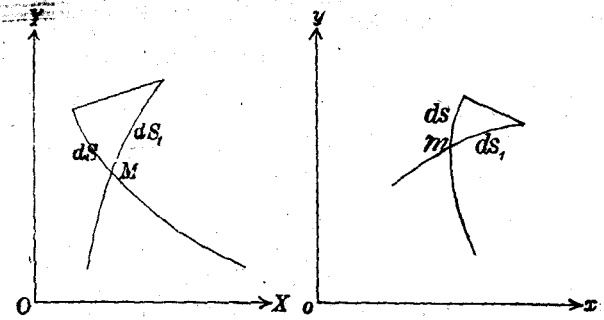
Выражаясь геометрически, можемъ сказать, что отношеніе $\frac{dF}{dz}$ не зависитъ отъ направленія дифференціала dz, а зависитъ только отъ координатъ начала этого дифференціала.

Сопоставляя эту формулу съ формулою (3) § 10, мы видимъ, что

$$\frac{dF(z)}{dz}=F'(z),$$

такъ что для комплексной функціи остается то же самое значеніе производной, какъ отношенія дифференціаловъ, что и для вещественныхъ функцій.

§ 13. Независимость производной комплексной функціи отъ направленія дифференціала dz независимаго перемѣннаго влечетъ, какъ слѣдствіе, весьма важное свойство изображенія одной плоскости на другой. Это изображеніе сохраняетъ подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ и носитъ поэтому названіе *конформнаго*. Всякій безконечно малый треугольникъ, имѣющій вершину въ точкѣ m плоскости независимаго перемѣннаго z, обращается въ подобный ему треугольникъ въ плоскости функціи комплекснаго перемѣннаго. Для этого разсмотримъ дифференціалъ какой-нибудь дуги s въ плоскости z (черт. 112), т. е.



Черт. 112.

$$ds^2=dx^2+dy^2,$$

и дифференціалъ соотвѣтственной дуги S въ плоскости функціи $F(z)$, т. е.

$$dS^2=dX^2+dY^2=edx^2+2f\,dx\,dy+g\,dy^2,$$

гдѣ на основаніи условій моногенности

$$e = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = g,$$

$$f = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,$$

или

$$dS^2 = e\,(dx^2 + dy^2) = e ds^2.$$

Отношеніе

$$\frac{dS}{ds} = \sqrt{e} \tag{1}$$

будемъ называть *масштабомъ* изображенія въ точкѣ m, соотвѣтствующимъ направленію элемента дуги s. Равенство (1) показываетъ, что этотъ масштабъ не зависитъ отъ направленія дуги; другими словами, этотъ масштабъ одинъ и тотъ же для всѣхъ направленій, исходящихъ изъ точки m, такъ что безконечно малый кругъ, описанный изъ точки m, обращается въ кругъ, описанный изъ точки M. Очевидно, что, если составимъ треугольникъ на двухъ дифференціалахъ ds и ds_1, выходящихъ изъ точки m, то соотвѣтственный треугольникъ на дифференціалахъ dS и dS_1 будетъ обладать свойствомъ

$$\frac{dS_1}{ds_1} = \frac{dS}{ds},$$

т. е. двѣ сходственныя стороны будутъ пропорціональны.

Покажемъ еще, что уголъ между дифференціалами на картѣ тотъ же, что и на изображаемой плоскости; легко убѣдиться, что

$$\begin{vmatrix} dx, & dy \\ dx_1, & dy_1 \end{vmatrix} = ds.\, ds_1.\, \sin a,$$

$$\begin{vmatrix} dX, & dY \\ dX_1, & dY_1 \end{vmatrix} = dS.\, dS_1.\, \sin A,$$

гдѣ a уголъ между дифференціалами ds и ds_1, а A уголъ между dS и dS_1. Далѣе имѣемъ

$$\begin{vmatrix} dX, & dY \\ dX_1, & dY_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}, & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx, & dy \\ dx_1, & dy_1 \end{vmatrix},$$

а такъ какъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}, & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 = e,$$

то получаемъ

$$dS.\, dS_1 \sin A = e\, ds.\, ds_1.\, \sin a;$$

но

$$\frac{dS}{ds} = \frac{dS_1}{ds_1} = \sqrt{e},$$

слѣдовательно

$$dS.\, dS_1 = e\, ds.\, ds_1,$$

а потому

$$\sin a = \sin A.$$

Изъ послѣдняго равенства въ связи съ пропорціей дифференціаловъ дугъ слѣдуетъ подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ.

Итакъ, функція комплекснаго перемѣннаго задана, если задано конформное изображеніе всей плоскости или нѣкоторой ея части на другой.

Интегралы отъ функцій комплекснаго перемѣннаго.

§ 14. Cauchy въ своемъ знаменитомъ сочиненіи „Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, 1825“, желая распространить интегральное исчисленіе на функціи комплекснаго перемѣннаго, ввелъ слѣдующее важное обобщеніе понятія объ опредѣленномъ интегралѣ, а именно, онъ ввелъ понятіе объ *интегралѣ, взятомъ по нѣкоторой кривой линіи* въ плоскости комплекснаго перемѣннаго.

Возьмемъ два комплексныхъ числа z_0 и Z. Проведемъ въ плоскости нѣкоторую кривую линію (черт. 113), идущую отъ точки z_0 къ точкѣ Z. Укажемъ на этой кривой рядъ точекъ $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ и разсмотримъ сумму

(1) $$[z_1 - z_0] f(\xi_1) + (z_2 - z_1] f(\xi_2) + \\ + \ldots + [Z - z_{n-1}] f(\xi_n),$$

Черт. 113.

гдѣ ξ_i есть комплексное число, соотвѣтствующее точкѣ, лежащей на дугѣ $z_{i-1} z_i$. Будемъ увеличивать число n такимъ образомъ, чтобы наибольшее изъ разстояній $z_{i-1} z_i$ точекъ стремилось къ нулю. Тогда, если сумма (1) имѣетъ

предѣлъ, не зависящій отъ закона расположенія точекъ ξ_i, то предѣлъ представляетъ собою интегралъ

$$\int f(z)\,dz,$$

взятый по разсматриваемому контуру $(z_0 Z)$.

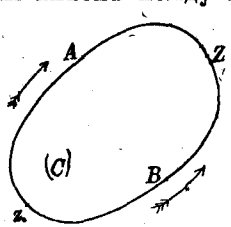
Очевидно, что обыкновенный опредѣленный интегралъ при вещественныхъ перемѣнномъ независимомъ и функціи есть частный случай такого *криволинейнаго* интеграла, когда путь интегрированія идетъ по вещественной оси x-овъ.

§ 15. Для вещественныхъ интеграловъ мы имѣемъ формулу

$$(2) \qquad \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = F(Z) - F(z_0),$$

гдѣ F есть первообразная функція относительно функціи f. Cauchy поставилъ себѣ цѣлью разсмотрѣть вопросъ, остается ли формула (2) справедливой для комплексныхъ интеграловъ; если она остается справедливой для комплексныхъ криволинейныхъ интеграловъ, то она выражаетъ не что иное, какъ зависимость величины интеграла только отъ концовъ z_0 и Z пути интегрированія. Дѣйствительно, Cauchy доказалъ свою знаменитую теорему, что *интегралъ, взятый между двумя точками z_0 и Z не зависитъ отъ путей интегрированія*, если только эти пути проходятъ въ той части плоскости, гдѣ подинтегральная функція $f(x)$ остается конечной, непрерывной и однозначной или, какъ принято говорить, *голоморфной*.

§ 16. Эту теорему можно формулировать еще иначе. Если мы имѣемъ между точками z_0 и Z (черт. 114) два пути интегрированія $z_0 A Z$ и $z_0 B Z$, и если внутри сомкнутаго контура $z_0 A Z B z_0$ функція голоморфна, то два интеграла будутъ одинаковы, т. е.



Черт. 114.

$$(1) \qquad \int_{z_0 A Z} - \int_{z_0 B Z} = 0.$$

Если мы измѣнимъ направленіе интегрированія по контуру на обратное, то измѣняется знакъ дифференціала dz, и, значитъ, интегралъ мѣняетъ свой знакъ, т. е.

$$\int_{z_0 B Z} = -\int_{Z B z_0}$$

Тогда изъ равенства (1) получимъ

$$\int_{z_0 A Z} + \int_{Z B z_0} = 0,$$

сумму же двухъ интеграловъ въ первой части послѣдняго равенства можно замѣнить однимъ интеграломъ, взятымъ по сомкнутому контуру C, который можно обозначить знакомъ $\int_{(c)}$. Получаемъ равенство

$$\int_{(c)} = 0.$$

Это равенство выражаетъ ту же самую теорему Cauchy, только нѣсколько иначе формулированную, а именно: *интегралъ по сомкнутому контуру равенъ нулю, если внутри контура подинтегральная функція остается голоморфной, т. е. однозначной, конечной и непрерывной.*

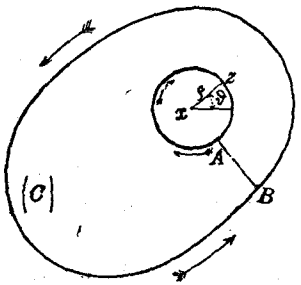
§ 17. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію интеграловъ, взятыхъ по сомкнутому контуру (C), когда внутри этого контура подинтегральная функція перестаетъ быть конечной. Разсмотримъ только случай, когда подинтегральная функція внутри контура обращается только въ одной точкѣ x въ безконечность; такого рода, напримѣръ, будетъ функція

$$\frac{f(z)}{z-x},$$

гдѣ $f(z)$ голоморфна на контурѣ и внутри контура (C). Разсмотримъ интегралъ

$$\int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x} dz.$$

Опишемъ изъ точки x (черт. 115) кругъ безконечно малаго радіуса ρ и соединимъ произвольную точку A этого круга съ нѣкоторою произвольною точкою B контура (C) прямою. На всякомъ контурѣ условимся называть положительнымъ то движеніе вокругъ этого контура, при которомъ замкнутая часть плоскости остается *налѣво*. Контуръ, огибающій кольцо между контуромъ (C) и безконечно малымъ кругомъ ρ, можно получить, двигаясь въ положительномъ направленіи по контуру (C), затѣмъ по прямой отъ B къ A, въ отрицательномъ направленіи по кругу ρ и, наконецъ, по прямой отъ A къ B. Части интеграла, соотвѣтствующія прямолинейнымъ частямъ BA и AB, взаимно уничтожаются, и мы получаемъ по теоремѣ Cauchy



Черт 115.

$$\int_{(c)} + \int_{(-\rho)} = 0,$$

гдѣ знакомъ $(-\rho)$ указано отрицательное направленіе движенія по кругу ρ; мѣняя это направленіе, получимъ

$$\int_{(c)} = \int_{(+\rho)},$$

такъ что вычисленіе заданнаго интеграла свелось къ вычисленію интеграла, взятаго по безконечно малому кругу (ρ).

Обозначая черезъ ϑ аргументъ разности $z - x$, получимъ

$$z - x = \rho e^{i\vartheta},$$

откуда

$$dz = \rho i e^{i\vartheta} d\vartheta.$$

Мы видимъ, что интегралъ по кругу ρ преобразуется въ

$$i \int_0^{2\pi} f(x + \rho e^{i\vartheta}) d\vartheta,$$

но, такъ какъ на основаніи непрерывности функціи $f(z)$ при безконечно маломъ ρ будетъ

$$f(x+\rho e^{i\vartheta})=f(x)+\varepsilon,$$

гдѣ ε безконечно малая величина, то получимъ

$$\int_{(c)}\frac{f(z)}{z-x}dz=i\,f(x)\int_0^{2\pi}d\vartheta+i\int_0^{2\pi}\varepsilon\,d\vartheta.$$

Но интегралъ $\int_0^{2\pi}\varepsilon\,d\vartheta$ при уменьшеніи ρ до нуля имѣетъ предѣломъ нуль, слѣдовательно мы получаемъ слѣдующую формулу:

$$(1)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{f(z)}{z-x}dz,$$

составляющую *вторую теорему Cauchy*.

Послѣдняя формула приводитъ къ слѣдующему весьма важному замѣчанію. Оказывается, что для вычисленія значенія функціи $f(z)$ для всякаго значенія $z=x$, лежащаго внутри контура, достаточно знать лишь значенія функціи $f(z)$, соотвѣтствующія различнымъ точкамъ этого контура.

Это замѣчаніе относятся и къ функціямъ гармоническимъ, а именно, если мы будемъ искать рѣшеніе уравненія

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0,$$

непрерывное и конечное внутри нѣкотораго сомкнутаго заданнаго контура (C), то это рѣшеніе опредѣляется значеніями его на контурѣ, т. е., если заданъ по произволу рядъ вещественныхъ численныхъ значеній, соотвѣтствующихъ разнымъ точкамъ контура, то существуетъ одно рѣшеніе уравненія (2), имѣющее эти значенія на контурѣ. Значенія на контурѣ можно задать, конечно, какъ функцію отъ дуги контура $\psi(s)$, и тогда замѣчательно, что гармоническая функція не перестаетъ существовать и быть непрерывной внутри контура даже и въ тѣхъ случаяхъ, когда функція $\psi(s)$ перестаетъ быть непрерывною.

§ 18. Задача нахожденія гармонической функціи по заданнымъ ея значеніямъ на сомкнутомъ контурѣ подъ условіемъ ея

непрерывности внутри контура носитъ названіе *задачи Dirichlet*. Эта задача рѣшена въ явномъ видѣ лишь для небольшого числа преимущественно алгебраическихъ контуровъ. Въ моей статьѣ „Sur le problème de Dirichlet“ (Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Bordeaux. 1895.) указанъ общій пріемъ, дающій рѣшеніе задачи Dirichlet для алгебраическихъ контуровъ, какъ частный случай котораго получаются извѣстные уже случаи рѣшенія этой задачи. Этотъ пріемъ состоитъ въ слѣдующемъ.

Если заданъ алгебраическій контуръ уравненіемъ

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

то мы вводимъ двѣ комплексныя величины

$$\xi = x + iy, \xi' = x - iy;$$

тогда уравненіе (1) можно будетъ переписать такъ:

$$f\left(\frac{\xi + \xi'}{2}, \frac{\xi - \xi'}{2i}\right) = 0.$$

Разрѣшая послѣднее уравненіе относительно ξ, получимъ

$$\xi = F(\xi'),$$

и F есть та функція, при помощи которой я составляю выраженіе искомаго рѣшенія задачи Dirichlet. Напримѣръ, если контуръ есть кругъ

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

мы получаемъ

$$\xi\xi' = r^2,$$

откуда

$$\xi = \frac{r^2}{\xi'}.$$

Обобщеніе теоремы Taylor'a.

§ 19. Формула (1) § 17 даетъ возможность вычислить производныя любого порядка отъ функціи $f(z)$. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя это равенство по x, получимъ

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f(z)}{(z-x)^2}\,dz \tag{1}$$

и вообще

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}dz.$$

Имѣя въ виду разложеніе

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}+\frac{x^2}{z^3}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{z^n}+\frac{x^n}{z^n(z-x)}$$

и замѣняя z на $z-a$ и x на $x-a$, получимъ

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{z-a}+\frac{x-a}{(z-a)^2}+\frac{(x-a)^2}{(z-a)^3}+\ldots+\frac{(x-a)^n}{(z-a)^n(z-x)};$$

умножая обѣ части послѣдняго равенства на $f(z)\,dz$ и интегрируя, получимъ на основаніи формулы (1) § 17

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+$$
$$+\ldots+a_{n-1}(x-a)^{n-1}+R_n,$$

гдѣ

$$a_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{f(z)\,dz}{z-a}=f(a),$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{k+1}}=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a),$$

$$R_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^n\frac{f(z)}{z-x}dz.$$

Мы получили формулу Taylor'a съ остаточнымъ членомъ R_n въ видѣ интеграла.

Теорія Weierstrass'a.

§ 20. Можно убѣдиться, что разложеніе Taylor'a

(1) $$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\ldots$$

выражаетъ собою разсматриваемую функцію $f(z)$ внутри круга сходимости этого ряда. Weierstrass предлагаетъ опредѣлять функціи комплекснаго перемѣннаго рядами вида (1), такъ что, по его теоріи, для каждой точки a плоскости долженъ быть построенъ рядъ (1), т. е. указаны его коэффиціенты; сама функція разсматривается тогда, какъ совокупность такихъ рядовъ.

Если въ рядѣ (1) n первыхъ коэффиціентовъ $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ равны нулю, то разложеніе (1) будетъ имѣть видъ

$$f(z) = (z-a)^n [a_n + a_{n+1}(z-a) + \ldots];$$

въ этомъ случаѣ точка a будетъ *корнемъ* или *нулемъ* функціи $f(z)$. Если $n=1$, то нуль называется *простымъ*, а если $n>1$, то *кратнымъ*, причемъ показатель n носитъ названіе *порядка кратности* нуля.

§ 21. Если вблизи точки a не существуетъ разложенія функціи въ видѣ ряда (1), то точка a называется *особенной*.

Особенныя точки бываютъ разныхъ видовъ; среди нихъ замѣчательны такъ называемые полюсы. Точку a называютъ *полюсомъ* или *безконечностью* функціи $f(z)$, если будетъ съ одной стороны

$$f(a) = \infty,$$

а съ другой стороны будетъ существовать такой цѣлый положительный показатель n, что функція

$$(z-a)^n f(z)$$

раскладывается около точки a въ рядъ вида (1) § 20, т. е. будетъ имѣть мѣсто равенство

$$(z-a)^n f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 +$$

Итакъ, функція $f(z)$ имѣетъ около точки a видъ

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^n} + \frac{a_1}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z-a} +$$

$$+ a_n + a_{n+1}(z-a) + \ldots$$

или

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^n} + \frac{a_1}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{a^{n-1}}{z-a} + g(z),$$

гдѣ $g(z)$ *голоморфная* функція около точки a. Число n называется *порядкомъ* полюса.

Поверхности Riemann'a.

§ 22. Обращаясь теперь къ разсмотрѣнію функцій многозначныхъ, укажемъ имѣющій важное значеніе въ наукѣ способъ Riemann'a сопоставлять значенія этихъ функцій точкамъ нѣкоторыхъ особенныхъ поверхностей, которыя въ настоящее время носятъ названіе *поверхностей Riemann'a*. Поверхности Riemann'a имѣютъ особен-

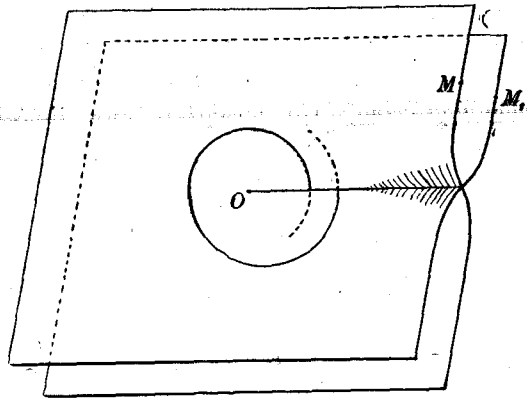
ное значеніе въ теоріи алгебраическихъ функцій, такъ какъ эти функціи суть функціи многозначныя, имѣющія *конечное* число значеній для каждаго значенія независимаго перемѣннаго.

Ограничимся разсмотрѣніемъ самой простой многозначной функціи

$$\sqrt{z}.$$

Эта функція для всякаго z имѣетъ два различныхъ значенія $+\sqrt{z}$ и $-\sqrt{z}$. Если аргументъ z увеличивается на 2π, т. е., другими словами, если мы обходимъ на полную окружность около начала координатъ, то аргументъ функціи $\sqrt{z}$ измѣняется только на π (ибо при извлеченіи корня квадратнаго аргументъ дѣлится пополамъ). Если же аргументъ комплекснаго числа измѣняется на π, причемъ модуль остается безъ измѣненія, то комплексное число мѣняетъ свой знакъ, ибо косинусъ и синусъ аргумента мѣняютъ свой знакъ отъ прибавленія къ аргументу числа π.

Riemann предлагаетъ разсматривать плоскость состоящей изъ двухъ отдѣльныхъ листовъ, одинъ на другой наложенныхъ, причемъ каждая точка плоскости будетъ соотвѣтствовать двумъ точкамъ: одной точкѣ M (черт. 116) на верхнемъ листѣ и другой точкѣ M_1, непосредственно подъ ней лежащей, на нижнемъ; слѣдовательно, два значенія функціи $+\sqrt{z}$ и $-\sqrt{z}$, соотвѣтствующія одному и тому же значенію z, расположатся на двухъ различныхъ листахъ, одно значеніе на верхнемъ листѣ, другое на нижнемъ въ точкахъ M и M_1, соотвѣтствующихъ точкѣ плоскости, указанной независимой перемѣнной z.

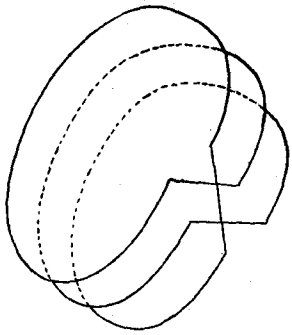


Черт. 116.

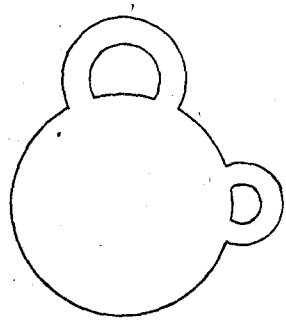
Такъ какъ послѣ одного обхода около начала координатъ долженъ мѣняться знакъ у функціи, то, значитъ, долженъ совершиться переходъ съ одного листа на другой. Въ виду этого по нѣкоторой прямой, идущей отъ начала координатъ, происходитъ

соединеніе крестъ на крестъ двухъ листовъ, что достаточно ясно указано на чертежѣ 116.

Для функціи $\sqrt[3]{z}$ придется имѣть уже 3 листа, связанныхъ около начала координатъ такъ, какъ это показано на черт. 117.



Черт. 117.



Черт 118.

Мы говорили, что поверхности Riemann'а относятся къ геометріи положенія, потому что можно предполагать листы поверхности гибкими и растяжимыми и придавать имъ непрерывнымъ изгибаніемъ ихъ форму какой угодно поверхности. Въ послѣднее время указано, что поверхностямъ Riemann'а можно придавать видъ гиреобразный (черт. 118), благодаря чему достигается большая ясность и наглядность теоріи.

ГЛАВА VIII.

Интегральное исчисленіе, какъ источникъ новыхъ трансцендентныхъ.

§ 1. Въ § 158 гл. III мы уже видѣли, что лишь немногіе типы интеграловъ берутся въ конечномъ видѣ, большинство же интеграловъ представляютъ собою новыя трансцендентныя. При этомъ нужно замѣтить то весьма важное обстоятельство, что интегральное исчисленіе даетъ въ то же время данныя для нахожденія свойствъ этихъ трансцендентныхъ. Такъ, напримѣръ, если бы теорія логариѳмовъ не была извѣстна изъ элементарнаго курса, то ее мы получили бы изъ интегральнаго исчисленія, если бы стали разсматривать интегралъ, взятый отъ функціи $\frac{1}{x}$.

Въ самомъ дѣлѣ, мы легко получимъ изъ интегральнаго исчисленія основную формулу теоріи логариѳмовъ

$$lg\,x + lg\,y = lg\,(x\,y),$$

если опредѣлимъ функцію $lg\,x$ формулой

$$lg\,x = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

Разсмотримъ для этого уравненіе

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0. \tag{1}$$

Если мы его проинтегрируемъ, то получимъ

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = C.$$

гдѣ C нѣкоторая произвольная постоянная. Послѣднее равенство можно переписать такъ:

(2) $$lg\,x + lg\,y = C.$$

Съ другой стороны уравненіе (1) можно будетъ переписать въ видѣ

$$y\,dx + x\,dy = 0$$

или

$$d(x\,y) = 0;$$

интегрируя, получаемъ

(3) $$xy = \alpha,$$

гдѣ α нѣкоторая произвольная постоянная.

Такъ какъ уравненія (2) и (3) должны быть тождествами, справедливыми при всѣхъ значеніяхъ x и y, то, полагая $y = 1$, получимъ изъ уравненія (2)

$$lg\,x = C,$$

а изъ уравненія (3)

$$x = \alpha.$$

Отсюда получаемъ такую зависимость между постоянными:

(4) $$C = lg\,\alpha.$$

Равенство (4) приводитъ къ равенству

$$lg\,x + lg\,y = lg\,(xy),$$

которое требовалось доказать.

§ 2. Подобнымъ же образомъ, если бы намъ не была извѣстна тригонометрія, то мы могли бы ввести круговую функцію $arc\ sin\ x$ при помощи интеграла

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

и, повторяя способъ разсужденія, который мы примѣнили въ предыдущемъ §-ѣ для $lg\,x$, мы придемъ къ теоремѣ сложенія функціи $sin\,x$, выражающейся формулой

$$sin\,(x + y) = sin\,x\,cos\,y + cos\,x\,sin\,y.$$

§ 3. Конечно, выводъ теоріи логариѳмовъ и тригонометріи изъ интегральнаго исчисленія представляетъ собою задачу болѣе интересную, чѣмъ полезную, потому что съ этими частями математики мы знакомы уже въ другомъ изложеніи, но такого рода раз-

сужденія сыграли въ наукѣ большую роль, потому что показали, какимъ образомъ можно изучать при помощи интегральнаго исчисленія свойства новыхъ трансцендентныхъ, которыя это исчисленіе вводитъ.

Мы ограничимся въ нашемъ краткомъ изложеніи только указаніемъ на два класса новыхъ трансцендентныхъ, изученіемъ которыхъ прославились математики XIX столѣтія, а именно на такъ называемыя *эллиптическія функціи* и *Abel'евы функціи*.

Эллиптическія функціи.

§ 4. Въ § 157 гл. III мы видѣли уже, что всѣ интегралы отъ раціональныхъ функцій берутся въ конечномъ видѣ. Когда мы переходимъ къ разсмотрѣнію интеграловъ отъ ирраціональныхъ функцій, то необходимо обратить вниманіе на слѣдующій важный результатъ, принадлежащій Euler'у.

Если ирраціональность подинтегральной функціи состоитъ только въ одномъ корнѣ квадратномъ изъ многочлена не выше второй степени, то интегралъ берется въ конечномъ видѣ.

Другими словами, всякій интегралъ вида

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

гдѣ $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ выражаетъ произвольную раціональную функцію отъ двухъ аргументовъ x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, берется въ конечномъ видѣ.

§ 5. Для нахожденія такихъ интеграловъ употребляются знаменитыя *подстановки Euler'a*. Эти подстановки Euler'омъ взяты изъ соображеній Діофантова анализа. Одною изъ важныхъ задачъ Діофантова анализа является задача подобрать такія раціональныя значенія для x, чтобы $\sqrt{ax^2+bx+c}$, гдѣ a, b, c раціональныя числа, выразился раціональнымъ числомъ. Легко убѣдиться, что можно нѣсколькими способами ввести въ разсмотрѣніе вмѣсто x новую перемѣнную t такимъ образомъ, чтобы какъ x, такъ и корень квадратный выражались раціонально черезъ эту перемѣнную.

Обращаясь къ нашему общему случаю, когда коэффиціенты a, b, c числа произвольныя, получимъ первое преобразованіе Euler'a, если положимъ

(1) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}.\,x+t,$$

отсюда, возвышая въ квадратъ, имѣемъ

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}.\,xt+t^2,$$

$$bx+c=2\sqrt{a}\,xt+t^2,$$

$$x(b-2\sqrt{a}\,t)=t^2-c,$$

откуда

(2) $$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}.$$

Подставляя выраженіе (2) въ (1), получимъ

(3) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{b-2\sqrt{a}\,t}+t.$$

Дифференцируя равенство (2), получимъ

(4) $$dx=\frac{2bt-2\sqrt{a}\,t^2-2\sqrt{a}.\,c}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}\,dt$$

Подставляя (2), (3), (4) въ интегралъ

$$\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

получимъ интегралъ, въ которомъ перемѣнная будетъ t, и который не заключаетъ уже ирраціональности.

Второе преобразованіе получаемъ, полагая

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c},$$

откуда

$$x=\frac{b-2\sqrt{c}\,t}{t^2-a},$$

и, наконецъ, третью подстановку получимъ, вводя въ разсмотрѣніе корни α, β подкоренного трехчлена; имѣемъ

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Подстановка опредѣляется равенствомъ

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t,$$

откуда получаемъ

$$x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}.$$

§ 6. Что касается трансцендентныхъ, вводимыхъ интегральнымъ исчисленіемъ, то, конечно, существуетъ безконечное число видовъ этихъ трансцендентныхъ. Исторія науки обнаруживаетъ тотъ фактъ, что эти новыя трансцендентныя изучались по мѣрѣ ихъ необходимости въ прикладныхъ вопросахъ механики, астрономіи, математической физики, причемъ обнаруживается еще другой весьма важный историческій фактъ, что болѣе простыя и замѣчательныя по своимъ свойствамъ новыя трансцендентныя функціи встрѣчаются чаще въ приложеніяхъ, чѣмъ болѣе сложныя.

Особенный успѣхъ имѣла теорія интеграловъ вида

$$(1) \qquad \int f(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})\,dx,$$

въ которыхъ ирраціональность подинтегральной функціи состоитъ изъ корня квадратнаго изъ полинома третьей или четвертой степени (третья степень получается при $a = 0$). Интегралы такого вида встрѣчаются при разсмотрѣніи дуги эллипса. Въ самомъ дѣлѣ, въ § 65 гл. VI мы вычислили дугу эллипса и видѣли, что получается интегралъ вида (1), въ которомъ корень квадратный имѣетъ видъ

$$\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}.$$

Въ виду этого интегралы типа (1) получили названіе *эллиптическихъ*. Иногда подинтегральная функція f можетъ быть такъ подобрана, что интегралъ (1) берется въ конечномъ видѣ, тогда интегралъ носитъ названіе *псевдоэллиптическаго*. Это названіе подчеркиваетъ то обстоятельство, что названіе эллиптическаго дается интегралу только въ томъ случаѣ, если онъ навѣрное не берется въ конечномъ видѣ.

Liouville'ю принадлежитъ доказательство того, что существуютъ эллиптическіе интегралы, которые не берутся въ конечномъ видѣ, и, слѣдовательно, представляютъ новыя трансцендентныя. Вопросъ о разборѣ тѣхъ случаевъ, когда эллиптическій интегралъ есть псевдоэллиптическій, принадлежитъ къ числу самыхъ видныхъ вопросовъ, изучавшихся въ XIX столѣтіи. Сюда относятся замѣчательныя изслѣдованія Abel'я, Liouville'я, Чебышева и Золотарева.

§ 7. Legendre занимался впродолженіи 40 лѣтъ изученіемъ эллиптическихъ интеграловъ и написалъ большой трактатъ объ этихъ интегралахъ подъ названіемъ „Traité des fonctions elliptiques"; въ этомъ трактатѣ онъ привелъ разсмотрѣніе всѣхъ эллиптическихъ интеграловъ къ разсмотрѣнію слѣдующихъ трехъ простѣйшихъ:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int_0^x \frac{dx}{(x^2+h)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

которые онъ назвалъ интегралами перваго, второго и третьяго вида. Интегралъ перваго вида оказался простѣйшимъ и обладаюшимъ наиболѣе важными свойствами.

Изслѣдованія Legendre'а и его предшественниковъ можно характеризовать, какъ теорію эллиптическихъ интеграловъ; современная теорія эллиптическихъ функцій начинается лишь послѣ открытій Jacobi и Abel'я. Основная мысль этой новой теоріи состоитъ въ слѣдующемъ

Если мы будемъ приближать число k къ нулю, то интегралъ

$$(1) \qquad u=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

будетъ приближаться къ слѣдующему интегралу:

$$(2) \qquad u=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arc\,sin\,x;$$

изъ тригонометріи же извѣстно, что наиболѣе замѣчательными свойствами обладаетъ не функція $u=arc\,sin\,x$, а обратная ей $x=sin\,u$; по этому Jacobi и Abel одновременно стали изучать функцію, обратную интегралу (1), т. е., другими словами, стали разсматривать верхній предѣлъ x этого интеграла, какъ функцію отъ всей величины u интеграла, и замѣтили двоякую періодичность этой функціи. Послѣднее открытіе, несомнѣнно, надо считать самымъ важнымъ открытіемъ XIX столѣтія въ математикѣ.

Въ § 4 гл. VII мы видѣли примѣры періодическихъ функцій и замѣтили, что теорія логариѳмовъ и тригонометрія представляютъ одну и ту же доктрину, которую можно назвать теоріей функцій съ

однимъ періодомъ. Съ другой стороны, какъ показалъ Jacobi, не существуетъ однозначныхъ функцій съ тремя различными періодами. Отсюда понятно, что теорія эллиптическихъ функцій, какъ функцій двояко-періодическихъ, должна была обратиться въ весьма важную, новую послѣ тригонометріи, главу анализа.

Функціи Jacobi.

§ 8. Итакъ, разсмотримъ интегралъ

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{1}$$

Если мы введемъ новую перемѣнную φ при помощи равенства

$$\sin\varphi = x, \tag{2}$$

то получимъ

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{3}$$

Функцію, обратную этому интегралу (3), Jacobi называетъ *амплитудой* и обозначаетъ

$$\varphi = am\, u.$$

Тогда, принимая во вниманіе формулу (2), мы получимъ

$$x = \sin am\, u. \tag{4}$$

Итакъ, верхній предѣлъ x интеграла (1), разсматриваемый какъ функція отъ u, представляетъ собою *синусъ амплитуды* u. Jacobi вводитъ еще двѣ функціи

$$\sqrt{1-x^2} = \cos am\, u, \tag{5}$$

$$\sqrt{1-k^2x^2} = \Delta\, am\, u. \tag{6}$$

§ 9. Какъ было указано въ § 50 гл. I, Euler при изученіи механической задачи о притяженіи точки къ двумъ неподвижнымъ центрамъ пришелъ къ замѣчательной теоремѣ, относящейся къ эллиптическимъ функціямъ, которая въ настоящее время носитъ названіе *теоремы сложенія*.

Пусть задано уравненіе

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0. \tag{1}$$

Вводя новую перемѣнную t при помощи равенствъ

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

мы получимъ черезъ возвышеніе равенствъ (2) въ квадратъ и дифференцированіе слѣдующія равенства

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(1+k^2)x + 2k^2x^3,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(1+k^2)y + 2k^2y^3,$$

откуда

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 2k^2xy(x^2-y^2).$$

Съ другой стороны

$$y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (y^2-x^2)(1-k^2x^2y^2).$$

Далѣе

$$\frac{y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}}{y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}} = -\frac{2k^2xy\left(y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right)}{1-k^2x^2y^2},$$

откуда получаемъ

$$\frac{d}{dt}\left\{lg\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)\right\} = \frac{d}{dt}\left\{lg(1-k^2x^2y^2)\right\};$$

интегрируя, находимъ

$$\frac{y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}}{1-k^2x^2y^2} = c,$$

гдѣ c постоянная величина.

Это равенство, на основаніи формулъ (2), можно переписать окончательно такъ:

$$(3)\qquad \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=c.$$

§ 10. Интегрируя дифференціальное уравненіе (1) § 9, получимъ трансцендентное рѣшеніе

$$(1)\qquad u+v=\alpha,$$

гдѣ

$$u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$v=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

а α постоянная величина. Легко видѣть, съ другой стороны, что формула (3) предыдущаго §-а можетъ быть представлена въ видѣ

$$(2)\qquad \frac{\sin am\,u.\cos am\,v.\Delta am\,v+\sin am\,v.\cos am\,u.\Delta am\,u}{1-k^2(\sin am\,u)^2(\sin am\,v)^2}=\beta,$$

гдѣ черезъ β обозначена постоянная. Для полученія связи между постоянными α и β положимъ въ равенствахъ (1) и (2) $v=0$, тогда

$$(3)\qquad u=\alpha;$$

съ другой стороны, когда приближается къ нулю верхній предѣлъ y интеграла, то величина интеграла v приближается также къ нулю, и мы имѣемъ при $y=0$ также $v=0$; значитъ, функція

$$y=\sin am\,v$$

обращается въ нуль при $v=0$, а функціи

$$\cos am\,v=\sqrt{1-y^2},$$

$$\Delta am\,v=\sqrt{1-k^2y^2}$$

обращаются въ единицы, и мы получаемъ изъ уравненія (2)

$$(4)\qquad \beta=\sin am\,u.$$

Равенства (3) и (4) даютъ слѣдующую зависимость между постоянными α и β:

$$\beta=\sin am\,\alpha,$$

откуда получаемъ слѣдующую формулу:

$$(5)\qquad \sin am(u+v)=$$

$$=\frac{\sin am\,u.\cos am\,v.\Delta am\,v+\sin am\,v\cos am\,u.\Delta am\,u}{1-k^2(\sin am\,u)^2(\sin am\,v)^2}.$$

Послѣдняя формула представляетъ не что иное, какъ формулу сложенія функціи *sin am u*.

§ 11. Разсмотрѣніе эллиптическихъ функцій, какъ функцій обратныхъ эллиптическому интегралу, привело Abel'я и Jacobi къ важному открытію, именно къ открытію двоякой періодичности эллиптическихъ функцій.

Подъ функціей, имѣющей два періода ω_1 и ω_2, мы разумѣемъ такую функцію $f(x)$, которая удовлетворяетъ двумъ тождествамъ

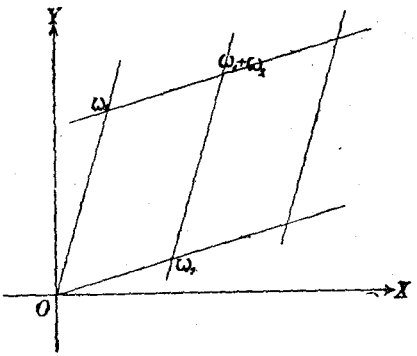
$$(1)\qquad \begin{aligned} f(x+\omega_1) &= f(x), \\ f(x+\omega_2) &= f(x). \end{aligned}$$

Очевидно, что изъ тождествъ (1) можно вывести такое общее

$$f(x+m\omega_1+n\omega_2)=f(x),$$

гдѣ m и n суть произвольныя цѣлыя числа.

Интересно, что два періода функціи не могутъ быть оба вещественные, если мы хотимъ, чтобы эти періоды можно было разсматривать, какъ дѣйствительно различные, а также не могутъ имѣть вещественнаго отношенія $\frac{\omega_1}{\omega_2}$. Отсылая за подробностями къ моей книгѣ „Элементы теоріи эллиптическихъ функцій", мы скажемъ только, что въ случаѣ вещественнаго отношенія $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ функція приводится или къ постоянному числу, или къ функціи съ однимъ вещественнымъ періодомъ.



Черт. 119.

Если мы будемъ разсматривать комплексныя значенія перемѣннаго независимаго, то двоякая періодичность получаетъ слѣдующее замѣчательное геометрическое толкованіе.

Если мы построимъ (черт. 119) на плоскости точки, соотвѣтствующія тремъ числамъ ω_1, ω_2 и $\omega_1+\omega_2$, то эти три точки вмѣстѣ съ началомъ координатъ образуютъ, очевидно, параллелограммъ, который носитъ названіе *параллелограмма періодичности*. Тогда плоскость разбивается прямыми, параллельными сторо-

намъ этого параллелограмма на безчисленное множество равновеликихъ параллелограммовъ, и двойная періодичность выражается въ томъ, что достаточно разсматривать значенія функціи въ одной изъ этихъ фигуръ, ибо эти значенія повторяются въ соотвѣтственныхъ точкахъ остальныхъ параллелограммовъ.

Функціи Θ.

§ 12. Jacobi при детальномъ серьезномъ изученіи эллиптическихъ функцій пришелъ къ своимъ знаменитымъ функціямъ Θ (Theta). Къ нахожденію этихъ функцій мы придемъ естественнымъ путемъ, если пожелаемъ выразить двояко-періодическія функціи рядами, расположенными по функціямъ съ однимъ періодомъ. Такими рядами являются ряды вида

$$\sum C_n e^{\frac{2\pi i n x}{\omega}}, \tag{1}$$

носящіе названіе *рядовъ Fourier*. О рядахъ Fourier будетъ сказано далѣе болѣе подробно.

Сумма (1) распространяется на всѣ положительныя и отрицательныя значенія цѣлаго значка n и представляетъ, очевидно, функцію, имѣющую періодъ ω. Можно себѣ поставить задачу, искать коэффиціенты C_n такимъ образомъ, чтобы рядъ получилъ другой періодъ ω_1. Эта задача оказывается невозможной, если мы хотимъ представить двояко-періодическія функціи однимъ только рядомъ; возможно подобрать коэффиціенты двухъ рядовъ вида (1) такимъ образомъ, чтобы отношеніе этихъ рядовъ кромѣ періода ω имѣло еще періодъ ω_1.

Такимъ путемъ мы приходимъ къ замѣчательнымъ по своимъ свойствамъ функціямъ Θ Jacobi. Послѣдній представилъ свои функціи $\sin am\, u$, $\cos am\, u$ и $\Delta am\, u$ въ видѣ дробей, числители и знаменатели которыхъ суть функціи Θ. Rosenhain замѣтилъ, что функціи Θ встрѣчались уже въ работахъ самаго Fourier по теоріи теплоты, но, конечно, Fourier разсматривалъ ихъ съ совершенно другой точки зрѣнія.

§ 13. Итакъ, будемъ строить выраженіе функціи съ двумя періодами ω_1 и ω_2, слѣдуя методѣ Hermite'a. Введемъ выраженіе

$$q = e^{i\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

и будемъ предполагать коэффиціентъ при i въ отношеніи $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ положительнымъ. Разсмотримъ рядъ

$$(1) \qquad \Phi(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m q^{\frac{m^2}{j}} e^{\frac{2 m \pi i z}{\omega_1}}$$

гдѣ j цѣлое число, а коэффиціенты A_m удовлетворяютъ условію

$$(2) \qquad A_{m+j} = A_m.$$

Условіе (2) показываетъ, что существуетъ только j различныхъ коэффиціентовъ

$$A_0, A_1, A_2 \ . \ . \ . \ A_{j-1},$$

остальные же повторяются періодически.

Легко убѣдиться, что $\Phi(z)$ будетъ голоморфная функція отъ z, имѣющая періодъ ω_1. Для этой цѣли покажемъ, что рядъ (1) сходится при всякомъ комплексномъ значеніи z. Въ самомъ дѣлѣ, извлекая корень степени m изъ m-го члена при m положительномъ, получимъ

$$\sqrt[m]{A_m}\, q^{\frac{m}{j}} e^{\frac{2 \pi i z}{\omega_1}};$$

здѣсь

$$lim \left\{ q^{\frac{m}{j}} \right\} = 0,$$

ибо на основаніи условія, которому удовлетворяетъ отношеніе періодовъ, имѣемъ

$$|q| < 1,$$

выраженіе же $\sqrt[m]{A_m}$ сохраняетъ всегда конечное число различныхъ значеній. Слѣдовательно, половина ряда (1), соотвѣтствующая положительнымъ m, будетъ представлять рядъ сходящійся. Совершенно подобнымъ же образомъ докажемъ сходимость другой половины ряда (1).

§ 14. Возьмемъ функцію

$$\varphi(z) = e^{\frac{j i \pi z^2}{\omega_1 \omega_2}};$$

тогда, если мы умножимъ на $\varphi(z)$ функцію $\Phi(z)$ § 13, то эта

послѣдняя потеряетъ періодъ ω_1, потому что функція $\varphi(z)$ не имѣетъ періода ω_1. Легко убѣдиться, однако, что отъ такого умноженія функція $\Phi(z)$ пріобрѣтаетъ другой періодъ ω_2; въ самомъ дѣлѣ

$$\varphi(z)\Phi(z) = \sum A_m e^{i\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{m^2}{j} + \frac{2mi\pi z}{\omega_1} + ji\frac{\pi z^2}{\omega_1\omega_2}} =$$

$$= \sum A_m e^{\frac{ji\pi}{\omega_1\omega_2}\left(z+\frac{m\omega_2}{j}\right)^2} = \sum A_m \varphi\left(z+\frac{m\omega_2}{j}\right).$$

Но такъ какъ рядъ распространяется на всѣ цѣлыя значенія m отъ $-\infty$ до $+\infty$, то мы имѣемъ право подъ знакомъ суммы вмѣсто значка m написать $m+j$, слѣдовательно,

$$\varphi(z)\Phi(z) = \sum A_{m+j}\varphi\left(z+\omega_2+\frac{m\omega_2}{j}\right),$$

или, на основаніи условія (2) § 13,

$$\varphi(z)\Phi(z) = \sum A_m \varphi\left(z+\omega_2+\frac{m\omega_2}{j}\right),$$

т. е. функція $\varphi(z)\Phi(z)$ имѣетъ періодъ ω_2.

Произвольные коэффиціенты $A_0, A_1, \ldots A_{j-1}$ можно выбирать безчисленнымъ числомъ способовъ. Предположимъ, что выбраны для этихъ коэффиціентовъ двѣ системы значеній, которыя даютъ два значенія Φ_1 и Φ_2 для функціи $\Phi(z)$. Очевидно, что отношеніе

$$(1) \qquad \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$$

будетъ функціей, имѣющей два періода ω_1 и ω_2. Въ самомъ дѣлѣ, дробь (1) имѣетъ періодъ ω_1, ибо числитель и знаменатель имѣютъ этотъ періодъ; но эта дробь имѣетъ также періодъ ω_2, потому что ее можно переписать въ видѣ

$$\frac{\varphi\Phi_1}{\varphi\Phi_2}.$$

Abel'евы функціи.

§ 15. *Abel'евыми интегралами* называются интегралы вида

$$\int F(x,y)\,dx,$$

гдѣ y есть алгебраическая функція отъ x. Названіе Abel'евыхъ эти интегралы получили вслѣдствіе того, что Abel'емъ была найдена знаменитая теорема, составляющая для Abel'евыхъ интеграловъ обобщеніе теоремы Euler'a, относящейся къ эллиптическимъ.

Эллиптическіе интегралы представляютъ, очевидно, частный случай Abel'евыхъ, когда

$$y=\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}.$$

§ 16. При помощи функцій Θ, какъ мы видѣли выше, рѣшается задача о нахожденіи выраженія для двояко-періодической функціи. Можно сказать, что такимъ образомъ рѣшается задача обращенія эллиптическаго интеграла, ибо функція, обратная эллиптическому интегралу, есть, какъ показали Abel и Jacobi, функція двояко-періодическая. Goepel и Rosenhain ввели въ разсмотрѣніе новыя функціи, которыя они назвали функціями Θ отъ двухъ аргументовъ, и которыя представляютъ собою непосредственное обобщеніе функцій Θ Jacobi. Эти функціи дали возможность представить въ явномъ видѣ функціи, обратныя гиперэллиптическимъ интеграламъ, т. е. интеграламъ вида

$$\int f(x,\sqrt{R(x)})\,dx,$$

гдѣ R (x) полиномъ пятой или шестой степени. Эти функціи Goepel'я и Rosenhain'a, будучи функціями отъ двухъ аргументовъ, допускаютъ четыре системы періодовъ.

§ 17. Weierstrass обобщилъ задачу на случай гиперэллиптическихъ интеграловъ болѣе высокаго порядка. Наконецъ, Riemann сдѣлалъ блестящее открытіе, состоящее въ томъ, что при помощи обобщеныхъ функцій Θ можно рѣшить общую задачу обращенія Abel'евыхъ интеграловъ. Такимъ образомъ, Riemann сводитъ теорію Abel'евыхъ интеграловъ на разсмотрѣніе функцій имъ обратныхъ, которыя носятъ названіе Abel'евыхъ.

Не имѣя возможности въ нашемъ краткомъ изложеніи касаться болѣе подробно теоріи Abel'евыхъ функцій, мы укажемъ только, въ чемъ состоятъ обобщенныя функціи Θ.

Пусть имѣется p комплексныхъ перемѣнныхъ

$$z_1, z_2, z_3, \ldots z_p$$

и p^2 постоянныхъ

$$\omega_{\varkappa l} = \omega_{l\varkappa} = \omega'_{\varkappa l} + i\,\omega''_{\varkappa l},$$

гдѣ числа k и l пробѣгаютъ всѣ значенія $1, 2, \ldots p$. Изъ этихъ постоянныхъ, очевидно, различныхъ только $\frac{p(p+1)}{2}$. Кромѣ того, пусть разсматриваются p цѣлыхъ чиселъ

$$r_1, r_2, \ldots r_p,$$

измѣняющихся отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Разсмотримъ квадратичную форму

$$\varphi = \sum_{\varkappa=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \omega_{\varkappa,l}\, r_\varkappa r_l$$

относительно этихъ чиселъ r_i, а также линейную форму

$$\psi = \sum_{\mu=1}^{p} 2\, r_\mu z_\mu$$

Функція Θ, о которой идетъ рѣчь, опредѣляется равенствомъ

$$\Theta(z_1, \ldots z_p) = \sum e^{\pi i(\varphi+\psi)},$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ возможныя цѣлыя положительныя и отрицательныя значенія всѣхъ цѣлыхъ чиселъ r_i.

При помощи этихъ функцій Θ воспроизводятся функціи отъ p аргументовъ, имѣющія $2\,p$ системъ періодовъ. Подъ системой періодовъ разумѣемъ здѣсь систему чиселъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p,$$

которыя удовлетворяютъ тождеству

$$\Theta(z_1+\alpha_1, z_2+\alpha_2, \ldots z_p+\alpha_p) = \Theta(z_1, z_2, \ldots z_p).$$

Теорія опредѣленныхъ интеграловъ.

§ 18. Хотя большинство интеграловъ отъ функцій представляютъ новыя транцендентныя и не берутся въ конечномъ видѣ, тѣмъ не менѣе опредѣленные интегралы часто вычисляются безъ особеннаго труда даже и въ тѣхъ случаяхъ, когда неопредѣлен-

ный интегралъ мы выразить не умѣемъ. Совокупность пріемовъ вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ въ тѣхъ случаяхъ, когда неопредѣленный не берется въ конечномъ видѣ, представляетъ весьма важную часть интегральнаго исчисленія, носящую названіе теоріи опредѣленныхъ интеграловъ.

Существуетъ рядъ пріемовъ вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ, въ которыхъ чаще всего фигурируетъ дифференцированіе и интегрированіе подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла. Мы ограничимся разсмотрѣніемъ примѣра—опредѣленнаго интеграла

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

имѣющаго приложеніе въ теоріи вѣроятностей. Для вычисленія его приходится прибѣгать къ искусственнымъ пріемамъ, ибо неопредѣленный интегралъ

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx$$

не берется въ конечномъ видѣ.

Измѣняя подъ знакомъ интеграла обозначеніе перемѣнной независимой, мы получимъ

$$A = \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy.$$

Далѣе

$$(1) \qquad A^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Возьмемъ (черт. 120) прямоугольныя оси координатъ въ пространствѣ и разсмотримъ кривую

$$y = 0, z = e^{-x^2},$$

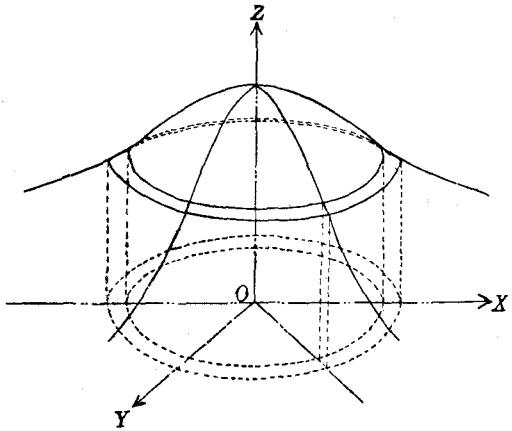
расположенную въ плоскости XZ. Если мы будемъ вращать эту кривую около оси z-овъ, то получимъ поверхность, опредѣляемую уравненіемъ

$$(2) \qquad z = e^{-x^2-y^2}.$$

Двойной интегралъ

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

представляетъ собою, очевидно, четверть объема, заключеннаго между поверхностью (2) и плоскостью XY. Этотъ объемъ можно вычислить, какъ сумму объемовъ цилиндрическихъ слоевъ, основанія которыхъ на плоскости XY представляютъ кольцевыя площади между кругами радіусовъ r и $r+dr$, высота же цилиндра есть e^{-r^2}, гдѣ $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Такъ какъ кольцевыя основанія цилиндра будутъ равны $2\pi r\,dr$, а высота цилиндра e^{-r^2}, то мы получаемъ по формулѣ (1)



Черт. 120.

$$A^2=\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-r^2}\,2\pi r\,dr=\frac{\pi}{4}\left[-e^{-r^2}\right]_0^\infty=\frac{\pi}{4}\left[-0+1\right]=\frac{\pi}{4},$$

откуда искомый интегралъ получаетъ значеніе

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Euler'овы интегралы.

§ 19. Подъ *Euler'овымъ интеграломъ перваго рода* разумѣется функція

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \tag{1}$$

гдѣ p и q положительныя числа. Легко было бы убѣдиться, что интегралъ (1) обращается въ ∞, если p или q было бы отрицательнымъ.

Euler'овымъ интеграломъ второго рода называется выраженіе

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx.$$

§ 20. Всякій Euler'овъ интегралъ перваго рода выражается черезъ интегралы второго рода.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы въ выраженіи $\Gamma(p)$ перемѣнимъ x на y^2, то получимъ

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2p-1}\, dy;$$

такъ какъ величина опредѣленнаго интеграла не зависитъ отъ обозначенія подинтегральной перемѣнной, то можно будетъ, очевидно, написать такую формулу:

$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2q-1}\, dx,$$

откуда

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2} x^{2q-1} y^{2p-1}\, dx\, dy.$$

Вторая часть представляетъ собою объемъ между поверхностью $z = e^{-x^2-y^2} x^{2q-1} y^{2p-1}$ и плоскостью $z = 0$.

Введя полярныя координаты получимъ

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2} x^{2q-1} y^{2p-1}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2q+2p-2} (\cos\vartheta)^{2q-1} (\sin\vartheta)^{2p-1} r\, d\vartheta\, dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)^{2q-1} (\sin\vartheta)^{2p-1}\, d\vartheta \int_0^\infty e^{-t} t^{q+p-1}\, dt,$$

гдѣ $t = r^2$. Итакъ

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q).\, 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)^{2q-1} (\sin\vartheta)^{2p-1}\, d\vartheta.$$

Полагая $sin^2 \vartheta = x$, получимъ

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\,\vartheta)^{2q-1} (sin\,\vartheta)^{2p-1}\, d\vartheta = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx,$$

откуда окончательно

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = B(p, q)\,\Gamma(p+q),$$

или

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

ГЛАВА IX.

Вопросы о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ.

§ 1. Въ исторіи возникновенія дифференціальнаго исчисленія на ряду съ задачей о проведеніи касательныхъ къ линіямъ сыграли большую роль вопросы о нахожденіи наибольшихъ и наименьшихъ значеній функцій, такъ называемыя *задачи на maxima и minima.* Нашъ знаменитый математикъ П. Л. Чебышевъ въ слѣдующихъ словахъ характеризовалъ роль этихъ задачъ въ математикѣ.

„Практическая дѣятельность человѣка представляетъ чрезвычайное разнообразіе, и для удовлетворенія всѣхъ ея требованій, разумѣется, недостаетъ наукѣ многихъ и различныхъ методъ. Но изъ нихъ особенную важность имѣютъ тѣ, которыя необходимы для различныхъ видоизмѣненій одной и той же задачи, общей для всей практической дѣятельности человѣка: *какъ располагать средствами своими для достиженія по возможности большей выгоды.*

Эта задача, чисто практическаго характера, имѣетъ особенную важность и для теоріи: всѣ законы, опредѣляющіе движеніе матеріи вѣсомой и невѣсомой, представляютъ рѣшеніе задачъ этого рода. Нельзя не замѣтить особенно благотворнаго вліянія ихъ на развитіе наукъ математическихъ.

До изобрѣтенія анализа безконечно малыхъ извѣстны были только частные примѣры рѣшенія такихъ задачъ; но въ этихъ рѣшеніяхъ уже было начало новой, важнѣйшей отрасли математическихъ наукъ, извѣстной подъ именемъ *дифференціальнаго исчисленія.*

Но открытіемъ дифференціальнаго исчисленія и рѣшеніемъ задачъ, подобныхъ тѣмъ, которыя привели къ открытію его, предметъ этотъ не былъ исчерпанъ вполнѣ, и это обнаружилось въ изысканіяхъ самого Newton'a: вопросъ имъ рѣшенный, объ опредѣленіи формы, при которой тѣло, двигаясь въ жидкости, наименѣе встрѣчаетъ препятствія—представляетъ задачу *наибольшихъ и наименьшихъ величинъ*, существенно отличную отъ подобныхъ задачъ, разрѣшимыхъ по способу дифференціальнаго исчисленія. Общій способъ рѣшенія задачъ этого рода, особенно важныхъ для теоретической механики, привелъ къ открытію еще новаго исчисленія—извѣстнаго подъ именемъ *варіаціоннаго*.

Несмотря на такое развитіе математики въ отношеніи теоріи *наибольшихъ и наименьшихъ величинъ*, легко замѣтить, что практика идетъ дальше и требуетъ рѣшенія задачъ о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ еще новаго рода, существенно отличныхъ отъ тѣхъ двухъ, которыя рѣшаются въ дифференціальномъ и варіаціонномъ исчисленіяхъ.

Какъ примѣръ вопросовъ такого рода и рѣшенія ихъ, мы можемъ представить изысканія наши о параллелограммѣ Уатта, напечатанныя въ Mémoires des Savants étrangers нашей академіи за 1854 г.“

Будучи совершенно согласенъ съ приведенными мыслями Чебышева, я рѣшилъ посвятить задачамъ на maxima и minima особую главу.

Не имѣя возможности дать обстоятельное изложеніе столь обширной науки, я ограничусь лишь поясненіемъ на рядѣ задачъ главныхъ вопросовъ на maxima и minima.

Обыкновенныя задачи на maxima и minima функцій одной перемѣнной.

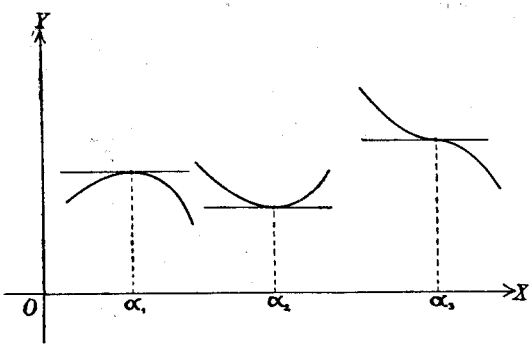
§ 2. Мы видѣли уже, что, если производная заданной функціи $f(x)$ непрерывная, то значенія x, которыя могутъ давать maximum или minimum функціи, удовлетворяютъ уравненію

$$f'(x) = 0. \tag{1}$$

Итакъ, задача сводится къ нахожденію всѣхъ вещественныхъ корней $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\kappa$ уравненія (1). Послѣ нахожденія корней вычисляются значенія

$$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots f(\alpha_\kappa). \tag{2}$$

Maxima и minima функціи могутъ существовать только среди этихъ значеній (2). Значеніе $f(\alpha_1)$ будетъ представлять maximum, если при $x = \alpha_1$ вогнутость кривой $y = f(x)$ обращена въ сторону отрицательныхъ y-овъ (черт. 121 и § 34 гл. VI). Значеніе $f(\alpha_2)$ будетъ представлять minimum, если при $x = \alpha_2$ вогнутость кривой обращена въ сторону положительныхъ y-овъ, и наконецъ, $f(\alpha_3)$ не будетъ ни maximum, ни minimum функціи, если около значенія $x = \alpha_3$ существуетъ перегибъ кривизны.



Черт. 121.

§ 3. Вопросъ о направленіи вогнутости рѣшается разсмотрѣніемъ второй производной $f''(x)$. Придется подставить испытываемый корень α уравненія (1) предыдущаго §-а въ эту вторую производную. Тогда если

$$f''(\alpha) < 0,$$

то на основаніи сказаннаго въ § 34 гл. VI будетъ существовать maximum функціи, если же $f''(\alpha) > 0$, то будетъ существовать minimum функціи, и, наконецъ, если бы случилось $f''(\alpha) = 0$, то надо перейти къ разсмотрѣнію производныхъ высшихъ порядковъ.

§ 4. Задача. *Изъ всѣхъ прямоугольниковъ даннаго периметра найти наибольшій по площади.*

Обозначимъ черезъ $2a$ заданный периметръ прямоугольника. Тогда очевидно, что, если мы назовемъ черезъ x и y его не параллельныя стороны, то будемъ имѣть

$$x + y = a,$$

откуда

$$y = a - x;$$

площадь будетъ опредѣляться по формулѣ

$$x(a - x).$$

Итакъ, приходится разсматривать функцію

$$f(x) = x(a - x);$$

приравниваемъ нулю ея производную $f'(x) = a - 2x$.

Уравненіе (1) § 2 имѣетъ видъ

$$a - 2x = 0,$$

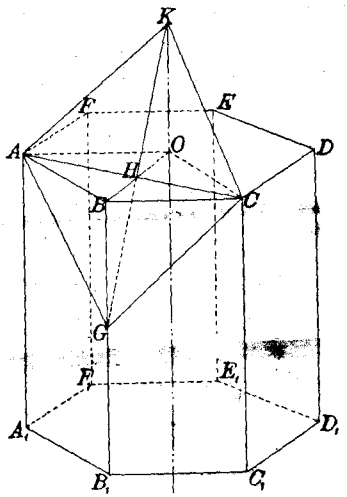
откуда

$$x = \frac{a}{2}.$$

Такъ какъ $f''(x) = -2 < 0$, то получается maximum функціи.

Мы получаемъ, слѣдовательно, прямоугольникъ со сторонами $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, т. е. квадратъ.

§ 5. *Задача.* Взята прямая правильная шестигранная призма съ параллельными основаніями. Длина стороны основанія есть a и высота призмы b. Обозначимъ черезъ $ABCDEF$ вершины верхняго основанія призмы (черт. 122). Черезъ три прямыя AC, CE и EA проводимъ сѣкущія плоскости, встрѣчающіяся въ одной и той же точкѣ K на оси призмы. Разсмотримъ тѣло, ограниченное боковыми гранями призмы, нижнимъ основаніемъ и тремя сѣкущими плоскостями. Очевидно, что объемъ этого тѣла равенъ объему первоначальной призмы, ибо объемъ пирамиды $AHCBG$ равенъ объему пирамиды $AHCOK$.



Черт. 122.

Требуется провести сѣкущія плоскости подъ такимъ угломъ, чтобы поверхность тѣла была наименьшая.

Очевидно, что третья часть поверхности состоитъ изъ двухъ трапецій A_1AGB_1 и C_1CGB_1 и ромба $GAKC$. Обозначимъ черезъ x уголъ срѣза BHG. Тогда, очевидно, будетъ

$$BH = \frac{a}{2},\ BG = \frac{a}{2}\,tg\,x,\ HC = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ GH = \frac{a}{2\cos x};$$

$$\text{пл.}\,\Delta GHC = \frac{a^2\sqrt{3}}{8\cos x},$$

значитъ

$$\text{пл. } GAKC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2\cos x};$$

$$\text{пл. } A_1 A G B_1 = \text{пл. } C_1 C G B_1 =$$

$$= \frac{(b - BG) + b}{2} \cdot a = \frac{4b - a\,tg\,x}{4} \cdot a.$$

Отсюда третья часть искомой поверхности, равная $A_1 A G B_1 + C_1 C G B_1 + GAKC$, выражается по формулѣ

$$\frac{4b - a\,tg\,x}{2} \cdot a + \frac{a^2\sqrt{3}}{2\cos x} = 2ba + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos x} - tg\,x\right).$$

Итакъ, мы видимъ, что для нахожденія наименьшаго значенія послѣдняго выраженія достаточно найти наименьшее значеніе функціи

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} - tg\,x,$$

и, слѣдовательно, рѣшеніе задачи не зависитъ совершенно отъ размѣровъ a и b разсматриваемой призмы.

Первая производная функціи $f(x)$ выражается по формулѣ

$$(1) \qquad f'(x) = \frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sqrt{3}\sin x - 1}{\cos^2 x}.$$

Итакъ, мы получаемъ уравненіе

$$\sqrt{3}\sin x - 1 = 0,$$

откуда

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Такъ какъ по смыслу задачи уголъ x долженъ быть острымъ, то мы находимъ

$$x = \alpha = 35^0\,15'\,51'',8.$$

Чтобы показать, что получается дѣйствительно *minimum*, разсмотримъ вторую производную. Чтобы проще сдѣлать выкладку, перепишемъ уравненіе (1) такъ;

$$\cos^2 x\, f'(x) = \sqrt{3}\sin x - 1;$$

дифференцируя, получаемъ

$$-2\cos x \sin x\, f'(x) + \cos^2 x\, f''(x) = \sqrt{3}\cos x.$$

Подставляя сюда $x = \alpha$ и замѣчая, что $f'(\alpha) = 0$, получаемъ

$$\cos\alpha\, f''(\alpha) = \sqrt{3},$$

откуда

$$f''(\alpha) > 0.$$

Интересно, что, какъ показываютъ наблюденія, пчелы дѣлаютъ ячейки своихъ сотъ очень близко къ тому виду, который получается по только что указанному рѣшенію, такъ что, повидимому, инстинктъ пчелъ заставляетъ ихъ достигать даннаго объема ячейки при наименьшей затратѣ матеріала воска.

§ 6. Разсмотримъ теперь задачу, составляющую сущность такъ называемаго *способа наименьшихъ квадратовъ*.

Въ наукахъ наблюдательныхъ при наблюденіяхъ и измѣреніяхъ всегда происходятъ неизбѣжныя ошибки. Цѣль раціонально проведенныхъ измѣрительныхъ методъ состоитъ въ достиженіи возможной малости этихъ ошибокъ. Такъ какъ неизбѣжныя ошибки наблюденій являются случайными, то обыкновенно при различныхъ испытаніяхъ получаются для искомой величины различныя числа.

Пусть нѣкоторая наблюдаемая величина x при рядѣ опытовъ получаетъ значенія

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n.$$

Является вопросъ о томъ, какое можно сдѣлать заключеніе о настоящей величинѣ x на основаніи чиселъ ряда (1). Конечно, если никакихъ данныхъ для рѣшенія этого вопроса, кромѣ указанія чиселъ (1), не существуетъ, то и нельзя сдѣлать никакого опредѣленнаго заключенія о дѣйствительномъ численномъ значеніи x. Приходится прибѣгать къ нѣкоторымъ произвольнымъ способамъ указанія такого значенія x, которое мы принимаемъ за наиболѣе для насъ подходящее.

Одинъ изъ самыхъ важныхъ пріемовъ, употребляемыхъ на практикѣ, это есть способъ наименьшихъ квадратовъ. Мы ищемъ такое значеніе x, чтобы сумма квадратовъ его уклоненій отъ чиселъ (1) было minimum, т. е., другими словами, имѣла minimum функція

$$f(x) = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + (a_3 - x)^2 + \ldots + (a_n - x)^2.$$

Составляя производную, получаемъ

$$\frac{1}{2} f'(x) = -a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n + nx.$$

Такъ какъ вторая производная будетъ опредѣляться изъ равенства

$$\frac{1}{2} f''(x) = +n$$

и будетъ положительна, то дѣйствительно, наша функція получаетъ minimum при такомъ значеніи x, которое удовлетворяетъ уравненію

$$-a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n + nx = 0,$$

т. е. при значеніи

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Итакъ, мы видимъ, что способъ наименьшихъ квадратовъ приводится къ выбору средней ариѳметической изъ наблюденныхъ величинъ.

Maxima и minima функцій многихъ перемѣнныхъ.

§ 7. Разсмотримъ функцію

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

отъ n независимыхъ перемѣныхъ. Если при нѣкоторой системѣ $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ частныхъ значеній этихъ перемѣнныхъ имѣетъ мѣсто неравенство

(1) $$f(\xi_1 + h_1, \xi_2 + h_2, \ldots \xi_n + h_n) - f(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) < 0$$

при всѣхъ достаточно малыхъ по абсолютной величинѣ значеніяхъ приращеній $h_1, h_2, \ldots h_n$, то значеніе $f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ есть maximum функціи f.

Подобнымъ же образомъ при неравенствѣ

(2) $$f(\xi_1 + h_1, \xi_2 + h_2, \ldots \xi_n + h_n) - f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) > 0$$

имѣетъ мѣсто minimum функціи.

§ 8. Такъ какъ неравенства (1) или (2) предыдущаго §-а должны имѣть мѣсто при равенствахъ

$$h_2 = 0, h_3 = 0, \ldots h_n = 0,$$

то значеніе $f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ должно быть maximum'омъ или minimum'омъ функціи $f(x_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ отъ одной перемѣнной x_1, т. е. должно быть

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$$

Примѣняя тѣ же разсужденія къ другимъ перемѣннымъ независимымъ, получаемъ, какъ необходимыя условія maximum'а или minimum'а функціи $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, рядъ равенствъ

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Другими словами, должно удовлетворяться равенство

$$df = 0.$$

§ 9. Требуется изслѣдовать относительно наибольшихъ и наименьшихъ величинъ функцію

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Разсматриваемъ два уравненія

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} &= ax + by = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} &= bx + cy = 0. \end{aligned}$$

Первый случай. Если опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a, b \\ b, c \end{vmatrix} = ac - b^2 = \delta$$

не равенъ нулю, то получаются по уравненіямъ (1) значенія

$$x = 0, y = 0,$$

могущія давать maximum или minimum. Очевидно, что этотъ maximum или minimum будетъ равенъ нулю, ибо при $x = 0$, $y = 0$ заданная функція равна нулю.

Чтобы разсмотрѣть, который случай будетъ имѣть мѣсто на самомъ дѣлѣ, перепишемъ заданную функцію такъ:

$$(2) \qquad f(x, y) - f(0, 0) = \frac{1}{a}\left[(ax + by)^2 + \delta y^2\right].$$

Если $\delta > 0$, то выраженіе въ квадратныхъ скобкахъ второй части уравненія (2) будетъ числомъ положительнымъ при всякихъ x и y, и мы получаемъ при $a > 0$ неравенство

$$f(x, y) - f(0, 0) > 0$$

и при $a < 0$

$$f(x, y) - f(0, 0) < 0.$$

Значитъ, $f(0, 0)$ есть maximum при $a < 0$ и minimum при $a > 0$.

Если же $\delta < 0$, то $f(0, 0)$ не maximum и не minimum, потому что, если положимъ $y = 0$, то при произвольномъ x знакъ разности

$$f(x, y) - f(0, 0) \tag{3}$$

будетъ совпадать со знакомъ числа a, если же возьмемъ такія близкія къ нулю значенія x и y, при которыхъ $ax + by = 0$, то знакъ разности (3) окажется обратнымъ знаку a. Слѣдовательно, при измѣненія x и y вблизи системы значеній 0, 0 разность (3) мѣняетъ свой знакъ, и, значитъ, $f(0, 0)$ не maximum и не minimum.

Второй случай. Положимъ

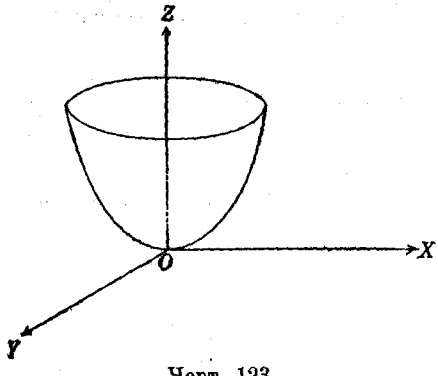
$$\delta = 0.$$

Тогда

$$f(x, y) = \frac{1}{a}(ax + by)^2.$$

Оказывается, что функція равняется нулю при всѣхъ значеніяхъ x и y, удовлетворяющихъ уравненію

$$ax + by = 0, \tag{4}$$



Черт. 123.

причемъ равное нулю значеніе функціи будетъ minimum при $a > 0$ и maximum при $a < 0$.

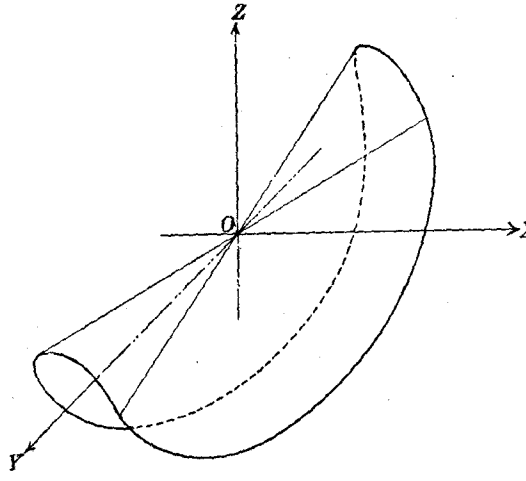
§ 10. Соображенія предыдущаго §-а могутъ быть иллюстрированы геометрически; разсмотримъ поверхность, опредѣляемую уравненіемъ

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Для опредѣленности рѣчи предположимъ неравенство $a > 0$. Тогда при $\delta > 0$ получаемъ поверхность, называемую эллиптическимъ параболоидомъ, касающуюся въ началѣ координатъ плоскости XY (черт. 123) и лежащую относительно этой поверхности съ той стороны, куда идетъ положительное направленіе оси

z-овъ. Minimum'у $z=0$ координаты z соотвѣтствуетъ, конечно, точка касанія.

Если $\delta<0$, то получаемъ поверхность (черт. 124), назы-

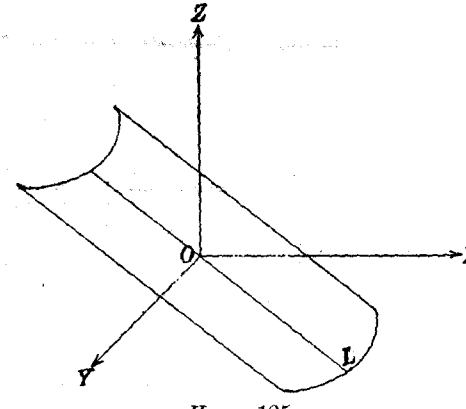


Черт. 124.

ваемую гиперболическимъ параболоидомъ и лежащую частью выше плоскости XY, частью ниже ея.

Наконецъ, при $\delta=0$ получается (черт. 125) цилиндрическая поверхность, касающаяся плоскости XY по прямой OL, опредѣляемой уравненіемъ,

$$ax+by=0.$$



Черт. 125.

§ 11. Соображенія предыдущаго §-а играютъ большую роль въ теоріи кривизны поверхностей, ибо, раскладывая по формулѣ Maclaurin'а функцію отъ двухъ буквъ x и y, получимъ

$$f(x,y)=\rho+\alpha x+\beta y+ax^2+2bxy+cy^2+hx^3+\ldots,$$

такъ что всякая поверхность, опредѣляемая уравненіемъ

$$z=f(x,y),$$

можетъ быть представлена уравненіемъ вида

$$z = \rho + \alpha x + \beta y + ax^2 + 2bxy + cy^2 + hx^3 + kx^2 y + \ldots$$

Если мы возьмемъ начало координатъ въ нѣкоторой точкѣ этой поверхности, то, очевидно, будетъ

$$\rho = 0.$$

Если мы возьмемъ кромѣ того за плоскость XY касательную плоскость, то, какъ мы видѣли въ § 58 гл. VI, должно получаться при $x = 0, y = 0$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, q = \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

откуда получимъ

$$\alpha = 0, \beta = 0.$$

Значитъ, поверхность представляется въ такомъ видѣ:

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \xi,$$

гдѣ ξ есть совокупность всѣхъ членовъ нашего ряда, начиная съ третьей степени. При достаточно малыхъ значеніяхъ координатъ x и y величина ξ есть безконечно малая, которой можно пренебречь при изученіи вида безконечно малой части заданной поверхности около начала координатъ, и мы можемъ сказать, что такая безконечно малая часть разсматриваемой поверхности около начала координатъ имѣетъ видъ соотвѣтственой безконечно малой части поверхности

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Въ теоріи поверхностей Gauss'омъ введено было понятіе о кривизнѣ поверхности въ точкѣ. Gauss беретъ за кривизну число, пропорціональное опредѣлителю δ, разобранному въ предыдущихъ §§-ахъ, такъ что, если $\delta > 0$, то мы говоримъ, что поверхность въ началѣ координатъ имѣетъ положительную кривизну. Если кривизна отрицательна, то поверхность имѣетъ сѣдлообразную форму и пересѣкается со своей касательной плоскостью. Наконецъ, если кривизна поверхности въ точкѣ, принятой за начало координатъ, равна нулю, то часть поверхности около этой точки имѣетъ видъ цилиндра.

Относительныя maxima и minima.

§ 12. Положимъ, что требуется найти maxima и minima функціи

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

гдѣ перемѣнныя независимыя связаны между собой слѣдующими k соотношеніями:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) &= 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Если число всѣхъ перемѣнныхъ n, то изъ этихъ перемѣнныхъ будетъ обыкновенно $n-k$ независимыхъ, остальныя же будутъ ихъ функціями въ силу уравненій

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots \varphi_k = 0.$$

Выяснивъ, какія именно изъ перемѣнныхъ

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

мы будемъ считать независимыми, а какія ихъ функціями, мы получаемъ обыкновенный вопросъ о maxima и minima функціи $n-k$ перемѣнныхъ.

Такой способъ, однако, представляетъ неудобства, состоящія въ томъ, что иногда мы можемъ не сумѣть рѣшить систему (1) относительно какихъ нибудь изъ перемѣнныхъ. Даже въ тѣхъ случаяхъ, когда систему бываетъ возможно рѣшить, такое рѣшеніе можетъ, однако, усложнить задачу. Lagrange предложилъ методу, состоящую во введеніи k новыхъ параметровъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, и вся задача носитъ названіе *задачи на относительныя maxima и minima.*

Такъ какъ на основаніи равенства (1) всѣ функціи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ равны нулю, то вмѣсто заданной функціи f можно разсматривать maxima и minima функціи

$$f - \lambda_1\varphi_1 - \lambda_2\varphi_2 - \ldots - \lambda_k\varphi_k.$$

Приравнивая нулю частныя производныя, получимъ для нахожденія значеній независимыхъ перемѣнныхъ, могущихъ давать maxima и minima, n слѣдующихъ уравненій

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - \lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \ldots - \lambda_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \ldots - \lambda_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} - \lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} - \ldots - \lambda_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} &= 0. \end{aligned}$$

Мы имѣемъ въ общемъ $n+k$ уравненій (1) и (2) съ $n+k$ перемѣнными независимыми

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k.$$

§ 13. Требуется найти maximum произведенія

$$f = x_1 x_2 \ldots x_n$$

при условіи

(1) $$x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a = 0,$$

причемъ всѣ x_i считаются положительными величинами.

Вводя одинъ новый параметръ λ, получимъ уравненія (2) предыдущаго §-а въ такомъ видѣ:

(2) $$\begin{aligned} x_2 x_3 \ldots x_n - \lambda &= 0, \\ x_1 x_3 \ldots x_n - \lambda &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 x_2 \ldots x_{n-1} - \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Умножая уравненія (2) по порядку на $x_1, x_2, \ldots x_n$, получаемъ

$$f = \lambda x_1 = \lambda x_2 = \ldots = \lambda x_n,$$

откуда

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n,$$

и на основаніи уравненія (1)

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}.$$

Такъ какъ въ данномъ случаѣ получается maximum, то мы имѣемъ

$$x_1 x_2 \ldots x_n < \left(\frac{a}{n}\right)^n,$$

откуда

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} < \frac{a}{n}$$

или, наконецъ,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

т. е. *среднее геометрическое меньше средняго ариѳметическаго.*

Maxima и minima съ неравенствами.

§ 14. Весьма важными по частымъ приложеніямъ являются тѣ вопросы на maxima и minima, при которыхъ перемѣнныя

независимыя кромѣ условій, выражаемыхъ равенствами, подчинены еще условіямъ, выраженнымъ неравенствами. Вопросы такого рода могутъ быть безконечно разнообразны. Мы ограничимся разсмотрѣніемъ одного частнаго примѣра.

Найти наибольшее и наименьшее значеніи функціи

$$x^2+y^2+(x+y)^2,$$

когда перемѣнныя связаны условіями

$$1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2.$$

Вводя новыя перемѣнныя ρ и ϑ при помощи равенствъ

$$x=\rho \cos\vartheta,\ y=\rho \sin\vartheta,$$

приводимъ задачу къ нахожденію maximum'а и minimum'а функціи

$$f=2\rho^2[1+\cos\vartheta \sin\vartheta]$$

при условіи

$$1 \leqq \rho^2 \leqq 2.$$

Мы получимъ, очевидно,

$$2\left[1+\frac{\sin 2\vartheta}{2}\right] \leqq f \leqq 4\left[1+\frac{\sin 2\vartheta}{2}\right].$$

Такъ какъ

$$-1 \leqq \sin 2\vartheta \leqq +1,$$

то получимъ окончательно

$$2\left[1-\frac{1}{2}\right] \leqq f \leqq 4\left[1+\frac{1}{2}\right]$$

или

$$1 \leqq f \leqq 6.$$

Значитъ, minimum будетъ $f=1$ при $2\vartheta=\frac{3}{2}\pi$ и $\rho^2=1$; этотъ minimum получается при

$$x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Совершенно подобнымъ образомъ получается maximum $f=6$ при $2\vartheta=\frac{\pi}{2}$, $\rho^2=2$ или при

$$x=1,\ y=1.$$

Параллелограммъ Newton'a.

§ 15. Желая указать пріемы разложенія въ ряды алгебраическихъ функцій, Newton пришелъ къ рѣшенію одной особеннаго рода задачи на maxima и minima.

Пусть алгебраическое уравненіе, опредѣляющее y, какъ функцію отъ x, будетъ такого вида:

$$A_1 x^{m_1} y^{n_1} + A_2 x^{m_2} y^{n_2} + A_3 x^{m_3} y^{n_3} + \ldots = 0, \tag{1}$$

гдѣ первая часть представляетъ собою сумму конечнаго числа слагаемыхъ.

Построимъ въ плоскости прямоугольныхъ координатъ точки, координатами которыхъ являются показатели при x и y въ одночленахъ, т. е. точки (m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) . . . Показатели m_i и n_i мы предполагаемъ, очевидно, цѣлыми положительными числами или нулями.

Пусть y разложено въ рядъ по возрастающимъ степенямъ x

$$y = \mathfrak{A} x^{\alpha} + \mathfrak{B} x^{\beta} + \ldots \tag{2}$$

Перепишемъ равенство (2) въ такомъ видѣ:

$$y = \mathfrak{A}' x^{\alpha}, \tag{3}$$

гдѣ

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} x^{\beta - \alpha} + \ldots$$

Очевидно, что

$$\lim_{x=0} \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}.$$

Подставляя выраженіе (3) въ уравненіе (1), получаемъ

$$A_1 \mathfrak{A}'^{n_1} x^{m_1 + \alpha n_1} + A_2 \mathfrak{A}'^{n_2} x^{m_2 + \alpha n_2} + \ldots = 0. \tag{4}$$

Если число α указано такимъ образомъ, что въ рядѣ линейныхъ выраженій

$$m_1 + \alpha n_1, m_2 + \alpha n_2, m_3 + \alpha n_3, \ldots, \tag{5}$$

стоящихъ въ показателяхъ, *одно* изъ этихъ выраженій, напримѣръ $m_i + \alpha n_i$, оказывается меньше всѣхъ остальныхъ, то по сокращеніи уравненія (4) на $x^{m_i + \alpha n_i}$ мы получимъ

$$A_i \mathfrak{A}'^{n_i} + K_1 x^{\lambda_1} + K_2 x^{\lambda_2} + \ldots = 0, \tag{6}$$

гдѣ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ суть положительные показатели. Тогда, подводя x къ нулю, получаемъ

$$A_i \mathfrak{A}^{n_i} = 0,$$

г. е.

$$\mathfrak{A} = 0,$$

и разложеніе (2) невозможно, ибо коэффиціентъ при первомъ членѣ равенъ нулю. Для того, чтобы разложеніе (2) стало возможнымъ, необходимо, чтобы по крайней мѣрѣ два изъ линейныхъ выраженій (5) сдѣлались одинаковыми и меньшими всѣхъ остальныхъ. Такъ, напримѣръ, если будутъ одинаковы и меньше всѣхъ остальныхъ два первыхъ изъ числа выраженій (5), то, сокращая на $x^{m_1+\alpha n_1} = x^{m_2+\alpha n_2}$, получимъ

$$A_1 \mathfrak{A}'^{n_1} + A_2 \mathfrak{A}'^{n_2} + K_1 x^{\lambda_1} + K_2 x^{\lambda_2} + \ldots = 0.$$

Подводя x къ нулю, получаемъ

$$A_1 \mathfrak{A}^{n_1} + A_2 \mathfrak{A}^{n_2} = 0,$$

и тогда, если $n_2 > n_1$, то

$$\mathfrak{A} = \sqrt[n_2-n_1]{-\frac{A_1}{A_2}}.$$

§ 16. Итакъ, мы пришли къ задачѣ нахожденія такого значенія α, при которомъ два изъ выраженій

(1) $$m_1 + \alpha n_1,\ m_2 + \alpha n_2,\ m_3 + \alpha n_3,\ \ldots$$

дѣлаются равными между собою и не бо́льшими остальныхъ.

Такъ какъ выраженій (1) конечное число, то задачу можно рѣшить, очевидно, пробами. Можно взять изъ (1) два выраженія

(2) $$m_i + \alpha n_i \text{ и } m_\kappa + \alpha n_\kappa,$$

приравнять ихъ, т. е. положить

$$m_i + \alpha n_i = m_\kappa + \alpha n_\kappa,$$

откуда получится

(3) $$\alpha = \frac{m_i - m_\kappa}{n_\kappa - n_i},$$

и подставить такое значеніе во всѣ выраженія (1). Если при этомъ дѣйствительно выраженія (2) окажутся не бо́льшими всѣхъ остальныхъ, то значеніе (3) для α будетъ однимъ изъ искомыхъ.

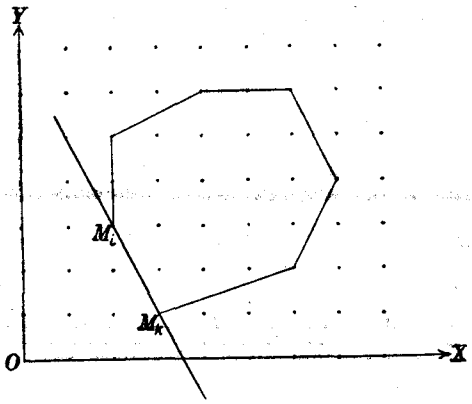
Newton далъ простое геометрическое правило, позволяющее избѣжать излишняго числа пробъ и прямо находить искомыя значе-

нія α. Lagrange представилъ правило Newton'a въ аналитической формѣ. Сообщимъ здѣсь правило Newton'a.

Разсмотримъ картину всѣхъ точекъ $M_i(m_i, n_i)$, соотвѣтствующихъ показателямъ различныхъ членовъ заданнаго алгебраическаго уравненія. Легко убѣдиться, что, если пара выраженій (2) даетъ выраженіе (3) для α, рѣшающее задачу, то тогда прямая, соединяющая точки M_i и M_κ, такъ расположена, что остальныя точки лежатъ выше ея. Разсмотримъ прямую линію

$$x + \alpha y = \beta. \tag{1}$$

Очевидно, что α будетъ тангенсомъ угла, который прямая образуетъ съ осью y-овъ, а β будетъ абсцисса той точки, въ которой прямая пересѣкаетъ ось x-овъ. Тогда очевидно, что $m_i + \alpha n_i$ дастъ выраженіе β для прямой, имѣющей видъ (1) съ даннымъ угловымъ коэффиціентомъ α и проходящей черезъ точку M_i. Слѣдовательно, задача рѣшается при помощи такого направленія α, при которомъ два выраженія для β, соотвѣтствующія двумъ точкамъ M_i и M_κ, одинаковы и не больше остальныхъ, а отсюда вытекаетъ слѣдующее геометрическое построеніе.



Черт. 126.

Проводимъ (черт. 126) такой многоугольный контуръ, вершинами котораго были бы нѣкоторыя изъ точекъ M_i, чтобы всѣ остальныя точки заключались внутри этого контура. Тогда тѣ изъ сторонъ контура, отсѣкающихъ на обѣихъ осяхъ положительные отрѣзки, относительно которыхъ контуръ и начало координатъ расположены по разныя стороны, даютъ рѣшенія выставленной задачи.

§ 17. Пояснимъ эту теорію на примѣрѣ. Требуется разложить по возрастающимъ степенямъ x функцію y, опредѣляемую уравненіемъ

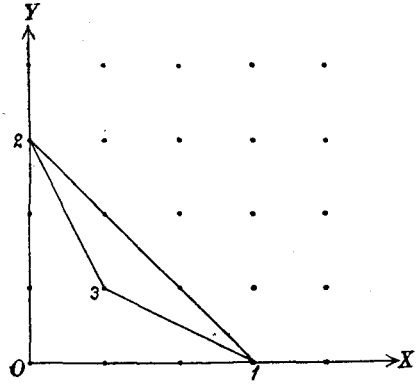
$$x^3 + y^3 - 3xy = 0. \tag{1}$$

Получаемъ три точки (черт. 127). Точка 1 соотвѣствуетъ члену x^3, точка 2 члену y^3, точка 3 члену $-3xy$. Для опредѣленія показателя α, съ котораго начнется разложеніе

(2) $$y = \mathfrak{A}' x^\alpha,$$

могутъ служить двѣ стороны (1, 3) и (2, 3). Линейныя выраженія (1) предыдущаго §-а для даннаго случая будутъ

(3) $$3,\ 3\alpha,\ \alpha + 1.$$



Черт. 127.

Сторона (1, 3) даетъ $3 = \alpha + 1$, т. е. $\alpha = 2$, и дѣйствительно, въ этомъ случаѣ выраженія (3) принимаютъ численныя значенія 3, 6, 3, такъ что выраженія для точекъ (1) и (3) оказываются равными между собою и меньшими, чѣмъ число 6 для точки (2). Подставляя выраженіе (2) въ уравненіе (1), получимъ

$$x^3 + \mathfrak{A}'^3 x^6 - 3x^3 \mathfrak{A}' = 0,$$

откуда, сокращая на x^3,

$$1 + \mathfrak{A}'^3 x^3 - 3\mathfrak{A}' = 0.$$

Подводя x къ предѣлу 0, найдемъ

$$3\mathfrak{A} = 1,\ \mathfrak{A} = \frac{1}{3}.$$

Значитъ, разложеніе y будетъ имѣть видъ

(4) $$y = \frac{1}{3} x^2 + \mathfrak{B} x^\beta + \ldots$$

Показатели β и коэффиціенты $\mathfrak{B}, \ldots$ опредѣлятся при помощи подстановки ряда (4) въ уравненіе (1) и подбора этихъ показателей и коэффиціентовъ для уничтоженія всѣхъ членовъ, чтобы уравненіе (1) дѣйствительно удовлетворялось.

Вторая сторона (3, 2) даетъ равенство

$$3\alpha = \alpha + 1,$$

откуда

$$\alpha = \frac{1}{2},$$

и тогда придется откинуть первый членъ и рѣшить уравненіе

$$y^3 - 3xy = 0,$$

откуда

$$y^2 = 3x,\ y = \sqrt{3}\, x^{\frac{1}{2}};$$

значитъ, разложеніе будетъ

$$(5) \qquad y = \sqrt{3}\, x^{\frac{1}{2}} + \mathfrak{B} x^{\beta} + \ldots$$

Кривая линія, опредѣляемая уравненіемъ (1) имѣетъ въ началѣ координатъ узловую точку, въ которой пересѣкаются двѣ вѣтви. Вблизи начала координатъ численныя значенія ординаты y при безконечно малыхъ значеніяхъ x на одной изъ этихъ вѣтвей вычисляются при помощи ряда (4), а на другой при помощи ряда (5).

Чебышевскіе вопросы.

Функціи, наименѣе уклоняющіяся отъ нуля.

§ 18. Совершенно особаго характера вопросы на maxima и minima были поставлены и рѣшены П. Л. Чебышевымъ. Для характеристики этихъ вопросовъ рѣшимъ основную задачу Чебышева о нахожденіи цѣлой функціи степени n со старшимъ коэффиціентомъ, равнымъ единицѣ, при условіи, чтобы эта функція наименѣе уклонялась отъ нуля въ данномъ промежуткѣ.

Чебышевъ показалъ, что такая функція для промежутка $(-1, +1)$ есть не что иное, какъ функція

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x).$$

Въ самомъ дѣлѣ, для вычисленія этой функціи (1) можно будетъ поступить такъ. Введемъ уголъ φ при помощи равенства $x = \cos\varphi$, тогда мы получаемъ

$$f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\varphi.$$

Значитъ, функція Чебышева есть не что иное, какъ та цѣлая функція степени n, при помощи которой косинусъ кратной дуги $\cos n\varphi$ выражается черезъ косинусъ простой дуги $\cos\varphi$. По-

кажемъ, что старшій коэффиціентъ функціи $\cos(n \arccos x)$ есть 2^{n-1}. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\cos\varphi = x, \cos(n \arccos x) = \cos n\varphi,$$

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = x + \sqrt{x^2-1},$$

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = x - \sqrt{x^2-1},$$

откуда

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (x + \sqrt{x^2-1})^n,$$

$$\cos n\varphi - i\sin n\varphi = (x - \sqrt{x^2-1})^n,$$

слѣдовательно,

$$\cos n\varphi = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2} =$$

$$= p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots$$

Раздѣляя обѣ части уравненія на x^n, получимъ

$$p_0 + \frac{p_1}{x} + \ldots = \frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n + \left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n}{2}.$$

Полагаемъ $x = \infty$, тогда

$$p_0 = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}.$$

Итакъ, старшій коэффиціентъ функціи (1) равенъ единицѣ.

Докажемъ теперь, что функція (1) есть наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ $(-1, +1)$. Допустимъ, что въ этомъ промежуткѣ другая функція $\psi(x)$ менѣе уклоняется отъ нуля. Мы замѣчаемъ, что функція (1) уклоняется отъ нуля на величину $\frac{1}{2^{n-1}}$, такъ какъ наибольшая абсолютная величина функціи $\cos(n \arccos x)$ есть 1; это уклоненіе происходитъ при значеніяхъ

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots \frac{(n-1)\pi}{n}, \pi,$$

т. е. когда x принимаетъ значенія

$$(2) \qquad x_0 = 1, x_1 = \cos\frac{\pi}{n}, x_2 = \cos\frac{2\pi}{n}, \ldots$$

$$x_{n-1} = \cos\frac{n-1}{n}\pi, x_n = -1.$$

Такъ какъ значенія функціи $f(x)$ при значеніяхъ (2) перемѣннаго независимаго будутъ

$$\frac{1}{2^{n-1}}, -\frac{1}{2^{n-1}}, +\frac{1}{2^{n-1}}, \ldots \frac{(-1)^n}{2^{n-1}},$$

то, слѣдовательно, если функція $\psi(x)$ уклоняется отъ нуля менѣе, чѣмъ Чебышевская функція, то будутъ существовать неравенства

$$\begin{aligned} f(x_0) - \psi(x_0) &> 0, \\ f(x_1) - \psi(x_1) &< 0, \\ f(x_2) - \psi(x_2) &> 0, \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Итакъ, разность $f(x) - \psi(x)$ будетъ имѣть по крайней мѣрѣ одинъ корень во всѣхъ промежуткахъ

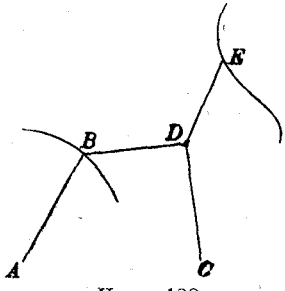
$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, x_n),$$

что невозможно, ибо разность $f(x) - \psi(x)$ степени $n-1$, такъ какъ обѣ функціи $f(x)$ и $\psi(x)$ имѣютъ старшій коэффиціентъ, равный единицѣ. Итакъ, функція Чебышева (1) есть, дѣйствительно, функція, наименѣе уклоняющаяся отъ нуля изъ всѣхъ цѣлыхъ функцій степени n въ промежуткѣ $(-1, +1)$.

Приведенное доказательство принадлежитъ академику А. Маркову.

Механизмы Чебышева.

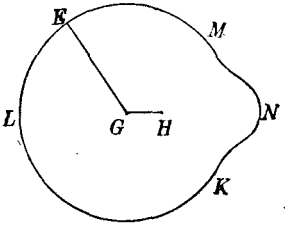
§ 19. Чебышевъ разсматривалъ различныя разновидности механизма такого рода, гдѣ A и C (черт. 128) суть точки, около которыхъ вращаются два рычага AB и CD. Въ точкахъ B и D къ этимъ рычагамъ при помощи шарнировъ прикрѣпленъ рычагъ BDE, представляющій собою два прямолинейныхъ стержня, скрѣпленныхъ другъ съ другомъ въ точкѣ D подъ опредѣленнымъ угломъ. Тогда, при вращеніи точки B по кругу радіуса BA около точки A, точка E описываетъ нѣкоторую кривую линію. При этомъ Чебышевъ показываетъ, что, измѣняя размѣры стержней AB, BD, DC, DE, а также уголъ BDE и разстояніе центровъ вращенія A и C, можно



Черт. 128.

достигнуть различныхъ родовъ полезныхъ для практики движеній точки E.

Особенное вниманіе Чебышевъ обращаетъ на тотъ случай, когда точка E описываетъ линію, мало уклоняющуюся отъ прямой. Затѣмъ также интересенъ случай, когда точка E описываетъ кривую линію вида $KLMN$ (черт. 129), въ которой часть KLM мало уклоняется отъ круга, такъ что если къ точкѣ E прикрѣпленъ на шарнирѣ стержень EG, равный радіусу того круга, отъ котораго мало уклоняется кривая линія, тогда точка G будетъ находится почти въ покоѣ, когда точка E описываетъ часть KLM, затѣмъ эта точка G испытаетъ внезапный толчекъ по направленію къ точкѣ H, когда точка E будетъ описывать часть MNK разсматриваемой линіи. Такимъ образомъ, этотъ механизмъ осуществляетъ при помощи системы рычаговъ, связанныхъ шарнирами, преобразованіе непрерывнаго [illegible] движенія рукоятки B въ движеніе, сопровождающееся толчками.



Черт. 129.

На этомъ принципѣ была построена Чебышевымъ швырялка для сортировки зеренъ, которую онъ охотно демонстрировалъ своимъ [illegible]. Кромѣ того имъ былъ построенъ цѣлый рядъ оригинальныхъ механизмовъ, какъ напримѣръ тачка, въ которой переднее колесо замѣнено было ступающимъ механизмомъ съ двумя ногами, затѣмъ лодка съ особенными веслами и подвижной шпитръ, прикрѣпляемый къ креслу, который двигался въ горизонтальной плоскости.

Несмотря на оригинальность замысла этихъ приборовъ, они имѣютъ мало практическаго значенія, и весь интересъ этихъ изслѣдованій состоитъ въ теоретической части, въ которой Чебышевъ рѣшалъ цѣлый рядъ весьма важныхъ и совершенно новыхъ вопросовъ о наименьшихъ и наибольшихъ величинахъ. Характерное свойство этихъ вопросовъ состоитъ въ ихъ связи съ теоріей алгебраическихъ непрерывныхъ дробей.

Теорема Чебышева о географическихъ картахъ.

§ 20. Въ § 13 гл. VII мы видѣли, что конформному изображенію одной плоскости на другой соотвѣтствуетъ нѣкоторая функ-

ція отъ комплекснаго перемѣннаго. То же самое можно сказать о конформномъ изображеніи любой поверхности. Разсмотримъ поверхность, опредѣляемую уравненіями

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \omega(u, v).$$

Тогда квадратъ дифференціала дуги на этой поверхности выразится по формулѣ

(1) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

гдѣ

$$E = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2;$$

E, F и G суть, очевидно, нѣкоторыя опредѣленныя функціи отъ u и v.

Если мы выраженіе (1) приравняемъ нулю, т. е. напишемъ равенство

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0,$$

то, рѣшая относительно одного изъ дифференціаловъ, получимъ

$$du = \frac{-F \mp \sqrt{F^2 - GE}}{E}\,dv$$

или иначе

(2) $$E\,du + dv\,(F \pm i\sqrt{GE - F^2}) = 0.$$

Возьмемъ въ уравненіи (2) верхній знакъ, т. е. напишемъ

$$E\,du + dv\,(F + i\sqrt{GE - F^2}) = 0,$$

и пусть первая часть этого уравненія послѣ умноженія на нѣкоторый множитель μ обращается въ полный дифференціалъ. Значитъ

(3) $$d\xi = \mu\,[E\,du + dv\,(F + i\sqrt{GE - F^2})].$$

Обозначимъ черезъ μ_1 и ξ_1 тѣ значенія функцій μ и ξ, которыя получаются отъ замѣны $+i$ на $-i$. Тогда мы получимъ

(4) $$d\xi_1 = \mu_1\,[E\,du + dv\,(F - i\sqrt{GE - F^2})];$$

перемножая (3) и (4), получаемъ

(5) $$d\xi\,d\xi_1 = E\,\mu\,\mu_1\,ds^2.$$

Если мы вмѣсто криволинейныхъ координатъ u и v поверхности возьмемъ координаты ξ и ξ_1, то эти координаты носятъ названіе *симметрическихъ*, и говорятъ, что поверхность отнесена къ симметрическимъ координатамъ, если существуетъ формула (5).

Произведеніе $\mu\mu_1$ величинъ мнимыхъ сопряженкыхъ есть величина вещественная. Если мы отдѣлимъ въ выраженіяхъ ξ и ξ_1 вещественную часть отъ мнимой, то мы получимъ

$$\xi = \alpha + i\beta; \xi_1 = \alpha - i\beta,$$

гдѣ α и β суть нѣкоторыя вещественныя функціи отъ первоначальныхъ координатъ u и v. Уравненіе (5) обратится въ такое:

(6) $$ds^2 = \lambda^2 (d\alpha^2 + d\beta^2),$$

гдѣ

$$\lambda^2 = \frac{1}{E\mu\mu_1}.$$

Перемѣнныя α и β носятъ названіе *картографическихъ координатъ* поверхности.

§ 21. Разсмотримъ изображеніе нашей поверхности, опредѣляемой картографическими координатами α и β, на плоскости XY. Изображеніе (нѣкоторая карта) получится, если X и Y будутъ заданы въ видѣ нѣкоторыхъ функцій отъ α и β,

$$X = \Phi(\alpha, \beta), \quad Y = \Psi(\alpha, \beta),$$

такъ что каждой точкѣ поверхности, опредѣляемой координатами α_0 и β_0, будетъ соотвѣтствовать опредѣленная точка карты съ прямоугольными координатами

$$X_0 = \Phi(\alpha_0, \beta_0), \; Y_0 = \Psi(\alpha_0 \beta_0).$$

Условіе подобія въ безконечно малыхъ частяхъ, какъ мы видѣли въ § 13 гл. VII, будетъ состоять въ томъ, чтобы отношеніе квадрата дифференціала дуги на картѣ

$$dX^2 + dY^2$$

къ квадрату длины дуги на поверхности

$$\lambda^2 (d\alpha^2 + d\beta^2)$$

было нѣкоторой опредѣленной функціей отъ α, β, которую мы обозначимъ черезъ m^2, гдѣ m есть масштабъ карты, т. е. должно существовать уравненіе

(1) $$dX^2 + dY^2 = n^2 (d\alpha^2 + d\beta^2),$$

гдѣ

$$n = m\lambda.$$

Умножая обѣ части равенства (1) на тождество

$$1 = cos^2 \omega + sin^2 \omega,$$

получимъ равенство

(2) $$dX^2 + dY^2 = n^2 (cos\,\omega\, d\alpha - sin\,\omega\, d\beta)^2 + \\ + n^2 (sin\,\omega\, d\alpha + cos\,\omega\, d\beta)^2.$$

Вслѣдствіе произвольности ω, эта формула можетъ быть разбита на двѣ слѣдующихъ:

(3) $$dX = n(cos\,\omega\, d\alpha - sin\,\omega\, d\beta),$$
$$dY = n(sin\,\omega\, d\alpha + cos\,\omega\, d\beta),$$

причемъ n и ω, конечно, надо подобрать такимъ образомъ, чтобы вторыя части въ равенствахъ (3) были полными дифференціалами.

Обозначая

(4) $$n\,cos\,\omega = \xi,\ n\,sin\,\omega = \eta,$$

мы получаемъ

(5) $$dX = \xi\, d\alpha - \eta\, d\beta,$$
$$dY = \eta\, d\alpha + \xi\, d\beta.$$

Умножая второе изъ уравненій (5) на $i = \sqrt{-1}$ и прибавляя къ первому или вычитая изъ него, получимъ

(6) $$dX + i\,dY = (\xi + i\eta)(d\alpha + i\,d\beta),$$
$$dX - i\,dY = (\xi - i\eta)(d\alpha - i\,d\beta).$$

Такъ какъ правыя части уравненій (6) должны быть полными дифференціалами, то $\xi + i\eta$ должно быть нѣкоторой функціей отъ $\alpha + i\beta$, а $\xi - i\eta$ функціей отъ $\alpha - i\beta$. Полагаемъ

(7) $$\xi + i\eta = f'(\alpha + i\beta),$$
$$\xi - i\eta = F'(\alpha - i\beta),$$

гдѣ $f(z)$ есть произвольно взятая функція отъ z, а $F(z)$ получается изъ $f(z)$ замѣной въ параметрахъ послѣдней $+i$ на $-i$. Представимъ уравненія (6) въ такомъ видѣ:

$$d(X + iY) = f'(\alpha + i\beta)\, d(\alpha + i\beta),$$
$$d(X - iY) = F'(\alpha - i\beta)\, d(\alpha - i\beta),$$

откуда, интегрируя, получаемъ

$$X + iY = f(\alpha + i\beta),$$
$$X - iY = F(\alpha - i\beta).$$

Отсюда окончательно формулы, выражающія конформное изображеніе заданной поверхности, получаются въ такомъ видѣ:

(8) $$X = \frac{f(\alpha + i\beta) + F(\alpha - i\beta)}{2},$$
$$Y = \frac{f(\alpha + i\beta) - F(\alpha - i\beta)}{2i}.$$

Перемножая уравненія (6), мы замѣчаемъ, что

$$dX^2 + dY^2 = (\xi^2 + \eta^2)(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

слѣдовательно на основаніи равенствъ (7)

$$\xi^2 + \eta^2 = f'(\alpha + i\beta)\, F'(\alpha - i\beta) = n^2 = \lambda^2 m^2,$$

откуда масштабъ m выражается по формулѣ

$$(9) \qquad m = \frac{\sqrt{f'(\alpha + i\beta)\, F'(\alpha - i\beta)}}{\lambda},$$

гдѣ λ^2 есть коэффиціентъ квадрата линейнаго элемента поверхности.

§ 22. Формулы (8) и (9) найдены Lagrange'емъ въ его знаменитомъ мемуарѣ о географическихъ картахъ. Lagrange поставилъ себѣ задачей найти функціи f и F для случая поверхностей вращенія такимъ образомъ, чтобы меридіаны и параллели изображались прямыми линіями или кругами. Въ случаѣ шара получилась такъ называемая *стереографическая* проекція, бывшая извѣстной еще древнимъ грекамъ.

Эта проекція получается такимъ образомъ. Проводится къ шару въ одномъ изъ его полюсовъ касательная плоскость. Тогда, если мы возьмемъ какую нибудь точку на шарѣ и соединимъ эту точку прямою съ противоположнымъ полюсомъ шара, то, продолжая эту прямую до пересѣченія съ касательной плоскостью, получимъ проекцію. Если будемъ, такимъ образомъ, всѣмъ точкамъ на шарѣ сопоставлять точки на плоскости, то каждой фигурѣ на шарѣ будетъ соотвѣтствовать ея проекція на плоскости. Указанное проектированіе и есть то, которое называется стереографической проекціей.

§ 23. Чебышевъ поставилъ себѣ другую задачу, подобрать функціи f и F такимъ образомъ, чтобы колебанія масштаба при плоскомъ изображеніи нѣкоторой страны, ограниченной контуромъ C, были наименьшія.

Если поверхность не навертывается безъ складокъ и разрывовъ на плоскость, то масштабъ не можетъ быть числомъ постояннымъ на картѣ. Онъ долженъ измѣняться отъ точкѣ къ точкѣ. Значитъ, какія бы функціи f и F мы ни выбирали, будетъ для каждаго выбора существовать нѣкоторое опредѣленное колебаніе внутри данной страны.

Назовемъ уклоненіемъ масштаба внутри данной страны разность между наибольшимъ и наименьшимъ значеніями этого масштаба. Чебышевъ высказалъ въ 1853 г. безъ доказательства такую теорему, относящуюся къ изображеніямъ шара на плоскости.

Уклоненіе масштаба будетъ наименьшимъ для такой карты, у которой масштабъ вдоль по границѣ изображаемой страны сохраняетъ постоянную величину.

Мнѣ удалось найти простое доказательство этой теоремы въ 1894 г. Краткое изложеніе этого доказательства сообщено было мною на конгрессѣ французской ассоціаціи, имѣвшемъ мѣсто въ гор. Caen въ августѣ 1894 г. и напечатано потомъ въ трудахъ конгресса. Въ послѣднее время я обобщилъ уже теорему Чебышева на случай произвольной поверхности.

§ 24. Здѣсь кстати я считаю необходимымъ упомянуть о моемъ рѣшеніи другой задачи, представлявшей серьезныя трудности, относящейся къ картамъ. Я рѣшилъ для *эквивалентныхъ* картъ задачу, подобную той, которая, какъ мы только что видѣли, была рѣшена Lagrange'емъ для конформныхъ картъ. Подъ картами эквивалентными разумѣются такія изображенія кривой поверхности на плоскости, въ которыхъ сохраняются всѣ площади, т. е., другими словами, площадь всякой криволинейной фигуры на поверхности точно равна площади соотвѣтственной фигуры на картѣ.

Возможность построенія такихъ картъ слѣдуетъ изъ такихъ соображеній. Пусть карта опредѣляется формулами

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),$$

гдѣ u и v криволинейныя координаты поверхности. Тогда площадь на картѣ изображается интеграломъ

$$\iint dx\,dy = \iint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) du\,dv.$$

Если мы желаемъ, чтобы площадь сохранилась на картѣ, то этотъ интегралъ долженъ точно равняться интегралу

$$\iint \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$$

т. е. должно быть уравненіе

$$(1) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} = \sqrt{EG - F^2}.$$

Оказывается, что измѣненіемъ криволинейныхъ координатъ u и v можно это уравненіе упростить

$$(2) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} = 1.$$

Отъ рѣшенія этого дифференціальнаго уравненія (см. гл. X) и зависитъ, слѣдовательно, нахожденіе эквивалентныхъ картъ, сохраняющихъ площади. Въ статьѣ „Sur la construction des cartes géographiques", Journ. de math. Paris (5), 1,317 (1896) я далъ простой и общій способъ рѣшенія уравненія (2). Этотъ способъ состоитъ въ слѣдующемъ. Перепишемъ уравненіе (2) такъ:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=1, \tag{3}$$

и возьмемъ за новыя независимыя перемѣнныя x и v, а за ихъ функціи y и u. Тогда уравненіе (3) принимаетъ видъ

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4}$$

и если мы обозначимъ черезъ $f(x, v)$ совершенно произвольную функцію, то уравненіе (4) можетъ быть рѣшено такъ:

$$\begin{aligned} y &= f'_x(x, v), \\ u &= f'_v(x, v). \end{aligned} \tag{5}$$

Вопросъ, который подлежитъ нашему рѣшенію, состоитъ въ нахожденіи произвольной функціи f такимъ образомъ, чтобы меридіаны и параллели изображались прямыми линіями и кругами. Мною вопросъ былъ рѣшенъ вполнѣ, т. е. найдены всѣ возможныя карты такого рода. Получилось 11 сортовъ проекцій, чертежи которыхъ помѣщены въ моей книгѣ „Объ основныхъ задачахъ математической теоріи построенія географическихъ картъ", Петербургъ, 1896.

Задача Менделѣева.

§ 25. Знаменитый русскій химикъ Менделѣевъ поставилъ слѣдующую задачу: найти предѣлы измѣняемости коффиціентовъ квадратнаго трехчлена

$$ax^2+2bx+c$$

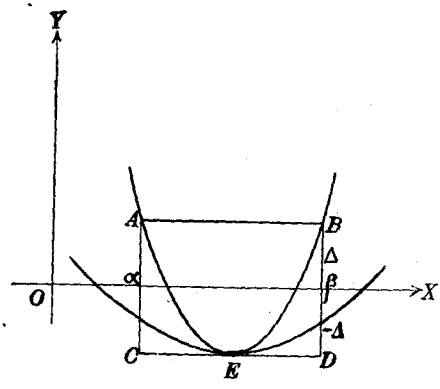
при условіи, чтобы этотъ трехчленъ не уклонялся отъ нуля болѣе, чѣмъ на величину Δ въ данномъ промежуткѣ (α, β).

Очевидно, достаточно разсматривать случай, когда коэффиціентъ a положителенъ. Задача сводится къ нахожденію предѣловъ коэффиціентовъ параболы

$$y=ax^2+2bx+c, \tag{1}$$

проходящей въ полосѣ между двумя прямолинейными отрѣзками AB и CD (черт. 130).

Рѣшеніе задачи оказывается слѣдующимъ. Наибольшее по абсолютной величинѣ значеніе коэффиціентовъ a, b, c получается для такой параболы, которая проходитъ черезъ двѣ точки A и B и касается стороны CD въ серединѣ E.



Черт. 130.

Для полученія коэффиціентовъ придется въ уравненіе параболы (1) подставить координаты точекъ A, B и E. Получаемъ

$$\Delta = a\alpha^2 + 2b\alpha + c,$$
$$\Delta = a\beta^2 + 2b\beta + c,$$
$$-\Delta = a\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 2b\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + c.$$

Рѣшая эти три уравненія относительно трехъ неизвѣстныхъ a, b, c, получаемъ для этихъ неизвѣстныхъ выраженія черезъ Δ, α и β. Разсмотримъ только выраженіе для перваго коэффиціента a; получается

$$a = \frac{8\Delta}{(\alpha-\beta)^2}.$$

Легко убѣдиться, что для всѣхъ параболъ, удовлетворяющихъ требованію Менделѣева, будетъ существовать неравенство

$$|a| \leqq \frac{8\Delta}{(\alpha-\beta)^2}. \tag{2}$$

На девятомъ съѣздѣ естествоиспытателей и врачей я показалъ, что неравенства (2) и тѣ, которыя получаются для коэффиціентовъ b и c, могутъ быть указаны на основаніи простыхъ геометрическихъ соображеній. Я ограничусь доказательствомъ только неравенства (2).

Разсмотримъ кривизну въ вершинѣ параболы (1). Такъ какъ вершина параболы (1) есть ея нижняя точка, то въ выраженіи кривизны

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

будетъ $y'=0$, ибо вершина соотвѣтствуетъ minimum'у функціи y. Но съ другой стороны непосредственнымъ дифференцированіемъ уравненія (1) находимъ

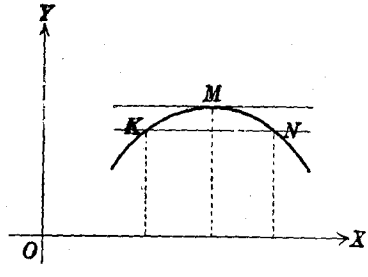
$$y''=2a,$$

слѣдовательно число $2a$ оказывается кривизною параболы. Изъ геометрическихъ соображеній очевидно, что изъ всѣхъ параболъ, проходящихъ между двумя отрѣзками AB и CD, наибольшую кривизну будетъ имѣть та, которая будетъ упираться въ эти отрѣзки. Слѣдовательно, будетъ всегда имѣть мѣсто неравенство (2).

Задача Менделѣева была обобщена академикомъ А. Марковымъ и его братомъ Вл. Марковымъ, ранняя смерть котораго (въ 26 лѣтъ) отняла отъ русской науки выдающагося ученаго. Вл. Марковъ въ бытность еще студентомъ написалъ замѣчательное сочиненіе, въ которомъ трактуетъ вопросы, подобные Менделѣевскому, и приходитъ къ новой замѣчательной теоремѣ алгебры, которую можно видѣть въ моемъ курсѣ алгебраическаго анализа.

Принципъ Fermat'a.

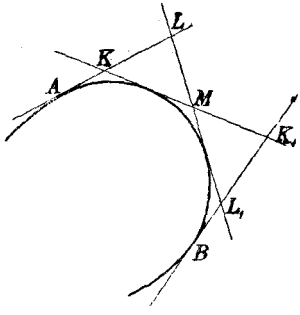
§ 26. Уже задолго до Newton'a и Leibniz'a давались пріемы для рѣшенія задачъ на maxima и minima. Я долженъ здѣсь обратить вниманіе на одинъ изъ такихъ пріемовъ, принадлежащій знаменитому Fermat'у. Этотъ пріемъ основанъ на томъ, что вблизи наибольшаго значенія функціи (въ точкѣ M) существуетъ два одинаковыхъ значенія функціи (въ точкахъ K и N) для двухъ безконечно близкихъ значеній независимаго перемѣннаго (черт. 131). Этотъ пріемъ даетъ часто возможность проще рѣшать задачи на maxima и minima, не прибѣгая къ выкладкамъ. Такъ, напримѣръ, изъ принципа Fermat'a получается непосредственно слѣдующая теорема.



Черт. 131.

Если задана сомкнутая кривая, то многоугольникъ, описанный около нея, будетъ имѣть наименьшую площадь въ томъ случаѣ, когда всѣ стороны его касаются замкнутой линіи серединами.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что около кривой линіи (черт. 132) описанъ нѣкоторый многоугольникъ, всѣ стороны котораго указаны, кромѣ одной KMK_1: Требуется провести эту послѣднюю сторону такимъ образомъ, чтобы площадь описанаго многоугольника была наименьшей. По принципу Fermat'а около искомаго положенія послѣдней стороны должны существовать двѣ касательныя KMK_1 и LML_1, безконечно близкія другъ къ другу и дающія одинаковыя площади для многоугольника. Тогда должны быть равновеликими два треугольника KML и K_1ML_1, т. е. должно быть



Черт. 132.

$$\frac{1}{2}KM \,.\, LM \,.\, \sin LMK = \frac{1}{2}K_1M \,.\, L_1M \,.\, \sin L_1MK_1,$$

но $\angle LMK = \angle L_1MK_1$, слѣдовательно, получаемъ

$$KM \,.\, LM = K_1M . L_1M.$$

Сближая касательныя KK_1 и LL_1, мы получаемъ въ предѣлѣ

$$LM = KM; L_1M = K_1M,$$

откуда

$$KM^2 = K_1M^2, \text{ т. е. } KM = K_1M.$$

Другими словами, точка касанія M есть середина стороны KK_1.

§ 27. Изъ доказаной теоремы вытекаетъ, что изъ всѣхъ многоугольниковъ даннаго числа сторонъ, описанныхъ около круга, правильные имѣютъ наименьшую площадь. Совершенно подобнымъ же образомъ можно показать, что изъ всѣхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ, только правильные обладаютъ наибольшей площадью.

Изопериметрическая задача.

§ 28. Одна изъ самыхъ древнихъ задачъ съ ея разновидностями получила въ исторіи математики названіе *изопериметрической задачи*. Дѣло идетъ о нахожденіи сомкнутой линіи, имѣющей данный периметръ и наибольшую площадь.

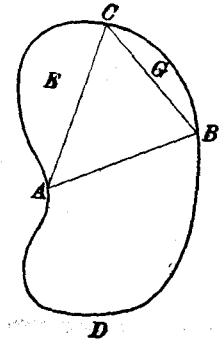
Оказывается, что наибольшую площадь имѣетъ всегда наиболѣе симметричная фигура. Такъ, напримѣръ, мы видѣли, что изъ

всѣхъ прямоугольниковъ даннаго периметра наибольшую площадь имѣетъ самый симметричный, т. е. квадратъ. Подобнымъ же образомъ изъ всѣхъ треугольниковъ даннаго периметра имѣетъ наибольшую площадь треугольникъ равносторонній.

Изъ всѣхъ ломанныхъ и кривыхъ линій даннаго периметра наибольшую площадь имѣетъ кругъ.

Steiner'у принадлежитъ слѣдующій замѣчательно простой способъ доказательства этого предложенія.

Пусть нѣкоторая сомкнутая линія (черт. 133) даетъ при данномъ периметрѣ наибольшую площадь. Раздѣлимъ точками A и B этотъ периметръ пополамъ. Тогда двѣ части ACB и ADB, на которыя площадь раздѣляется прямою, соединяющею точки A и B, должны быть равновелики, потому что, если, напримѣръ, площадь ACB будетъ больше площади ADB, то вмѣсто ADB мы можемъ взять новую линію, которая получится поворотомъ на 180^0 вокругъ оси AB площади ACB, и тогда выйдетъ фигура, имѣющая тотъ же периметръ, но бо́льшую площадь, что противорѣчитъ предположенію.



Черт. 133.

Итакъ, обѣ площади ACB и ADB должны быть одинаковы. Мы можемъ, слѣдовательно, изъ фигуръ, имѣющихъ данный периметръ и наибольшую площадь, выбрать симметричную относительно прямой AB, ибо можно будетъ откинуть площадь ADB и замѣнить ее площадью, которая получится черезъ опрокидываніе на 180^0 площади ACB около прямой AB. Возьмемъ теперь какую нибудь произвольную точку C на контурѣ и соединимъ ее прямыми съ точками A и B. Если наша фигура дѣйствительно даетъ наибольшую площадь, то уголъ ACB долженъ быть непремѣнно прямой, потому что, если этотъ уголъ не будетъ прямымъ, то можно будетъ построить фигуру съ тѣмъ же периметромъ, но имѣющую бо́льшую площадь. Эту фигуру можно такъ получить: построимъ новый треугольникъ $A_1 C_1 B_1$ съ прямымъ угломъ при точкѣ C_1, причемъ $A_1 C_1 = A C$, $B_1 C_1 = B C$. Тогда мы видимъ изъ элементарныхъ геометрическихъ соображеній, что треугольникъ $A_1 B_1 C_1$ имѣетъ площадь бо́льшую, чѣмъ треугольникъ ACB. Прикладывая къ сторонѣ $A_1 C_1$ сегментъ E нашей фигуры, а къ сторонѣ $B_1 C_1$

сегментъ G, мы получаемъ новую фигуру съ тѣмъ же периметромъ, но съ бо́льшей площадью, что противорѣчитъ предположенію.

Итакъ, дѣйствительно, контуръ долженъ быть таковъ, что, если мы соединимъ прямыми съ точками A и B любую точку C этого контура, то уголъ при точкѣ C долженъ оказаться непремѣнно прямымъ. Отсюда слѣдуетъ, что контуръ долженъ быть кругомъ.

Варіаціонное исчисленіе.

§ 29. Разобранная въ предыдущемъ §-ѣ изопериметрическая задача была поводомъ къ изобрѣтенію новаго исчисленія, которое было названо *варіаціоннымъ*. Основы этого исчисленія изложены Euler'омъ и Lagrange'емъ.

Если мы нашу изопериметрическую задачу поставимъ аналитически, то мы замѣтимъ, что дѣло идетъ о нахожденіи такой функціи y отъ независимаго перемѣннаго x, при которой интегралъ

$$\int y\,dx,$$

выражающій площадь фигуры, будетъ наибольшимъ, а длина периметра фигуры, выражаемая интеграломъ

$$\int \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

сохраняетъ свою постоянную величину.

Итакъ, можно характеризировать варіаціонное исчисленіе какъ такое, которое даетъ пріемы нахожденія наибольшихъ и наименьшихъ величинъ опредѣленныхъ интеграловъ вида

$$\int F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})\,dx,$$

гдѣ подинтегральная функція F есть функція отъ независимаго перемѣннаго x, нѣкоторой искомой функціи y и ея производныхъ $y', y'', \ldots y^{(n)}$, и вопросъ сводится къ нахожденію вида функціи y, дающей искомый maximum или minimum интеграла. Названіе исчисленія происходитъ отъ того, что мы варьируемъ (измѣняемъ) искомую функцію y, желая достигнуть наибольшей или наименьшей величины интеграла.

Варіаціонное исчисленіе обобщается также на случай двойныхъ интеграловъ, распространенныхъ на нѣкоторую область численныхъ значеній двухъ перемѣнныхъ x и y. Тогда ищется функція z такимъ образомъ, чтобы интегралъ вида

$$\iint F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots\right) dx\, dy$$

получалъ наименьшее значеніе.

Варіаціонное исчисленіе получило въ послѣднее время серьезное усовершенствованіе своихъ пріемовъ послѣ выдающихся по значенію работъ Weierstrass'a и Hilbert'a.

ГЛАВА X.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій.

Исключеніе произвольныхъ постоянныхъ и функцій.

§ 1. Разсмотримъ уравненіе

$$y = F(x, c_1, c_2, \ldots c_n), \tag{1}$$

гдѣ F нѣкоторая заданная функція отъ перемѣнной независимой x и постоянныхъ произвольныхъ $c_1, c_2, \ldots c_n$. Дифференцируя n разъ по независимой перемѣнной x, получимъ рядъ равенствъ

$$\begin{aligned} y' &= F'(x, c_1, c_2, \ldots c_n), \\ y'' &= F''(x, c_1, c_2, \ldots c_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= F^{(n)}(x, c_1, c_2, \ldots c_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Исключая изъ $n+1$ уравненій (1) и (2) n постоянныхъ произвольныхъ $c_1, c_2, \ldots c_n$, получимъ одно уравненіе вида

$$\Omega(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0, \tag{3}$$

связывающее функцію y, ея производныя и независимую перемѣнную.

§ 2. Возьмемъ, напримѣръ, общее уравненіе круговъ на плоскости

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2. \tag{1}$$

Для исключенія трехъ постоянныхъ произвольныхъ a, b, c будемъ это уравненіе три раза дифференцировать, считая y функціей отъ x, опредѣляемой этимъ самымъ уравненіемъ (1). Получаемъ

$$\begin{aligned} x - a + (y-b)\,y' &= 0, \\ 1 + (y-b)\,y'' + y'^2 &= 0, \\ (y-b)\,y''' + 3\,y'\,y'' &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Для исключенія постоянныхъ произвольныхъ достаточны два послѣднихъ уравненія (2), и мы получаемъ

$$3y'y''^2 - y'''(1+y'^2) = 0. \tag{3}$$

§ 3. Если мы будемъ разсматривать функціи отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ, то является возможность при помощи дифференцированія исключать произвольныя функціи и получать соотношенія между частными производными. Напримѣръ,

$$z = \varphi(x+ay) + \psi(x-ay), \tag{1}$$

гдѣ φ и ψ предполагаются произвольными функціями, первая отъ аргумента $x+ay$, вторая отъ аргумента $x-ay$, x и y независимыя перемѣнныя и a нѣкоторое заданное постоянное число. Дифференцируя два раза по x и два раза по y, получаемъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \varphi'(x+ay) + \psi'(x-ay), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \varphi''(x+ay) + \psi''(x-ay), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= a\varphi'(x+ay) - a\psi'(x-ay), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= a^2\varphi''(x+ay) + a^2\psi''(x-ay). \end{aligned} \tag{3}$$

Изъ уравненій (2) и (3) можно исключить вторыя производныя, и мы получаемъ уравненіе

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{4}$$

выражающее связь между частными производными послѣ исключенія произвольныхъ функцій.

§ 4. Если уравненіе, выражающее зависимость функціи отъ независимыхъ перемѣнныхъ, заключаетъ постоянныя произвольныя или произвольныя функціи, то черезъ исключеніе ихъ получается уравненіе, которое называется *дифференціальнымъ уравненіемъ* разсматриваемой функціи. Такъ, напримѣръ, въ § 1 уравненіе (3) есть дифференціальное для функціи y, опредѣляемой уравненіемъ (1); въ § 2 уравненіе (3) есть дифференціальное уравненіе, характеризующее всѣ круги на плоскости, и, наконецъ, въ § 3 уравненіе (4) есть дифференціальное уравненіе для функціи z, опредѣляемой уравненіемъ (1).

Если дифференціальное уравненіе заключаетъ функцію y отъ одной независимой перемѣнной x и ея производныя по этой независимой перемѣнной, то оно называется *обыкновеннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ*, напримѣръ, уравненія (3) въ §§ 1 и 2. Если же дифференціальное уравненіе заключаетъ частныя производныя функціи многихъ перемѣнныхъ, то оно называется *дифференціальнымъ уравненіемъ въ частныхъ производныхъ*.

§ 5. Обратный процессъ возстановленія по заданному дифференціальному уравненію первоначальнаго уравненія съ произвольными постоянными или произвольными функціями носитъ названіе *интегрированія дифференціальнаго уравненія*, причемъ то первоначальное уравненіе, которое заключаетъ эти произвольныя постоянныя или функціи, опредѣляетъ функцію самаго общаго вида, удовлетворяющую дифференціальному уравненію, и носитъ названіе *общаго интеграла*.

То рѣшеніе дифференціальнаго уравненія, которое получается при заданіи частныхъ значеній постояннымъ произвольнымъ или произвольнымъ функціямъ, носитъ названіе *частнаго рѣшенія* дифференціальнаго уравненія. Напримѣръ, если мы положимъ въ равенствѣ (1) § 3 $\varphi(t) = t^2, \psi(t) = t^2$, то получимъ

$$z = (x + ay)^2 + (x - ay)^2,$$

т. е. получаемъ частное рѣшеніе

$$z = 2(x^2 + a^2 y^2)$$

дифференціальнаго уравненія

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

§ 6. Часто существуютъ у дифференціальныхъ уравненій такъ называемыя *особенныя рѣшенія*, которыя не получаются изъ общаго интеграла при помощи выбора произвольныхъ постоянныхъ или произвольныхъ функцій. На существованіе такихъ особенныхъ рѣшеній обратилъ вниманіе впервые Euler, основатель и творецъ всей теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій, изложенной имъ въ четырехтомномъ трактатѣ „Institutiones calculi integralis“. Euler замѣтилъ существованіе особенныхъ рѣшеній на рядѣ задачъ, взятыхъ изъ механики и связанныхъ съ интегрированіемъ дифференціальныхъ уравненій. Существованіе такихъ рѣшеній ему казалось сначала фактомъ парадоксальнымъ, между

тѣмъ какъ бываютъ случаи, когда особенное рѣшеніе даетъ настоящій отвѣтъ на задачу, рѣшаемую разсматриваемымъ дифференціальнымъ уравненіемъ. Первая общая теорія особенныхъ рѣшеній была дана Lagrange'емъ.

§ 7. Чтобы показать на простомъ примѣрѣ значеніе особенныхъ рѣшеній, разсмотримъ такую задачу. Требуется найти такую кривую линію на плоскости, чтобы разстояніе начала координатъ отъ всѣхъ касательныхъ къ ней было равно постоянному числу a.

Такъ какъ уравненіе касательной къ линіи имѣетъ видъ

$$\eta - y - y'(\xi - x) = 0,$$

то, выражая равенство числу a разстоянія этой касательной отъ начала координатъ, получаемъ

$$\frac{0 - y - y'(0 - x)}{-\sqrt{1 + y'^2}} = a,$$

откуда получается дифференціальное уравненіе

(1) $$y - y'x = a\sqrt{1 + y'^2}$$

искомой кривой линіи. Для интегрированія этого уравненія, продифференцируемъ его по x; тогда будемъ имѣть

$$-y''x = \frac{a y' y''}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

или иначе

$$y''\left[x + a\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right] = 0.$$

Возможны два предположенія:

(3) $$y'' = 0,$$

(4) $$x + a\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0.$$

Предположеніе (3) ведетъ къ нахожденію общаго интеграла. а именно, интегрируя уравненія (3), получаемъ

$$y' = \alpha,$$

гдѣ α постоянное число. Переписывая послѣднее уравненіе въ видѣ

$$dy = \alpha\, dx$$

и интегрируя, получимъ окончательно

(5) $$y = \alpha x + \beta,$$

гдѣ β также постоянная величина.

Получилось тривіальное и неинтересное само по себѣ рѣшеніе задачи, состоящее въ томъ, что всякая прямая линія, если разстояніе ея отъ начала координатъ равно числу a, будетъ служить рѣшеніемъ задачи. Для того, чтобы подобрать постоянныя α и β въ уравненіи (5) такъ, чтобы разстояніе отъ начала координатъ равнялось a, придется положить

$$\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} = a,$$

откуда получается общій интегралъ

(6) $$y = \alpha x + a\sqrt{1+\alpha^2},$$

выражающій прямую линію и заключающій одно постоянное произвольное α.

Чтобы убѣдиться, что уравненіе (6) дѣйствительно есть общій интегралъ разсматриваемаго уравненія (1), достаточно исключить постоянное произвольное α при помощи дифференцированія. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя уравненіе (6) по x, получаемъ

(7) $$y' = \alpha,$$

исключая же α изъ уравненій (6) и (7), получимъ какъ разъ уравненіе (1).

Изъ геометрическихъ соображеній мы догадываемся уже, что кривыхъ линій, рѣшающихъ нашу задачу, существуетъ только одна, а именно кругъ радіуса a, имѣющій центръ въ началѣ координатъ. Такъ какъ этотъ кругъ, очевидно, нельзя получить изъ уравненія прямой (6) никакимъ выборомъ постоянной α, то, слѣдовательно, этотъ кругъ, представляющій настоящее рѣшеніе задачи, является особеннымъ рѣшеніемъ разсматриваемаго дифференціальнаго уравненія. Это особенное рѣшеніе мы получимъ, разсматривая равенство (4). Въ самомъ дѣлѣ, простая выкладка исключенія производной y' изъ двухъ уравненій (1) и (4) приводитъ насъ къ искомому уравненію круга

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

§ 8. Въ § 1 мы видѣли, что, если первоначальное уравненіе заключаетъ n произвольныхъ постоянныхъ, то при помощи n-кратнаго дифференцированія можно притти къ дифференціальному урав-

ненію, заключающему производныя до порядка n включительно. Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ называть *порядкомъ* дифференціальнаго уравненія высшій изъ порядковъ входящихъ въ него производныхъ.

Первый вопросъ, который является, состоитъ въ томъ, можно ли всякое дифференціальное уравненіе порядка n разсматривать, какъ результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ изъ общаго интеграла, заключающаго какъ разъ n этихъ произвольныхъ постоянныхъ. Вся исторія теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій приводитъ насъ къ утвердительному результату, а именно, что общій интегралъ дифференціальнаго уравненія n-го порядка заключаетъ какъ разъ n постоянныхъ произвольныхъ.

Далеко не такъ простъ и ясенъ вопросъ о зависимости между порядкомъ дифференціальнаго уравненія въ частныхъ производныхъ и числомъ входящимъ въ его общій интегралъ произвольныхъ функцій. Что касается уравненій перваго порядка въ частныхъ производныхъ, т. е. такихъ уравненій, въ которыя входятъ только частныя производныя перваго порядка отъ искомой функціи, то можно считать установленнымъ, что въ общій интегралъ этихъ уравненій будетъ входить одна произвольная функція. Но, начиная уже съ уравненій второго порядка, дѣло становится менѣе яснымъ. На примѣрѣ § 3 мы видѣли, что общій интегралъ дифференціальнаго уравненія второго порядка заключаетъ двѣ произвольныя функціи, но существуютъ дифференціальныя уравненія второго порядка съ частными производными, для которыхъ можно написать общій интегралъ, заключающій одну только произвольную функцію.

Въ послѣднее время отчасти изъ теоретическихъ соображеній, отчасти подъ вліяніемъ требованій практики, изученіе теоріи уравненій съ частными производными все болѣе склоняется отъ вопросовъ нахожденія общихъ рѣшеній съ произвольными элементами къ нахожденію частнаго вида рѣшеній, удовлетворяющихъ нѣкоторымъ добавочнымъ условіямъ, причемъ эти добавочныя условія подбираютъ обыкновенно такъ, чтобы получилось единственное рѣшеніе дифференціальнаго уравненія.

Пріемы интегрированія дифференціальныхъ уравненій.

§ 9. Указанное уже нами геніальное твореніе Euler'a „Institutiones calculi integralis“ представляетъ основной трактатъ по интегрированію дифференціальныхъ уравненій, который еще до

сихъ поръ можетъ считаться прекраснымъ руководствомъ въ этой области. Пріемы, указанные Euler'омъ для интегрированія дифференціальныхъ уравненій остаются почти единственными до настоящаго времени. Въ томъ случаѣ, когда дифференціальныя уравненія не интегрируются въ функціяхъ извѣстныхъ, они представляютъ дальнѣйшій источникъ для введенія въ науку новыхъ трансцендентныхъ.

Въ нашемъ краткомъ изложеніи мы ограничимся указаніемъ на самые важные пріемы интегрированія.

Отдѣленіе перемѣнныхъ.

§ 10. Пусть разсматривается уравненіе перваго порядка

(1) $$M(x, y) + y' N(x, y) = 0,$$

гдѣ M и N заданныя функціи отъ x и y. Это уравненіе можно будетъ переписать въ видѣ

(2) $$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0.$$

Если нѣкоторое уравненіе приведено къ виду (2), причемъ функція M зависитъ только отъ одного x, а функція N отъ одного y, то говорятъ, что *перемѣнныя отдѣлены*. Въ этомъ случаѣ уравненіе имѣетъ видъ

$$M(x)\, dx + N(y)\, dy = 0,$$

и, интегрируя, мы получаемъ

$$\int M(x)\, dx + \int N(y)\, dy = C,$$

гдѣ C есть произвольная постоянная величина. Напримѣръ, если задано уравненіе

$$x + y y' = 0,$$

то, переписывая его въ видѣ

$$x\, dx + y\, dy = 0,$$

послѣ интегрированія получаемъ

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Здѣсь можно освободиться отъ знаменателя 2 и написать уравненіе такъ:

$$x^2 + y^2 = C,$$

потому что можно одной буквой C обозначить постоянное произвольное число $2C$.

Интегрирующій множитель.

§ 11. Положимъ, требуется интегрировать уравненіе

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{1}$$

Если функціи M и N суть частныя производныя одной и той же функціи R, тогда первая часть уравненія (1) представляетъ собою полный дифференціалъ функціи R. Другими словами, если

$$M = \frac{\partial R}{\partial x},\ N = \frac{\partial R}{\partial y}, \tag{2}$$

то уравненіе (1) можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$dR = 0, \tag{3}$$

и мы получимъ общій интегралъ, написавши

$$R = C,$$

гдѣ C произвольная постоянная.

Дифференцируя первое изъ уравненій (2) по y, а второе по x, получимъ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{4}$$

Итакъ, мы видимъ, что указанное выше интегрированіе уравненія (1) при помощи представленія его въ видѣ (3) возможно только въ томъ случаѣ, когда функціи M и N удовлетворяютъ условію (4).

Оказывается, что если функціи M и N не удовлетворяютъ условію (4), то первая часть уравненія (1) не будетъ полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи R, но эта первая часть обратится въ полный дифференціалъ послѣ умноженія ея на нѣкоторый множитель ρ, который есть опредѣленная функція отъ x и y. Такой множитель ρ называется *интегрирующимъ множителемъ*, ибо очевидно, что, если такой множитель найденъ, то по умноженіи на него всего уравненія въ первой части получается полный диффе-

ренціалъ, и, значитъ, можно интегрировать уравненіе такимъ пріемомъ, какъ сказано выше.

Итакъ разсмотримъ уравненіе

$$\rho M dx + \rho N dy = 0. \tag{4}$$

Мы предполагаемъ, что ρ подобрано правильно, значитъ, условія (4) для уравненія (5) должны удовлетворяться, и мы имѣемъ

$$\frac{\partial(\rho M)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho N)}{\partial x},$$

или иначе

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} N - \frac{\partial \rho}{\partial y} M + \rho\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = 0. \tag{6}$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что искомый интегрирующій множитель ρ долженъ удовлетворять уравненію съ частными производными перваго порядка (6).

Приведенныя разсужденія убѣждаютъ насъ въ томъ, что нахожденіе интегрирующаго множителя для даннаго уравненія (1) или, что одно и то же, интегрированіе этого уравненія (1) есть задача, равносильная съ интегрированіемъ уравненія (6) въ частныхъ производныхъ. Часто удается просто найти рѣшеніе уравненія (6) въ частныхъ производныхъ, и такимъ образомъ достигается интегрированіе заданнаго уравненія (1) при помощи интегрирующаго множителя.

§ 12. Пояснимъ методу интегрирующаго множителя на примѣрѣ *линейнаго* уравненія перваго порядка

$$y' + Py + Q = 0, \tag{1}$$

гдѣ P и Q заданныя функціи отъ одного перемѣннаго независимаго x. Это уравненіе можно переписать въ видѣ

$$(Py + Q)\,dx + dy = 0. \tag{2}$$

Сравнивая съ обозначеніями предыдущаго §-а, получаемъ

$$M = Py + Q, N = 1.$$

Отсюда уравненіе (6) предыдущаго §-а для интегрирующаго множителя представится въ видѣ

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial y}(Py + Q) - \rho P = 0. \tag{3}$$

Такъ какъ за ρ достаточно взять какое угодно изъ рѣшеній уравненія (3), то для упрощенія задачи предположимъ, что ρ зависитъ отъ одного x. Тогда

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{d\rho}{dx},$$

и, значитъ, уравненіе (3) можно переписать такъ:

$$\frac{d\rho}{dx}-\rho P=0.$$

Здѣсь перемѣнныя отдѣляются, ибо послѣднее уравненіе можно переписать въ видѣ

$$\frac{d\rho}{\rho}=P\,dx.$$

Интегрируя, получаемъ

$$lg\,\rho=\int P\,dx,$$

$$\rho=e^{\int Pdx}.$$

Умножая на полученное выраженіе ρ уравненіе (2), будемъ имѣть

$$(y\,P\,dx+dy)\,e^{\int Pdx}+e^{\int Pdx}\,Q\,dx=0,$$

или иначе

$$d\left[ye^{\int Pdx}\right]=-\,e^{\int Pdx}\,Q\,dx.$$

Интегрируя, получаемъ

$$y\,e^{\int Pdx}=C-\int e^{\int Pdx}\,Q\,dx,$$

откуда

(4) $$y=e^{-\int Pdx}\left[C-\int e^{\int Pdx}\,Q\,d\,x\right].$$

Въ XVIII столѣтіи интегралъ называли также *квадратурой*, ибо интегралъ выражаетъ, какъ извѣстно, площадь кривой. Поэтому, разсматривая формулу (4), мы можемъ сказать, что выраженіе функціи y получилось *въ квадратурахъ*. Выраженіе *„уравненіе рѣшается въ квадратурахъ“* подчеркиваетъ то обстоятельство, что общій интегралъ уравненія можно представить черезъ квадратуры. Такое рѣшеніе въ квадратурахъ встрѣчается только въ рѣдкихъ случаяхъ. Въ большинствѣ случаевъ дифференціальныя уравненія въ квадратурахъ не рѣшаются, и интегрированіе ихъ представляетъ операцію болѣе высокаго порядка.

Линейныя уравненія.

§ 13. Подъ линейнымъ уравненіемъ порядка n разумѣется уравненіе вида

$$(1)\qquad X_0\frac{d^n y}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots$$
$$\ldots+X_{n-1}\frac{dy}{dx}+X_n y=X,$$

гдѣ всѣ коэффиціенты $X_0, X_1, \ldots X_n, X$ суть заданныя функціи отъ одного перемѣннаго независимаго x. Если функція X, стоящая во второй части уравненія (1), тождественно равна нулю, то говорятъ, что линейное уравненіе есть уравненіе безъ послѣдняго члена. Если же эта функція X отлична отъ нуля, то уравненіе называется уравненіемъ съ послѣднимъ членомъ.

Замѣчательно, что достаточно знать одно частное рѣшеніе уравненія съ послѣднимъ членомъ для того, чтобы свести полное нахожденіе общаго интеграла уравненія съ послѣднимъ членомъ къ болѣе простой задачѣ нахожденія общаго интеграла уравненія безъ послѣдняго члена.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть y_0 есть частное рѣшеніе уравненія (1). Тогда, введя новую перемѣнную z при помощи равенства

$$(2)\qquad y=y_0+z,$$

получимъ для z уравненіе

$$X_0\frac{d^n z}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\ldots+X_{n-1}\frac{dz}{dx}+X_n z=0,$$

т. е. уравненіе безъ послѣдняго члена.

§ 14. Особенно просто интегрируется линейное уравненіе безъ послѣдняго члена въ томъ случаѣ, когда всѣ коэффиціенты постоянныя числа, т. е. въ случаѣ уравненія

(1) $$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Покажемъ, что уравненіе (1) имѣетъ частное рѣшеніе вида

(2) $$y = e^{\lambda x},$$

гдѣ λ нѣкоторое постоянное число, подлежащее выбору.

Такъ какъ

$$y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x},$$

то уравненіе (1) послѣ подстановки выраженія (2) обратится въ такое:

$$(a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n) e^{\lambda x} = 0.$$

Мы удовлетворимъ послѣднему уравненію, если положимъ

(3) $$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Итакъ, числа λ нужно искать среди корней алгебраическаго уравненія (3). Ограничимся разсмотрѣніемъ случая, когда уравненіе (3) не имѣетъ кратныхъ корней, отсылая читателя для случая кратныхъ корней къ болѣе подробнымъ курсамъ интегрированія уравненій. Обозначимъ черезъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ всѣ различные корни уравненія (3). Тогда мы получаемъ n частныхъ рѣшеній

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots e^{\lambda_n x}$$

дифференціальнаго уравненія (1). Общій интегралъ уравненія (1) будетъ имѣть видъ

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x},$$

гдѣ $C_1, C_2, \ldots C_n$ постоянныя произвольныя.

§ 15. То обстоятельство, что общій интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія съ постоянными коэффиціентами линейно выражается черезъ постоянныя произвольныя $C_1, C_2, \ldots C_n$, имѣетъ мѣсто и въ общемъ случаѣ для уравненій безъ послѣдняго члена, т. е. общій интегралъ уравненія

(1) $$X_0 y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y' + X_n y = 0$$

имѣетъ видъ

(2) $$y = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \ldots + C_n \varphi_n(x),$$

гдѣ $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$ суть n частныхъ рѣшеній уравненія (1).

Замѣчательно, что, если мы найдемъ общій интегралъ (2) уравненія (1), то при помощи квадратуръ можно будетъ найти частное рѣшеніе уравненія съ послѣднимъ членомъ

$$X_0 y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y' + X_n y = X \tag{3}$$

и, такимъ образомъ, проинтегрировать это послѣднее.

Мы укажемъ способъ Lagrange'а, носящій названіе способа *варіаціи произвольныхъ постоянныхъ*. Будемъ искать частное рѣшеніе уравненія (3) подъ видомъ формулы (2), причемъ C_1, C_2, . . . C_n мы будемъ считать уже не постоянными произвольными, а функціями отъ независимаго перемѣннаго x. Поставимъ для этихъ функцій такія ограниченія, чтобы функція y и ея $n-1$ производныхъ имѣли тотъ же видъ при перемѣнныхъ C_i, какъ и въ случаѣ постоянныхъ C_i. Для этой цѣли дифференцируемъ уравненіе (2); получаемъ

$$y' = \frac{dC_1}{dx}\varphi_1 + \frac{dC_2}{dx}\varphi_2 + \ldots + \frac{dC_n}{dx}\varphi_n + C_1\varphi_1' + \\ + C_2\varphi_2' + \ldots + C_n\varphi_n'.$$

Очевидно, что эта производная y' будетъ имѣть то же выраженіе

$$y' = C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2' + \ldots + C_n\varphi_n' \tag{4}$$

при перемѣнныхъ C_i, что и при постоянныхъ, если мы положимъ

$$\frac{dC_1}{dx}\varphi_1 + \frac{dC_2}{dx}\varphi_2 + \ldots + \frac{dC_n}{dx}\varphi_n = 0. \tag{5}$$

Дифференцируя уравненіе (4), мы найдемъ, что выраженіе для y'' не измѣнится, если мы положимъ

$$\frac{d\,C_1}{dx}\varphi_1' + \frac{d\,C_2}{dx}\varphi_2' + \ldots + \frac{p\,C_n}{dx}\varphi_n' = 0. \tag{6}$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, получимъ рядъ уравненій

$$\frac{d\,C_1}{d\,x}\varphi_1'' + \frac{d\,C_2}{dx}\varphi_2'' + \ldots + \frac{d\,C_n}{dx}\varphi_n'' = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{7}$$

$$\frac{d\,C_1}{dx}\varphi_1^{(n-2)} + \frac{d\,C_2}{dx}\varphi_2^{(n-2)} + \ldots + \frac{d\,C_n}{dx}\varphi_n^{(n-2)} = 0\,.$$

Наконецъ, дифференцируя выраженіе $(n-1)$-ой производной

$$y^{(n-1)} = C_1 \varphi_1^{(n-1)} + C_2 \varphi_2^{(n-1)} + \ldots + C_n \varphi_n^{(n-1)},$$

получимъ

$$y^{(n)} = \frac{d\,C_1}{d\,x} \varphi_1^{(n-1)} + \ldots + \frac{d\,C_n}{dx} \varphi_n^{(n-1)} + C_1 \varphi_1^{(n)} + \ldots$$

$$\ldots + C_n \varphi_n^{(n)}.$$

Въ этомъ выраженіи мы уже не будемъ ничего приравнивать нулю.

Подставляя теперь всѣ выраженія производныхъ въ наше уравненіе (3) съ послѣднимъ членомъ, получимъ

$$(8) \qquad \frac{d\,C_1}{d\,x} \varphi_1^{(n-1)} + \ldots + \frac{d\,C_n}{d\,x} \varphi_n^{(n-1)} = \frac{X}{X_0}.$$

Рѣшая n уравненій (5), (6), (7), (8) относительно n производныхъ $\frac{d\,C_1}{d\,x}, \frac{d\,C_2}{d\,x}, \ldots \frac{d\,C_n}{d\,x}$, получимъ

$$\frac{d\,C_1}{d\,x} = \psi_1(x), \frac{d\,C_2}{d\,x} = \psi_2(x), \ldots \frac{d\,C_n}{d\,x} = \psi_n(x),$$

гдѣ $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ будутъ нѣкоторыя опредѣленныя функціи отъ x. Отсюда $C_1, C_2, \ldots C_n$, дающія искомое частное рѣшеніе, получаются въ квадратурахъ.

Теорія Fuchs'a.

§ 16. Въ статьѣ „Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre“ (Math. Annalen, Bd. 48) Коркинъ высказываетъ слѣдующія общія замѣчанія относительно характера современныхъ изслѣдованій по интегрированію дифференціальныхъ уравненій.

„Въ послѣднее время пытаются примѣнить къ дифференціальнымъ уравненіямъ теорію функцій комплекснаго перемѣннаго, которая въ свою очередь вытекаетъ изъ изученія функцій алгебраическихъ и ихъ интеграловъ. Но эта теорія при большой общности своихъ теоремъ имѣетъ существенное несовершенство, а именно, въ ней отсутствуютъ методы вычисленія неизвѣстныхъ функцій. Это же вычисленіе есть настоящее интегрированіе уравненія и окончательная цѣль его анализа. Чтобы подвинуться впередъ въ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій одной теоріи

функцій недостаточно. Для этого нужно присоединить къ этой теоріи соображенія, ей совершенно чуждыя.

Я думаю, что для цѣли вычисленія неизвѣстныхъ мы не имѣемъ до сихъ поръ никакой другой методы, какъ слѣдовать пути старыхъ математиковъ, т. е. ограничиться внимательнымъ изученіемъ уравненій частнаго вида, искать новыя интегрируемыя уравненія; тѣмъ болѣе, что очень простые частные случаи, трактованные соотвѣтственнымъ образомъ, могутъ привести къ очень общимъ заключеніямъ".

Очевидно, что въ приведенныхъ словахъ подъ именемъ старыхъ математиковъ авторъ разумѣетъ великаго Euler'a, а потому нельзя не сочувствовать автору въ его уваженіи къ методамъ этого человѣка. Но необходимо обратить вниманіе на то обстоятельство, что незамѣченные случаи простого интегрированія уравненій дѣлаются все рѣже и рѣже, такъ что является вопросъ, что же дѣлать съ большинствомъ дифференціальныхъ уравненій, для которыхъ мы не находимъ простыхъ пріемовъ интегрированія. Оставить такія уравненія совершенно безъ изслѣдованія было бы нецѣлесообразно въ виду ихъ практическихъ приложеній. Поэтому, естественно, возникло въ послѣднее время новое направленіе въ теоріи интегрированія уравненій, которое обращаетъ вниманіе также и на тѣ уравненія, которыя простыми пріемами не интегрируются, а именно, за невозможностью найти хорошія методы вычисленія изучаютъ *свойства* функцій, опредѣляемыхъ этими дифференціальными уравненіями.

Мнѣ кажется, что было бы несправедливо сказать, что изученіе свойствъ функцій есть задача менѣе достойная вниманія, чѣмъ задача вычисленія этихъ функцій, потому что тогда пришлось бы сказать, напримѣръ, что главное значеніе функцій Θ въ теоріи эллиптическихъ функцій состоитъ не въ ихъ замѣчательныхъ свойствахъ, изъ которыхъ въ настоящее время выводится такое множество заключеній, а въ томъ, что они даютъ возможность хорошо вычислять численное значеніе эллиптическихъ функцій.

Что касается приложенія теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій, то я согласился бы вполнѣ съ вышеприведенными словами Коркина, только мотивировалъ бы мои возраженія нѣсколько иначе. Коркинъ видитъ въ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго большую общность при отсутствіи методъ вычисленія. Я высказалъ бы

мысль совершенно обратную, т. е. повторилъ бы еще разъ соображенія, высказанныя въ гл. VII, а именно, что теорія функцій комплекснаго перемѣннаго налагаетъ извѣстныя ограниченія на разсматриваемыя функціи и едва ли въ этомъ смыслѣ подходитъ къ задачѣ нахожденія общихъ интеграловъ, т. е. къ задачѣ нахожденія совокупностей всѣхъ возможныхъ рѣшеній даннаго уравненія. Въ этомъ отношеніи теорія функцій вещественнаго перемѣннаго значительно шире.

Съ другой стороны нельзя не признать за теоріей функцій комплекснаго перемѣннаго громадныхъ заслугъ въ математикѣ XIX столѣтія. Безъ нея была бы невозможна совершенная теорія эллиптическихъ функцій съ ея глубокими обобщеніями, давшими намъ современную теорію Abel'евыхъ функцій.

Въ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій теорія функцій также дала серьезные результаты, отрицать достоинство которыхъ было бы крайне несправедливо. Я имѣю въ виду теорію Fuchs'a, относящуюся къ изученію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ точки зрѣнія теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго. На этой теоріи подтверждаются вышеприведенныя слова Коркина, что „частные случаи, трактованные соотвѣтственнымъ образомъ, могутъ привести къ очень общимъ заключеніямъ".

Дѣло въ томъ, что теорія Fuchs'a линейныхъ уравненій является обобщеніемъ знаменитыхъ изслѣдованій Gauss'a о такъ называемомъ *гипергеометрическомъ рядѣ*.

Gauss обратилъ вниманіе на одинъ результатъ Euler'a относящійся къ интегрированію нѣкотораго уравненія второго порядка при помощи особеннаго ряда, расположеннаго по возрастающимъ степенямъ перемѣннаго независимаго. Gauss разсматриваетъ и называетъ гипергеометрическимъ слѣдующій рядъ:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$

Оказывается, что этотъ рядъ есть интегралъ такого линейнаго дифференціальнаго уравненія второго порядка:

$$(1) \qquad (x - x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} + \left[\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\right]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

Gauss показалъ цѣлый рядъ замѣчательныхъ свойствъ гипергеометрическаго ряда. Изъ этихъ свойствъ вытекаютъ свойства

интеграловъ дифференціальнаго уравненія (1), которые, какъ оказалось, могутъ быть облечены въ довольно изящную теорію, послужившую основаніемъ для обобщенія Fuchs'a.

Гипергеометрическій рядъ находится въ большой связи съ теоріей эллиптическихъ функцій, ибо при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ и $\gamma = 1$ получается дифференціальное уравненіе

$$x(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-2x)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}y = 0,$$

которому удовлетворяетъ слѣдующій эллиптическій интегралъ:

$$y = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-xz^2)}}.$$

Теорія Sophus'a Lie.

§ 17. Здѣсь мы должны упомянуть объ изслѣдованіяхъ Sophus'a Lie, выдающагося математика конца XIX столѣтія. Lie желалъ сдѣлать для дифференціальныхъ уравненій нѣчто, соотвѣтствующее теоріи Galois для алгебраическихъ уравненій, т. е., другими словами, онъ искалъ приложеній къ дифференціальнымъ уравненіямъ теоріи непрерывныхъ группъ преобразованій перемѣнныхъ.

Въ послѣднее время, послѣ смерти Lie замѣчается нѣкоторое охлажденіе интереса къ его методамъ, связанное, несомнѣнно, съ трудностью полученія въ этомъ направленіи новыхъ результатовъ.

Совокупныя обыкновенныя дифференціальныя уравненія.

§ 18. Пусть задана нѣкоторая система m дифференціальныхъ уравненій, въ которыя входятъ единственная независимая перемѣнная x, рядъ ея функцій y, z, u . . . , причемъ число этихъ функцій n, и кромѣ того рядъ производныхъ этихъ функцій по независимой перемѣнной x.

Если оставить въ сторонѣ исключительные случаи, то происходитъ явленіе, аналогичное тому, которое мы имѣемъ въ алгебрѣ при m уравненіяхъ съ n неизвѣстными, а именно, если неизвѣстныхъ функцій будетъ меньше, чѣмъ дифференціальныхъ

уравненій, то должны существовать нѣкоторыя условія для того, чтобы эти уравненія были совмѣстимы. Обратно, если искомыхъ функцій больше, чѣмъ уравненій, то нѣкоторыя функціи остаются произвольными, и, наконецъ, является подлежащимъ разсмотрѣнію случай наиболѣе важный, когда число уравненій равно числу неизвѣстныхъ функцій.

Чтобы понять, какъ нужно интегрировать систему уравненій, достаточно разсмотрѣть простѣйшій случай двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными функціями. Пусть, напримѣръ, заданы уравненія

$$(1)\qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0,$$

$$(2)\qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^p y}{dx^p}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^q z}{dx^q}\right) = 0.$$

Исключая y изъ этихъ уравненій, мы получимъ одно дифференціальное уравненіе съ одной искомой функціей z, черезъ интегрированіе котораго и получится эта функція. Чтобы произвести такое исключеніе, продифференцируемъ p разъ уравненіе (1) и m разъ уравненіе (2). Тогда получимъ $p+m+2$ уравненій, изъ которыхъ способами обыкновенной алгебры исключимъ $m+p+1$ неизвѣстныхъ

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m+p} y}{dx^{m+p}}.$$

Окончательное уравненіе относительно z будетъ такого порядка, который равенъ большему изъ чиселъ $n+p$ и $q+m$. Конечно, порядокъ этотъ можетъ быть меньше, если для исключенія не надо разсматривать всѣхъ $m+p+2$ уравненій.

Уравненія съ частными производными.

§ 19. Обращаясь къ интегрированію уравненій съ частными производными, ограничимся разсмотрѣніемъ только случая двухъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Искомая функція, опредѣляемая дифференціальнымъ уравненіемъ, пусть будетъ z.

Обозначимъ частныя производныя z слѣдующимъ образомъ:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

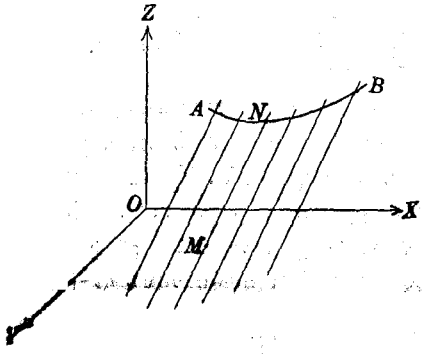
Такъ какъ уравненіе $z = \varphi(x, y)$ опредѣляетъ нѣкоторую поверхность въ трехмѣрномъ пространствѣ, то очевидно, что тео-

рія интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными съ двумя перемѣнными независимыми должна прилагаться въ теоріи поверхностей. Эта связь теоріи поверхностей съ уравненіями въ частныхъ производныхъ была предметомъ знаменитаго трактата Monge'a „L'Application de l'Analyse à la Géométrie".

Разсмотримъ нѣсколько наиболѣе важныхъ задачъ, трактованныхъ Monge'емъ.

Поверхности цилиндрическія.

§ 20. *Цилиндрическими поверхностями* называются поверхности, описанныя прямою MN (черт. 134), перемѣщающейся параллельно нѣкоторой опредѣленной прямой въ пространствѣ и опирающейся на нѣкоторую заданную кривую AB. Прямая MN, описывающая цилиндръ, носитъ названіе его *образующей*, а кривая AB называется *направляющей* цилиндра.



Черт. 134.

Пусть

(1) $x = az + \alpha, y = bz + \beta$

будутъ уравненія образующей цилиндра. Такъ какъ образующая не измѣняетъ своего направленія, то a и b числа постоянныя, а α и β тѣ перемѣнные параметры, различнымъ значеніямъ которыхъ соотвѣтствуютъ различныя образующія. Пусть

(2) $$F(x, y, z) = 0,$$
$$F_1(x, y, z) = 0$$

суть уравненія направляющей AB. Исключая три буквы x, y, z изъ четырехъ уравненій (1) и (2), получимъ уравненіе

(3) $$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

связывающее параметры α и β. Рѣшая уравненіе (3) относительно β, получимъ

$$\beta = \Omega(\alpha).$$

Подставляя сюда выраженія параметровъ α и β изъ уравненій (1), получимъ уравненіе

(5) $$y - bz = \Omega(x - az),$$

гдѣ Ω какая нибудь функція.

Это уравненіе есть наиболѣе общее уравненіе *въ конечныхъ величинахъ* цилиндрическихъ поверхностей. *Дифференціальное* урав-

ненія цилиндрическихъ поверхностей получимъ, исключая произвольную функцію Ω. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя уравненіе (5) по x и по y, получимъ

$$-bp = \Omega'(x - az)(1 - ap)$$
$$1 - bq = \Omega'(x - az)(-aq).$$

Исключая производную $\Omega'(x - az)$, получимъ

(6) $$ap + bq = 1.$$

Уравненіе (6) есть дифференціальное уравненіе цилиндрическихъ поверхностей. Это уравненіе выражаетъ то геометрическое свойство цилиндрическихъ поверхностей, что касательныя плоскости параллельны образующимъ поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе касательной плоскости есть

$$\zeta - z = (\xi - x)p + (\eta - y)q,$$

условіе же того, что эта касательная плоскость параллельна прямой

$$\xi = az, \eta = bz$$

будетъ (§ 49 гл. II)

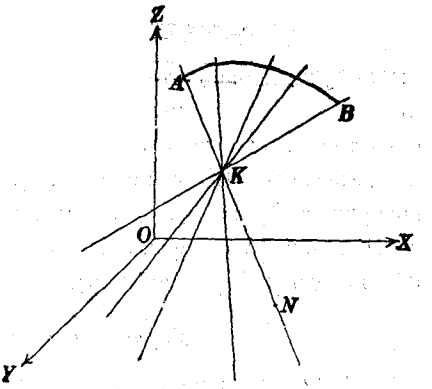
$$ap + bq = 1.$$

Уравненіе (5), заключающее произвольную функцію, есть общій интегралъ послѣдняго уравненія.

Поверхности коническія.

§ 21. *Коническими поверхностями* называются такія поверхности, которыя описываются прямой KN, проходящей черезъ постоянную точку K и встрѣчающей постоянно данную кривую AB. Пусть a, b, c будутъ координаты вершины K конической поверхности. Тогда уравненія прямолинейной образующей могутъ быть написаны въ видѣ

(1) $$x - a = \alpha(z - c),$$
$$y - b = \beta(z - c),$$



Черт. 135.

гдѣ α и β перемѣнные угловые коэффиціенты. Для того, чтобы получить условіе, при которомъ эта прямая проходитъ черезъ направляющую AB конуса, уравненія которой пусть будутъ

(2) $$F_1(x, y, z) = 0, F_2(x, y, z) = 0,$$

необходимо исключить буквы x, y, z изъ четырехъ уравненій (1), (2). Получается одно соотношеніе между остальными буквами, которое даетъ β, какъ нѣкоторую функцію отъ α:

(3) $$\beta = \Omega(\alpha).$$

Подставляя сюда выраженія α, β изъ уравненій (1), получимъ

(4) $$\frac{y-b}{z-c} = \Omega\left(\frac{x-a}{z-c}\right).$$

Уравненіе (4) при произвольной функціи Ω представляетъ собою общее уравненіе коническихъ поверхностей, имѣющихъ данную вершину. Дифференцируя уравненіе (4) по x и по y, получаемъ

$$\left(\frac{y-b}{z-c}\right)'_x = \Omega'\left(\frac{x-a}{z-c}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{z-c}\right)'_x,$$

$$\left(\frac{y-b}{z-c}\right)'_y = \Omega'\left(\frac{x-a}{z-c}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{z-c}\right)'_y.$$

Исключая производную Ω', получимъ

$$\left(\frac{y-b}{z-c}\right)'_x \left(\frac{x-a}{z-c}\right)'_y - \left(\frac{y-b}{z-c}\right)'_y \left(\frac{x-a}{z-c}\right)'_x = 0.$$

Раскрывая это уравненіе и обозначая по прежнему

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

мы получимъ окончательно такое уравненіе

(5) $$z-c = p(x-a) + q(y-b),$$

представляющее собою *дифференціальное уравненіе коническихъ поверхностей*. Это уравненіе выражаетъ то свойство коническихъ поверхностей, что касательная плоскость во всякой точкѣ поверхности проходитъ черезъ вершину конуса. Уравненіе (4) есть общій интегралъ уравненія (5).

Уравненія второго порядка.

§ 22. Уравненія въ частныхъ производныхъ второго порядка вида

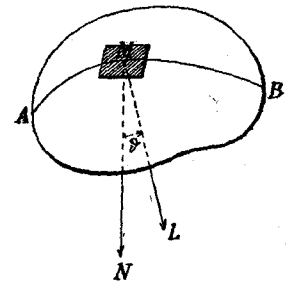
(1) $$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

даютъ классы поверхностей, у которыхъ обладаетъ извѣстнымъ

свойствомъ, выражаемымъ уравненіемъ (1), *кривизна* линій, проведенныхъ по поверхности.

§ 23. Пусть $f(x, y, z) = 0$ есть заданное уравненіе поверхности (черт. 136). Проведемъ по поверхности какую нибудь произвольную кривую AMB и разсмотримъ нѣкоторую ея точку M. Пусть MN будетъ нормаль къ поверхности въ точкѣ M, ея косинусы угловъ съ осями будутъ (§ 58 гл. VI)

$$(1)\qquad \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$



Черт. 136.

Пусть ML обозначаетъ главную нормаль кривой AMB въ точкѣ M, тогда ея косинусы угловъ опредѣляются (§ 52 гл. VI) по формуламъ

$$(2)\qquad \rho\frac{d^2x}{d\sigma^2}, \rho\frac{d^2y}{d\sigma^2}, \rho\frac{d^2z}{d\sigma^2},$$

гдѣ ρ есть радіусъ первой кривизны линіи AMB, а σ ея дуга.

Означая черезъ ϑ уголъ между нормалью поверхности (1) нормалью (2) нѣкоторой линіи, проведенной по поверхности, получимъ

$$(3)\qquad \cos\vartheta = \rho\frac{-p\frac{d^2x}{d\sigma^2} - q\frac{d^2y}{d\sigma^2} + \frac{d^2z}{d\sigma^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

но $dz = p\,dx + q\,dy$, отсюда

$$(4)\qquad d\frac{dz}{d\sigma} = p\,d\frac{dx}{d\sigma} + q\,d\frac{dy}{d\sigma} + \frac{dx}{d\sigma}dp + \frac{dy}{d\sigma}dq;$$

далѣе

$$dp = r\,dx + s\,dy,\ dq = s\,dx + t\,dy.$$

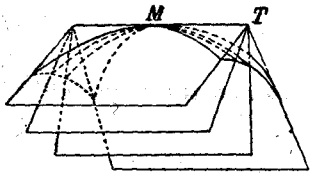
Подставляя въ (4) получимъ

$$d\frac{dz}{d\sigma} - p\,d\frac{dx}{d\sigma} - q\,d\frac{dy}{d\sigma} = r\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2s\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + t\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2;$$

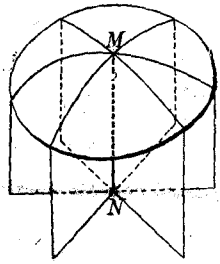
отсюда формулу (3) можно будетъ окончательно переписать такъ

$$(5) \qquad \rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}.\cos\vartheta}{r\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2s\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + t\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2}.$$

§ 24. Будемъ теперь разсматривать не произвольную кривую AMB на поверхности, а только сѣченіе поверхности какою нибудь плоскостью, другими словами, пусть кривая AMB будетъ плоская. Будемъ называть *нормальнымъ сѣченіемъ* поверхности *въ точкѣ* M такую линію, которая лежитъ въ пересѣченіи съ плоскостью, проходящей черезъ нормаль къ поверхности въ точкѣ M. Для нормальнаго сѣченія $\vartheta = 0$.



Черт. 137.



Черт. 138.

Если мы будемъ проводить черезъ точку M поверхности различныя сѣкущія плоскости, то является важнымъ изучить, какъ мѣняется радіусъ кривизны ρ (см. (5) § 23) отъ плоскости къ плоскости. Тутъ приходится обратить вниманіе на слѣдующіе два факта: 1) какъ измѣняется радіусъ ρ, когда сѣкущая плоскость вращается около какой нибудь касательной MT (черт. 137), проведеной къ поверхности черезъ точку M; 2) какъ измѣняется ρ при вращеніи сѣкущей плоскости около нормали MN къ поверхности (черт. 138).

Теорема Meusnier.

§ 25. Если мы вращаемъ плоскость около опредѣленной касательной MT, то остаются безъ измѣненія выраженія

$$\frac{dx}{d\sigma}, \frac{dy}{d\sigma};$$

кромѣ того не мѣняются числа p, q, r, s, t, ибо эти числа представляютъ изъ себя значенія производныхъ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для точки M, которая остается неподвижной.

Итакъ, обозначая

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2s\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + t\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2} \quad (\vartheta = 0),$$

получимъ

$$(1) \qquad \rho = \rho_0 \cos\vartheta;$$

послѣдняя формула (1) выражаетъ теорему Meusnier: *радіусъ кривизны ρ въ какой нибудь точкѣ M кривой S, проведенной по поверхности, равенъ произведенію радіуса кривизны ρ_0 нормальнаго сѣченія, имѣющаго общую касательную MT съ кривою, и косинуса угла ϑ между плоскостью нормальнаго сѣченія и соприкасающейся плоскостью точки M данной кривой S.*

Теорема Euler'a.

§ 26. Euler показалъ, что кривизна

$$\frac{1}{\rho}$$

нормальнаго сѣченія при вращеніи его плоскости около нормали поверхности измѣняется въ нѣкоторыхъ конечныхъ границахъ

$$\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2},$$

причемъ одно изъ этихъ чиселъ является minimum'омъ функціи $\frac{1}{\rho}$, а другое число ея maximum'омъ.

Если $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$, то величина $\frac{1}{\rho}$ есть постоянная. Послѣднее обстоятельство имѣетъ мѣсто для всѣхъ точекъ шара.

Чтобы убѣдиться проще въ справедливости теоремы Euler'a, поступимъ такъ: полагаемъ $\cos\vartheta = 1$ и вводимъ въ разсмотрѣніе вмѣсто функціи $\frac{1}{\rho}$ новую величину

$$\tau = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\rho} = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{d\sigma^2},$$

но

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2 =$$
$$= (1+p^2)\,dx^2 + 2\,p\,q\,dx\,dy + (1+q^2)\,dy^2.$$

Обозначимъ

$$\xi = \frac{dx}{dy};$$

получимъ

$$(1) \qquad \tau = \frac{r\,\xi^2 + 2\,s\,\xi + t}{(1+p^2)\,\xi^2 + 2\,p\,q\,\xi + 1 + q^2}.$$

Итакъ, при вращеніи плоскости мѣняется только одна величина ξ.

Примѣняя принципъ Fermat'a (§ 26 гл. IX) мы замѣчаемъ, что maximum и minimum для τ долженъ соотвѣтствовать кратному корню уравненія (1), если въ немъ разсматривать ξ, какъ неизвѣстную величину.

Въ самомъ дѣлѣ, переписывая уравненіе (1) въ видѣ

$$[r - (1+p^2)\,\tau]\,\xi^2 + 2\,[s - p\,q\,\tau]\,\xi + t - (1+q^2)\,\tau = 0,$$

получимъ, какъ условіе для кратности корней, равенство

$$[s - p\,q\,\tau]^2 - [r - (1+p^2)\,\tau]\,[t - (1+q^2)\,\tau] = 0,$$

раскрывая которое, получаемъ для опредѣленія τ квадратное уравненіе

$$\tau^2\,(1+p^2+q^2) - [r\,(1+q^2) - 2\,s\,p\,q + t\,(1+p^2)]\,\tau + r\,t - s^2 = 0;$$

подставляя $\tau = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\rho}$, получаемъ

$$(2) \quad \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 (1+p^2+q^2)^2 - \sqrt{1+p^2+q^2}\,\frac{1}{\rho}\,[r\,(1+q^2) - 2\,s\,p\,q +$$
$$+ t\,(1+p^2)] + r\,t - s^2 = 0;$$

корнями этого уравненія и будутъ указанные выше предѣлы $\frac{1}{\rho_1}$ и $\frac{1}{\rho_2}$ кривизны $\frac{1}{\rho}$.

Получаемъ

$$(3)\qquad \frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{r(1+q^2)-2spq+t(1+p^2)}{(\sqrt{1+p^2+q^2})^3},$$

$$(4)\qquad \frac{1}{\rho_1\rho_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

§ 27. Выраженіе $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}$ носитъ названіе *средней* кривизны поверхности въ точкѣ M. Если средняя кривизна поверхности равна нулю во всѣхъ точкахъ, то поверхность удовлетворяетъ, очевидно, уравненію

$$r(1+q^2)-2spq+t(1+p^2)=0.$$

Это уравненіе есть дифференціальное уравненіе такъ называемыхъ *минимальныхъ поверхностей*, такъ какъ поверхности, удовлетворяющія этому уравненію, обладаютъ свойствомъ имѣть наименьшую площадь внутри даннаго контура.

§ 28. Въ своемъ знаменитомъ мемуарѣ „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ Gauss обращаетъ вниманіе на то обстоятельство, что естественнѣе всего является мысль принять за кривизну поверхности выраженіе

$$(1)\qquad \frac{1}{\rho_1\rho_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Gauss вводитъ въ разсмотрѣніе понятіе объ *изгибаніи* поверхности безъ *складокъ* и *разрыва* и приходитъ къ заключенію, что *при изгибаніи поверхности кривизна (1) соотвѣтственныхъ точекъ не мѣняется.*

Поверхности, развертывающіяся на плоскость.

§ 29. Если Gauss'ова кривизна равна нулю во всѣхъ точкахъ поверхности, то поверхность удовлетворяетъ уравненію

$$(1)\qquad rt-s^2=0.$$

Покажемъ, какъ это уравненіе проинтегрировать. Легко убѣдиться, что зависимость (1) между вторыми производными равносильна тому обстоятельству, что одна изъ первыхъ производныхъ p, q есть функція отъ другой, т. е.

$$(2)\qquad q=f(p),$$

гдѣ f совершенно произвольная функція.

Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя уравненіе (2) по x и y, получимъ

$$\frac{\partial q}{\partial x} = f'(p)\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y} = f'(p)\frac{\partial p}{\partial y},$$

или

$$s = f'(p)\,r, t = f'(p)\,s,$$

откуда черезъ исключеніе $f'(p)$ получаемъ какъ разъ уравненіе (1). Мы не будемъ останавливаться на доказательствѣ обратнаго предложенія, что изъ уравненія (1) вытекаетъ, какъ слѣдствіе, уравненіе (2).

Интегрируя уравненіе

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

получаемъ

$$z = \int (p\,dx + q\,dy) = \int p\,dx + \int q\,dy;$$

интегрируя по частямъ, получимъ

$$\int p\,dx = px - \int x\,dp,$$

$$\int q\,dy = qy - \int y\,dq,$$

откуда

(3) $$z = p\,x + q\,y - \int (x\,dp + y\,dq);$$

но изъ (2) получаемъ $d\,q = f'(p)\,dp$, откуда формула (3) перепишется такъ

(4) $$z = px + qy - \int [x + y\,f'(p)]\,dp;$$

для интегрируемости выраженіе

$$x + y\,f'(p)$$

должно быть произвольно взятой функціей отъ одного p; мы можемъ положить

(5) $$x + y\,f'(p) = -\varphi'(p),$$

изъ $\varphi(p)$ знакъ произвольной функціи.

Тогда въ формулѣ (4) можно будетъ произвести интегрированіе, и мы получимъ

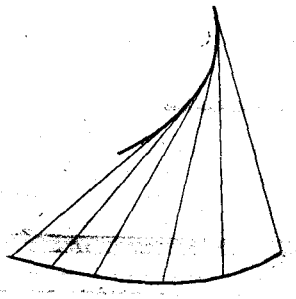
$$z = px + qy + \varphi(p).$$

Итакъ, получается окончательный интегралъ уравненія (1), выраженный двумя уравненіями

$$(6) \qquad \begin{aligned} z &= px + f(p)\,y + \varphi(p), \\ 0 &= x + f'(p)\,y + \varphi'(p). \end{aligned}$$

Если p считать постояннымъ числомъ, то уравненія (6), будучи первой степени относительно x, y, z, выражаютъ нѣкоторую прямую. Геометрическимъ мѣстомъ всѣхъ этихъ прямыхъ, получаемыхъ при различныхъ p, является поверхность *нулевой кривизны.*

Основнымъ свойствомъ поверхностей нулевой кривизны (въ согласіи съ теоремой Gauss'a) является возможность *развертыванія* этихъ поверхностей на плоскость. Эти поверхности (черт. 139) суть *линейчатыя,* ибо состоятъ изъ прямыхъ (6); эти *прямолинейныя образующія поверхности* суть касательныя къ одной кривой линіи, называемой *ребромъ возврата* поверхности.



Черт. 139.

Если ребро возврата обращается въ точку, то поверхность дѣлается коническою; при удаленіи ребра возврата на безконечность получается *цилиндрическая* поверхность.

§ 30. Можно задать *линейчатую* поверхность, т. е. такую, которая образована непрерывнымъ перемѣщеніемъ въ пространствѣ нѣкоторой прямой, уравненіями прямой

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= az + \alpha, \\ y &= bz + \beta, \end{aligned}$$

въ которыхъ четыре коэффиціента a, b, α, β суть функціи отъ одного перемѣннаго параметра.

Всѣ линейчатыя поверхности раздѣляются на два класса: на *развертывающіяся* и на *косыя;* развертывающіяся суть тѣ, которыя удовлетворяютъ уравненію

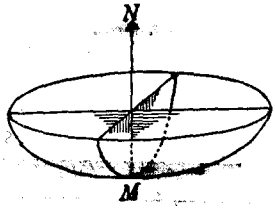
$$(2) \qquad rt - s^2 = 0,$$

косыя—тѣ, которыя этому уравненію не удовлетворяютъ.

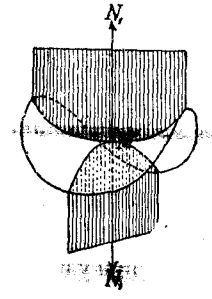
§ 31. Euler показалъ, что плоскости нормальныхъ сѣченій, соотвѣтствующія maximum'у и minimum'у кривизны $\frac{1}{\rho}$, лежатъ одна къ другой подъ прямымъ угломъ; онѣ называются *главными плоскостями* точки M заданной поверхности.

§ 32. Существуетъ характерное отличіе вида части поверхности около точки M въ случаѣ положительной кривизны $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ и въ случаѣ отрицательной кривизны.

При положительной кривизнѣ $\left(\frac{1}{\rho_1 \rho_2} > 0\right)$ обѣ главныя кривизны $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, вогнутости



Черт. 140.



Черт. 141.

обоихъ главныхъ сѣченій направлены въ одну сторону, и поверхность имѣетъ видъ *чаши* (черт. 140). При отрицательной кривизнѣ $\left(\frac{1}{\rho_1 \rho_2} < 0\right)$ обѣ главныя кривизны $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ имѣютъ разные знаки, и поверхность имѣетъ сѣдлообразный видъ (черт. 141).

Общія теоріи.

§ 33. Обращаясь къ уравненіямъ съ частными производными въ случаѣ произвольнаго числа перемѣнныхъ независимыхъ, мы можемъ сказать, что теорія такихъ уравненій перваго порядка вида

$$f\left(x_1 x_2 \ldots x_n, V, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0,$$

гдѣ V есть искомая функція отъ $x_1 x_2 \ldots x_n$, можетъ считаться хорошо разработанной благодаря классическимъ изслѣдованіямъ Cauchy, Jacobi и Lie.

Въ области уравненій съ частными производными высшаго порядка, гдѣ еще до сихъ поръ многое остается неизслѣдованнымъ, необходимо подчеркнуть замѣчательныя изслѣдованія Monge'a и Ampère'a, относящіяся къ уравненіямъ второго порядка съ двумя перемѣнными независимыми вида

$$(1) \qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

гдѣ коэффиціенты H, K, L, M, N суть заданныя функціи отъ x, y, z, p, q.

§ 34. Въ области уравненій съ частными производными въ русской литературѣ имѣется рядъ изслѣдованій видныхъ математиковъ: Коркина, Имшенецкаго, Сонина, Ляпунова, Стеклова, Ермакова, Кояловича, Салтыкова и другихъ.

Касательныя преобразованія.

§ 35. Замѣчательный мемуаръ Ampère'a, посвященный уравненіямъ вида (1) предыдущаго §-а несомнѣнно вдохновилъ Sophus'a Lie при созданіи имъ теоріи такъ называемымъ *касательныхъ преобразованій* (Berührungstransformationen), теоріи, получившей извѣстность въ послѣднее время.

Поясним понятіе о касательномъ преобразованіи на одномъ простомъ частномъ случаѣ. Пусть x, y двѣ перемѣнныя независимыя, z ихъ нѣкоторая функція и p, q двѣ частныя производныя перваго порядка функціи z по x и по y.

Пусть заданы формулы

$$(2) \quad X = f_1(x, y, z, p, q),\ Y = f_2(x, y, z, p, q),\ Z = f_3(x, y, z, p, q);$$

$$(3) \qquad P = \varphi_1(x, y, z, p, q),\ Q = \varphi_2(x, y, z, p, q).$$

Такъ какъ функціи f_1, f_2, f_3 въ уравненіяхъ (2) зависятъ отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y, то на основаніи § 48 гл. VI мы заключаемъ, что уравненія (2) опредѣляютъ въ координатахъ X, Y, Z новую поверхность. Плоскость, проходящая черезъ точку (X, Y, Z) и имѣющая угловые коэффиціенты

$$(4) \qquad -P, -Q, 1,$$

не будетъ, *вообще говоря*, касательною къ новой поверхности. Для того, чтобы произошло такое касаніе плоскости (4) съ поверхностью,

необходимо, чтобы подобно тому, какъ для прежнихъ перемѣнныхъ имѣло мѣсто равенство

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \tag{5}$$

было такое же равенство и относительно новыхъ буквъ, т. е.

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = 0. \tag{6}$$

Итакъ, *для существованія* касанія необходимо, чтобы уравненіе (5) влекло, какъ слѣдствіе, новое (6).

Итакъ, для полученія касательнаго преобразованія необходимо функціи $f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2$ подобрать такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \omega\,(dz - p\,dx - q\,dy),$$

гдѣ ω нѣкоторая функція отъ x, y, z, p, q.

Подобныя преобразованія относятся къ какому угодно числу перемѣнныхъ независимыхъ.

Поверхности съ постоянной кривизной.

§ 36. Считаемъ полезнымъ сказать еще нѣсколько словъ о поверхностяхъ съ постоянной кривизной. Если кривизна равна нулю, то эти поверхности развертываются на плоскость. Вся плоская геометрія сохраняется для этихъ поверхностей. Прямымъ линіямъ плоскости соотвѣтствуютъ на поверхности особенныя кривыя, называемыя *геодезическими* и представляющія кривыя кратчайшихъ разстояній между точками поверхности.

Такъ напримѣръ, если мы будемъ навертывать плоскость на круговой цилиндръ, то прямыя линіи плоскости будутъ навертываться по винтовымъ линіямъ (§ 56 гл. VI); значитъ, винтовыя линіи суть геодезическія на круговомъ цилиндрѣ.

Совершенно подобнымъ образомъ, если мы разсмотримъ поверхности съ постоянной положительной кривизной, опредѣляемыя по уравненію

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{1}{a^2}, \tag{1}$$

то, какъ оказывается, эти поверхности накладываются на шаръ.

Нахожденіе всѣхъ поверхностей, *налагаемыхъ на шаръ*, зависитъ отъ полнаго интегрированія уравненія второго порядка (1). Эта задача до сихъ поръ не рѣшена. Въ ней все зависитъ отъ уравненія

(2) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \sin z,$$

интегрированіе котораго превосходитъ силы современнаго анализа.

Замѣчательно, что тоже уравненіе (2) встрѣчается въ другомъ вопросѣ, поставленномъ Чебышевымъ, а именно въ вопросѣ *одѣванія шара* (или вообще какой нибудь поверхности) *нитяными тканями*.

Ради наглядности, предложимъ читателю представить себѣ резиновый мячикъ въ сѣткѣ, какъ обычно продаются такіе мячики въ игрушечныхъ магазинахъ. Сѣтка облегаетъ форму мячика; спрашивается, по какимъ линіямъ располагаются на мячикѣ нити сѣтки?

§ 37. Обратимся теперь къ поверхностямъ съ постоянной отрицательной кривизной, опредѣляемымъ по уравненію

(1) $$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = -\frac{1}{a^2},$$

или

(2) $$(1 + p^2 + q^2)^2 + a^2(rt - s^2) = 0;$$

такія поверхности всѣ накладываются на одну изъ нихъ.

Обыкновенно выбираютъ, какъ представительницу, наиболѣе простую изъ этихъ поверхностей, называемую псевдосферой.

Эта поверхность получается, какъ поверхность вращенія, удовлетворяющая уравненію (2).

Согласно § 68 главы VI пишемъ уравненіе меридіана поверхности въ такомъ видѣ:

(3) $$\rho = f(z), \text{ гдѣ } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Дифференцируя (3) по x и y, получимъ

(4) $$\frac{x}{\rho} = f'(z)\,p, \quad \frac{y}{\rho} = f'(z)\,q.$$

Дифференцируя уравненія (4) еще разъ по x и y, получимъ

(5) $$\frac{x^2}{\rho^3} = f''(z)\,p^2 + f'(z)\,r, \quad -\frac{xy}{\rho^3} = f''(z)\,pq + f'(z)\,s,$$

$$\frac{y^2}{\rho^3} = f''(z)\,q^2 + f(z)\,t.$$

Выражая пять величинъ p, q, r, s, t черезъ другія при помощи пяти уравненій (4) и (5) и подставляя полученныя выраженія въ уравненіе (2), получаемъ:

$$f = a^2 \frac{f''}{(1+f'^2)^2};$$

умножая обѣ части этого уравненія на $2\, f' dz$, получаемъ

$$d[f^2] = a^2 \frac{d[f'^2]}{(1+f'^2)^2}.$$

Интегрируя, получаемъ

$$f^2 - \alpha^2 = -\frac{a^2}{1+f'^2};$$

отсюда

$$f'^2 = \frac{a^2 - \alpha^2 + f^2}{\alpha^2 - f^2};$$

но $f = \rho$, слѣдовательно,

$$(6) \qquad \int \sqrt{\frac{\alpha^2 - \rho^2}{a^2 - \alpha^2 + \rho^2}}\, d\rho = z.$$

Вообще говоря, меридіанъ (6) искомой поверхности получается въ эллиптическихъ функціяхъ.

Самая простая поверхность получается при $\alpha = a$, тогда имѣемъ

$$(7) \qquad \int \sqrt{a^2 - \rho^2} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = z,$$

и интегралъ берется въ конечномъ видѣ. Предоставляя читателю въ видѣ упражненія докончить интегрированіе, мы здѣсь разсмотримъ формулу (7) съ тѣмъ, чтобы, не производя интегрированія, указать замѣчательное свойство кривой (7), показанное еще Huyghens'омъ.

Введемъ обычныя обозначенія координатъ точекъ плоской кривой x и y, чтобы уравненіе (3) имѣло видъ

$$y = f(x).$$

Замѣнимъ z на x и ρ на y, тогда уравненіе (7) можно будетъ переписать такъ:

$$\sqrt{a^2-y^2}\,\frac{dy}{y}=dx;$$

иначе:

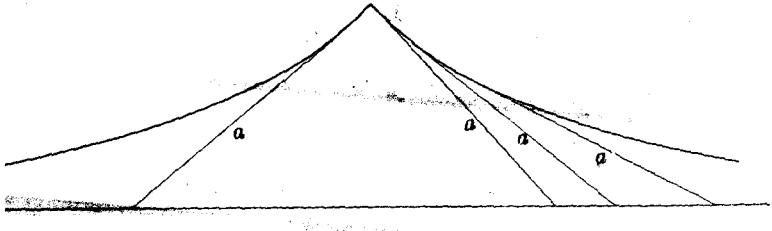
$$\sqrt{a^2-y^2}\,y'=y;$$

рѣшая это уравненіе относительно a получимъ

$$a=\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}.$$

Послѣднее уравненіе выражаетъ на основаніи соображеній § 29 гл. VI свойство кривой имѣть постоянную касательную a.

Эта кривая (черт. 142) носитъ названіе *траэкторіи Huyghens'а*



Черт. 142.

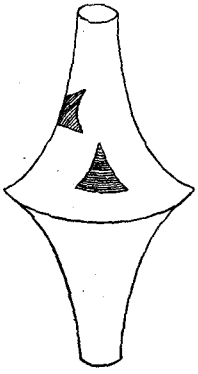
и обладаетъ тѣмъ замѣчательнымъ свойствомъ, что ея эволюта есть линія, опредѣляемая уравненіемъ

$$y=a\,\frac{e^{\frac{x+\alpha}{a}}+e^{\frac{-x-\alpha}{a}}}{2}\qquad (a\text{ — постоянное число})$$

и называемая *цѣпной линіей*. По цѣпной линіи, какъ показывается въ механикѣ, свѣшиваются тяжелыя цѣпи.

Итакъ, поверхность, называемая псевдосферой, происходитъ отъ вращенія траекторіи около оси x-овъ (оси z-овъ въ первоначальныхъ обозначеніяхъ).

На псевдосферѣ (черт. 143) провѣряются всѣ законы геометріи Лобачевскаго (§ 85 гл. II). Это было показано въ первый разъ итальянскимъ ученымъ Beltrami. Такимъ образомъ получалось, съ одной стороны, наглядное толкованіе плоской геометріи Лобачевскаго при помощи образовъ обыкновенной эвклидовской геометріи, съ другой стороны, желаніе провѣрить законы геометріи Лобачевскаго на псевдосферѣ привело къ болѣе подробному изученію свойствъ поверхностей постоянной отрицательной кривизны.



Черт. 143.

Если бы мы хотѣли найти геометрическій образъ, взятый изъ эвклидовой геометріи, на которомъ бы провѣрялась пространственная геометрія Лобачевскаго, то пришлось бы разсматривать эвклидову геометрію четырехъ измѣреній и взять въ ней кривое пространство трехъ измѣреній, представляющее аналогъ псевдосферы.

ГЛАВА XI.

Приближенныя вычисленія. Конечныя разности.

§ 1. Приложенія математики требуютъ развитія пріемовъ приближеннаго вычисленія. Замѣчательно, что всѣ приложенія математики, какъ въ техникѣ, такъ и въ натуральной философіи, не требуютъ очень большой точности. Изъ природы трудно взять болѣе трехъ знаковъ послѣ запятой, если принимать за единицу измѣряемый объектъ. Возьмемъ, напримѣръ, графическія эпюры, столь важныя для техники. Если мы примемъ за единицу метръ, то дробь 0,0001 уже даетъ столь малую длину, что при самомъ тщательномъ исполненіи чертежа нельзя поручиться за то, что неизбѣжныя ошибки черченія не превзойдутъ дроби 0,0001.

То же самое относится ко всѣмъ измѣреніямъ въ наукахъ физическихъ, не исключая и астрономіи, какъ самой точной изъ нихъ.

§ 2. Одна изъ самыхъ важныхъ задачъ приближеннаго вычисленія состоитъ въ *табулированіи функцій*.

Положимъ, дана функція $f(x)$, и требуется составить таблицу ея частныхъ значеній.

Построеніе всякой математической таблицы обусловливается ея цѣлью.

При построеніи таблицы какой нибудь функціи $f(x)$ имѣется обыкновенно въ виду, что эта таблица должна давать возможность вычислять съ извѣстной точностью функцію $f(x)$ для всякаго значенія x.

Какъ примѣръ табулированія функціи, можно привести знакомыя читателю изъ элементарнаго курса *логариѳмическія таблицы*. Въ этихъ таблицахъ помѣщены значенія функцій

$$Lg_{10}\,x,\ Lg_{10}\sin x,\ Lg_{10}\,tg\,x.$$

Каждая таблица приспособлена къ извѣстной степени точности. Такъ напримѣръ, пятизначные логариѳмы представляютъ такую таблицу, что каждый вычисленный по ней логариѳмъ будетъ

отличаться отъ настоящаго своего значенія менѣе чѣмъ на $\frac{1}{10^5}$; семизначные логариѳмы даютъ точность $\frac{1}{10^7}$ и. т. д.

§ 3. Скажемъ въ двухъ словахъ о принципахъ составленія таблицъ непрерывныхъ функцій. Наши общія соображенія будутъ конечно относиться въ частности къ логариѳмическимъ таблицамъ.

Обыкновенно въ таблицѣ помѣщаются значенія функціи, вычисленныя съ извѣстной точностью для ряда значеній перемѣнной независимой, образующихъ ариѳметическую прогрессію

(1) $$a-2h, a-h, a, a+h, a+2h, a+3h, \ldots$$

Итакъ, таблица образуется изъ значеній

(2) $$f(a-2h), f(a-h), f(a), f(a+h), f(a+2h), f(a+3h), \ldots$$

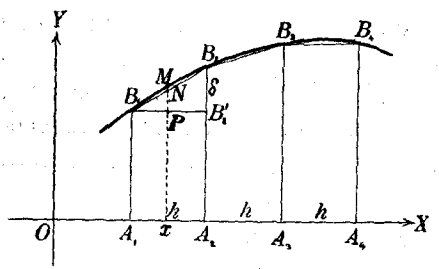
Если требуется вычислить значеніе функціи $f(x)$ для одного изъ значеній (1) независимаго перемѣннаго x, то мы прямо выписываемъ это значеніе $f(x)$ изъ таблицы (2).

Если же требуется вычислить значеніе функціи $f(x)$ для какого нибудь произвольнаго значенія x, лежащаго въ промежуткѣ между двумя рядомъ стоящими членами

$$a+kh, a+(k+1)h$$

ариѳметической прогрессіи (1), то у насъ получается задача такъ называемаго *интерполированія*, т. е. задача нахожденія промежуточныхъ значеній функціи, лежащихъ между двумя рядомъ стоящими числами таблицы (2).

Таблица должна быть всегда такъ составлена, чтобы при помощи короткаго и простого вычисленія получалось значеніе функціи при всякомъ промежуточномъ значеніи x съ тою степенью точности, которую обѣщаетъ составленная таблица.



Черт. 144.

§ 4. Для ясности представимъ табулируемую функцію $f(x)$ кривою на плоскости (черт. 144), тогда табличныя числа представляютъ не что иное, какъ ординаты

$$A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots$$

этой кривой.

Если мы соединимъ точки $B_1, B_2, B_3, \ldots$ кривой прямыми $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \ldots$, то получимъ вписанный въ кривую

многоугольникъ $B_1 B_2 B_3 B_4 \ldots$. Чѣмъ меньше величина h, т. е. чѣмъ гуще составлена таблица, тѣмъ ближе многоугольникъ подходитъ къ кривой. Если мы возьмемъ ординату $xPNM$ кривой, соотвѣтствующую абсциссѣ $x = Ox$, удовлетворяющей неравенству

$$OA_1 < Ox < OA_2,$$

то подъ *прямолинейнымъ интерполированіемъ* разумѣется замѣна ординаты $x\ M = f(x)$ кривой ординатой $x\ N$ прямой $B_1 B_2$. Такимъ образомъ, при прямолинейномъ интерполированіи мы замѣняемъ сложное вычисленіе заданной функціи $f(x)$ простымъ вычисленіемъ ординаты прямой $B_1 B_2$. Конечно, при такой замѣнѣ мы дѣлаемъ ошибку MN; допущеніе такой ошибки оправдывается тѣмъ обстоятельствомъ, что неизбѣжно всѣ числа таблицы ошибочны, такъ такъ мы всегда ограничиваемся извѣстнымъ числомъ цифръ при составленіи таблицы, а остальныя откидываемъ.

Для правильно составленной таблицы необходимо густоту таблицы довести до такой степени, чтобы ошибка MN прямолинейнаго интерполированія не выходила изъ предѣловъ точности таблицы.

Посмотримъ теперь, какъ вычислить ординату xN прямой $B_1 B_2$;

$$xN = A_1 B_1 + PN, \text{ но } \frac{PN}{B_1 P} = \frac{B_2' B_2}{B_1 B_2'};$$

обозначая отношеніе $\frac{B_1 P}{B_1 B'_2} = \xi$, а $B'_2 B_2 = \delta$, замѣчаемъ, что

$$xN = A_1 B_1 + \xi\delta.$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что прямолинейное интерполированіе есть не что иное, какъ примѣненіе *пропорціональныхъ частей* (partes proportionales; P. P.), употребляемое при логариѳмическихъ таблицахъ.

Необходимость дѣлать таблицу болѣе густою, т. е. вписывать большее число ординатъ, если мы желаемъ увеличить точность таблицы, а съ другой стороны оставить прямолинейное интерполированіе влечетъ, какъ слѣдствіе, увеличеніе объема таблицы: такъ напримѣръ, четырехзначная таблица логариѳмовъ помѣщается на одномъ листѣ бумаги, пятизначная таблица представляетъ маленькую книгу въ 150 страницъ, семизначная таблица является уже объемистой книгой in 8^0 въ 600 страницъ; наконецъ, изданныя

въ 1891 году французскимъ военнымъ вѣдомствомъ восьмизначныя таблицы представляютъ уже громадный томъ (большой квартъ).

§ 5. Для возможнаго увеличенія точности таблицъ существуетъ общепринятое правило: *увеличивать на единицу послѣднюю сохраненную цифру, если отброшенная дробь болѣе половины единицы послѣдняго знака таблицы.*

Такъ напримѣръ, если мы возьмемъ семизначный логариѳмъ числа 1556, то получимъ

$$Lg\,1556 = 3,1920096.$$

Въ пятизначной же таблицѣ вмѣсто числа 3,19200 помѣщается число 3,19201, ибо дробь 0,96, составленая изъ откинутыхъ двухъ послѣднихъ цифръ, болѣе половины.

Это правило заставляетъ при составленіи таблицы съ n знаками вычислять всегда больше знаковъ, чтобы знать, гдѣ надо послѣ откидыванія лишнихъ знаковъ увеличить на единицу послѣднюю цифру.

Итакъ, точность *хорошо* составленной n-значной таблицы есть

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n},$$

т. е. указанный въ таблицѣ логариѳмъ отличается отъ настоящаго не болѣе, чѣмъ на дробь $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$.

Въ восьмизначныхъ таблицахъ заключается еще новое усовершенствованіе, состоящее въ томъ, что указаны точками тѣ логариѳмы, послѣдняя цифра которыхъ увеличена.

Такъ напримѣръ, мантисса логариѳма числа 106201 написана въ таблицѣ такъ:

02612861.;

это надо понимать такъ, что настоящая мантисса будетъ

02612860 . . .

§ 6. Логариѳмическія таблицы, какъ таблицы, приспособленныя къ широкому практическому употребленію, составлены по принципу прямолинейнаго интерполированія, для того чтобы по возможности упростить способъ ихъ употребленія.

Если, съ одной стороны, таблица предназначается для употребленія спеціалистовъ математиковъ, съ другой стороны, является затруднительнымъ вычисленіе очень большого числа ординатъ, тогда является возможнымъ упростить дѣло составленія таблицы. Можно не составлять достаточно густо таблицу, но зато придется указать другой способъ интерполированія.

Формула интерполированія Lagrange'a.

§ 7. Правило прямолинейнаго интерполированія является простѣйшимъ случаемъ болѣе общей формулы интерполированія, указанной Lagrange'емъ.

Правило прямолинейнаго интерполированія сводится на проведеніе прямой $B_1 B_2$ черезъ двѣ точки

$$B_1(x=a_1, y=f(a_1)) \text{ и } B_2(x=a_2, y=f(a_2)),$$

уравненіе этой прямой будетъ (§ 43 гл. II)

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_1}=\frac{y-f(a_1)}{f(a_2)-f(a_1)},$$

откуда

$$(1) \qquad y=\frac{f(a_1)}{a_1-a_2}(x-a_2)+\frac{f(a_2)}{a_2-a_1}(x-a_1).$$

Если мы обозначимъ $\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)$ и кромѣ того

$$\varphi_1(x)=\frac{\varphi(x)}{x-a_1}, \quad \varphi_2(x)=\frac{\varphi(x)}{x-a_2},$$

то формулу (1) можно будетъ переписать въ видѣ

$$(2) \qquad y=\frac{f(a_1)}{\varphi_1(a_1)}\varphi_1(x)+\frac{f(a_2)}{\varphi_2(a_2)}\varphi_2(x).$$

Эту формулу можно обобщить такъ: проведемъ кривую линію $(n-1)$-го порядка, опредѣляемую уравненіемъ

$$(3) \qquad y=A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n,$$

т. е., другими словами, подберемъ коэффиціенты $A_1, A_2, \ldots A_n$ такъ, чтобы кривая (3) прошла черезъ n точекъ заданной кривой $y=f(x)$:

$$(a_1, f(a_1)), (a_2, f(a_2)), \ldots (a_n, f(a_n));$$

очевидно, что коэффиціенты A_i подлежатъ опредѣленію изъ n уравненій

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
f(a_1) &= A_1 a_1^{n-1} + A_2 a_1^{n-2} + \ldots + A_n,\\
f(a_2) &= A_1 a_2^{n-1} + A_2 a_2^{n-2} + \ldots + A_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(a_n) &= A_1 a_n^{n-1} + A_2 a_n^{n-2} + \ldots + A_n.
\end{aligned}
$$

Lagrange показалъ возможность болѣе простого рѣшенія уравненій (4), если предварительно написать вторую часть уравненія (3) въ нѣсколько иномъ видѣ. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ

$$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n);$$

кромѣ того

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{x - a_1},\ \varphi_2(x) = \frac{\varphi(x)}{x - a_2},\ \ldots\ \varphi_n(x) = \frac{\varphi(x)}{x - a_n}.$$

Напишемъ уравненіе (3) въ видѣ

$$(5)\qquad y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x),$$

гдѣ $C_1, C_2, \ldots C_n$ пока произвольные коэффиціенты, имѣя въ виду, что

$$\varphi_i(a_k) = 0,$$

если i не равно k, а $\varphi_i(a_i)$ отлично отъ нуля, если всѣ a_i различны

Подставляя въ уравненіе (5) $x = a_i$, $y = f(a_i)$, получимъ

$$f(a_i) = C_1 \,.\, 0 + C_2 \,.\, 0 + \ldots + C_i\varphi_i(a_i) + \ldots + C_n \,.\, 0;$$

отсюда

$$C_i = \frac{f(a_i)}{\varphi_i(a_i)},$$

и мы получаемъ формулу Lagrange'а,

$$y = \frac{f(a_1)}{\varphi_1(a_1)}\varphi_1(x) + \frac{f(a_2)}{\varphi_2(a_2)}\varphi_2(x) + \ldots + \frac{f(a_n)}{\varphi_n(a_n)}\varphi_n(x).$$

Конечныя разности.

§ 8. Вопросы о табулированіи и приближенномъ вычисленіи функцій привели къ созданію характерной отрасли математики, называемой *разностнымъ исчисленіемъ* или *теоріей конечныхъ разностей.*

Теорія конечныхъ разностей имѣетъ близкое сродство съ дифференціальнымъ и интегральнымъ исчисленіями; Leibniz'а и

Newton'a надо считать первыми основателями этой теоріи. Какъ первое руководство по разностному исчисленію надо указать книгу Brook Taylor'a, „*Methodus incrementorum directa et inversa*", London, 1715.

Въ Россіи конечныя разности были предметомъ изученія школы Чебышева. Однимъ изъ лучшихъ руководствъ является книга А. Маркова: „*Исчисленіе конечныхъ разностей*" (переведена на нѣмецкій языкъ).

§ 9. Если задана функція $f(x)$, то выраженіе

$$f(x+h)-f(x)$$

называется *первой разностью* или просто *разностью* функціи $f(x)$ и обозначается

$$f(x+h)-f(x)=\Delta f(x).$$

Разность $\Delta f(x)$ есть, очевидно, функція отъ перемѣннаго x и постояннаго числа h.

Разность отъ $\Delta f(x)$ называется *второй разностью* функціи $f(x)$ и обозначается

$$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+h)-\Delta f(x).$$

Подобнымъ образомъ вводится понятіе о разностяхъ болѣе высокихъ порядковъ:

$$\Delta^3 f(x)=\Delta^2 f(x+h)-\Delta^2 f(x),$$
$$\Delta^4 f(x)=\Delta^3 f(x+h)-\Delta^3 f(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

§ 10. Напримѣръ, если $f(x)=x^3$, $h=1$, то

$$f(0)=0, f(1)=1, f(2)=8, f(3)=27, f(4)=64 \ldots$$
$$\Delta f(0)=1, \Delta f(1)=7, \Delta f(2)=19, \Delta f(3)=37, \ldots$$
$$\Delta^2 f(0)=6, \Delta^2 f(1)=12, \Delta^2 f(2)=18, \ldots$$
$$\Delta^3 f(0)=6, \Delta^3 f(1)=6, \ldots$$
$$\Delta^4 f(0)=0.$$

§ 11. Значенія

(1) $$f(a), \Delta f(a), \Delta^2 f(a), \ldots$$

выражаются черезъ значенія

(2) $$f(a), f(a+h), f(a+2h), \ldots$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a),$$
$$\Delta^2 f(a) = \Delta f(a+h) - \Delta f(a) = f(a+2h) - f(a+h) -$$
$$- [f(a+h) - f(a)] = f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a),$$

. . . . . .

Обратно, значенія (2) выражаются черезъ значенія (1). Въ самомъ дѣлѣ

(3) $$f(a+h) = f(a) + \Delta f(a),$$

далѣе

$$f(a+2h) = f(a+h) + \Delta f(a+h);$$

примѣняя формулу (3) къ первой разности $\Delta f(a)$, получимъ

$$\Delta f(a+h) = \Delta f(a) + \Delta^2 f(a),$$

откуда получаемъ окончательно,

(4) $$f(a+2h) = f(a) + 2\Delta f(a+h) + \Delta^2 f(a),$$

. . . . . .

По индукціи можно доказать для произвольнаго цѣлаго числа n формулу Newton'a

(5) $$f(a+nh) = f(a) + \frac{n}{1}\Delta f(a) + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 f(a) +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 f(a) + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(n-1)n}\Delta^n f(a).$$

§ 12. Newton предложилъ разсматривать формулу (5) предыдущаго параграфа, какъ интерполяціонную, примѣняя ее къ случаю дробнаго n, меньшаго единицы. Тогда получимъ значеніе

$$f(a+nh),$$

для средняго значенія $a+nh$ аргумента x, лежащаго между a и $a+h$.

§ 13. Понятіе, обратное разности, есть понятіе о конечной суммѣ

(1) $$\sum_a^b f(x) = f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+nh),$$

гдѣ $a+(n+1)h = b$.

Существуетъ замѣчательная связь между конечной суммой (1) и опредѣленнымъ интеграломъ $\int_a^b f(x)\,dx$, указанная въ общемъ видѣ Euler'омъ:

$$\sum_a^b f(x) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x) - \frac{1}{2}\left\{f(b) - f(a)\right\} +$$
$$+ \frac{h}{12}\left\{f'(b) - f'(a)\right\} - \ldots$$

Эта связь позволяетъ вычислять опредѣленный интегралъ при помощи конечныхъ суммъ. Получаются такимъ образомъ пріемы приближеннаго вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ, носящіе названіе *механическихъ квадратуръ*.

Наиболѣе извѣстныя формулы такого вида получены Simpson'омъ, Cotes'омъ, Gauss'омъ и Чебышевымъ.

§ 14. Въ исчисленіи конечныхъ разностей проводится большая аналогія съ дифференціальнымъ и интегральнымъ исчисленіями. Такъ напримѣръ, интегрированіе дифференціальныхъ уравненій имѣетъ свой аналогъ въ конечныхъ разностяхъ при разсмотрѣніи уравненій вида

$$(1) \qquad F\{f(a), \Delta f(a), \Delta^2 f(a), \ldots \Delta^n f(a)\} = 0.$$

Задача рѣшенія такого рода уравненій, гдѣ F заданная функція отъ конечныхъ разностей

$$f(a), \Delta f(a), \Delta^2 f(a), \ldots \Delta^n f(a),$$

сводится къ нахожденію функціи $f(x)$, удовлетворяющей уравненію (1). Такая задача носитъ названіе задачи *интегрированія уравненія въ конечныхъ разностяхъ*.

§ 15. Существуетъ рядъ механическихъ приборовъ, рѣшающихъ различныя задачи приближеннаго вычисленія. Перечислимъ главнѣйшіе изъ нихъ.

Логариѳмическая линейка—представляетъ изъ себя двузначную таблицу логариѳмовъ.

Планиметры—приборы для нахожденія площадей, ограниченныхъ сомкнутыми контурами.

Въ этихъ приборахъ мы обводимъ нѣкоторымъ подвижнымъ штифтомъ заданный контуръ. Приборъ даетъ автоматически число, выражающее обведенную площадь.

Интеграторы—приборы, вычерчивающіе кривую

$$y = \int f(x)\,dx,$$

когда задана кривая $y = f(x)$.

Существуютъ также механизмы для рѣшенія алгебраическихъ и дифференціальныхъ уравненій.

ГЛАВА XII.

Аналитическая механика.

§ 1. Механика есть наука о движеніи матеріальныхъ тѣлъ.

При построеніи аналитической механики мы не даемъ опредѣленія того, что мы разумѣемъ подъ словомъ *матерія*. Это опредѣленіе намъ не нужно, ибо мы изучаемъ не матерію въ самой себѣ, а лишь движеніе ея въ трехмѣрномъ пространствѣ.

Мы представляемъ себѣ *тѣла*, какъ ограниченныя со всѣхъ сторонъ части матеріи, имѣющія опредѣленную внѣшнюю *форму* и опредѣленный *объемъ*.

Мы называемъ *массой* тѣла количество заключенной въ немъ матеріи. Это понятіе о массѣ не есть что либо апріорное, и мы приходимъ къ точному его установленію только при развитіи самой системы аналитической механики.

§ 2. Для составленія упрощенной схемы аналитическая механика вводитъ нѣкоторыя новыя условныя понятія. Главнѣйшее изъ этихъ понятій есть понятіе о такъ называемой *матеріальной точкѣ*. Матеріальной точкой называется тѣло извѣстной массы *безконечно малое* по размѣрамъ. Лучше сказать такъ: матеріальная точка есть геометрическая точка съ присоединеннымъ къ ней произвольно взятымъ *положительнымъ числомъ*, называемымъ ея *массой*.

§ 3. Тѣла конечныхъ размѣровъ разсматриваются, какъ совокупности матеріальныхъ точекъ.

§ 4. Мы говоримъ, что тѣло движется, если различныя его части мѣняютъ положеніе въ пространствѣ. Такъ какъ пространство безконечно и одинаково во всѣхъ своихъ частяхъ, то мы можемъ судить о покоѣ или движеніи тѣлъ только по ихъ положенію относительно другихъ тѣлъ, считаемыхъ неподвижными.

Итакъ, всѣ доступныя нашему пониманію движенія суть относительныя.

§ 5. Всѣ тѣла мы считаемъ подвижными, не закрѣпленными въ пространствѣ, но мы придаемъ матеріи свойство, которое мы называемъ свойствомъ *инерціи*, а именно, по нашему мнѣнію, матерія не обладаетъ иниціативой начала движенія или же произвольнаго измѣненія установившагося движенія.

Newton выражаетъ это начало инерціи въ видѣ своего перваго закона механики.

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Законъ I. Каждое тѣло упорствуетъ въ своемъ состояніи покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія, пока дѣйствующія на него силы не принуждаютъ его измѣнить такое состояніе.

§ 6. На основаніи этого закона матеріальная точка будетъ сохранять свое прямолинейное и равномѣрное движеніе, т. е., другими словами, будетъ сохранять свою *скорость* по величинѣ и по направленію, если на нее не дѣйствуютъ никакія внѣшнія силы.

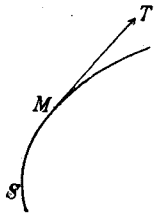
Итакъ, *сила* по Newton'у опредѣляется, какъ причина, измѣняющая скорость тѣла по величинѣ или направленію. Если тѣло движется по кривой линіи, то это тѣло должно испытывать на себѣ дѣйствіе нѣкоторой силы.

Newton опредѣляетъ силу слѣдующимъ образомъ.

Definitio IV. Vis impressa est actio in corpus exercita ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi in directum.

Опредѣленіе IV. Сила приложенная есть производимое на тѣло принужденіе къ измѣненію его состоянія покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія.

§ 7. Если при движеніи точки по кривой S (черт 145) при нѣкоторомъ положеніи ея M прекращается внезапно дѣйствіе силы, заставляющей ее описывать эту линію S, то точка, съ этого момента времени предоставленная самой себѣ, будетъ двигаться равномѣрно по касательной MT съ пріобрѣтенной въ предшествующемъ движеніи скоростью.



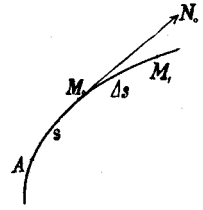
Черт 145.

Примѣромъ такого движенія можетъ служить движеніе камня, пущеннаго при помощи пращи.

§ 8. Чтобы составить себѣ понятіе о скорости криволинейнаго движенія, разсмотримъ кривую (черт. 146), описываемую нѣкоторой точкой, такъ называемую *траекторіею* движенія точки; можно задать движеніе уравненіями (§ 23 гл. VI)

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t),$$

гдѣ прямоугольныя координаты точки выражены функціями отъ времени t.



Черт. 146.

Пусть въ моментъ времени t_0 точка занимаетъ на траекторіи положеніе M_0, а въ моментъ t_1 положеніе M_1; обозначимъ черезъ s длину дуги траекторіи, отсчитываемую отъ нѣкоторой начальной точки A, тогда будемъ имѣть

$$\Delta s = M_0 M_1,$$
$$\Delta t = t_1 - t_0.$$

Средней скоростью на дугѣ $M_0 M_1$ будемъ называть величину

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Предѣлъ этого выраженія при $\Delta t = 0$, т. е. производную дуги s по времени

$$\frac{ds}{dt} \tag{1}$$

мы будемъ называть *величиною скорости* въ моментъ $t = t_0$.

Что касается направленія скорости, то по мѣрѣ уменьшенія Δt до нуля хорда $M_0 M_1$ стремится совпасть съ касательной, слѣдовательно, за направленіе скорости въ данный моментъ криволинейнаго движенія надо принять касательную, соотвѣтствующую этому моменту.

Итакъ, подъ скоростью криволинейнаго движенія въ нѣкоторый моментъ времени t мы разумѣемъ отрѣзокъ длины $\frac{ds}{dt}$, отложенный по касательной, соотвѣтствующей этому моменту, отъ точки касанія въ ту сторону, куда тѣло по кривой въ этотъ моментъ направлятся.

§ 9. Проекціи скорости на координатныхъ осяхъ найдутся по формуламъ

$$\frac{ds}{dt}\cos\alpha, \frac{ds}{dt}\cos\beta, \frac{ds}{dt}\cos\gamma,$$

гдѣ α, β, γ суть углы касательной съ осями координатъ. По формуламъ § 50 гл. VI мы имѣемъ

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

слѣдовательно, проекціи скорости на осяхъ координатъ будутъ

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \frac{dy}{dt} = \psi'(t), \frac{dz}{dt} = \omega'(t).$$

Если эти проекціи (1) будутъ числами постоянными, тогда и сама скорость будетъ постоянна по величинѣ и по направленію, и мы имѣемъ

$$\frac{dx}{dt} = a, \frac{dy}{dt} = b, \frac{dz}{dt} = c,$$

откуда, интегрируя, получимъ

$$(2) \qquad x = at + \alpha, y = bt + \beta, z = ct + \gamma,$$

гдѣ α, β, γ постоянныя, вводимыя интегрированіемъ.

Итакъ, получается прямолинейное равномѣрное движеніе, имѣющее траекторію

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c} = t.$$

§ 10. Сила, отклоняющая движеніе отъ прямолинейнаго направленія, производитъ, какъ говорятъ, *ускореніе* въ движеніи, причемъ подъ ускореніемъ понимается измѣненіе скорости или по величинѣ, или по направленію, или по величинѣ и по направленію. За мѣру ускоренія принимается отрѣзокъ, имѣющій проекціями на осяхъ координатъ величины

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}.$$

§ 11. Масса точки разсматривается, какъ элементъ, препятствующій дѣйствію силы. Говорятъ, что надо приложить къ точкѣ тѣмъ бо́льшую силу для полученія даннаго ускоренія, чѣмъ больше масса этой точки.

Отсюда мы заключаемъ, что по заданному движенію точки мы можемъ себѣ составить представленіе о силѣ, заставляющей эту точку производить данное движеніе; эту силу мы будемъ называть *движущей силой* и опредѣлять ее по величинѣ и направленію слѣдующимъ образомъ.

Опредѣленіе. Величина движущей силы равна произведенію ускоренія на массу. Направленіе же ея опредѣляется ея проекціями на осяхъ

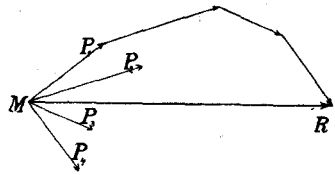
$$m\frac{d^2x}{dt^2}, m\frac{d^2y}{dt^2}, m\frac{d^2z}{dt^2},$$

гдѣ m есть масса точки.

§ 12. Движущую силу мы будемъ отличать отъ силъ, *приложенныхъ* къ тѣлу.

Въ самомъ дѣлѣ, можетъ случиться, что движущая сила равна нулю, такъ что точка движется равномѣрно по прямой, но изъ этого еще не слѣдуетъ, что къ точкѣ вовсе не приложено никакихъ силъ; можетъ случиться, что во все время движенія къ точкѣ приложены нѣкоторыя силы, но эти силы взаимно уничтожаются или, какъ говорятъ, взаимно *уравновѣшиваются*.

§ 13. Если къ точкѣ M (черт. 147) приложено нѣсколько силъ, то дѣйствіе этихъ силъ на точку равно дѣйствію на нее одной силы, называемой *равнодѣйствующей* всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ.



Черт. 147.

Основнымъ принципомъ механики является полученіе равнодѣйствующей, какъ геометрической суммы (§ 21 гл. II), слагаемыми которой являются заданныя силы.

§ 14. Можно высказать такое положеніе: движущая сила равняется равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ. Отсюда является возможность написать такія *дифференціальныя уравненія движенія точки*

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = T\cos\lambda, m\frac{d^2y}{dt^2} = T\cos\mu, m\frac{d^2z}{dt^2} = T\cos\nu,$$

гдѣ T равнодѣйствующая силъ приложенныхъ, а λ, μ, ν углы съ осями координатъ этой равнодѣйствующей.

§ 15. Аналитическую механику дѣлятъ обыкновенно на двѣ части: *кинематику* и *динамику*.

Кинематика представляетъ изъ себя чисто геометрическую часть механики, гдѣ изучается движеніе независимо отъ причинъ его.

Динамика разсматриваетъ зависимость между движеніемъ матеріи и причинами его.

Поэтому мы можемъ сказать, что разсмотрѣніе движущей силы или, другими словами, ускоренія составляетъ предметъ кинематики; когда же мы вводимъ въ разсмотрѣніе силы, приложенныя къ тѣламъ, и пишемъ дифференціальныя уравненія движенія, то мы входимъ уже въ область динамики.

§ 16. Динамика раздѣляется въ свою очередь на *статику* и *кинетику*.

Статика изучаетъ законы равновѣсія силъ, приложенныхъ къ тѣламъ, а кинетика трактуетъ о движеніяхъ, производимыхъ силами неуравновѣшенными.

Равномѣрно-ускоренное движеніе.

§ 17. Разсмотримъ задачу паденія тѣлъ въ безвоздушномъ пространствѣ подъ вліяніемъ силы тяжести. Силу тяжести мы можемъ считать силой постоянной по величинѣ и по направленію.

Въ такомъ чистомъ упрощенномъ видѣ мы не можемъ на самомъ дѣлѣ воспроизвести явленія паденія тѣлъ, такъ какъ въ дѣйствительности тѣла падаютъ въ пространствѣ, наполненномъ воздухомъ, который представляетъ нѣкоторое сопротивленіе паденію и даетъ силу, направленную обратно силѣ тяжести и зависящую отъ скорости тѣла. Кромѣ того мы должны предполагать, что сила тяжести направлена къ центру земли, слѣдовательно, если мы имѣемъ два падающихъ тѣла, то силы тяжести, къ нимъ приложенныя, не будутъ параллельны между собой, такъ какъ направленія ихъ образуютъ прямыя, сходящіяся въ центрѣ земли.

Далѣе, притяженіе къ центру земли приходится считать измѣняющимся по закону Newton'a обратно пропорціонально квадрату разстоянія до центра; поэтому тѣла, находящіяся выше отъ поверхности земли, приходится считать притягивающимися меньшей силой.

Вслѣдствіе сравнительно большого разстоянія центра земли отъ насъ можно считать измѣненія силы тяжести отъ высоты и

по направленію ничтожными, такъ что можно допускать, что паденіе тѣлъ въ обыденной жизни есть движеніе, происходящее подъ вліяніемъ постоянной по величинѣ и направленію силы.

§ 18. Мы можемъ предполагать, что паденіе тѣла происходитъ *по оси Z*, причемъ положительное направленіе этой оси будемъ считать идущимъ внизъ.

Достаточно разсмотрѣть одно изъ уравненій (1) § 14, а именно

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=T,$$

гдѣ T есть постоянная сила тяжести; обозначая $\frac{T}{m}$ черезъ g, получаемъ

$$\frac{d^2z}{dt^2}=g, \tag{1}$$

гдѣ постоянное число g есть такъ называемое *ускореніе силы тяжести*.

Если мы примемъ за единицу длины сантиметръ, а за единицу времени секунду, то g выражается числомъ

$$g=980{,}94\ldots$$

Ускореніе силы тяжести въ какомъ либо мѣстѣ земной поверхности подъ широтой λ и на высотѣ h сантиметровъ надъ уровнемъ моря равняется

$$g=980{,}6056-2{,}5028\cos 2\lambda-0{,}000003\,h.$$

Предположимъ, что въ начальный моментъ времени ($t=0$) точка находится въ началѣ координатъ и пущена свободно падать безъ начальнаго толчка по оси Z.

Интегрируя уравненіе (1), получимъ

$$\frac{dz}{dt}=gt+g_1,$$

гдѣ g_1 постоянная величина. Очевидно $g_1=0$, такъ какъ въ начальный моментъ $t=0$ скорость $\frac{dz}{dt}$ равна нулю, слѣдовательно

$$\frac{dz}{dt}=gt. \tag{2}$$

Интегрируя еще разъ, получаемъ

$$z=\frac{gt^2}{2}; \tag{3}$$

добавочная постоянная опять принята нами равною нулю, такъ какъ при $t=0$ мы имѣемъ $z=0$.

Формула (2) показываетъ, что паденіе тяжелыхъ тѣлъ есть движеніе равномѣрно-ускоренное, такъ какъ скорость gt съ возрастаніемъ времени t равномѣрно возрастаетъ.

Планетная задача.

§ 19. Разсмотримъ задачу о движеніи матеріальной точки подъ вліяніемъ силы притяженія къ началу координатъ по закону всемірнаго тяготѣнія Newton'а.

Мы эту задачу называемъ планетною, ибо она близко подходитъ къ задачѣ движенія планеты около солнца. Конечно, мы предполагаемъ, что другихъ планетъ и ихъ притяженія на данную планету не существуетъ.

Итакъ, примемъ законъ притяженія къ началу координатъ, выражающійся формулой

$$\mu \frac{m}{r^2}, \tag{1}$$

гдѣ μ—нѣкоторое постоянное число, m—масса точки (планеты), а $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, т. е. разстоянію точки (x, y, z) до начала координатъ.

Законъ притяженія, выражаемый формулой (1), можно словами формулировать слѣдующимъ образомъ.

Притяженіе прямо пропорціонально массѣ притягиваемаго тѣла и обратно пропорціонально квадрату разстоянія до притягивающаго центра.

Теперь выраженіе (1) подставимъ въ формулы (1) § 14 вмѣсто T. На основаніи же формулъ § 29 гл. II мы получаемъ

$$\cos\lambda = -\frac{x}{r},\ \cos\nu = -\frac{y}{r},\ \cos\nu = -\frac{z}{r};$$

знакъ минусъ поставленъ въ этихъ формулахъ, такъ какъ направленіе силы притяженія идетъ отъ точки къ началу координатъ, а не обратно, какъ это предполагалось въ § 29 гл. II.

§ 20. Итакъ, получаемъ дифференціальныя уравненія нашей задачи въ такомъ видѣ:

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-\mu\frac{x}{r^3},\ \frac{d^2y}{dt^2}=-\mu\frac{y}{r^3},\ \frac{d^2z}{dt^2}=-\mu\frac{z}{r^3};$$

уравненія (1) можно представить въ видѣ пропорціи

$$(2)\qquad \frac{x''}{x}=\frac{y''}{y}=\frac{z''}{z},$$

гдѣ черезъ x'', y'', z'' обозначены для сокращенія вторыя производныя $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$.

Изъ пропорціи (2) имѣемъ три уравненія

$$yz''-zy''=0,\ zx''-xz''=0,\ xy''-yx''=0,$$

или иначе

$$(yz'-zy')'=0,\ (zx'-xz')'=0,\ (xy'-yx')'=0.$$

Интегрируя, получимъ

$$(3)\qquad yz'-zy'=C_1,\ zx'-xz'=C_2,\ xy'-yx'=C_3;$$

умножая послѣднее уравненіе по порядку на x, y, z и складывая, получаемъ въ лѣвой части тождественно нуль; отсюда имѣемъ уравненіе

$$C_1x+C_2y+C_3z=0$$

плоскости, проходящей черезъ начало координатъ. Итакъ, движеніе оказывается плоскимъ, что позволяетъ задачу значительно упростить, а именно, принять плоскость движенія за плоскость XY, оставляя притягивающій центръ въ началѣ координатъ.

§ 21. Полагая $z=0$ во все время движенія точки, приходимъ къ плоской задачѣ интегрированія только двухъ уравненій

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-\mu\frac{x}{r^3},\ \frac{d^2y}{dt^2}=-\mu\frac{y}{r^3},$$

гдѣ $r^2=x^2+y^2$.

Существуютъ два весьма важныхъ съ механической точки зрѣнія интеграла системы (1): *интегралъ живой силы* и *интегралъ площадей*.

Для полученія интеграла живой силы поступимъ такъ: умножимъ уравненія (1) на $m\frac{dx}{dt}$ и $m\frac{dy}{dt}$ и сложимъ ихъ, тогда получимъ

$$m\left[\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right]=-\frac{\mu m}{r^2}\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{r}$$

или

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=-\frac{\mu m}{r^2}\frac{dr}{dt}.$$

Интегрируя, получаемъ

$$\frac{m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{2}=\frac{\mu m}{r}+h. \tag{2}$$

Это и есть интегралъ живой силы, такъ какъ подъ живой силой въ движеніи точки разумѣется какъ разъ первая часть уравненія (2), т. е. половина произведенія массы m на квадратъ скорости $\frac{ds}{dt}$.

Функція $\frac{\mu m}{r}$ есть не что иное, какъ Newton'овъ потенціалъ, т. е. такая функція, производная которой по r

$$-\frac{\mu m}{r^2}$$

выражаетъ силу, приложенную къ тѣлу. Уравненіе

$$\frac{m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{2}-\frac{\mu m}{r}=h,$$

выражаетъ нѣкоторый механическій законъ, который имѣетъ мѣсто въ большомъ числѣ задачъ аналитической механики. Этотъ законъ носитъ названіе *закона сохраненія энергіи*.

Живая сила $\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ называется иначе *кинетической энергіей* движущейся точки, а потенціалъ $-\frac{\mu m}{r}$ иногда называется *потенціальной энергіей*.

Законъ сохраненія энергіи формулируется иногда такъ: *полная энергія* въ движеніи одной точки или системы точекъ, состоящая изъ кинетической и потенціальной, есть величина постоянная во все время движенія.

Извѣстно, что этотъ законъ сохраненія энергіи, получившій свое начало изъ разсмотрѣнія скромнаго уравненія, выражающаго интегралъ живой силы, разросся въ широкій принципъ, сыгравшій въ исторіи физики XIX столѣтія первостепенную роль.

Переходимъ теперь къ интегралу площадей; изъ уравненій (1) получаемъ

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

откуда послѣ интегрированія имѣемъ

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=2\sigma, \tag{3}$$

гдѣ σ постоянная величина.

Введемъ полярныя координаты

$$x=r\cos\vartheta,\ y=r\sin\vartheta;$$

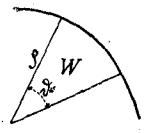
$$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\vartheta-\sin\vartheta.r\frac{d\vartheta}{dt},\ \frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\vartheta+\cos\vartheta.r\frac{d\vartheta}{dt}; \tag{4}$$

отсюда уравненіе (3) приметъ видъ

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\vartheta}{dt}=\sigma. \tag{5}$$

Мы знаемъ (§ 60 гл. VI) что $\frac{1}{2}r^2\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{dW}{dt}$, гдѣ W (черт. 148) есть площадь сектора, описаннаго радіусомъ векторомъ; слѣдовательно

$$\frac{dW}{dt}=\sigma,$$



Черт. 148.

откуда послѣ интегрированія получаемъ

$$W=\sigma t+\sigma_1. \tag{6}$$

Получается знаменитый законъ Кеплера.

Площади секторовъ, описанныя радіусомъ векторомъ въ одинаковыя времена, одинаковы.

Чтобы получить уравненіе траекторіи въ полярныхъ координатахъ, проще всего поступить такъ: ввести полярныя координаты въ интегралъ живой силы.

Возвышая въ квадратъ уравненія (4) и складывая ихъ, получимъ

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2;$$

отсюда уравненіе живой силы даетъ

$$(7) \qquad dr^2 + r^2 d\vartheta^2 = \left(\frac{2\mu}{r} + \frac{2h}{m}\right) dt^2;$$

исключая изъ этого уравненія dt при помощи интеграла (5) площадей, получимъ

$$dr^2 = -r^2 d\vartheta^2 + \frac{r^4}{4\sigma^2}\left(\frac{2\mu}{r} + \frac{2h}{m}\right) d\vartheta^2,$$

$$\frac{4\sigma^2 dr^2}{r^4} = d\vartheta^2 \left\{\frac{2\mu}{r} + \frac{2h}{m} - \frac{4\sigma^2}{r^2}\right\},$$

$$d\frac{2\sigma}{r} = -d\vartheta \sqrt{\frac{2h}{m} + \frac{\mu}{\sigma}\frac{2\sigma}{r} - \left(\frac{2\sigma}{r}\right)^2},$$

$$d\left(\frac{2\sigma}{r}\right) = -d\vartheta \sqrt{\frac{2h}{m} + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} - \left(\frac{2\sigma}{r} - \frac{\mu}{2\sigma}\right)^2}.$$

Положимъ $\frac{2\sigma}{r} - \frac{\mu}{2\sigma} = \rho$; получимъ

$$d\rho = -d\vartheta \sqrt{\frac{2h}{m} + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} - \rho^2}.$$

Но число $\frac{2h}{m} + \frac{\mu^2}{4\sigma^2}$, очевидно, число положительное, такъ какъ на основаніи уравненій (2) и (5) мы получаемъ

$$\frac{2h}{m} + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu^2}{r^4\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left[r\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{\mu}{r^2\frac{d\vartheta}{dt}}\right]^2.$$

Итакъ, можно положить

$$\frac{2h}{m} + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} = \frac{\mu^2}{4\sigma^2} e^2;$$

имѣемъ

$$-\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{\mu^2}{4\sigma^2}e^2-\rho^2}}=d\vartheta;$$

интегрируя, получимъ

$$arc\,cos\frac{\rho}{\frac{\mu e}{2\sigma}}=\vartheta+C,$$

откуда

$$\rho=\frac{\mu e}{2\sigma}cos(\vartheta+C),$$

или, обозначая $\vartheta+C=\varphi$, будемъ имѣть

$$\frac{2\sigma}{r}-\frac{\mu}{2\sigma}=\frac{\mu e}{2\sigma}cos\varphi,$$

$$\frac{2\sigma}{r}=\frac{\mu}{2\sigma}(1+e\,cos\varphi),$$

и окончательно

$$r=\frac{p}{1+e\,cos\varphi},$$

гдѣ $p=\frac{4\sigma^2}{\mu}$.

Получаемъ на основаніи § 75 гл. II основной законъ Кеплера.

Планета движется по коническому сѣченію, въ фокусѣ котораго находится солнце.

§ 22. Обращаясь къ разсмотрѣнію задачъ на движеніе системъ точекъ, разсмотримъ упомянутую уже нами задачу о n точкахъ, притягивающихъ другъ друга по закону Newton'а.

Пусть разсматриваются n точекъ $M_1, M_2 \ldots M_n$; обозначимъ для каждой изъ этихъ точекъ M_i массу черезъ m_i и координаты черезъ x_i, y_i, z_i.

Такъ какъ каждая точка M_i двигается подъ вліяніемъ $n-1$ силъ притяженія къ остальнымъ $n-1$ точкамъ, то движущая сила точки будетъ равнодѣйствующей этихъ силъ.

Въ дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія точки M_i придется писать въ правыхъ частяхъ проекціи этой равнодѣйствующей на оси координатъ; другими словами, придется писать сумму проекцій силъ, составляющихъ эту равнодѣйствующую.

Отсюда уравненія движенія напишутся такъ:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{d t^2} = \mu \sum_{\kappa} \frac{m_\kappa m_i}{r_{i\kappa}^3} (x_\kappa - x_i), \; m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \mu \sum_{\kappa} \frac{m_\kappa m_i}{r_{i\kappa}^3} (y_\kappa - y_i),$$

$$(1) \qquad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \mu \sum_{\kappa} \frac{m_\kappa m_i}{r_{i\kappa}^3} (z_\kappa - z_i),$$

гдѣ $r_{i\kappa} = \sqrt{(x_\kappa - x_i)^2 + (y_\kappa - y_i)^2 + (z_\kappa - z_i)^2}$ есть разстояніе между точками M_κ и M_i.

Въ системѣ уравненій (1) суммы $\sum\limits_{\kappa}$ распространяются на значенія k, отличныя отъ i.

Давая значку i всѣ значенія $1, 2, 3 \ldots n$ получимъ $3n$ дифференціальныхъ уравненій для опредѣленія $3n$ координатъ $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots (x_n, y_n, z_n)$.

Мы упомянули въ § 48 гл. I, что задача n тѣлъ представила неопреодолимыя затрудненія уже для случая трехъ тѣлъ. Для двухъ тѣлъ задача сводится къ разобранной уже нами въ § 21 планетной задачѣ и, слѣдовательно, рѣшается вполнѣ.

Здѣсь мы докажемъ только для самаго общаго случая n точекъ справедливость теоремы о прямолинейномъ и равномѣрномъ движеніи центра инерціи (тяжести).

Просуммируя по значку i три уравненія (1), получимъ

$$(2) \qquad \sum_i m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_i \mu \sum_{\kappa} \frac{m_\kappa m_i}{r_{i\kappa}^3} (x_\kappa - x_i)$$

и два подобныхъ уравненія для y_i и z_i.

Правая часть уравненія (2) тождественно равна нулю, такъ какъ каждому члену съ разностью $x_\kappa - x_i$ будетъ соотвѣтствовать другой съ обратной разностью $x_i - x_\kappa$.

Итакъ мы получаемъ

$$(3) \qquad \sum_i m_i \frac{d^2 x_i}{d t^2} = 0, \; \sum_i m_i \frac{d^2 y_i}{d t} = 0, \; \sum_i m_i \frac{d^2 z_i}{d t^2} = 0.$$

Разсмотримъ точку N, имѣющую координаты

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i},$$

$$\eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i},$$

$$\zeta = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i};$$

эта точка называется *центромъ инерціи* заданной системы точекъ $M_1, M_2, \ldots M_n$.

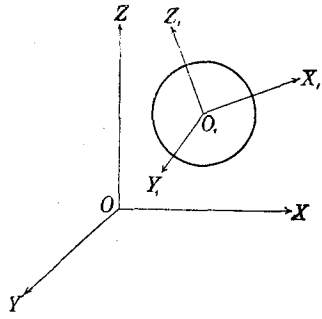
Очевидно, изъ уравненій (3) мы получимъ

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = 0, \frac{d^2 \eta}{d t^2} = 0, \frac{d^2 \zeta}{d t^2} = 0.$$

т. е., дѣйствительно, центръ инерціи движется равномѣрно по прямой.

§ 23. Одна изъ самыхъ важныхъ задачъ механики есть задача о движеніи твердаго тѣла. Подъ твердымъ тѣломъ разумѣется совокупность безчисленнаго множества точекъ, заполняющихъ непрерывно нѣкоторый объемъ и связанныхъ такъ другъ съ другомъ, что во все время движенія разстоянія между этими точками остаются неизмѣнными.

Самымъ естественнымъ образомъ мы приходимъ къ мысли примѣнить къ разсмотрѣнію движенія твердаго тѣла (черт. 149) формулы общаго преобразованія прямоугольныхъ координатъ трехмѣрнаго пространства, приведенныхъ въ § 70 гл. II.



Черт. 149.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы будемъ считать въ формулахъ

$$(1)\quad \begin{aligned} x &= a + x_1 a_1 + y_1 a_2 + z_1 a_3, \\ y &= b + x_1 b_1 + y_1 b_2 + z_1 b_3, \\ z &= c + x_1 c_1 + y_1 c_2 + z_1 c_3 \end{aligned}$$

всѣ 12 коэффиціентовъ $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, \ldots$ такими функціями отъ времени t, которыя удовлетворяютъ шести уравненіямъ (2) § 69 гл. II или, что одно и то же, шести уравненіямъ (3) § 69 гл. II, то получимъ нѣкоторое движеніе второй координатной системы относительно первой. Можемъ считать заданное тѣло неизмѣнно связаннымъ съ подвижною системой координатъ.

Зависимости (2) § 69 гл. II даютъ возможность выразить шесть изъ коэффиціентовъ черезъ остальныя шесть. Итакъ, подлежатъ

опредѣленію только слѣдующихъ шесть функцій: координаты a, b, c новаго начала и три изъ числа девяти косинусовъ a_i, b_i, c_i.

Когда всѣ коэффиціенты найдены, какъ функціи отъ времени, то функціи a, b, c даютъ законъ такъ называемаго *поступательнаго* движенія тѣла, даютъ траекторію, по которой двигается въ пространствѣ опредѣленная точка O_1 тѣла. Косинусы a_i, b_i, c_i опредѣляютъ *вращеніе* тѣла около этой точки O_1. Отъ совмѣщенія этихъ двухъ движеній получается окончательное движеніе тѣла, подлежащее нахожденію.

Euler показалъ, какъ пишутся дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла подъ вліяніемъ заданныхъ силъ, приложенныхъ къ его точкамъ.

Уравненія Euler'а представляютъ изъ себя систему шести обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка съ шестью неизвѣстными функціями, черезъ которыя можно опредѣлить всѣ искомые коэффиціенты преобразованія координатъ (1).

Интегрированіе уравненій Euler'а представляетъ задачу, превосходящую до сихъ поръ силы анализа. Найденъ однако цѣлый рядъ случаевъ, когда интегрированіе уравненій Euler'а можетъ быть выполнено. Къ нахожденію такихъ частныхъ случаевъ относятся замѣчательныя изслѣдованія Lagrange'а, Poinsot, Софіи Ковалевской и другихъ.

§ 24. Въ теоріи упругости и гидродинамикѣ разсматривается движеніе такихъ тѣлъ, внутренняя структура которыхъ мѣняется при движеніи, т. е. мѣняются разстоянія между точками этихъ тѣлъ при движеніи.

Задача приводится къ разсмотрѣнію преобразованія координатъ x, y, z въ другія x_1, y_1, z_1, опредѣляемыя формулами

$$x = f_1(x_1, y_1, z_1, t),$$
$$y = f_2(x_1, y_1, z_1, t),$$
$$z = f_3(x_1, y_1, z_1, t).$$

Приходится искать три функціи f_1, f_2, f_3 отъ четырехъ перемѣнныхъ независимыхъ x_1, y_1, z_1, t, т. е. гидродинамическія задачи приводятся уже къ интегрированію уравненій съ частными производными.

§ 25. Въ послѣднее время въ физикѣ поднятъ очень важный вопросъ, подвергающій критикѣ всѣ наши экспериментальныя методы.

Основаніемъ для измѣненія нашихъ взглядовъ на характеръ заключеній, которыя должны быть выведены изъ опытовъ, является

зависимость установленія понятія о времени (звѣздныя сутки) отъ зрительныхъ впечатлѣній, которыя, въ свою очередь, находятся въ зависимости отъ скорости свѣта и движенія въ пространствѣ *самого наблюдателя*.

Эта новая критика приводитъ къ нѣкоторому видоизмѣненію всѣхъ основныхъ положеній механики Newton'a, а потому является серьезной научной реформой. Основную мысль ея называютъ *принципомъ относительности*.

Повидимому, принципъ относительности въ его математической формулировкѣ сводится на разсмотрѣніе четырехмѣрнаго пространства, четвертой координатой котораго является время.

ГЛАВА XIII.

Математическая физика.

§ 1. Въ наиболѣе важныхъ задачахъ математической физики дѣло идетъ обыкновенно объ интегрированіи уравненій съ частными производными сравнительно простого вида.

Такъ напримѣръ, въ задачѣ *движенія теплоты* въ тѣлѣ приходится разсматривать уравненіе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

гдѣ u, будучи функціей отъ четырехъ перемѣнныхъ x, y, z, t представляетъ температуру той точки тѣла, которая опредѣляется координатами x, y, z, а t есть время.

Если температура не зависитъ отъ времени, то мы получаемъ задачу *стаціонарнаго* распредѣленія теплоты въ тѣлѣ. Эта задача сводится къ уравненію Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{2}$$

Это уравненіе имѣетъ также большее значеніе въ механикѣ, гдѣ оно играетъ основную роль въ теоріи *потенціала.*

Если мы имѣемъ дѣло съ распространеніемъ теплоты въ прутѣ одного измѣренія, то приходится считать температуру u функціей отъ одной координаты x и времени, и мы получаемъ уравненіе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{3}$$

Это уравненіе играетъ роль въ вопросахъ объ охлажденіи земной коры.

Въ акустикѣ играетъ важную роль уравненіе

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{4}$$

которое даетъ вибраціи натянутой упругой струны; уравненіе

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{5}$$

даетъ колебанія упругой мембраны.

§ 2. Разсмотримъ уравненіе потенціала въ n—мѣрномъ пространствѣ, т. е. уравненіе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0. \tag{1}$$

Разсмотримъ частное рѣшеніе этого уравненія такого вида, когда функція u будетъ функціей отъ одного аргумента

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

т. е.

$$u = f(r); \tag{2}$$

тогда, дифференцируя уравненіе (2) по x_i, получимъ

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r) \frac{x_i}{r};$$

дифференцируя еще разъ, имѣемъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{f'(r)}{r} + \left[\frac{f'(r)}{r} \right]' \frac{x_i^2}{r}; \tag{3}$$

подставивъ полученныя выраженія въ уравненіе (1), получимъ

$$n \frac{f'(r)}{r} + \left[\frac{f'(r)}{r} \right]' \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{r} = 0,$$

или, полагая $\frac{f'(r)}{r} = \varphi(r)$, получимъ

$$n \varphi(r) + \varphi'(r) . r = 0.$$

Это уравненіе можно представить въ видѣ

$$\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{n}{r};$$

Интегрируя, получимъ

$$lg\,\varphi(r) = lg\,\frac{1}{r^n} + lg\,C,$$

гдѣ C постоянная произвольная величина.

Отсюда получаемъ

$$\frac{f'(r)}{r} = \varphi(r) = \frac{C}{r^n},$$

а слѣдовательно

$$f'(r) = \frac{C}{r^{n-1}}.$$

Интегрируя, получаемъ при $n > 2$

$$f(r) = -\frac{C}{(n-2)\,r^{n-2}} + C_1,$$

а при $n = 2$

$$f(r) = C\,lg\,r + C_1.$$

Отсюда происходитъ названіе *уравненія логариѳмическаго потенціала* для уравненія

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

соотвѣтствующаго случаю $n = 2$.

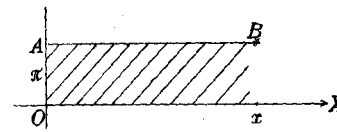
Это уравненіе, какъ мы видѣли, играетъ большую роль въ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго. Оно имѣетъ большія приложенія въ теоріи электричества и въ гидродинамикѣ.

При $n = 3$ мы получаемъ

$$f'(r) = \frac{c}{r^2}$$

и, значитъ, производная отъ функціи $f(r)$ выражаетъ Newton'овскій законъ всемірнаго тяготѣнія и имѣетъ обратную пропорціанальность квадрату разстоянія r. Поэтому при $n = 3$ уравненіе (2) § 1 называется *уравненіемъ Newton'ова потенціала.*

§ 3. Для иллюстраціи методъ, употребляемыхъ въ математической физикѣ, разсмотримъ задачу Fourier о стаціонариомъ распредѣленіи температуры въ безконечной длины прямоугольной пластинкѣ, имѣющей ширину π (черт. 150). Пусть температура постоянна и равна нулю вдоль по длиннымъ краямъ Ox, AB пластинки, а для всѣхъ точекъ короткой стороны OA она равна единицѣ.



Черт. 150.

Возьмемъ за ось x-овъ одну изъ длинныхъ сторонъ OX. Ось y-овъ пустимъ по короткой сторонѣ OA, тогда задача рѣшается уравненіемъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

съ такими добавочными условіями

$$u=0, \text{ если } y=0; \tag{2}$$
$$u=0, \quad „ \quad y=\pi; \tag{3}$$
$$u=0, \quad „ \quad x=\infty; \tag{4}$$
$$u=1, \quad „ \quad x=0. \tag{5}$$

Такъ какъ наше уравненіе (1) *линейное*, то рѣшеніе его выразится суммой

$$u=A_1 u_1+A_2 u_2+A_3 u_3+\ldots, \tag{6}$$

гдѣ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ суть постоянныя произвольныя величины, а $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *частныя рѣшенія* уравненія (1).

Для полученія частныхъ рѣшеній уравненія (1) положимъ

$$u=e^{\alpha x+\beta y}, \tag{7}$$

гдѣ α и β числа постоянныя. Подставляя выраженіе (7) въ уравненіе (1) и сокращая на $e^{\alpha x+\beta y}$, получимъ

$$\alpha^2+\beta^2=0,$$

откуда

$$\beta=\pm\alpha i, \text{ гдѣ } i=\sqrt{-1}.$$

Мы получаемъ два рѣшенія

$$u=e^{\alpha x}.-e^{\alpha i y}, u=e^{\alpha x}\, e^{\alpha i y}; \tag{8}$$

складывая эти рѣшенія и дѣля на 2, получаемъ такое новое рѣшеніе

(9) $$u = e^{\alpha x} \cos \alpha y;$$

вычитая же другъ изъ друга рѣшенія (8) и дѣля на $2i$, получаемъ

(10) $$u = e^{\alpha x} \sin \alpha y.$$

Такъ какъ при $y = 0$ функція $u = 0$, то, естественно, является мысль составить искомую фунцію изъ рѣшеній (10), т. е.

(11) $$u = A_1 e^{\alpha_1 x} \sin \alpha_1 y + A_2 e^{\alpha_2 x} \sin \alpha_2 y + A_3 e^{\alpha_3 x} \sin \alpha_3 y + \ldots$$

Такъ какъ должно быть $u = 0$ при $y = \pi$, то достаточно взять числа

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

числами цѣлыми. Мы возьмемъ эти числа отрицательными, чтобы удовлетворялось требованіе (4); итакъ, мы приходимъ къ ряду

(12) $$u = A_1 e^{-x} \sin y + A_2 e^{-2x} \sin 2y + A_3 e^{-3x} \sin 3y + \ldots$$

При $x = 0$, мы имѣемъ

(13) $$u = A_1 \sin y + A_2 \sin 2y + A_3 \sin 3y + \ldots$$

Наша задача будетъ рѣшена окончательно, если только можно будетъ единицу представить въ видѣ ряда (13). Оказывается справедливой формула

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin y + \frac{1}{3} \sin 3y + \frac{1}{5} \sin 5y + \ldots\right).$$

Слѣдовательно, мы имѣемъ

$$A_1 = \frac{4}{\pi}, A_2 = 0, A_3 = \frac{4}{\pi}\frac{1}{3}, A_4 = 0, A_5 = \frac{4}{\pi}\frac{1}{5}, \ldots$$

такъ что получаемъ окончательное рѣшеніе задачи въ такомъ видѣ

$$u = \frac{4}{\pi}\left\{e^{-x} \sin y + \frac{1}{3} e^{-3x} \sin 3y + \frac{1}{5} e^{-5x} \sin 5y + \ldots\right\}.$$

Тригонометрическіе ряды.

§ 4. Мы могли бы задачу предыдущаго §-а видоизмѣнить тѣмъ, что потребовать другой законъ распредѣленія температуры на короткомъ краѣ OA пластинки; мы могли бы потребовать, чтобы эта температура указывалась нѣкоторой функціею отъ y

$$f(y),$$

причемъ задача свелась бы къ выраженію функціи $f(y)$ тригонометрическимъ рядомъ (13) § 3.

Итакъ, задачи математической физики привели къ важному вопросу о представленіи произвольно заданной функціи $f(x)$ рядомъ

$$(1)\quad f(x) = A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + \ldots$$
$$\ldots + A_\kappa \cos \kappa x + B_\kappa \sin \kappa x + \ldots$$

Конечно, заданная функціи $f(x)$ должна быть періодической съ періодомъ 2π, т. е. должно быть

$$f(x + 2\pi) = f(x),$$

такъ какъ всѣ члены ряда не мѣняются при измѣненіи x на $x + 2\pi$.

Мы можемъ считать функцію $f(x)$ заданною въ промежуткѣ $(-\pi, +\pi)$, такъ какъ, очевидно, можно разсматривать всякій промежутокъ $(a, a + 2\pi)$.

§ 5. Euler показалъ очень простой способъ опредѣленія коэффиціентовъ ряда (1) § 4. Въ самомъ дѣлѣ, интегрируя въ предѣлахъ $-\pi$ и $+\pi$ равенство (1), получимъ

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = A_0 \int_{-\pi}^{+\pi} dx = 2\pi A_0,$$

такъ какъ

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx\, dx = 0$$

при всякомъ цѣломъ k, слѣдовательно

$$(1)\qquad A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx.$$

Для полученія коэффиціента A_κ достаточно умножить обѣ части уравненія (1) § 4 на $\cos kx$ и потомъ интегрировать въ границахъ отъ $-\pi$ до $+\pi$.

Въ самомъ дѣлѣ, мы будемъ имѣть

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \sin lx \, dx = 0,$$

такъ какъ

$$2 \cos kx \sin lx = \sin (l + k) x + \sin (l - k) x.$$

Что касается интеграла

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lx \, dx,$$

то этотъ интегралъ равенъ нулю, если l не $= k$, такъ какъ

$$2 \cos kx \cos lx = \cos (k + l) x + \cos (k - l) x.$$

Если же $l = k$, то имѣемъ

$$\cos^2 kx = \frac{\cos 2 kx + 1}{2},$$

и мы получаемъ

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 kx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2 kx \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} dx = \pi.$$

Итакъ, интегрируя равенство (1) § 4 послѣ умноженія его на $\cos kx$, получаемъ

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx = \pi A_k,$$

откуда

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx. \tag{2}$$

Совершенно подобнымъ же образомъ мы найдемъ черезъ умноженіе уравненія (1) § 4 на $\sin kx$ и интегрированіе

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx. \tag{3}$$

§ 6. Приведенное разсужденіе Euler'а нельзя считать вполнѣ убѣдительнымъ, такъ какъ въ немъ неявно заключается заранѣе предположенная возможность разложенія функціи (x) въ тригонометрическій рядъ, а далѣе предполагается возможнымъ интегрировать почленно этотъ рядъ. Для того чтобы сдѣлать разсужденія строгими, Dilichlet поставилъ задачу такъ: предполагая, что коэффиціенты ряда выражены по формуламъ

$$(1) \qquad A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha,\ A_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha,$$

$$B_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha,$$

мы составляемъ сумму

$$S_m = A_0 + \sum_{\kappa=1}^{\kappa=m}(A_\kappa \cos kx + B_\kappa \sin kx),$$

разсматриваемъ предѣлъ S_m при возрастаніи m до ∞ и испытываемъ, будетъ ли этотъ предѣлъ равенъ данной функціи $f(x)$. Dirichlet нашелъ, что можно утверждать, что формула

$$\lim_{m=\infty} S_m = f(x)$$

справедлива при такихъ условіяхъ:

1) всѣ значенія $f(x)$ въ данномъ промежуткѣ конечны,

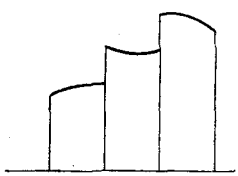
2) въ промежуткѣ существуетъ конечное число maxima и minima функціи $f(x)$,

3) функція $f(x)$ вообще непрерывна въ данномъ промежуткѣ, но можетъ (черт. 151) претерпѣвать для отдѣльныхъ значеній разрывы слѣдующаго рода: предѣлъ, къ которому стремится

$$f(x+h)$$

при уменьшеніи до нуля положительныхъ чиселъ h, можетъ не равняться предѣлу

$$f(x-h).$$



Черт. 151.

§ 7. Если функція не удовлетворяетъ условіямъ Dirichlet, то возможны самые разнообразные исключительные случаи, разборъ

которыхъ составляетъ одну изъ тончайшихъ теорій современной математики, въ которой произведены заслуживающія вниманія изслѣдованія профессоромъ Harnak'омъ.

Оказывается, что если сумма S_m не имѣетъ предѣломъ функціи $f(x)$, то было бы поспѣшно заключить, что функція $f(x)$ не раскладывается въ тригонометрическій рядъ

(1) $A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \cos 2x + \ldots$

Можетъ имѣть мѣсто только одно изъ двухъ заключеній: или функція дѣйствительно не раскладывается въ рядъ (1), или же, если она раскладывается, то коэффиціенты этого ряда не получаются по формуламъ (1) § 6.

Отсюда явилась необходимость различать два понятія: 1) *тригонометрическій рядъ*, 2) *рядъ Fourier*, въ которомъ коэффиціенты выражаются по формулѣ (1) § 6.

Интегралъ Fourier.

§ 8. Разложеніе функціи $f(x)$ въ рядъ Fourier можетъ быть переписано такъ

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \sum_{k=1}^{k=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,[\cos kx \cos k\alpha + \right.$$

$$\left. + \sin kx \sin k\alpha]\, d\alpha\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \sum_{k=1}^{k=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos k(\alpha - x)\, d\alpha\right\}.$$

Сдѣлаемъ преобразованіе перемѣнныхъ α и x въ другія, λ и ξ, при помощи формулъ

(1) $$x = \frac{\pi\xi}{l},\ \alpha = \frac{\pi\lambda}{l},$$

гдѣ l нѣкоторое, пока произвольно выбранное число, которое мы будемъ далѣе увеличивать до безконечности; обозначимъ

$$f\left(\frac{\pi\xi}{l}\right) = \varphi(\xi),$$

получимъ

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{l}\left\{\frac{1}{2}\int_{-l}^{+l}\varphi(\lambda)\,d\lambda+\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_{-l}^{+l}\varphi(\lambda)\cos\frac{k\pi}{l}(\lambda-\xi)\,d\lambda\right\}$$

или иначе

$$(2)\qquad \varphi(\xi)=\frac{1}{l}\sum_{k=0}^{k=\infty}\int_{-l}^{+l}\varphi(\lambda)\cos\frac{k\pi}{l}(\lambda-\xi)\,d\lambda-\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}\varphi(\lambda)\,d\lambda.$$

Предположимъ, что интегралъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)\,d\lambda$$

имѣетъ конечное значеніе, тогда въ формулѣ (2) пропадаетъ при $l=\infty$ второй интегралъ, и мы получаемъ

$$\varphi(\xi)=\lim_{l=\infty}\left\{\frac{1}{l}\sum_{k=0}^{k=\infty}\int_{-l}^{+l}\varphi(\lambda)\cos\frac{k\pi}{l}(\lambda-\xi)\,d\lambda\right\};$$

очевидно, что неравенства

$$-\pi<x<+\pi$$

ютъ на основаніи (1)

$$-l<\xi<+l.$$

Положимъ теперь

$$\frac{k\pi}{l}=\alpha,\ \frac{\pi}{l}=\Delta\alpha$$

$$\Omega(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{+l}\varphi(\lambda)\cos\alpha(\lambda-\xi)\,d\lambda;$$

мы получаемъ

$$\varphi(\xi)=\lim_{\Delta\alpha=0}\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\Omega(\alpha)\,\Delta\alpha=\int_{0}^{\infty}\lim\Omega(\alpha)\,d\alpha$$

или окончательно

$$(3) \qquad \varphi(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) \cos\alpha(\lambda - \xi)\, d\lambda,$$

причемъ, очевидно, имѣемъ $-\infty < \xi < +\infty$.

Подставляя въ формулу (3) вмѣсто α величину $-\alpha$ получимъ

$$(4) \qquad \varphi(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) \cos\alpha(\lambda - \xi)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) \cos\alpha(\lambda - \xi)\, d\lambda;$$

складывая формулы (3) и (4) и дѣля на 2 получимъ

$$(5) \qquad \varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) \cos\alpha(\lambda - \xi)\, d\alpha\, d\lambda.$$

Такъ какъ функція $\sin\alpha(\lambda - \xi)$ нечетная относительно α, то имѣемъ

$$(6) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) \sin\alpha(\lambda - \xi)\, d\alpha\, d\lambda;$$

умножая формулу (6) на $\sqrt{-1}$ и складывая съ формулой (5) получимъ

$$(7) \qquad \varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, e^{i\alpha(\lambda - \xi)}\, d\alpha\, d\lambda.$$

Это и есть знаменитая формула Fourier, имѣющая большія приложенія.

§ 9. Формула (7) § 8 очень просто обобщается на случай большаго числа перемѣнныхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ функцію $f(x, y)$ отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ. Считая y величиною постоянной, можемъ примѣнить формулу Fourier:

$$(1)\qquad f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda,y)\,e^{i\alpha(\lambda-x)}\,d\alpha\,d\lambda.$$

Но къ функціи $f(\lambda,y)$ можно примѣнить ту же формулу, а именно

$$(2)\qquad f(\lambda,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda,\mu)e^{i\beta(\mu-y)}\,d\beta\,d\mu;$$

подставляя (2) въ формулу (1) получимъ

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda,\mu)\,e^{i[\alpha(\lambda-x)+\beta(\mu-y)]}\,d\alpha\,d\lambda\,d\beta\,d\mu.$$

Очевидно, что получается формула для любого числа n перемѣнныхъ $x, y, \ldots z$:

$$(3)\qquad f(x,y,\ldots z)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda,\mu,\ldots\nu)\,e^{i[\alpha(\lambda-x)+\beta(\mu-y)\ldots+\gamma(\nu-z)]}$$

$$d\alpha\,d\beta\ldots d\gamma\,d\lambda\,d\mu\ldots d\nu.$$

Интегрированіе линейныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ съ постоянными коэффиціентами.

§ 10. Cauchy показалъ, что формула Fourier (3) § 9 даетъ возможность интегрировать линейныя уравненія въ частныхъ производныхъ съ постоянными коэффиціентами.

Разсмотримъ сначала уравненія безъ послѣдняго члена, т. е. уравненія вида

$$(1)\qquad \sum \mathfrak{A}\frac{\partial^m u}{\partial x^n\,\partial y^n\,\partial z^p\ldots\partial t^m}=0,$$

гдѣ сумма распространяется на конечное число членовъ, изъ которыхъ каждый заключаетъ нѣкоторую частную производную, умноженную на заданный постоянный коэффиціентъ $\mathfrak{A}$.

Отдѣлимъ одну изъ перемѣнныхъ, напримѣръ t, отъ остальныхъ n перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$ Въ математической физикѣ

такимъ особеннымъ перемѣннымъ t является обыкновенно время.

Наше уравненіе (1) можетъ быть переписано въ видѣ

$$(2)\qquad \frac{\partial^m \Omega}{\partial t^m} + \frac{\partial^{m-1} \Omega_1}{\partial t^{m-1}} + \ldots + \frac{\partial \Omega_{m-1}}{\partial t} + \Omega_m = 0,$$

гдѣ всѣ величины Ω_j суть линейныя функціи съ постоянными коэффиціентами отъ частныхъ производныхъ, взятыхъ по всѣмъ другимъ перемѣннымъ, т. е.

$$(3)\qquad \Omega_j = a \frac{\partial^\kappa u}{\partial x^g \, \partial y^h \, \partial z^l \ldots} + b \frac{\partial^{\kappa'} u}{\partial x^{g'} \, \partial y^{h'} \, \partial z^{l'} \ldots} + \ldots$$

Cauchy показываетъ, что можно рѣшить при помощи интеграла Fourier задачу интегрированія уравненія (2) такимъ образомъ, чтобы при $t = 0$ обращались искомая функція u и ея частныя производныя $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ldots \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}$ въ заданныя функціи $f_0(x, y, z, \ldots)$, $f_1(x, y, z \ldots), \ldots f_{m-1}(x, y, z, \ldots)$ отъ остальныхъ перемѣнныхъ.

Cauchy представляетъ интегралъ уравненія (2) въ видѣ

$$(4)\qquad u = \frac{1}{(2\pi)^n}\Bigg[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{T} f(x', y', z', \ldots)\,\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{T}_1 f_1(x', y', z', \ldots)\,\omega + \ldots + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{T}_{m-1} f_{m-1}(x', y', z', \ldots)\,\omega\Bigg].$$

Здѣсь для краткости обозначено

$$\omega = e^{i[\alpha(x'-x) + \beta(y'-y) + \gamma(z'-z) + \ldots]}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots dx'\, dy'\, dz' \ldots,$$

а одиночный интегралъ написанъ вмѣсто $2n$-кратнаго; предположимъ множители

$$\mathrm{T}, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \ldots \mathrm{T}_{m-1}$$

функціями отъ t, въ которыя, какъ мы предполагаемъ, могутъ входить, какъ параметры, величины $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, но величины $x', y', z', \ldots$ не входятъ.

Подставивъ интегралъ (3) въ уравненіе (2) получимъ

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A\frac{d^m T}{dt^m}+A_1\frac{d^{m-1}T}{dt^{m-1}}+\ldots+A_{m-1}\frac{dT}{dt}+A_m T\right]f\omega+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A\frac{d^m T_1}{dt^m}+A_1\frac{d^{m-1}T_1}{dt^{m-1}}+\ldots+A_{m-1}\frac{dT_1}{dt}+A_m T_1\right]f_1\omega+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A\frac{d^m T_{m-1}}{dt^m}+A_1\frac{d^{m-1}T_{m-1}}{dt^{m-1}}+\ldots+A_{m-1}\frac{dT_{m-1}}{dt}+\right.$$

$$\left.+A_m T_{m-1}\right]f_{m-1}\omega, \tag{5}$$

гдѣ коэффиціенты $A, A_1, \ldots A_m$ будутъ заключать только перемѣнныя $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, которыя можно считать постоянными при дифференцированіи по t.

На основаніи (3) получимъ

$$A_j=i^{\kappa}a\alpha^g\beta^h\gamma^l\ldots+i^{\kappa'}b\alpha^{g'}\beta^{h'}\gamma^{l'}\ldots+\ldots$$

Для удовлетворенія уравненію (5) достаточно взять за T_j какое нибудь рѣшеніе такого обыкновеннаго линейнаго дифференціальнаго уравненія:

$$A\frac{d^m V}{dt^m}+A_1\frac{d^m V}{dt^m}+\ldots+A_{m-1}\frac{dV}{dt}+A_m V=0. \tag{6}$$

Общій интегралъ уравненія (6) на основаніи сказаннаго въ § 14 гл. X будетъ:

$$V=C_1e^{\rho_1 t}+C_2e^{\rho_2 t}+\ldots+C_m e^{\rho_m t}, \tag{7}$$

гдѣ $\rho_1\rho_2\ldots\rho_m$ суть корни алгебраическаго уравненія

$$A\rho^m+A_1\rho^{m-1}+\ldots+A_{m-1}\rho+A_m=0.$$

Постоянныя произвольныя $C_1, C_2, \ldots C_m$ выберемъ такъ, чтобы при $t=0$ было

$$V=0,\ \frac{dV}{dt}=0,\ \frac{d^2V}{dt^2}=0,\ \ldots\ \frac{\partial t^{j-1}V}{dt^{j-1}}=0,\ \frac{d^jV}{dt^j}=1,$$

$$\frac{d^{j+1}V}{dt^{j+1}}=0,\ \ldots\ \frac{d^{m-1}V}{dt^{m-1}}=0,$$

или иначе надо для нахожденія $C_1, C_2, \ldots C_m$ рѣшить систему уравненій:

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&C_1 + C_2 + \ldots + C_m = 0,\\
&C_1\rho_1 + C_2\rho_2 + \ldots + C_m\rho_m = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1\rho_1^{j-1} + C_2\rho_2^{j-1} + \ldots + C_m\rho_m^{j-1} = 0,\\
&C_1\rho_1^{j} + C_2\rho_2^{j} + \ldots + C_m\rho_m^{j} = 1,\\
&C_1\rho_1^{j+1} + C_2\rho_2^{j+1} + \ldots + C_m\rho_m^{j+1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1\rho_1^{m-1} + C_2\rho_2^{m-1} + \ldots + C_m\rho_m^{m-1} = 0.
\end{aligned}
$$

Значенія $C_1, C_2, \ldots C_m$, взятыя изъ послѣдней системы (8), подставляемъ въ выраженіе (7); полученное такимъ образомъ выраженіе можемъ принять за T_j, и задача рѣшена.

§ 11. Остается сказать два слова о томъ случаѣ, когда дифференціальное уравненіе задано съ послѣднимъ членамъ, т. е.

$$
(1)\qquad \frac{\partial^m \Omega}{\partial t^m} + \frac{\partial^{m-1}\Omega_1}{\partial t^{m-1}} + \ldots + \frac{\partial \Omega_{m-1}}{\partial t} + \Omega_m = \varphi(t, x, y, \ldots).
$$

На основаніи тѣхъ же соображеній, которыя приведены въ § 15 гл. X для обыкновенныхъ уравненій, мы замѣчаемъ, что общій интегралъ уравненія (1) сводится къ общему интегралу уравненія

$$
(2)\qquad \frac{\partial^m \Omega}{\partial t^m} + \ldots + \frac{\partial \Omega_{m-1}}{\partial t} + \Omega_m = 0
$$

безъ послѣдняго члена, если извѣстно одно частное рѣшеніе V уравненія (1), такъ какъ, если мы получаемъ

$$
u = V + u',
$$

и если u и V будутъ рѣшеніями уравненія (1), то u' будетъ рѣшеніемъ уравненія (2).

Та же самая метода Cauchy даетъ возможность найти частное рѣшеніе V.

Разсматриваемъ формулу

$$
(3)\qquad V = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} N e^{i[\alpha(x'-x) + \beta(y'-y) + \ldots + \tau(t-t')]} \cdot
$$

$$
\cdot\, \varphi(t', x', y', \ldots)\, d\alpha\, d\beta \ldots d\tau\, dx'\, dy' \ldots dt';
$$

здѣсь интегралъ, очевидно, $(2n+2)$ — кратный.

Подставляя этотъ интегралъ въ уравненіе (1) получимъ

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty} N.\mathfrak{N}\, e^{i[\alpha(x-x')+\ldots+\tau(t-t')]}\,\varphi(t',x',y',\ldots)\,d\alpha\ldots$$

$$\ldots d\tau\, dx'\ldots dt' = \varphi(t,x,y,\ldots);$$

достаточно, очевидно, положить

$$N\mathfrak{N} = 1.$$

Итакъ, подстановка въ формулѣ (3) вмѣсто N величины $\frac{1}{\mathfrak{N}}$ даетъ искомое частное рѣшеніе.

Фундаментальныя функціи.

§ 12. Если мы хотимъ въ немногихъ словахъ резюмировать общій характеръ задачъ математической физики, то придется обратить вниманіе на то обстоятельство, что дѣло идетъ объ интегрированіи нѣкотораго линейнаго уравненія въ частныхъ производныхъ, причемъ искомая функція должна удовлетворять еще нѣкоторымъ добавочно поставленнымъ условіямъ. Эти условія называются *начальными*, если искомая функція, будучи функціей отъ времени t, должна въ извѣстный моментъ времени, напримѣръ при $t=0$, обладать предписанными свойствами. Условія называются *граничными*, если функція извѣстнымъ образомъ задается на границѣ разсматриваемой области: напримѣръ на поверхности, ограничивающей заданный объемъ, на контурѣ, ограничивающемъ данную площадь и тому подобное.

Обыкновенно представляетъ главную трудность задачи удовлетворить именно этимъ начальнымъ и граничнымъ условіямъ.

Главнѣйшіе намъ извѣстные пріемы рѣшенія задачъ математической физики состоятъ въ обобщеніи пріемовъ Fourier, показанныхъ нами въ § 4. Чтобы яснѣе представить общую идею такихъ обобщеній, разсмотримъ еще одну задачу. Требуется найти стаціонарное распредѣленіе температуры внутри твердаго шара радіуса 1, поверхность одного полушарія котораго поддерживается въ постоянной температурѣ 0, а другого полушарія въ температурѣ 1.

Мы должны будемъ взять уравненіе Laplace'а (2) §1. Удобно ввести въ разсмотрѣніе полярныя координаты, опредѣленныя уравненіями (1) § 65 гл. II.

Итакъ, приходится преобразовать выраженіе

$$S = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

къ новымъ перемѣннымъ независимымъ ρ, u, v, связаннымъ съ прежними формулами

$$x = \rho \sin u \cos v, \; y = \rho \sin u \sin v, \; z = \rho \cos u.$$

Продѣлаемъ эту выкладку преобразованія перемѣнныхъ независимыхъ, такъ какъ она представляетъ сама по себѣ интересную задачу.

Для упрощенія выкладокъ примѣнимъ нѣкоторый искусственный пріемъ.

Обозначимъ для сокращенія $\rho \sin u = r$ и, оставляя z безъ перемѣны, замѣнимъ x, y на новыя перемѣнныя r и v при помощи равенствъ

(1) $$x = r \cos v, \; y = r \sin v;$$

отсюда

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \; tg\, v = \frac{y}{x};$$

дифференцируя эти формулы, получимъ

(2) $$dr = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos v\, dx + \sin v\, dy,$$
$$dv = \frac{(x dy - y dx) \cos^2 v}{x^2} = -\frac{\sin v}{r} dx + \frac{\cos v}{r} dy.$$

На основаніи равенствъ (2) полный дифференціалъ отъ V напишется такъ

$$d V = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial v} dv = \frac{\partial V}{\partial r} (\cos v\, dx + \sin v\, dy) +$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial v} \left(-\frac{\sin v}{r} dx + \frac{\cos v}{r} dy \right);$$

очевидно, что коэффиціентами при dx и dy будутъ частныя производныя по x и y; мы получимъ

(3) $$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \cos v - \frac{\sin v}{r} \frac{\partial V}{\partial v},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r} \sin v + \frac{\cos v}{r} \frac{\partial V}{\partial v};$$

умножая второе уравненіе на $i=\sqrt{-1}$ и складывая съ первымъ, получимъ

$$\frac{\partial V}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial y}=e^{iv}\left(\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial V}{\partial v}\right). \tag{4}$$

Обозначимъ черезъ ω значеніе первой части формулы (4), слѣдовательно

$$\omega=\frac{\partial V}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial y}. \tag{5}$$

Формула (4) годится, какъ тождественная, для всякой функціи V и для всякаго знака при $i=\sqrt{-1}$, значитъ, примѣняя ее для случая $V=\omega$ и для $-i$, мы получимъ

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}-i\frac{\partial \omega}{\partial y}=e^{-iv}\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial \omega}{\partial v}\right);$$

подставляя въ лѣвую часть этого уравненія вмѣсто ω величину (5), а въ правую часть величину

$$\omega=e^{iv}\left(\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial V}{\partial v}\right), \tag{6}$$

получимъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}; \tag{7}$$

значитъ

$$S=\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}; \tag{8}$$

замѣнимъ теперь перемѣнныя z, r новыми ρ и u, тогда получимъ окончательное преобразованіе, которое требуется выполнить.

Такъ какъ формулы послѣдняго преобразованія суть

$$z=\rho\cos u, r=\rho\sin u, \tag{9}$$

то мы видимъ, что это преобразованіе подобно ранѣе выполненному (1) съ тою лишь разницей, что буквы x, y, r, v надо замѣнить буквами z, r, ρ, u. Формула (7) перепишется такъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}; \tag{10}$$

кромѣ того, вторая формула (3) послѣ замѣны на новыя буквы даетъ

$$(11)\qquad \frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial \rho}\sin u+\frac{\cos u}{\rho}\frac{\partial V}{\partial u};$$

принимая во вниманіе формулы (10) и (11) легко получимъ изъ формулы (3)

$$S=\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2\sin^2 u}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{\cos u}{\rho^2\sin u}\frac{\partial V}{\partial u}.$$

Эту формулу можно написать короче

$$(12)\qquad \rho^2 S=\rho\frac{\partial^2(\rho V)}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\sin^2 u}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}+\frac{1}{\sin u}\frac{\partial\left(\sin u\frac{\partial V}{\partial u}\right)}{\partial u}.$$

Итакъ, придется разсматривать дифференціальное уравненіе

$$S=0.$$

Мы имѣемъ право предположить граничныя условія такимъ образомъ, что

$$(13)\qquad \begin{aligned} &V=1,\ \text{когда}\ \rho=1,\quad 0<u<\frac{\pi}{2},\\ &V=0,\ \text{когда}\ \rho=1,\quad \frac{\pi}{2}<u<\pi.\end{aligned}$$

Очевидно, что вслѣдствіе симметричнаго распредѣленія граничныхъ температуръ относительно полярной оси, мы можемъ предполагать и общее распредѣленіе температуры внутри шара независящимъ отъ угла v, тогда мы имѣемъ право разсматривать болѣе простое уравненіе

$$(14)\qquad \rho\frac{\partial^2(\rho V)}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\sin u}\frac{\partial\left(\sin u\frac{\partial V}{\partial u}\right)}{\partial u}=0;$$

будемъ искать частныя его рѣшенія вида

$$(15)\qquad V=\rho^m U,$$

гдѣ m цѣлое число, а U функція отъ одного u; подставляя выраженіе (15) въ уравненіе (14), получимъ

$$\rho^m m(m+1)U+\frac{\rho^m}{\sin u}\frac{d\left(\sin u\frac{dU}{du}\right)}{du}=0.$$

Сокращая это уравненіе на ρ^m, мы можемъ для упрощенія ввести новую перемѣнную

$$x = \cos u;$$

такъ какъ U есть функція отъ одного u, то она обратится въ нѣкоторую функцію X отъ одного x, и мы получимъ

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dX}{dx}\right] + m(m+1)X = 0.$$

Получаемъ для опредѣленія функцій X обыкновенное дифференціальное уравненіе второго порядка

$$(15) \qquad (1-x^2)\frac{d^2X}{dx^2} - 2x\frac{dX}{dx} + m(m+1)X = 0.$$

Это есть то извѣстное уравненіе, которому, какъ показалъ Legendre, удовлетворяетъ нѣкоторая цѣлая функція степени m, носящая названіе *полинома Legendre'a*.

Обозначая функцію Legendre'a черезъ X_m получаемъ

$$X_m = C\left[x^m - \frac{m(m-1)}{2(2m-1)}x^{m-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4.(2m-1)(2m-3)}x^{m-4} + \ldots\right].$$

Обыкновенно постоянное произвольное принимаемъ равнымъ

$$C = \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 1}{m!},$$

такъ что

$$X_0(x) = 1, X_1(x) = x, X_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \ldots$$

Итакъ, искомое рѣшеніе задачи можно представить въ видѣ ряда

$$V = A_0 X_0(\cos\vartheta) + A_1 \rho X_1(\cos\vartheta) + A_2 \rho^2 X_2(\cos\vartheta) + \ldots,$$

при $\rho = 1$ получаемъ

$$V = A_0 X_0(\cos\vartheta) + A_1 X_1(\cos\vartheta) + A_2 X_2(\cos\vartheta) + \ldots$$

Итакъ, мы имѣемъ рядъ, расположенный по функціямъ Legendre'a, и задача сводится къ опредѣленію коэффиціентовъ ряда такимъ образомъ, чтобы получалась заданная условіями (13) функція.

Мы приходимъ къ задачѣ представленія произвольно заданной функціи рядомъ, расположеннымъ по функціямъ Legendre'a.

§ 13. Тригонометрическія функціи и функціи Legendre'a суть простые случаи такъ называемыхъ *фундаментальныхъ функцій*, обширная теорія которыхъ даетъ въ настоящее время прекрасныя приложенія въ математической физикѣ.

Въ этой теоріи получили извѣстность въ послѣднее время Poincaré, Ляпуновъ, Стекловъ, Zaremba, Korn.

Интегральныя уравненія.

§ 14. Вопросы математической физики привели въ послѣднее время къ открытію, имѣющему общематематическое значеніе. Это открытіе принадлежитъ шведскому математику Fredholm'y и носитъ названіе теоріи *интегральныхъ уравненій*. Первыя работы Fredholm'a по интегральнымъ уравненіямъ появилась въ 1900 году.

Fredholm ставитъ двѣ слѣдующія задачи.

1. Дано уравненіе

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

гдѣ $f(s)$ и $K(s, t)$ заданныя въ промежуткѣ (a, b) функціи. Ищется функція $\varphi(t)$. Уравненіе (1) носитъ названіе *интегральнаго уравненія перваго рода*.

2. Дано уравненіе

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{2}$$

съ заданными функціями $f(s)$ и $K(s, t)$ и искомой функціей $\varphi(t)$. Уравненіе (2) носитъ названіе *интегральнаго уравненія второго рода*.

§ 15. Мы не будемъ обсуждать вопроса о роли интегральныхъ уравненій въ математической физикѣ. На этотъ счетъ мнѣнія математиковъ еще не установились.

Я скажу только два слова о важномъ принципіальномъ значеніи интегральныхъ уравненій. Разсмотримъ систему линейныхъ уравненій

$$f_s = \sum_{t=1}^{t=h} k_{st}\,\varphi_t \quad (s = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

съ заданными числами f_s и k_{st} и неизвѣстными

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n.$$

Обобщеніе системы (1) на случай безконечнаго числа неизвѣстныхъ можетъ быть проведено двояко, такъ какъ конечная сумма

$$\sum_{t=1}^{t=h} k_{st}\varphi_t$$

можетъ быть двояко обобщена на случай безконечнаго числа членовъ. Первое обобщеніе состоитъ въ разсмотрѣніи безконечнаго ряда

$$f_s = \sum_{t=1}^{t=\infty} k_{st}\varphi_t, \tag{2}$$

причемъ число уравненій (1) можно предполагать безконечно большимъ числомъ $s = 1, 2, \ldots \infty$.

При этомъ обобщеніи мы получаемъ теорію *безконечныхъ* опредѣлителей. Приходится разсматривать опредѣлитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} k_{11}, k_{12}, \ldots k_{1n} \\ k_{21}, k_{22}, \ldots k_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ k_{n1}, k_{n2}, \ldots k_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если Δ_n при безпредѣльномъ возрастаніи значка n стремится къ опредѣленному, отличному отъ нуля предѣлу

$$\Delta,$$

то система (2) безконечнаго числа уравненій можетъ допускать рѣшеніе относительно перемѣнной φ_i, причемъ

$$\varphi_i = \frac{1}{\Delta}\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathfrak{K}_{in} f_n,$$

гдѣ числа $\mathfrak{K}_{in}$ имѣютъ полную анологію съ минорами опредѣлителя Δ.

Второе обобщеніе состоитъ въ томъ, что конечная сумма

$$\sum k_{st}\varphi_t$$

замѣняется опредѣленнымъ интеграломъ и мы приходимъ къ понятію объ интегралѣ уравненія перваго рода

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Замѣчательно, что Hilbert'у и его ученикамъ удалось обобщить на интегральныя уравненія цѣлый рядъ алгебраическихъ теорій. Поэтому, какъ бы ни относиться къ прикладному значенію интегральныхъ уравненій, нельзя не придавать имъ большого теоретическаго значенія. На этихъ уравненіяхъ мы углубляемся еще разъ въ тайны связи и взаимнаго соотношенія алгебраическаго и трансцендентнаго анализовъ.

§ 16. Серьезныя основанія заставляютъ предполагать о существованіи рѣшеній уравненія

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

періодическихъ по параллелепипедамъ въ трехмѣрномъ пространствѣ. Эти рѣшенія являются пространственнымъ аналогомъ эллиптическихъ функцій не по одной только періодичности, но также и по приложеніямъ въ теоріи чиселъ; они осуществляютъ для кубическихъ областей обобщеніе комплекснаго умноженія квадратичной области. Аналогичное обстоятельство имѣетъ мѣсто и при бо́льшемъ числѣ измѣреній.

ГЛАВА XIV.

Теорія вѣроятностей.

§ 1. Теорія вѣроятностей есть наука, изучающая законы случая. Какъ парадоксально должна звучать для начинающаго эта фраза! Не является ли понятіе о случайности понятіемъ, противоположнымъ понятію о законности? Тѣмъ не менѣе опытъ житейскій приводитъ къ убѣжденію въ существованіи какихъ то законовъ, регулирующихъ случайныя явленія.

§ 2. Собственно говоря, ничего совершенно случайнаго въ природѣ нѣтъ. Всякое явленіе, какъ бы неожиданнымъ ни казалось его появленіе для наблюдателя, имѣло свои основанія и причины для появленія. Часто причинъ появленія событія бываетъ такъ много, и всѣ эти причины такъ ничтожны каждая въ отдѣльности по своему вліянію на характеръ событія, что нѣтъ никакой возможности которой-нибудь изъ этихъ причинъ придать предоминирующую роль при появленіи событія. Въ такихъ случаяхъ называютъ появленіе событія *случайнымъ*.

Пояснимъ сказанное на примѣрѣ. Положимъ, что изъ перетасованной колоды вынимается на удачу нѣкоторая карта. Эта карта оказалась семеркой пикъ. Спрашивается, въ чемъ состояли причины появленія какъ разъ этой карты, семерки пикъ. Можно указать слѣдующія причины. Во первыхъ, первоначальное положеніе семерки пикъ въ колодѣ, во вторыхъ, совокупность обстоятельствъ движенія рукъ и картъ при тасовкѣ, наконецъ, детали движенія пальцевъ руки, вынувшей изъ колоды семерку пикъ. Детали этихъ движеній совершенно не поддаются учету въ томъ смыслѣ, что достаточно самаго ничтожнаго отклоненія руки и была бы вынута другая карта. Поэтому мы говоримъ, что появленіе семерки пикъ было совершенно

случайнымъ, и что можно было съ такою же вѣроятностью ожидать появленія всякой другой карты.

§ 3. Обдумывая внимательно сказанное въ предыдущемъ параграфѣ, мы приходимъ къ убѣжденію, что понятіе о случайномъ событіи есть нѣкоторое фиктивное понятіе, неосуществимое въ своемъ чистомъ видѣ на практикѣ благодаря существованію разныхъ, хотя и мелкихъ, привходящихъ причинъ. На практикѣ приходится принимать рядъ мѣръ для приданія ожидаемому событію возможно бо́льшаго характера случайности. Такъ, напримѣръ, при игрѣ въ карты существуетъ правило обязательнаго тасованія картъ, подобнымъ же образомъ при розыгрышѣ лотерей вращаютъ урну, заключающую свернутые билеты, для того, чтобы перемѣшать эти билеты.

§ 4. Совокупность обстоятельствъ, при которыхъ мы наблюдаемъ появленіе случайнаго событія, мы будемъ называть *испытаніемъ*. Это испытаніе можетъ носить характеръ эксперимента, если мы участвуемъ при помощи нѣкоторыхъ дѣйствій, зависящихъ отъ нашей воли, въ организаціи обстоятельствъ, при которыхъ появляется это событіе. Испытаніе обращается въ простое наблюденіе, если мы являемся посторонними наблюдателями появленія событія, не принимая активнаго участія въ сопровождающей появленіе событія обстановкѣ.

§ 5. Чтобы убѣдиться въ существованіи нѣкоторыхъ законовъ, руководящихъ случайными событіями, обратимся къ разсмотрѣнію примѣровъ. Положимъ, что нѣкоторое лицо производитъ передъ нами такія испытанія: оно вынимаетъ изъ предварительно стасованной колоды карту, показываетъ ее намъ и кладетъ обратно. Положимъ, что десять разъ подъ рядъ выходитъ семерка пикъ. Хотя нѣтъ ничего абсолютно невозможнаго въ такомъ десятикратномъ появленіи карты, тѣмъ не менѣе это кажется намъ совершенно невѣроятнымъ, и мы получаемъ полное убѣжденіе въ томъ, что мы имѣемъ дѣло съ фокусникомъ, показывающимъ передъ нами свое искусство, если только послѣ провѣрки колоды картъ эта колода оказывается не состоящей исключительно изъ семерокъ пикъ.

Предположимъ далѣе, что мы стоимъ на площади нѣкотораго города при началѣ дождя. Каждая капля, падая на землю, описываетъ во время своего движенія нѣкоторую линію, которая будетъ, вообще говоря, кривою подъ вліяніемъ теченій воздуха, отклоняющихъ падающую каплю отъ прямолинейнаго движенія. Паденіе

капли на ту или другую плиту мостовой есть дѣло случая, между тѣмъ мы совершенно убѣждены, что въ большой массѣ эти капли начнутъ смачивать всю площадь равномѣрно. Это убѣжденіе настолько велико, что если мы замѣчаемъ на площади сухое пятно, то невольно поднимаемъ голову, чтобы найти ту крышу, которая была причиной этого сухого мѣста.

§ 6. Если при данномъ испытаніи можно ожидать появленія одного изъ двухъ или нѣсколькихъ событій, причемъ нѣтъ никакого основанія предполагать, что одно изъ этихъ событій появится предпочтительно передъ другими, то такія событія называются *равновозможными*. Такъ напримѣръ, появленіе каждой изъ 52-хъ картъ колоды при выниманіи даетъ примѣръ 52-хъ равновозможныхъ событій. Подобнымъ образомъ появленіе нумеровъ 1, 2, 3, 4, 5, 6 при бросаніи кубической кости представляетъ 6 равновозможныхъ событій.

Если въ урнѣ находятся 5 бѣлыхъ и 5 черныхъ шаровъ, то появленіе бѣлаго или чернаго шара суть событія равновозможныя. Если въ урнѣ будетъ бѣлыхъ шаровъ больше, чѣмъ черныхъ, то эти два событія: появленіе бѣлаго шара и появленіе чернаго шара перестаютъ быть событіями равновозможными; мы имѣемъ всѣ основанія ожидать скорѣе появленія бѣлаго шара.

Въ приложеніяхъ теоріи вѣроятности часто приходится считать за равновозможныя событія такія, равновозможность которыхъ до нѣкоторой степени сомнительна.

§ 7. Если всѣ обстоятельства, сопровождающія испытаніе, намъ настолько хорошо извѣстны, что мы можемъ перечислить всѣ различныя между собой событія, могущія появиться при испытаніи, то эти перечисленныя нами событія носятъ названіе событій *исчерпывающихъ* испытаніе. Напримѣръ, для владѣльца одного билета выигрышнаго займа тиражъ представляется испытаніемъ, которое исчерпывается слѣдующими тремя событіями: 1) выигрышъ, 2) невыигрышъ, 3) выходъ билета въ тиражъ.

§ 8. Событія раздѣляются на *совмѣстимыя* и *несовмѣстимыя*. Несовмѣстимыми называются событія такого характера, что при наступленіи одного изъ нихъ другія уже не могутъ имѣть мѣста.

Понятіе о математической вѣроятности.

§ 9. Если появленіе нѣкотораго событія A при испытаніи *не достовѣрно*, другими словами, если намъ извѣстно, что событіе можетъ или появиться, или не появиться, то мѣру нашего ожиданія

этого событія, его такъ называемую *вѣроятность*, мы сравниваемъ съ вѣроятностью появленія бѣлаго шара изъ урны, заключающей a бѣлыхъ шаровъ и b черныхъ, причемъ за мѣру вѣроятности появленія бѣлаго шара беремъ дробь

$$\frac{a}{a+b},$$

въ которой числитель a представляетъ число бѣлыхъ шаровъ, а знаменатель $a+b$ число всѣхъ шаровъ.

§ 10. Предположимъ, что при нѣкоторомъ испытаніи могутъ появится n событій несовмѣстимыхъ, равновозможныхъ и исчерпывающихъ это испытаніе. Эти событія мы назовемъ для сокращенія рѣчи *случаями*, исчерпывающими испытаніе.

Пусть нѣкоторое событіе A появляется при нѣкоторыхъ изъ этихъ случаевъ, а при другихъ случаяхъ событіе A не появляется: назовемъ тѣ случаи, при которыхъ событіе A появляется, случаями *благопріятствующими* появленію событія. Если черезъ m обозначено число случаевъ, *благопріятствующихъ* событію A, то мы устанавливаемъ такое опредѣленіе.

Опредѣленіе. *Математической вѣроятностью наступленія событія A называется дробь*

$$\frac{m}{n},$$

числитель которой равенъ числу m случаевъ, благопріятствующихъ событію A, а знаменатель n равенъ числу всѣхъ независимыхъ, равновозможныхъ случаевъ, исчерпывающихъ испытаніе.

§ 11. Изъ даннаго опредѣленія вытекаетъ, что вѣроятность есть раціональная дробь. Эта дробь всегда правильная, ибо $m \leqq n$.

Если всѣ случаи, исчерпывающіе испытаніе, благопріятствуютъ появленію событія A, то $m = n$ и вѣроятность равна 1.

Если вѣроятность событія A равна единицѣ, то мы имѣемъ дѣло съ *достовѣрностью* появленія событія A, т. е. событіе A непремѣнно появится. Обратно, если ни при одномъ изъ случаевъ, исчерпывающихъ испытаніе, событіе A не можетъ появиться, то можно считать $m = 0$, такъ что вѣроятность событія A будетъ равна нулю. Событіе A *невозможно*.

На практикѣ имѣютъ значеніе тѣ случаи, когда по выводамъ теоріи вѣроятность событія будетъ близка къ 1 или къ 0; въ первомъ

случаѣ можно разсчитывать на появленіе событія, во второмъ событіе надо считать почти невозможнымъ.

§ 12. Напримѣръ, вычислимъ вѣроятность вынуть изъ колоды картъ фигуру. Такъ какъ въ 52 картахъ находится 12 фигуръ, то вѣроятностью вынутія фигуры будетъ дробь

$$\frac{12}{52}=\frac{3}{13}.$$

Вѣроятностью вынутія простой карты будетъ

$$\frac{52-12}{52}=\frac{10}{13}.$$

Теорема сложенія вѣроятностей.

§ 13. Теорема. *Вѣроятность случиться одному изъ несовмѣстимыхъ событій безъ указаній, какому именно, равна суммѣ вѣроятностей этихъ событій.*

Пусть изъ n равновозможныхъ случаевъ, исчерпывающихъ испытаніе, m_1 случаевъ благопріятствуютъ событію A_1, остальные же не благопріятствуютъ ему; m_2 случаевъ благопріятствуютъ событію A_2 и т. д.; наконецъ, m_k случаевъ благопріятствуютъ событію A_k. Очевидно, что вѣроятности событій

(1) $$A_1, A_2, \ldots A_k$$

будутъ

(2) $$\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots \frac{m_k}{n}.$$

Въ виду несовмѣстимости событій $A_1, A_2 \ldots A_k$ всѣ случаи, благопріятные для одного изъ нихъ, не благопріятствуютъ остальнымъ; поэтому, если мы къ m_1 случаямъ, благопріятнымъ для A_1, присоединимъ m_2 случаевъ, благопріятныхъ для A_2, и т. д., то получимъ

$$m_1+m_2+\ldots+m_k$$

различныхъ между собой случаевъ, благопріятствующихъ появленію одного изъ событій (1), не указывая, котораго именно. Отсюда вѣроятность появиться которому нибудь изъ событій (1) будетъ

$$\frac{m_1+m_2+\ldots+m_k}{n}.$$

Но эта вѣроятность есть сумма вѣроятностей (2) и теорема доказана.

§ 14. Пусть вѣроятность появленія нѣкотораго событія A будетъ p. Вычислимъ вѣроятность q его *непоявленія*. Появленіе событія A и его непоявленіе принадлежатъ къ событіямъ *противоположнымъ*, т. е. такимъ двумъ событіямъ, которыя исчерпываютъ испытаніе и несовмѣстимы между собой.

По теоремѣ сложенія вѣроятностей сумма

$$p+q$$

должна представлять вѣроятность появленія одного изъ противоположныхъ событій, но такъ какъ одно изъ противоположныхъ событій должно появиться непремѣнно, то мы получаемъ

$$p+q=1,$$

такъ что искомая вѣроятность

$$q=1-p.$$

Подобнымъ образомъ мы замѣчаемъ, что въ примѣрѣ § 12 вынутіе фигуры и простой карты суть событія противоположныя, что провѣряется непосредственно, ибо $\frac{3}{13}+\frac{10}{13}=1$.

Теорема умноженія вѣроятностей.

§ 15. Теорема. *Вѣроятность случиться двумъ событіямъ вмѣстѣ равна произведенію вѣроятности одного изъ нихъ на вѣроятность другого, вычисленную въ предположеніи, что первое событіе уже имѣетъ мѣсто.*

Пусть изъ n равновозможныхъ случаевъ

(1) $$C_1, C_2, \ldots C_m, C_{m+1} \ldots C_{m_1}, C_{m_1+1} \ldots C_n,$$

исчерпывающихъ испытаніе, благопріятствуютъ нѣкоторому событію A первые m_1 случаевъ

(2) $$C_1, C_2, \ldots C_m, C_{m+1}, \ldots C_{m_1},$$

остальные же ему не благопріятствуютъ.

Пусть далѣе изъ случаевъ (2) первые m случаевъ

(3) $$C_1, C_2, \ldots C_m$$

благопріятствуютъ другому событію B, остальные же ему не благопріятствуютъ.

Вѣроятность событія A будетъ, очевидно, $\frac{m_1}{n}$.

Вѣроятность событія B въ предположеніи, что событіе A уже существуетъ, будетъ $\frac{m}{m_1}$.

Наконецъ, вѣроятность совмѣстнаго существованія двухъ событій A и B будетъ $\frac{m}{n}$, ибо одновременному существованію событій A и B благопріятствуютъ очевидно только случаи (3).

Тождество

$$\frac{m}{n}=\frac{m_1}{n}\cdot\frac{m}{m_1}$$

заставляетъ признать высказанную теорему доказанной.

§ 16. Примѣнимъ теорему умноженія вѣроятностей къ такой задачѣ.

Изъ колоды вынимаются одна за другой двѣ карты и выкладываются на столъ, найти вѣроятность того, что обѣ вынутыя карты окажутся фигурами.

Вѣроятность вынутія первой фигуры мы вычислили уже въ § 12, она равна $\frac{3}{13}$. Такъ какъ при вынутіи второй карты первая карта оставлена на столѣ и не возвращена въ колоду, то въ колодѣ остается только 11 фигуръ при 51 картѣ, значитъ вѣроятность, что вторая вынутая карта будетъ фигурой, будетъ $\frac{11}{51}$.

Итакъ, вѣроятность вынутія двухъ фигуръ по теоремѣ умноженія вычислится такъ

$$\frac{3}{13}\cdot\frac{11}{51}=\frac{11}{13.17}=\frac{11}{221}.$$

Этотъ результатъ мы могли бы найти, не прибѣгая къ теоремѣ умноженія вѣроятностей.

Въ самомъ дѣлѣ, всѣхъ равновозможныхъ случаевъ въ нашей задачѣ столько, сколько существуетъ сочетаній изъ 52 картъ по 2, т. е. $\frac{52.51}{1.2}$. Благопріятствуютъ появленію двухъ фигуръ столько случаевъ, сколько существуетъ сочетаній изъ 12 фигуръ по 2, т. е. $\frac{12.11}{1.2}$. Раздѣляя одно число на другое, получимъ искомую вѣроятность

$$\frac{12.11}{1.2}:\frac{52.51}{1.2}=\frac{12.11}{52.51}=\frac{11}{2\,21}.$$

§ 17. Будемъ называть событія

(1) $$A, B, C, \ldots .$$

независимыми между собой, если вѣроятность каждаго изъ нихъ не зависитъ отъ того, случились ли другія событія или нѣтъ.

Теорема объ умноженіи вѣроятностей принимаетъ особенно простой видъ для событій независимыхъ между собой, а именно: *вѣроятность совмѣстнаго существованія двухъ или нѣсколькихъ независимыхъ событій равна произведенію вѣроятностей этихъ событій.*

Такъ напримѣръ, въ случаѣ вынутія двухъ картъ изъ колоды, вѣроятность появленія двухъ фигуръ должна быть вычислена иначе, если послѣ вынутія первой карты эта карта кладется назадъ въ колоду и колода перетасовывается. Въ такомъ случаѣ вынутіе второй карты совершается при обстоятельствахъ, независящихъ совершенно отъ того, что произошло при вынутіи первой карты. Вѣроятности вынутія фигуры на первой картѣ и на второй одинаковы и равны $\frac{3}{13}$. Значитъ, вѣроятность вынутія двухъ фигуръ будетъ

$$\frac{3}{13}\cdot\frac{3}{13}=\left(\frac{3}{13}\right)^2=\frac{9}{169}.$$

Какъ второй примѣръ, разсмотримъ игру, называемую *орлянкой*. Ищется вѣроятность вскрытія орла при двухкратномъ бросаніи монеты.

Можетъ произойти одно изъ двухъ: орелъ появится при первомъ бросаніи, или же онъ появится при второмъ бросаніи.

Такъ какъ при каждомъ бросаніи монеты существуютъ два событія, исчерпывающихъ испытаніе, а именно, появленіе *орла* или появленіе *рѣшетки*, то вѣроятность появленія орла при каждомъ бросаніи равна $\frac{1}{2}$.

Итакъ вѣроятность появленія орла при первомъ бросаніи будетъ $\frac{1}{2}$. Появленіе орла при второмъ бросаніи есть событіе

сложное, состоящее изъ совмѣстнаго существованія двухъ событій: появленія рѣшетки при первомъ бросаніи и появленія орла при второмъ. Такъ какъ вѣроятность обоихъ событій есть $\frac{1}{2}$, то вѣроятность появленія орла при второмъ бросаніи есть

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Значитъ, вѣроятность появленія орла при одномъ изъ двухъ бросаній будетъ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Эту задачу можно рѣшить иначе. Въ самомъ дѣлѣ, при двухъ бросаніяхъ имѣются четыре равновозможныхъ событія:

орелъ	орелъ
рѣшетка	орелъ
орелъ	рѣшетка
рѣшетка	рѣшетка.

Изъ этихъ четырехъ событій три благопріятствуютъ появленію орла, слѣдовательно, мы имѣемъ вѣроятность $\frac{3}{4}$.

Повтореніе испытаній.

§ 18. Нѣкоторое испытаніе, при которомъ ожидается появленіе событія A, повторяется нѣкоторое число n разъ. Предположимъ, что вѣроятность события A одинакова при всѣхъ испытаніяхъ и равна числу p, вѣроятность же непоявленія событія будетъ q, причемъ $p + q = 1$.

Составимъ выраженіе для вѣроятности повторенія при n испытаніяхъ m разъ событія A.

Вѣроятность повторенія событія A при всѣхъ испытаніяхъ будетъ по теоремѣ умноженія вѣроятностей равна

$$p^n.$$

Повтореніе $(n-1)$ разъ событія A приводитъ къ слѣдующимъ n возможностямъ:

1) событіе не появится при первомъ испытаніи,

2) событіе не появится при второмъ испытаніи,

(1) . . . . . .

n) событіе не появится при n-омъ испытаніи.

Вѣроятность каждой изъ этихъ возможностей въ отдѣльности равна по теоремѣ умноженія

$$p^{n-1}q.$$

Вѣроятность же повторенія событія $n-1$ разъ, т. е. вѣроятность одной изъ возможностей (1), будетъ по теоремѣ сложенія вѣроятностей равна

$$n\,p^{n-1}\,q = C_n^1 p^{n-1}\,q.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ мы докажемъ общую формулу, что вѣроятность событію A появиться m разъ въ n испытаніяхъ равна

(2) $$C_n^{n-m}\,p^m\,q^{n-m};$$

эта вѣроятность представляетъ одинъ изъ членовъ разложенія

$$(p+q)^n.$$

Математическое ожиданіе.

§ 19. Пусть

(1) $$A_1\,A_2, \ldots A_n$$

суть событія, исчерпывающія испытаніе, и ихъ вѣроятности

(2) $$p_1, p_2, \ldots p_n.$$

Такъ какъ одно изъ событій (1) должно непремѣнно случиться, то должно быть

$$p_1+p_2+\ldots+p_n=1.$$

Пусть нѣкоторая величина x получаетъ различныя значенія въ зависимости отъ того, которое изъ событій (1) имѣетъ мѣсто; пусть эти значенія будутъ

$$x_1, x_2 \ldots x_n;$$

сумма

(3) $$x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n,$$

называется *математическимъ ожиданіемъ* величины x, а дроби $p_1, p_2, \ldots p_n$ называются вѣроятностями соотвѣтственныхъ значеній $x_1, x_2, \ldots x_n$.

§ 20. Нѣсколько величинъ

$$x, y, z, \ldots$$

мы будемъ называть *независимыми* между собой, если для каж-

дой изъ нихъ вѣроятность имѣть каждое опредѣленное значеніе не зависитъ отъ значенія прочихъ величинъ.

§ 21. Теорема. *Математическое ожиданіе суммы равно суммѣ математическихъ ожиданій слагаемыхъ.*

Эта теорема относится какъ къ независимымъ, такъ и къ зависимымъ величинамъ.

Для доказательства теоремы разсмотримъ величины

$$x, y, z, \ldots,$$

которыя при событіяхъ

$$A_1, A_2, \ldots A_n,$$

имѣющихъ вѣроятности

$$p_1, p_2, \ldots p_n,$$

принимаютъ ряды значеній

$$\begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, \\ y_1, y_2, \ldots y_n, \\ z_1, z_2, \ldots z_n; \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Справедливость теоремы вытекаетъ изъ тождества

$$[x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n] + [y_1 p_1 + \ldots + y_n p_n] + \\ + [z_1 p_1 + \ldots + z_n p_n] + \ldots = (x_1 + y_1 + z_1 + \ldots) p_1 + \\ + (x_2 + y_2 + z_2 + \ldots) p_2 + \ldots + (x_n + y_n + z_n + \ldots) p_n.$$

Употребляя для обозначенія математическаго ожиданія буквы м. о., получимъ

$$м.\ о.\ (x + y + z + \ldots) = м.\ о.\ (x) + м.\ о.\ (y) + м.\ о.\ (z) + \ldots$$

§ 22. Теорема. *Математическое ожиданіе произведенія независимыхъ величинъ равно произведенію ихъ математическихъ ожиданій.*

Эта теорема относится къ произведенію любого числа множителей.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ двухъ множителей, такъ какъ отъ случая двухъ множителей можно перейти къ общему случаю путемъ послѣдовательнаго прибавленія одного множителя за другимъ.

Разсмотримъ математическія ожиданія двухъ величинъ x и y; эти ожиданія будутъ

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_m p_m,$$
$$y_1 q_1 + y_2 q_2 + \ldots + y_n q_n.$$

По предположенію величины x и y независимы, и поэтому всякая вѣроятность p_i величины x_i не мѣняется отъ выбора частныхъ значеній y_i и обратно, всякая вѣроятность q_i не зависитъ отъ значеній величины x_i;.

Очевидно, что вѣроятность произведенія

$$x_\lambda y_\mu$$

бтдетъ равна

$$p_\lambda q_\mu.$$

Значитъ, математическое ожиданіе произведенія выражается по формулѣ

$$м.\,о.\,(xy) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} x_\lambda y_\mu p_\lambda q_\mu =$$

$$= \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} x_\lambda p_\lambda \right) \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=n} y_\mu q_\mu \right) = м.\,о.\,(x) \times м.\,о.\,(y),$$

что и требовалось доказать.

Теорема Bernoulli.

§ 23. Основаніемъ для всѣхъ практическихъ приложеній теоріи вѣроятностей является весьма важная теорема Jacob'a Bernoulli, доказанная въ первый разъ въ его сочиненіи „Ars conjectandi", 1713.

Смыслъ этой теоремы состоитъ вотъ въ чемъ. Возьмемъ опять примѣръ, трактованный нами въ § 17; происходитъ повтореніе испытанія, состоящаго въ вынутіи карты изъ полной колоды. Мы видѣли уже, что вѣроятность появленія фигуры при каждомъ отдѣльномъ вынутіи равняется $\frac{3}{13}$. Опытъ показываетъ, что при большомъ числѣ n испытаній, число m появленій фигуры таково, что дробь $\frac{m}{n}$ мало отличается отъ вѣроятности $\frac{3}{13}$.

Теорема Бернулли. Съ вѣроятностью, сколь угодно близкой къ единицѣ, можно утверждать, что дробь

$$\frac{m}{n},$$

гдѣ n число испытаній, а m число повтореній событія A при

этихъ испытаніяхъ, отличается сколь угодно мало отъ вѣроятности p событія A при безпредѣльномъ увеличеніи n.

Изслѣдованія Чебышева сдѣлали возможнымъ въ высшей степени элементарное доказательство теоремы Bernoulli. Это доказательство мы и приведемъ.

§ 24. Лемма. *Если $\mathfrak{A}$ обозначаетъ математическое ожиданіе величины u, всѣ значенія которой положительны, а t произвольное число, то вѣроятность неравенства*

(1) $$u \leqq \mathfrak{A}\, t^2$$

больше, чѣмъ дробь

(2) $$1 - \frac{1}{t^2}.$$

Пусть всѣ значенія величины u будутъ

$$u_1, u_2, \ldots u_i, u_{i+1} \ldots u_n,$$

и пусть неравенству (1) удовлетворяютъ первыя i значеній $u_1, u_2, \ldots u_i$, тогда для остальныхъ имѣемъ неравенства

(3) $$u_{i+1} > \mathfrak{A}\, t^2, u_{i+2} > \mathfrak{A}\, t^2, \ldots u_n > \mathfrak{A}\, t^2;$$

по опредѣленію математическаго ожиданія имѣемъ

$$\mathfrak{A} = u_1 p_1 + u_2 p_2 + \ldots + u_n p_n,$$

отсюда на основаніи положительности значеній u_i имѣемъ

(4) $$\mathfrak{A} > u_{i+1} p_{i+1} + \ldots + u_n p_n;$$

на основаніи неравенствъ (3) изъ неравенства (4) получаемъ слѣдующее

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{A}\, t^2 (p_{i+1} + p_{i+2} + \ldots + p_n),$$

или окончательно

$$p_{i+1} + p_{i+2} + \ldots + p_n < \frac{1}{t^2},$$

т. е. мы получаемъ, что вѣроятность одного изъ неравенствъ (3) меньше $\frac{1}{t^2}$, значитъ, вѣроятность обратнаго неравенства (1) будетъ больше дроби (2), что и требовалось показать.

Неравенства Чебышева.

§ 25. Пусть имѣются независимыя величины

(1) $$x, y, z, \ldots w,$$

математическія ожиданія которыхъ пусть будутъ

(2) $$a, b, c, \ldots l.$$

Примѣнимъ лемму предыдущаго параграфа къ величинѣ

$$u = (x + y + z + \ldots + w - a - b - c - \ldots - l)^2,$$

обозначая черезъ $\mathfrak{A}$ математическое ожиданіе величины u. Получаемъ теорему.

Теорема. *Съ вѣроятностью, бо́льшею числа*

$$1 - \frac{1}{t^2}$$

можно утверждать, что сумма

$$x + y + z + \ldots + w$$

заключается между двумя предѣлами:

$$a + b + c + \ldots + l + t\sqrt{\mathfrak{A}},$$
$$a + b + c + \ldots + l - t\sqrt{\mathfrak{A}}.$$

§ 26. При этомъ легко показать, что

(1) $$\mathfrak{A} = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2,$$

гдѣ

$$a_1, b_1, c_1, \ldots l_1$$

суть математическія ожиданія квадратовъ *)

$$x^2, y^2, z^2, \ldots w^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$м.\,о\,(x - a)^2 = м.\,о.\,(x^2) - 2\,м.\,о.\,(a\,x) + м.\,о.\,(a^2) =$$
$$= a_1 - 2a^2 + a^2 = a_1 - a^2,$$
$$м.\,о.\,(y - b)^2 = b_1 - b^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$м.\,о.\,(w - l)^2 = l_1 - l^2;$$
$$м.\,о.\,(x - a)(y - b) = м.\,о.\,(x - a)\,м.\,о.\,(y - b) =$$
$$= (a - a)(b - b) = 0,$$
$$м.\,о.\,(x - a)(z - c) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда слѣдуетъ справедливость формулы (1).

---

*) Было бы ошибочно сказать что $м.\,о.\,(x^2) = [м.\,о.\,(x)]^2$, такъ какъ теорема о произведеніи математическихъ ожиданій прилагается только въ случаѣ независимыхъ множителей.

Законъ большихъ чиселъ.

§ 27. Пусть вѣроятность появленія событія A при первомъ испытаніи будетъ p_1, при второмъ p_2, при третьемъ p_3 и т. д.

Пусть величина x принимаетъ значеніе, равное единицѣ, при появленіи событія A на первомъ испытаніи, вѣроятность чего есть p_1; пусть x принимаетъ значеніе равное нулю, если событіе A не появляется при первомъ испытаніи, вѣроятность чего есть $1-p_1$. Пусть величина y обозначаетъ тоже самое для второго испытанія, что x для перваго, величина z для третьяго и т. д.; наконецъ, величина w для послѣдняго n—аго испытанія.

Если мы обозначимъ черезъ m число появленій событія A въ n испытаніяхъ, то мы имѣемъ

$$x+y+z+\ldots+w=m;$$

математическія ожиданія величинъ $x, y, \ldots$ опредѣляются такъ:

$$\begin{aligned} м.\,о.\,(x) &= 1.\,p_1+0\,(1-p_1)=p_1,\\ м.\,о.\,(y) &= 1.\,p_2+0\,(1-p_2)=p_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ м.\,о.\,(w) &= 1.\,p_n+0\,(1-p_n)=p_n; \end{aligned}$$

математическое ожиданіе квадратовъ тѣхъ же величинъ будетъ

$$\begin{aligned} м.\,о.\,(x^2) &= 1^2 p_1+0^2\,(1-p_1)=p_1,\\ м.\,о.\,(y^2) &= 1^2 p_2+0^2\,(1-p_2)=p_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ м.\,о.\,(w^2) &= 1^2 p_n+0^2\,(1-p_n)=p_n. \end{aligned}$$

На основаніи теоремы § 25 можно съ вѣроятностью, большей, чѣмъ $1-\frac{1}{t^2}$, утверждать, что сумма

$$x+y+z+\ldots+w=m$$

заключается въ предѣлахъ

$$\begin{aligned} &p_1+p_2+\ldots+p_n+t\sqrt{\mathfrak{A}},\\ &p_1+p_2+\ldots+p_n-t\sqrt{\mathfrak{A}}, \end{aligned}$$

гдѣ

$$\mathfrak{A}=p_1-p_1^2+p_2-p_2^2+\ldots+p_n-p_n^2;$$

отсюда получаемъ такое неравенство:

$$\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}-\frac{t}{n}\sqrt{\mathfrak{A}}<\frac{m}{n}<\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}+$$
$$+\frac{t}{n}\sqrt{\mathfrak{A}};$$

покажемъ, что при данномъ t и безконечно большомъ n величина $\frac{t}{n}\sqrt{\mathfrak{A}}$ будетъ безконечно малая.

Въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{t}{n}\sqrt{\mathfrak{A}}=\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)+p_2(1-p_2)+\ldots+p_n(1-p_n)}{n}};$$

но

$$p_1(1-p_1)<1, p_2(1-p_2)<1, \ldots p_n(1-p_n)<1;$$

складывая эти неравенства, получимъ

$$\mathfrak{A}<n,$$

откуда

$$\frac{t}{n}\sqrt{\mathfrak{A}}<\frac{t}{\sqrt{n}},$$

что и требовалось доказать.

Возьмемъ теперь значеніе t столь большимъ, чтобы величина $\frac{1}{t^2}$ была столь мала, сколь намъ угодно, и чтобы, слѣдовательно, $1-\frac{1}{t^2}$ была столь близко къ единицѣ, сколь намъ угодно. Выбравъ t можемъ затѣмъ число n испытаній взять настолько большимъ, чтобы $\frac{t}{\sqrt{n}}$, а слѣдовательно и $\frac{t}{n}\sqrt{\mathfrak{A}}$ было сколь угодно малымъ. Получаемъ теорему Poisson'а, выражающую такъ называемый законъ большихъ чиселъ.

Теорема. *Съ вѣроятностью, сколь угодно близкой къ единицѣ, можно утверждать, что разность между*

$$\frac{m}{n} \text{ и } \frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}.$$

при достаточно большомъ числѣ n испытаній будетъ сколь угодно мала.

§ 28. Остается сказать лишь два слова для полученія изъ теоремы Poisson'а теоремы Bernoulli. Въ самомъ дѣлѣ, если вѣроятности событія A одинаковы при всѣхъ испытаніяхъ, то

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p,$$

гдѣ черезъ p обозначена ихъ общая величина; но тогда

$$\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} = p,$$

и мы приходимъ къ теоремѣ, формулированной въ § 23.

Математическая безобидность игръ.

§ 29. Однимъ изъ важнѣйшихъ приложеній послѣднихъ теоремъ является выводъ *условій безобидности игръ.*

Разсмотримъ какую-нибудь игру, состоящую изъ ряда партій, изъ которыхъ каждая оканчивается выигрышемъ или проигрышемъ одного изъ игроковъ.

Мы докажемъ слѣдующее весьма важное положеніе.

Теорема. *Если игра организована такимъ образомъ, что математическое ожиданіе выигрыша одного изъ игроковъ положительное, то съ вѣроятностью, сколь угодно близкой къ достовѣрности, можно утверждать, что этотъ игрокъ выиграетъ сколь угодно много при достаточно большомъ числѣ партій.*

При доказательствѣ этой теоремы сдѣлаемъ два допущенія.

1) Математическое ожиданіе выигрыша не можетъ быть безконечно малымъ.

2) Математическое ожиданіе квадрата выигрыша не можетъ быть безконечно большимъ.

Эти два допущенія соотвѣтствуютъ всѣмъ практическимъ приложеніямъ теоріи вѣроятностей.

Пусть числа

$$x, y, \ldots w$$

суть выигрыши игрока при первой, второй, . . . n-ой партіяхъ.

По доказанной теоремѣ

$$x + y + \ldots + w > a + b + \ldots$$
$$\ldots + l - t\sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \ldots + l_1 - l^2};$$

по допущенію (1) можно подобрать такое опредѣленное положительное число α, что будетъ

$$a > \alpha, b > \alpha, c > \alpha, \ldots l > \alpha;$$

съ другой стороны, по допущенію (2) можно указать такое положительное число β, что будетъ

$$a_1 < \beta, b_1 < \beta, \ldots l_1 < \beta;$$

значитъ

$$x + y + \ldots + w > n\alpha - t\sqrt{n\beta},$$

$$> n\left(\alpha - \frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\beta}\right);$$

при возрастаніи n оба множителя

$$n, \alpha - \frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\beta}$$

возрастаютъ; слѣдовательно, величина

$$x + y + \ldots + w$$

безконечно возрастаетъ.

Совершенно аналогично можно показать, что, если математическое ожиданіе выигрыша игрока число *отрицательное*, то при достаточно долгомъ продолженіи игры игрокъ *разорится*.

Отсюда является доказаннымъ, что для безобидности игры необходимо, чтобы *математическое ожиданіе всѣхъ игроковъ равнялось нулю*.

§ 30. Въ математической теоріи вѣроятностей устанавливается слѣдующее самое общее понятіе объ игрѣ: подъ *игрой* мы разумѣемъ совокупность обстоятельствъ, при которыхъ нѣкоторыя суммы денегъ переходятъ отъ однихъ участниковъ игры къ другимъ, причемъ этотъ переходъ совершается при появленіи нѣкоторыхъ случайныхъ (не достовѣрныхъ) событій.

Нравственное ожиданіе.

§ 31. Buffon, авторъ извѣстнаго сочиненія „Essai d'Arithmétique morale", а также Daniel Bernoulli находили правило математической безобидности игръ несправедливымъ съ общежитейской точки зрѣнія и предполагали давать нѣкоторыя преимущества болѣе бѣднымъ игрокамъ. При этомъ вмѣсто математическаго ожиданія выгоды они предлагали ввести такъ называемое *нравственное ожиданіе* этой выгоды, при опредѣленіи котораго входило бы въ раз-

счетъ имущество, которымъ обладаетъ игрокъ, а также могли играть роль и другіе факторы взаимныхъ отношеній между игроками.

При помощи введенія въ разсмотрѣніе нравственнаго ожиданія была установлена невыгодность съ точки зрѣнія этого нравственнаго ожиданія всякихъ игръ и лотерей, и наоборотъ, была установлена выгодность страховыхъ операцій.

Однако соображенія, связанныя съ разсмотрѣніемъ нравственнаго ожиданія, не пользуются въ настоящее время сочувствіемъ, такъ какъ, очевидно, приходится считать несправедливымъ всякое отступленіе отъ принципа математической безобидности.

Рулетка въ Monte Carlo.

§ 32. Хорошій примѣръ, поясняющій изложенныя нами теоретическія соображенія о математической безобидности игръ, даетъ анализъ азартной игры, называемой *рулеткой*.

Запрещенная для производства въ общественныхъ мѣстахъ почти во всѣхъ государствахъ, эта азартная игра пріютилась въ маленькомъ государствѣ, княжествѣ Monaco, расположенномъ въ красивой мѣстности на югѣ Франціи, на берегу Средиземнаго моря.

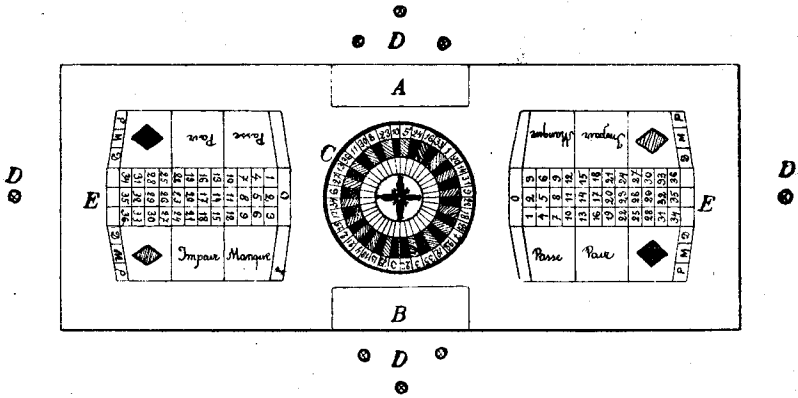
На высокой горѣ Monte Carlo, спускающейся обрывомъ къ морю, среди садовъ субтропической растительности находится дворецъ, такъ называемое casino, въ которомъ происходитъ азартная игра.

Этотъ роскошный игорный притонъ принадлежитъ акціонерной компаніи, платящей громадную милліонную аренду князю Monaco.

Въ громадныхъ, богатоукрашенныхъ залахъ casino на большихъ столахъ, расположенныхъ на значительномъ разстояніи другъ отъ друга, производятся съ утра до ночи, цѣлый годъ безъ перерыва, двѣ азартныя игры: *рулетка* и *trente et quarante* (тридцать и сорокъ). Болѣе 20 столовъ предназначено для рулетки и столько же для trente et quarante.

Около каждаго стола толпится большое число играющихъ. Рулетка игра болѣе дешевая, такъ какъ наименьшую ставку составляетъ большая серебренная пятифранковая монета. Позволяется ставить только суммы, кратныя пяти франкамъ. Наименьшей ставкой игры trente et quarante является уже золотая монета въ 20 франковъ.

§ 33. Мы ограничимся лишь анализомъ игры рулетки. На срединѣ стола (черт. 152) находится такъ называемая рулетка



Черт. 152.

(*C*). Эта рулетка представляетъ изъ себя большую круглую неглубокую деревянную чашку, на днѣ которой вращается горизонтальный кругъ C, раздѣленный радіусами на 37 секторовъ; секторы окрашены попеременно въ черный и красный (на нашемъ чертежѣ заштриховано) цвѣтъ. По краямъ круга размѣщены въ нѣкоторомъ, весьма тонко обдуманномъ безпорядкѣ, всѣ числа отъ 0 до 36, такъ что каждому сектору соотвѣтствуетъ одно число.

Около каждаго стола находится восемь служащихъ при рулеткѣ, такъ называемыхъ *croupier*; мѣста, которыя они занимаютъ около стола, обозначены буквой *D* на чертежѣ.

По обѣимъ сторонамъ стола открываются ящики *A* и *B*, представляющіе кассу банка. Каждый день утромъ въ каждый столъ вкладывается 200000 франковъ.

Для ставокъ играющихъ на зеленомъ сукнѣ, покрывающемъ столъ, нарисованы желтой краской фигуры E вида, указаннаго на чертежѣ.

Въ началѣ каждой игры одинъ изъ croupier выкрикнувъ: „Messieurs, faites vos jeux“ (господа, дѣлайте ваши ставки), приводитъ горизонтальный кругъ съ секторами во вращеніе и въ тотъ же моментъ въ противоположномъ направленіи бросаетъ въ чашку маленькій шарикъ слоновой кости. Скоро кругъ и шарикъ останавливаются въ своемъ движеніи, причемъ шарикъ оказы-

вается попавшимъ на одно изъ чиселъ, расположенныхъ по краю круга. Это число считается выигравшимъ, т. е. тотъ, кто поставилъ свою монету на это число, выигрываетъ. Ставки, поставленныя на остальныя числа, банкъ беретъ себѣ, какъ проигранныя.

§ 34. Если не считать нуля (zero), то половина всѣхъ 36 нумеровъ соотвѣтствуетъ „*чернымъ*“ (noir) секторамъ, половина же „*краснымъ*“ (rouge); половина нумеровъ состоитъ изъ „*четныхъ*“ (pair) чиселъ, половина изъ „*нечетныхъ*“ (impair); половина изъ „*нижнихъ*“ (manque) нумеровъ, т. е. отъ 1 до 18, половина изъ „*верхнихъ*“ (passe), т. е. отъ 19 до 36.

Поэтому, если выигрываетъ, напримѣръ, нумеръ 34, то croupier выкрикиваетъ такъ: „34, rouge, paire et passe“.

Можно ставить монету на одинъ только нумеръ; можно ставить на нѣсколько сосѣднихъ нумеровъ: на два, три, четыре и шесть.

Ставка на группу нумеровъ обозначаетъ, что ставящій получаетъ выигрышъ при паденіи шарика на *одно* изъ чиселъ этой группы.

Очевидно, что, чѣмъ на большее число нумеровъ монета поставлена, тѣмъ вѣроятность выигрыша больше.

Такъ напримѣръ, на краю фигуры существуютъ клѣтки, обозначенныя

$$P_{12}, M_{12}, D_{12};$$

P_{12} обозначаетъ „*première douzaine*“ (первая дюжина), т. е. числа отъ 1 до 12; M_{12} обозначаетъ „*douze milieu*“ (средняя дюжина), отъ 13 до 24; D_{12} обозначаетъ „*dernière douzaine*“ (послѣдняя дюжина), отъ 25 до 36.

Подъ каждой изъ вертикальныхъ колоннъ нумеровъ находятся пустыя клѣтки, соотвѣтствующія числамъ этой колонны.

Самая большая вѣроятность выигрыша соотвѣтствуетъ такъ называемымъ „*chances simples*“ (простымъ шансамъ), когда монета ставится на 18 нумеровъ. Тутъ возможны шесть комбинацій: 1) черный, 2) красный, 3) четъ, 4) нечетъ, 5) passe, 6) manque.

Для этихъ комбинацій имѣются по бокамъ большія клѣтки, ибо публика болѣе охотно ставитъ на эти комбинаціи вслѣдствіе наибольшей вѣроятности выигрыша.

Правила игры таковы, что въ случаѣ выигрыша кромѣ ставки, поставленной игрокомъ на извѣстную комбинацію, банкъ

приплачиваетъ этому игроку отъ себя, какъ выигрышъ, нѣкоторую кратность ставки по слѣдующей таблицѣ.

Число нумеровъ, на которые поставлена ставка a:	Выигрышъ:
1	$35\,a$
2	$17\,a$
3	$11\,a$
4	$8\,a$
6	$5\,a$
12	$2\,a$
18	a

Легко убѣдиться, что такой разсчетъ выигрышей дѣлаетъ рулетку игрой *обидной въ пользу банка и противъ всѣхъ остальныхъ игроковъ.*

Если бы не было нумера „*нуль*“, то игра при выше приведенномъ разсчетѣ выигрышей была бы безобидна.

Примемъ ставку за единицу и вычислимъ математическое ожиданіе выгоды банка на каждой ставкѣ игрока. Пусть ставка поставлена на одинъ нумеръ, напримѣръ 31; очевидно, что банкъ выигрываетъ 1, когда выходитъ одинъ изъ 36 нумеровъ, 0, 1, 2, ... 30, 32, ... 36, вѣроятность чего будетъ $\frac{36}{37}$. Значитъ, математическое ожиданіе выигрыша банка будетъ $1.\frac{36}{37}=\frac{36}{37}$. Банкъ проигрываетъ 35 при выходѣ нумера 31, вѣроятность чего есть $\frac{1}{37}$; значитъ математическое ожиданіе проигрыша будетъ $\frac{35}{37}$. Получится въ общемъ $\frac{36}{37}-\frac{35}{37}=\frac{1}{37}$, т. е. *положительное* математическое ожиданіе.

Ясно, что математическое ожиданіе игрока, поставившаго на одинъ нумеръ, будетъ *отрицательнымъ* числомъ $-\frac{1}{37}$, такъ какъ выигрышъ банка есть проигрышъ игрока и обратно.

При ставкѣ на два нумера математическое ожиданіе выигрыша банка будетъ $\frac{35}{37}$, а проигрыша $17.\frac{2}{37}$, и математическое ожи-

даніе банка опять выразится тѣмъ же числомъ $\frac{35}{37} - 17.\frac{2}{37} = \frac{1}{37}$.

Вообще, получается математическое ожиданіе $\frac{1}{37}$ при всѣхъ **комбинаціяхъ** за исключеніемъ простыхъ шансовъ, такъ какъ при простыхъ шансахъ существуетъ одно добавочное правило игры, уменьшающее на половину математическое ожиданіе банка.

Указанное добавочное правило состоитъ въ слѣдующемъ. Пусть ставка a поставлена на красный цвѣтъ. Если выходитъ *„нуль“*, то ставка остается подъ арестомъ (en prison) до слѣдующаго удара, причемъ при выходѣ краснаго цвѣта ставка возвращается игроку и забирается банкомъ при выходѣ чернаго цвѣта. При вторичномъ выходѣ *нуля* ставка остается подъ арестомъ до слѣдующаго удара и т. д.

Итакъ, пусть ставка 1 поставлена на красный цвѣтъ, тогда банкъ проигрываетъ 1 при выходѣ краснаго цвѣта, что даетъ математическое ожиданіе $-\frac{18}{37}$.

Банкъ выигриваетъ или на первомъ ударѣ, если выйдетъ черный цвѣтъ, вѣроятность чего равна $\frac{18}{37}$, или на второмъ ударѣ, вѣроятность чего $\left(\frac{1}{37}\frac{18}{37}\right)$ равна произведенію вѣроятности $\frac{1}{37}$ выхода нуля на первомъ ударѣ на вѣроятность $\frac{18}{37}$ выхода чернаго цвѣта на второмъ ударѣ.

Если банкъ выигриваетъ на третьемъ ударѣ послѣ двукратнаго появленія нуля, то вѣроятность этого выигрыша будетъ $\frac{1}{37}\cdot\frac{1}{37}\cdot\frac{18}{37}$.

Вообще говоря, вѣроятность банку выиграть ставку на нѣкоторомъ ударѣ выразится рядомъ

$$\frac{18}{37}+\frac{18}{37^2}+\frac{18}{37^3}+\frac{18}{37^4}+\ldots=\frac{18}{37}\frac{1}{1-\frac{1}{37}}=\frac{1}{2}.$$

Итакъ, общее математическое ожиданіе выгоды банка на простомъ шансѣ будетъ

$$\frac{1}{2}-\frac{18}{37}=\frac{1}{2.37}.$$

На этомъ обстоятельствѣ основано новое правило игры, позволяющее игроку, поставившему на простой шансъ, взять при выходѣ *нуля* назадъ половину ставки, не дожидаясь слѣдующаго удара.

§ 35. Существуетъ еще одно весьма важное правило игры, состоящее въ установленіи предѣла для ставокъ (mise maximum). Это правило характеризуется тѣмъ, что банкъ не выдаетъ болѣе 6000 франковъ отдѣльному игроку на его ставку. Отюда вытекаетъ, что нельзя ставить болѣе 6000 на простой шансъ, нельзя ставить болѣе $3000 = \frac{6000}{2}$ на дюжину, болѣе $1200 = \frac{6000}{5}$ на шесть нумеровъ и т. д.

Этимъ правиломъ банкъ обезпечиваетъ себя отъ такъ называемой *системной* игры.

Представимъ себѣ очень богатаго человѣка, который будетъ играть такъ: поставитъ монету 5 франковъ на простой шансъ, если проиграетъ, то поставитъ *удвоенную* ставку 10 фр. на этотъ же шансъ, если проиграетъ, то поставитъ *учетверенную* ставку 20 фр. на тотъ же шансъ и далѣе будетъ удваивать ставку на тотъ же шансъ; тогда, какъ легко замѣтить, при первомъ выигрышѣ онъ возвращаетъ назадъ всѣ раньше проигранныя ставки и кромѣ того остается въ *выигрышѣ одной монеты 5 фр.* Откладываетъ выигранную монету въ карманъ, и начинаетъ снова игру съ удвоеніемъ ставокъ. Такъ какъ очевидно, что простой шансъ, напримѣръ красный цвѣтъ, долженъ когда нибудь появиться, то такимъ образомъ получается какъ бы вѣрный способъ остаться въ выигрышѣ.

Существованіе предѣла для ставокъ дѣлаетъ такую системную игру очень рискованной.

Въ самомъ дѣлѣ, игрокъ не можетъ поставить за разъ болѣе 1200 монетъ, слѣдовательно, если онъ начинаетъ удваивать ставки, то его ставки будутъ

(1) $1_м, 2_м, 4_м, 8_м, 16_м, 32_м, 64_м, 128_м, 256_м, 512_м, 1024_м,$

и больше удваивать онъ не имѣетъ права, такъ что если всѣ 11 его ставокъ биты, то въ погонѣ за выигрышемъ *одной* монеты онъ проигрываетъ 2047 монетъ (сумма чиселъ (1)).

Наблюденіе показываетъ (ведутся подробные журналы выходящихъ нумеровъ, охотно покупаемые игроками), что очень часто случается, что какой нибудь простой шансъ не выходитъ подъ рядъ

15—20 разъ, а потому вѣроятность неудачи системной игры значительна.

Несмотря на рискъ подобной системной игры, часто отдѣльные игроки съ успѣхомъ её примѣняютъ. По словамъ одного изъ croupier, пришлось бы закрыть рулетку, если бы вся публика играла по указанной системѣ.

Указанная нами игра съ удвоеніемъ ставокъ на одинъ и тотъ же шансъ носитъ названіе *poursuivre la chance* (преслѣдованіе шанса).

Подъ названіемъ *porsuivre le gagnant* (преслѣдованіе выигравшаго шанса) разумѣется та же игра съ удвоеніемъ ставокъ, когда игрокъ ставитъ на цвѣтъ, только что передъ тѣмъ выигравшій. Тутъ игрокъ ожидаетъ повторенія одного цвѣта два раза подъ рядъ.

§ 36. Весь вышеприведенный анализъ показываетъ, что рулетка есть игра обидная въ пользу банка. Милліоны, выручаемые рулеткой, являются фактическимъ подтвержденіемъ нашей теоріи, что игрокъ съ положительнымъ математическимъ ожиданіемъ можетъ выиграть при большомъ числѣ игръ сколь угодно много.

Итакъ, колосальные доходы отъ рулетки основны на математической организаціи самой игры. Во всемъ остальномъ дѣло поставлено вполнѣ корректно, и всѣ служащіе рулетки проявляютъ полную предупредительность къ публикѣ.

При организаціи игры, очевидно, участвовали серьезные математики, которые обезпечели банку всѣ выгоды и въ полной мѣрѣ обезопасили его отъ риска, а потому представляются возмутительнымъ шарлатанствомъ всѣ совѣты относительно способовъ вѣрнаго выигрыша.

Изъ всего вышеизложеннаго вытекаетъ совѣтъ каждому отдѣльному лицу *не играть въ рулетку*.

Если человѣкъ желаетъ всетаки играть, то *не слѣдуетъ играть долго*, такъ какъ, чѣмъ дольше человѣкъ играетъ, тѣмъ больше проявляется выгода банка.

§ 37. Безнравственная сторона дѣла состоитъ во вліяніи рулетки на неуравновѣшенную психическую сторону игрока.

Груды золота и блестящая обстановка, въ которой совершается игра, пробуждаютъ корыстолюбіе, и очень часто люди, желая выиграть очень много, не могутъ во время остановиться и проигрываютъ послѣднія деньги.

§ 38. Въ заключеніе замѣтимъ, что журналы, печатающіе выходящіе въ рулеткѣ на разныхъ столахъ нумера, конечно, не приносятъ никакой пользы охотно изучающимъ ихъ игрокамъ, но для лица, знакомаго съ теоріей вѣроятностей, эти журналы интересны съ чисто теоретической стороны. Такъ напримѣръ, подтверждается законъ большихъ чиселъ. Красный и черный цвѣта появляются при большомъ числѣ наблюденій приблизительно въ одинаковомъ количествѣ. Но за все время существованія рулетки былъ одинъ случай, когда на одномъ столѣ впродолженіи двухъ мѣсяцевъ одинъ цвѣтъ выходилъ въ количествѣ вдвое большемъ, чѣмъ другой. Такое явленіе ничего невозможнаго не представляетъ. Его малая вѣроятность имѣла слѣдствіемъ то, что оно случилось только одинъ разъ за всю практику рулетки. Было бы ошибочнымъ думать, что дальнѣйшее продолженіе игры должно сопровождаться компенсирующимъ болѣе частымъ появленіемъ другого цвѣта. Такое предположеніе противорѣчило бы случайности и независимости выхода того или другого нумера.

Страховая математика.

§ 39. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію одного изъ благодѣтельнѣйшихъ приложеній теоріи вѣроятности, а именно приложенія къ страховымъ учрежденіямъ.

Ограничиваясь разсмотрѣніемъ страхованія жизни, сообщимъ вкратцѣ основныя положенія относящихся сюда соображеній теоріи вѣроятности.

Начнемъ съ конкретнаго примѣра. Пусть нѣкоторое лицо A въ возрастѣ m лѣтъ обращается въ страховое общество B, причемъ страхуетъ въ этомъ обществѣ свою жизнь. Другими словами, оно заключаетъ съ обществомъ такую сдѣлку: общество B обязано въ случаѣ смерти A уплатить немедленно нѣкоторый капиталъ a наслѣдникамъ умершаго, съ другой стороны лицо A обязывается вносить пожизненно въ общество нѣкоторую ежегодную уплату α.

Лицо A, страхующее жизнь, мы будемъ называть *страхователемъ*, общество B—*страховщикомъ*. Ежегодная уплата α страхователя страховщику носитъ названіе *страховой преміи*. Въ удостовѣреніе заключеннаго договора страхователь получаетъ отъ страховщика бумагу, называемую *страховымъ полисомъ*. По предъявленіи этого полиса наслѣдники получаютъ застрахованный капиталъ a.

Указанный нами договоръ называется страхованіемъ *на случай смерти*. Другая форма страхованія, носящая названіе *страхованія на дожитіе*, состоитъ въ томъ, что въ случаѣ достиженія страхователемъ нѣкотораго опредѣленнаго возраста n лѣтъ страхователь получаетъ самъ застрахованный имъ капиталъ.

Кромѣ этихъ двухъ главныхъ формъ страхованія потребности жизни выработали цѣлый рядъ комбинацій, связанныхъ съ различными возможными обстоятельствами жизни. Сюда относятся самыя разнообразныя пенсіонныя кассы для вдовъ и сиротъ, а также на случай старости и утраты трудоспособности.

§ 40. Разсматривая приведенную въ предыдущемъ параграфѣ сдѣлку страхователя A со страховщикомъ B мы прежде всего замѣчаемъ, что эта сдѣлка подходитъ вполнѣ подъ опредѣленіе понятія объ *игрѣ*, данное нами въ § 30.

Въ самомъ дѣлѣ, уплата каждой преміи α является событіемъ недостовѣрнымъ, такъ какъ эта уплата происходитъ только въ томъ случаѣ, если страхователь въ моментъ уплаты живъ. Чѣмъ страхователь старше, тѣмъ вѣроятность уплаты преміи дѣлается меньше. Съ другой стороны, уплата обществомъ застрахованнаго капитала a совершается послѣ смерти страхователя; точный моментъ смерти неизвѣстенъ ни страхователю, ни страховщику. Итакъ, переходъ денежныхъ суммъ отъ страхователя къ страховщику и обратно совершается при обстоятельствахъ недостовѣрныхъ, а слѣдовательно у насъ имѣется наличность нѣкоторой игры.

Отсюда очевидно, что при установленіи математическихъ принциповъ страховыхъ операцій необходимо придерживаться правила математической безобидности. Въ самомъ дѣлѣ, если мы допустимъ отрицательное математическое ожиданіе для страхового общества, то при достаточно большомъ числѣ операцій такое общество придетъ къ банкротству. Если, съ другой стороны, допустить положительное математическое ожиданіе для общества, то это равносильно допущенію обогащенія этого общества въ ущербъ интересамъ остального населенія.

§ 41. Для того, чтобы установить размѣры преміи α, уплачиваемой страхователемъ по правилу математической безобидности игры, необходимо знать вѣроятность страхователю дожить до уплаты какой либо изъ этихъ премій. Такъ напримѣръ, если страхователь застраховалъ свою жизнь въ возрастѣ 36 лѣтъ, то необходимо знать вѣроятности дожить этому страхователю до 37,

38, 39, . . . лѣтъ. Такія вѣроятности вычисляются при помощи спеціально для этой цѣли составленныхъ таблицъ, называемыхъ *таблицами смертности*.

По таблицамъ смертности вычисляется вѣроятность человѣку возраста m лѣтъ *дожить* до возраста $m+n$ лѣтъ. Въ страховой математикѣ принято такую вѣроятность обозначать знакомъ

$$_{n}p_{m},$$

причемъ, однако, вмѣсто $_{1}p_{m}$ пишется просто p_{m}.

Подобнымъ образомъ по таблицамъ смертности вычисляется вѣроятность человѣку возраста m лѣтъ *умереть* въ возрастѣ отъ $m+n$ до $m+n+1$ лѣтъ. Эта вѣроятность обозначается знакомъ

$$_{n|}q_{m}.$$

Таблицы смертности составляются путемъ статистическихъ наблюденій.

§ 42. Итакъ, первый основной принципъ страховой математики состоитъ въ признаніи возможности составленія таблицъ смертности, дающихъ вѣроятности $_{n}p_{m}$, $_{n|}q_{m}$.

Второй основной принципъ страховой математики состоитъ въ примѣненіи правила дисконта или учета по сложнымъ процентамъ всѣхъ суммъ денегъ къ одному и тому же времени.

Такъ напримѣръ, считая j годовыхъ процентовъ, мы замѣчаемъ, что каждая единица капитала обращается черезъ годъ въ

$$1+i,$$

гдѣ $i=\frac{j}{100}$, а черезъ n лѣтъ капиталъ A обратится въ

$$A(1+i)^{n}; \tag{1}$$

обратно, если капиталъ A будетъ полученъ черезъ n лѣтъ, то его дисконтированная стоимость въ настоящую минуту будетъ

$$\frac{A}{(1+i)^{n}}. \tag{2}$$

Въ формулахъ (1) и (2) показатель n можно считать числомъ также дробнымъ, если принимать въ разсчетъ доли года, т. е. мѣсяцы и дни.

§ 43. Третій принципъ, примѣняемый въ страховой математикѣ состоитъ въ томъ, что дисконтъ къ опредѣленному времени суммъ, получаемыхъ въ разные сроки, примѣняется не только къ

суммамъ, полученіе которыхъ достовѣрно, но и къ математическимъ ожиданіямъ суммъ недостовѣрныхъ.

Поэтому, если страховое общество разсчитываетъ получить нѣкоторый платежъ α отъ страхователя, застраховавшаго свою жизнь въ возрастѣ m лѣтъ, черезъ n лѣтъ, то оно должно разсматривать величину

$$\frac{\alpha}{(1+i)^n}\,{}_np_m;$$

это выраженіе, равное произведенію дисконтированнаго платежа $\frac{\alpha}{(1+i)^n}$ на вѣроятность ${}_np_m$, что страхователь доживетъ до этого платежа, носитъ названіе *современной стоимости платежа.*

Современная стоимость платежа есть, очевидно, не что иное, какъ *математическое ожиданіе* дисконтированной къ настоящему времени величины платежа

§ 44. Итакъ, если мы хотимъ достигнуть математической безобидности сдѣлки, то математическое ожиданіе выгоды страховщика должно равняться нулю, т. е. математическое ожиданіе его прибыли должно равняться математическому ожиданію его убытковъ.

Математическое ожиданіе прибыли страховщика, очевидно, равняется современной стоимости подлежащихъ полученію премій.

Это математическое ожиданіе можетъ быть точно указано, такъ какъ преміи уплачиваются въ началѣ каждаго года впередъ (praenumerando), и мы получаемъ на основаніи сказаннаго въ § 43

$$(1)\qquad \alpha+\frac{\alpha}{1+i}\,{}_1p_m+\frac{\alpha}{(1+i)^2}\,{}_2p_m+\ldots=\alpha M,$$

гдѣ

$$M=1+\sum_1^{\kappa}\frac{{}_\kappa p_m}{(1+i)^\kappa},$$

а κ распространяется на значенія $1, 2, 3, \ldots$ Этотъ рядъ (1) оканчивается послѣ конечнаго числа членовъ, такъ какъ существуетъ *предѣльный возрастъ*, который не переживаютъ люди, значитъ ${}_np_m=0$, если число $m+n$ превышаетъ предѣльный возрастъ.

Подсчетъ математическаго ожиданія убытковъ общества сопряженъ съ неустранимымъ затрудненіемъ, состоящимъ въ томъ, что неизвѣстно, въ какой моментъ происходитъ смерть страхователя, и, слѣдовательно, нельзя провести точнаго дисконта къ

моменту заключенія сдѣлки уплачиваемаго наслѣдникамъ капитала a.

Мы можемъ сдѣлать задачу опредѣленною, если допустимъ, что страховщикъ обязанъ уплатить застрахованный капиталъ a лишь въ концѣ полнаго n-аго года отъ заключенія сдѣлки (postnumerando), если страхователь умеръ въ серединѣ этого n-аго года.

Будемъ тогда разсматривать пожизненное страхованіе, какъ совокупность годовыхъ страхованій:

на случай смерти въ возрастѣ отъ m до $m+1$ лѣтъ,

на случай смерти въ возрастѣ отъ $m+1$ до $m+2$ лѣтъ,

и т. д.

Стоимости этихъ годовыхъ страхованіи въ суммѣ дадутъ

$$(2)\qquad \frac{a}{1+i}\,q_m+\frac{a}{(1+i)^2}\,{}_1|q_m+\frac{a}{(1+i)^3}\,{}_2|q_m+\ldots=aN,$$

гдѣ

$$N=\frac{1}{1+i}\left\{q_m+\sum_1^{\kappa}\frac{{}_\kappa|q_m}{(1+i)^\kappa}\right\};$$

здѣсь $q_m={}_0|q_m$ и обозначаетъ вѣроятность страхователю умереть въ первый годъ послѣ заключенія страхованія. Сумма распространяется до предѣльнаго возраста. Требованіе математической безобидности даетъ уравненіе

$$\alpha M=aN,$$

опредѣляющее размѣръ страховой преміи

$$\alpha=a\frac{N}{M}.$$

Вычисленная такимъ образомъ премія носитъ названіе *netto — преміи.*

Предположеніе, что уплата наслѣдникамъ застрахованнаго капитала откладывается до конца года, уменьшаетъ, конечно, размѣръ преміи α. Болѣе пріемлемымъ на практикѣ предположеніемъ является считать, что смерть страхователя, а слѣдовательно и расплата съ наслѣдниками приходится точно въ серединѣ года, тогда надо ввести дисконтирующій множитель за половину года, т. е. $(1+i)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+i}$, и мы получаемъ

$$\alpha = \sqrt{1+i}\, a \frac{N}{M}.$$

Пріемлемость такого разсчета основана на томъ, что при большомъ числѣ страхователей случаи смерти, приходяшіеся на первую половину года, комплексируются со случаями смерти, приходящимися на вторую половину.

§ 45. Страховое общество не можетъ, однако, удовольствоваться netto-преміями, такъ какъ оно несетъ расходы, связанные съ администраціей общества, расходы на жалованіе служащихъ, на наемъ помѣщеній и т. д. Поэтому къ вычисленной netto-преміи прибавляется нѣкоторая надбавка, дающая окончательную премію, которую и платитъ фактически страхователь. Эта премія носитъ названіе brutto-преміи.

§ 46. Размѣры brutto-премій, или, другими словами, дѣйствительные *тарифы* страхового учрежденія устанавливаются до извѣстной степени произвольно на основаніи общихъ законовъ конкуренціи и соотвѣтствія между спросомъ и предложеніемъ.

Если подъ вліяніемъ конкуренціи страховое общество желаетъ возможно болѣе понизить тарифы, то оно прежде всего должно знать точный размѣръ netto-премій, чтобы не назначить тарифы ниже этихъ netto-премій. Для этой цѣли необходимо имѣть возможно совершенныя таблицы смертности, чтобы вычисленныя по нимъ вѣроятности соотвѣтствовали обстоятельствамъ, имѣющимъ на самомъ дѣлѣ мѣсто въ средѣ кліентовъ общества.

У насъ въ Россіи вслѣдствіе отсутствія надежныхъ таблицъ смертности, когда приходится пользоваться нѣмецкими таблицами, вся дѣятельность страховыхъ обществъ происходитъ до нѣкоторой степени въ темную.

Заграницей, особенно въ Англіи, гдѣ существуетъ очень большое число страховыхъ обществъ, уже давно признано необходимымъ для каждаго общества вести статистику смертности среди его кліентовъ и такимъ образомъ, увеличивая число наблюденій, получать болѣе совершенныя таблицы смертности. Такимъ образомъ практическая дѣятельность вызвала къ жизни появленіе особеннаго класса людей, называемыхъ *актуаріями*, которые взяли себѣ спеціальностью изученіе страховой математики съ цѣлью приложенія своихъ знаній въ страховыхъ учрежденіяхъ.

§ 47. Необходимо обратить вниманіе на то обстоятельство, что, если мы прослѣдимъ за исторіей выполненія одной сдѣлки страховщика съ какимъ нибудь страхователемъ, то съ теченіемъ времени всѣ шансы переходятъ на сторону страхователя, такъ какъ съ каждымъ годомъ вѣроятность уплаты преміи уменьшается, вѣроятность же смерти и, слѣдовательно, уплаты застрахованнаго капитала дѣлается больше.

Значитъ, установленная математическая безобидность при заключеніи сдѣлки нарушается съ теченіемъ времени въ пользу страхователя и противъ страховщика. Отсюда вытекаетъ необходимость для страховщика дѣлать сбереженія изъ первыхъ взносовъ преміи, другими словами, образовать запасный фондъ, такъ называемые *резервы*, чтобы изъ этого фонда покрывать свои убытки послѣдняго періода сдѣлки. Вычисленіе резервовъ представляетъ очень важную въ практическомъ отношеніи задачу страховой математики.

ГЛАВА XV.

Преподаванiе математики.

§ 1. Въ настоящее время, когда царящая техника стремится къ улучшенiю внѣшняго комфорта жизни, духовные запросы жизни кажутся отходящими на второй планъ. Слѣдуя этому общему направленiю, общественное мнѣнiе, враждебно настроенное къ гуманитарной классической средней школѣ, рѣшительно высказывается въ пользу болѣе реальнаго средняго образованiя. Въ всѣхъ странахъ поднимаются голоса выдающихся представителей науки и педагогiи, требующiе усиленiя и улучшенiя преподаванiя математики въ средней школѣ. Во Францiи реформа преподаванiя математики уже проведена въ жизнь. Въ Германiи руководитъ реформой школы талантливый и энергичный ученый профессоръ Klein, такъ что не подлежитъ никакому сомнѣнiю, что реформа будетъ проведена въ близкомъ будущемъ. У насъ въ Россiи существуетъ сильное теченiе въ томъ же направленiи. Образовалась международная коммиссiя, изучающая постановку преподаванiя математики во всѣхъ странахъ.

§ 2. При прежней классической системѣ средняго образованiя математика занимала въ средней школѣ вполнѣ опредѣленную роль, которую можно характеризовать такъ: школа давала рядъ навыковъ вычислительнаго характера, а также навыковъ геометрическаго пространственнаго мышленiя, необходимыхъ въ жизни; съ другой стороны, она прибавляла къ общему логическому развитiю элементъ математической логики.

Основная руководящая мысль реформаторовъ состоитъ во введенiи въ циклъ наукъ, преподаваемыхъ въ средней школѣ, началъ аналитической геометрiи и анализа безконечно малыхъ. Реформаторы не ограничиваются введенiемъ высшей математики въ старшихъ классахъ гимназiй, а желаютъ пропитать идеями

функціональной зависимости преподаваніе элементарной алгебры уже въ среднихъ классахъ школы.

Характерные въ этомъ направленіи руководства по элементарной алгебрѣ написаны во Франціи профессоромъ Borel'емъ. На русскомъ языкѣ появился въ послѣднее время курсъ элементарной алгебры Лебединцева, написанный въ томъ же духѣ.

§ 3. Привѣтствуя, конечно, улучшеніе преподаванія математики, какъ всякій прогрессъ въ педагогическомъ дѣлѣ, необходимо, однако, высказать нѣкоторыя опасенія въ виду трудности подготовки въ Россіи достаточнаго числа хорошихъ преподавателей средней школы.

Дѣло въ томъ, что само университетское преподаваніе переживаетъ въ настоящее время переходный періодъ: прежніе пріемы изложенія кажутся новымъ авторамъ недостаточно строгими, и самый матеріалъ курсовъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій подвергнутъ критической оцѣнкѣ, причемъ въ новомъ изложеніи откидываются, какъ устарѣвшія, цѣлыя главы старыхъ учебниковъ. Спрашивается, куда примкнутъ въ преподаваніи недостаточно подготовленные и мало опытные преподаватели средней школы: пойдутъ ли они по пути старыхъ пріемовъ изложенія, жертвуя строгостью и логикой для достиженія простоты формулировокъ и доказательствъ, или же начнутъ входить въ детали современнаго строгаго и тѣмъ самымъ болѣе длиннаго изложенія. При неумѣлости въ обоихъ случаяхъ можетъ получиться результатъ, не соотвѣтствующій задачамъ средней школы: при устарѣвшемъ изложеніи съ логическими дефектами математика можетъ обратиться въ такой предметъ, который подъ маской общепринятаго мнѣнія о точности его состоитъ изъ невѣрныхъ утвержденій, сопровождаемыхъ фальшивыми доказательствами; если же преподаватель бросится въ дебри мельчайшихъ подробностей строгаго изложенія, то, конечно, получится простая потеря времени, такъ какъ при сомнительной пользѣ для дѣла развитія логики изъ такого изложенія ускользнутъ сами тѣ основныя положенія, которыя составляютъ цѣль преподаванія.

§ 4. Въ виду сказаннаго является важнымъ остановиться нѣсколько подробнѣе на тѣхъ пунктахъ высшей математики, изложеніе которыхъ подверглось серьезнымъ измѣненіямъ. Я ограничусь лишь тремя пунктами: раскрытіемъ неопредѣленностей, раз-

ложеніемъ функцій въ ряды и вопросомъ о maxima и minima функцій съ нѣсколькими перемѣнными независимыми.

Раскрытіе неопредѣленностей.

§ 5. Подъ заглавіемъ *„раскрытіе неопредѣленностей“* или *„нахожденіе истиннаго значенія выраженія неопредѣленнаго вида“* въ старыхъ курсахъ излагается рядъ пріемовъ для рѣшенія изложеннаго далѣе вопроса.

Функція

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

принимаетъ неопредѣленный видъ при $x = a$, когда функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x = a$ или дѣлаются обѣ равными нулю, или обѣ обращаются въ безконечность. Въ старыхъ книгахъ говорилось о раскрытіи такихъ неопредѣленныхъ выраженій и о нахожденіи ихъ значеній, которыя назывались *истинными* значеніями этихъ неопредѣленныхъ выраженій. Напримѣръ, дробь

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

имѣетъ видъ $\frac{0}{0}$ при $x = a$. По сокращеніи же на $x - a$ дробь обращается въ $x + a$ и даетъ для $x = a$ число $a + a = 2a$, такъ что „истиннымъ“ значеніемъ выраженія вида $\frac{0}{0}$ оказывается $2a$.

Подобнымъ же образомъ дробь

$$\frac{tg\,x}{sec\,x}$$

при $x = \frac{\pi}{2}$ имѣетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$, но если мы эту дробь преобразуемъ, то получимъ $sin\,x$, и, значитъ, „истинное“ значеніе дроби будетъ $sin\,\frac{\pi}{2} = 1$.

Все это мы сказали языкомъ старыхъ учебниковъ. Само названіе „истинное значеніе“ возвращаетъ насъ къ тому времени, когда предполагалось, что формула своимъ неопредѣленнымъ ви-

домъ скрываетъ отъ насъ какое то „истинное“ значеніе, которое необходимо раскрыть. Теперь же смотрятъ на дѣло проще и основательнѣе, а именно, считаютъ, что всякая формула имѣетъ лишь настолько смысла, насколько вложено въ нее лицомъ, написавшимъ формулу; поэтому требуется кромѣ заданія формулы точное разъясненіе значенія и смысла входящихъ въ эту формулу знаковъ.

Злоупотребленіе формулами, образованными изъ знаковъ, смыслъ которыхъ сомнителенъ, въ настоящее время порицается.

Вопросъ о раскрытіи неопредѣленностей нынче трактуется такъ. Положимъ, что авторъ математическаго сочиненія желаетъ разсматривать нѣкоторую функцію $F(x)$ и задаетъ ее формулой $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Если эта формула принимаетъ одинъ изъ неопредѣленныхъ видовъ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ при $x=a$, то считается, что функція задана *неполнымъ* образомъ. Для полнаго заданія авторъ долженъ *обязательно* прибавить, какое значеніе онъ желаетъ придать функціи при $x=a$, т. е. долженъ сказать, что онъ желаетъ подразумѣвать подъ знакомъ $F(a)$, ибо неопредѣленный видъ формулы ставитъ читателя въ недоумѣніе, особенно, если читатель осторожный и не желаетъ своими догадками приписывать автору такія мысли, которыхъ тотъ быть можетъ вовсе не имѣлъ.

Никакого „истиннаго“ значенія нѣтъ и быть не можетъ по той простой причинѣ, что ничто не можетъ *помѣшать* автору, если онъ того *пожелаетъ*, выбрать значеніе $F(a)$ совсѣмъ произвольно.

Совершенно другое дѣло, если авторъ пожелаетъ, чтобы функція $F(x)$ была *непрерывна* при $x=a$. Тогда, слѣдуя, тому, что сказано въ § 77 гл. III, придется разсмотрѣть *предѣльное значеніе* функціи $F(x)$ при приближеніи x къ a, т. е. предѣльное значеніе

$$\lim_{h=0} F(a+h).$$

Итакъ, *непрерывность* функціи даетъ равенство

$$F(a)=\lim_{h=0} F(a+h)=\lim_{h=0}\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}.$$

Итакъ, прежнее „истинное“ значеніе обращается въ „предѣльное“ значеніе функцій.

Конечно, ничего нельзя возразить противъ помѣщенія въ дифференціальномъ исчисленіи главы, трактующей о вычисленіи предѣльныхъ значеній функціи. Устарѣлой рутиной является лишь подведеніе всѣхъ такого рода вопросовъ подъ правило, данное въ XVIII столѣтіи математикомъ l'Hospital'емъ.

Въ новыхъ курсахъ дифференціальнаго исчисленія держатся того мнѣнія, что вычисленіе предѣльныхъ значеній функцій зависитъ всецѣло отъ характера заданной функціи, а потому безконечное разнообразіе пріемовъ, которые придется въ различныхъ случаяхъ примѣнять, не можетъ уложиться въ рамки одного общаго простого правила.

Правило l'Hospital'я раздѣляетъ общую участь всѣхъ панацей и является совершенно неудовлетворительнымъ въ большомъ числѣ случаевъ.

Въ недавно выпущенномъ въ русскомъ переводѣ курсѣ профессора Боннскаго университета G. Kowalewsky ни слова не упоминается о правилѣ l'Hospital'я.

Такой полный остракизмъ правила l'Hospital'я я считаю также утрировкой, а потому считаю необходимымъ сказать нѣсколько словъ о немъ, такъ какъ все же существуютъ случаи, гдѣ это правило полезно, не говоря уже о томъ, что правило l'Hospital'я въ высшей степени удобно для запоминанія и болѣе столѣтія помѣщалось въ руководствахъ.

§ 6. Прилагая формулу Taylor'a, мы получимъ

$$F(a+h)=\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\ldots}{\varphi(a)+h\varphi'(a)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)+\ldots},$$

но, если $f(a)=0$ и $\varphi(a)=0$, тогда

$$F(a+h)=\frac{f'(a)+\frac{h}{1.2}f''(a)+\ldots}{\varphi'(a)+\frac{h}{1.2}\varphi''(a)+\ldots}.$$

Если отношеніе $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ представляетъ опредѣленную величину, то мы имѣемъ при $h=0$

$$F(a) = \frac{f'(a)}{\varphi'(x)};$$

отсюда мы получаемъ слѣдующее правило.

Правило l'Hospital'я: вмѣсто отношенія $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, имѣющаго неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$ при $x = a$, *берется отношеніе производныхъ* $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ и подставляется въ него $x = a$; если получается опредѣленное численное значеніе A, т. е.

$$\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = A,$$

то A и будетъ искомымъ предѣльнымъ значеніемъ заданнаго отношенія $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Если отношеніе производныхъ при $x = a$ само имѣетъ видъ $\frac{0}{0}$, то примѣняемъ правило еще разъ, т. е. *беремъ отношеніе вторыхъ производныхъ* $\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ и продолжаемъ такъ поступать до тѣхъ поръ, пока неопредѣленность не раскрывается.

Предѣльное значеніе A можетъ въ частныхъ случаяхъ равняться 0 или ∞.

§ 7. Напримѣръ, требуется найти предѣльное значеніе для выраженія

$$\frac{1 - \cos x}{x^2}$$

при $x = 0$.

Беремъ отношеніе производныхъ $\frac{\sin x}{2x}$. Это отношеніе имѣетъ опять видъ $\frac{0}{0}$. Примѣняемъ еще разъ правило и получаемъ $\frac{\cos x}{2}$, что даетъ при $x = 0$ искомое предѣльное значеніе $\frac{1}{2}$.

§ 8. Далѣе, въ старыхъ курсахъ правило l'Hospital'я распространялось на случай неопредѣленныхъ выраженій вида $\frac{\infty}{\infty}$, а также

на случай $x = \infty$, причемъ доказывалось, что всегда имѣетъ мѣсто равенство

$$(1) \qquad lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

т. е., что во всѣхъ случаяхъ остается тотъ же способъ изслѣдованія.

§ 9. Уже на простыхъ примѣрахъ замѣчалось однако, что съ правиломъ l'Hospital'я не всегда дѣло обстоитъ благополучно.

Какъ первый такой примѣръ возьмемъ выраженіе

$$(1) \qquad \frac{x - sin\, x}{x + sin\, x},$$

которое имѣетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$ при $x = \infty$.

Если мы возьмемъ отношеніе производныхъ

$$(2) \qquad \frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x},$$

то замѣтимъ, что при возрастаніи x до $+\infty$ это отношеніе не стремится *буквально* ни къ какому предѣлу, такъ какъ, какое бы большое число x_0 мы ни взяли, всегда дробь (2) будетъ для значеній λ большихъ этого x_0 принимать всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Если бы мы заключили, что и отношеніе (1) не имѣетъ опредѣленнаго предѣльнаго значенія, то мы бы ошиблись, такъ какъ очевидно,

$$\lim_{x=\infty} \left\{ \frac{x - sin\, x}{x + sin\, x} \right\} = lim \left\{ \frac{1 - \frac{sin\, x}{x}}{1 + \frac{sin\, x}{x}} \right\} = 1.$$

Для второго примѣра возьмемъ выраженіе

$$(3) \qquad \frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{e^{\frac{\beta}{x}}}, \alpha > 0, \beta > 0,$$

имѣющее видъ $\frac{\infty}{\infty}$ при приближеніи положительнаго числа x къ нулю.

Сколько бы разъ мы ни примѣняли правило l'Hospital'я

$$\frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{e^{\frac{\beta}{x}}}, \frac{\alpha}{\beta}\frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{e^{\frac{\beta}{x}}}, \frac{\alpha^2}{\beta^2}\frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{e^{\frac{\beta}{x}}}, \ldots$$

неопредѣленность не раскрывается.

Между тѣмъ неопредѣленность сразу пропадаетъ, если мы представимъ выраженіе (3) въ видѣ

$$e^{\frac{\alpha-\beta}{x}};$$

тогда мы замѣчаемъ, что при $\alpha-\beta>0$ предѣльное значеніе равно $+\infty$, при $\alpha-\beta<0$ предѣльное значеніе есть 0 и при $\alpha-\beta=0$ оно равно 1.

§ 10. При разсмотрѣніи задачъ, которыя въ старыхъ курсахъ предлагались къ рѣшенію при помощи правила l'Hospital'я, мы встрѣчаемся съ большой долей наивности, съ какою то игрой въ формулы.

Предлагалось, напримѣръ, примѣнять правило l'Hospital'я къ задачѣ

$$\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}=\lim\frac{\cos x}{1}=1,$$

тогда какъ этотъ предѣлъ, какъ мы видѣли въ § 73 гл. III, получается изъ самыхъ элементарныхъ соображеній.

Еще болѣе наивную игру въ формулы представляетъ примѣръ:

$$\lim_{x=0}\frac{lg\,(1+x)}{x}=\lim\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1,$$

такъ какъ здѣсь предлагается дифференцировать функцію $lg\,(1+x)$, тогда какъ въ § 88 гл. III мы видѣли, что для вывода самого правила дифференцированія логариѳма необходимо знаніе предѣла выраженія

$$\frac{lg\,(1+x)}{x}=lg\,(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

которое теперь запоздалымъ образомъ предлагается въ видѣ задачи.

§ 11. Въ заключеніе разсмотримъ задачу, къ которой правило l'Hospital'я вполнѣ прилагается.

Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли уже въ § 181 гл. III, что при $x = \infty$ показательная функція e^x возрастаетъ быстрѣе всякой степенной функціи x^n съ цѣлымъ показателемъ, т. е.

$$\lim_{x=\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty .$$

Прилагая n разъ правило l'Hospital'я, мы придемъ къ отношенію производныхъ порядка n, т. е.

$$\frac{e^x}{n.(n-1)\ldots 3.2.1.},$$

которое показываетъ, что получается ∞ при $x = \infty$.

Съ другой стороны, если мы разсмотримъ отношеніе

$$\frac{lg x}{x^\alpha}, \text{ гдѣ } \alpha > 0,$$

то какъ бы мало ни было положительное число α, мы будемъ имѣть

$$\lim_{x=\infty} \frac{lg x}{x^\alpha} = 0,$$

такъ какъ, беря отношеніе производныхъ, мы получимъ

$$\frac{1}{x} : \alpha x^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha x^\alpha};$$

эта же величина, очевидно, имѣетъ предѣломъ 0 при $x = \infty$, и мы приходимъ къ заключенію.

Логариѳмъ $lg x$ возрастаетъ при $x = +\infty$ медленнѣе, чѣмъ всякая степень x^α съ положительнымъ показателемъ α, какъ бы малъ ни былъ этотъ показатель.

О разложеніи функцій въ ряды по формулѣ Maclaurin'a.

§ 12. Относительно этого вопроса я ограничусь всего лишь нѣсколькими замѣчаніями.

Дѣло въ томъ, что, если мы раскладываемъ заданную функцію $f(x)$ въ рядъ по степенямъ x, примѣняя формулу Maclaurin'a

$$(1) \qquad f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots,$$

то является два кардинальныхъ вопроса: 1) на сколько рядъ (1) сходится и тѣмъ самымъ способенъ представлять какую бы то ни было функцію, 2) если этотъ рядъ (1) представляетъ функцію, то будетъ ли эта функція какъ разъ $f(x)$ или какая нибудь другая.

Что эти вопросы дѣйствительно подлежатъ отвѣту, слѣдуетъ изъ такого простого соображенія.

Возьмемъ двѣ функціи

$$f(x) \text{ и } \varphi(x)=f(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Обнаруживается слѣдующее оригинальное явленіе: обращаются въ нуль при $x=0$ какъ сама функція

$$e^{-\frac{1}{x^2}},$$

такъ и ея производныя какого угодно порядка; мы получаемъ при всякомъ n

$$f(0)=\varphi(0), \quad f^{(n)}(0)=\varphi^{(n)}(0).$$

Итакъ, строка Maclaurin'a даетъ одно и тоже разложеніе въ рядъ для обѣихъ функцій

$$f(x) \text{ и } \varphi(x).$$

Спрашивается, для какой же изъ этихъ функцій получилось разложеніе.

Вопросъ о разложеніи функцій по формулѣ Taylor'a приведенъ въ послѣднее время въ порядокъ изслѣдованіями мюнхенскаго профессора Pringsheim'a.

Наиболѣе исчерпывающее изложеніе требуетъ однако введенія теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго.

Интересно знать, будутъ ли преподаватели средней школы вдаваться въ эти подробности, или же ограничатся сообщеніемъ, что строка Maclaurin'a даетъ разложеніе функцій въ ряды, такъ что ученикъ, довѣряющій авторитету учителя, начнетъ разлагать въ рядъ функцію $e^x+e^{-\frac{1}{x^2}}$, а въ результатѣ получитъ разложеніе для e^x.

Maxima и minima функцій многихъ перемѣнныхъ.

§ 13. Теперь мы перейдемъ къ тому замѣчательному въ исторіи математики факту, о которомъ было упомянуто въ § 1 гл. I, а именно, мы скажемъ о томъ, какъ оказалось *невѣрнымъ* разсужденіе, излагавшееся въ качествѣ *очевиднаго* на лекціяхъ выдающихся профессоровъ.

Мы возьмемъ въ переводѣ отрывокъ изъ курса дифференціальнаго исчисленія извѣстнаго французскаго академика и профессора Bertrand'a, опубликованнаго въ 1864 году.

„480. Пусть будетъ $\varphi(x, y)$ функція двухъ перемѣнныхъ независимыхъ x и y; значенія maxima и minima таковы, что разность

$$\varphi(x+h, y+k)-\varphi(x, y)$$

сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, каковы бы ни были положительныя или отрицательныя очень малыя значенія h и k. Теорема Taylor'a даетъ

$$(1) \qquad \varphi(x+h, y+k)-\varphi(x, y)=h\frac{\partial\varphi}{\partial x}+k\frac{\partial\varphi}{\partial y}+R,$$

и для безконечно малыхъ значеній h и k можно пренебречь величиною R по сравненію съ первыми двумя членами всякій разъ, когда эти послѣдніе отличны отъ нуля.

Но эти члены, которые опредѣляютъ знакъ второй части, мѣняютъ знакъ безъ измѣненія абсолютной величины при замѣнѣ h на $-h$ и k на $-k$; приращеніе функціи можетъ имѣть неизмѣнный знакъ только въ томъ случаѣ, когда сразу

$$(2) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0;$$

Эти условія общія для maximum'a и для minimum'a; . . .
. . . . . .
. . . Но эти два уравненія недостаточны; предполагая, что они удовлетворены, получаемъ по теоремѣ Taylor'a

$$(3) \qquad \varphi(x+h, y+k)-\varphi(x, y)=\frac{h^2}{1.2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+hk\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+$$

$$+\frac{k^2}{1.2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+R,$$

гдѣ величиной R можно пренебречь при малыхъ значеніяхъ h и k по сравненію съ тремя первыми членами второй части уравненія. Если всѣ три производныя $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ не равны всѣ сразу нулю, то знакъ второй части при безконечно малыхъ значеніяхъ h и k будетъ совпадать со знакомъ трехчлена

$$(4) \qquad \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + hk\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};$$

будетъ существовать maximum или minimum, если сумма (4) остается всегда отрицательной или положительной для всѣхъ очень малыхъ значеній h и k; но, если мы напишемъ выраженіе (4) такъ

$$\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\frac{k}{h}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{k}{h}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right],$$

мы видимъ, что его знакъ зависитъ только отъ второго множителя, который есть функція отъ $\frac{k}{h}$ и можетъ измѣняться отъ $-\infty$ до $+\infty$. Для того чтобы трехчленъ сохранялъ всегда тотъ же знакъ, должно быть

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) < 0;$$

это условіе требуетъ, чтобы $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ имѣли одинъ знакъ; если онѣ отрицательныя, то трехчленъ (4) отрицателенъ и получается maximum; будетъ minimum въ обратномъ случаѣ, когда при существованіи неравенства (5) производныя $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ положительныя.

Если значенія x и y, которыя обращаютъ въ нуль $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, даютъ

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = 0,$$

трехчленъ (4) не будетъ мѣнять знака, но онъ можетъ сдѣлаться равнымъ нулю, такъ что при соотвѣтственно подобранномъ значеніи отношенія $\frac{k}{h}$ пропадаютъ члены второго порядка во второй

части уравненія (3), такимъ образомъ сумма членовъ третьяго порядка даетъ знакъ всему разложенію: эти же члены мѣняютъ знакъ безъ измѣненія численной величины, когда, оставляя $\frac{k}{h}$ неизмѣннымъ, мы мѣняемъ h на $-h$ и k на $-k$; слѣдовательно, нѣтъ ни maximum'а, ни minimum'а, если для разсматриваемаго значенія отношенія $\frac{k}{h}$ сумма этихъ членовъ отлична отъ нуля; если сумма членовъ третьяго порядка равна нулю въ то время, какъ и сумма членовъ второго порядка, то члены четвертаго порядка для этого значенія отношенія $\frac{k}{h}$ даютъ свой знакъ всему разложенію; такъ какъ они не мѣняютъ знака при замѣнѣ h на $-h$ и k на $-k$, то достаточно, чтобы былъ maximum или minimum, чтобы этотъ знакъ совпадалъ со знакомъ, который сохраняютъ члены второго порядка для значеній $\frac{k}{h}$, не обращающихъ ихъ въ нуль".

Невѣрность приведенныхъ разсужденій Bertrand'а показалъ на очень простомъ примѣрѣ итальянскій профессоръ Peano.

Разсмотримъ этотъ примѣръ.

Дана функція

$$\varphi(x, y) = y^2 - (a+b)\,y\,x^2 + a\,b\,x^4,\ ab > 0; \tag{6}$$

такъ какъ ея обѣ частныя производныя

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2\,(a+b)\,y\,x + 4\,a\,b\,x^3,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2\,y - (a+b)\,x^2$$

обращаются въ нуль при $x = 0$, $y = 0$, то спрашивается, будетъ ли значеніе $\varphi(0, 0)$ maximum или minimum, или же не будетъ ни того, ни другого.

Выписываемъ для данной функціи равенство (3)

$$\varphi(0+h, 0+k) - \varphi(0, 0) = k^2 - (a+b)\,k\,h^2 + a\,b\,h^4;$$

здѣсь второй дифференціалъ есть k^2, третій $-(a+b)\,k\,h^2$, четвертый $a\,b\,h^4$; остальные дифференціалы тождественно равны нулю.

Слѣдуя Bertrand'у мы должны разсуждать такъ.

Второй дифференціалъ имѣетъ знакъ $+$, но онъ обращается въ нуль, когда отношеніе

$$\frac{k}{h}$$

равно нулю, при этомъ третій дифференціалъ также обращается въ нуль, но четвертый дифференціалъ

$$a\,b\,h^4,$$

не обращаясь *) въ нуль, сохраняетъ знакъ $+$, слѣдовательно, на основаніи разсужденій Bertrand'а получается minimum, такъ какъ около $x=0$, $y=0$, повидимому, не существуетъ значеній, дающихъ функціи $\varphi(h, k)$ знакъ —.

Легко однако обнаружить существованіе отрицательныхъ значеній, если положить

$$k=\alpha h^2;$$

тогда получаемъ

$$\varphi(h, k)=(\alpha-a)(\alpha-b)\,h^4,$$

и будетъ $\varphi(h, k)<0$, если число α выбрать между числами a и b, такъ какъ тогда

$$(\alpha-a)(\alpha-b)<0.$$

Итакъ, примѣръ Peano показываетъ, что теорія maxima и minima функцій многихъ перемѣнныхъ независимыхъ сложнѣе на самомъ дѣлѣ, чѣмъ она казалась прежнимъ авторамъ.

Преподаваніе элементарной математики.

§ 14. Элементарная математика, составляющая въ настоящее время предметъ преподаванія въ средней школѣ, раздѣляется на слѣдующихъ четыре отдѣла: 1) *ариѳметика*, 2) *алгебра*, 3) *геометрія*, 4) *тригонометрія*.

§ 15. Характернымъ явленіемъ педагогической литературы по элементарной математикѣ является появленіе особаго отдѣла, носящаго названіе *методики математики*.

Эта методика, главнымъ образомъ, имѣетъ въ виду преподаваніе элементарной математики. Тутъ дѣло идетъ не о методахъ изслѣдованія, а о методахъ болѣе успѣшнаго преподаванія.

---

*) Для обращенія въ нуль отношенія $\frac{k}{h}$ достаточно $k=0$, число же h можетъ остаться отличнымъ отъ нуля.

Методы изслѣдованія составляютъ, конечно, предметъ самой математики, какъ науки, и было бы страннымъ ставить параллельно съ математикой какой то новый предметъ подъ названіемъ методики.

Методика же преподаванія элементарной математики имѣетъ большое практическое значеніе.

Изъ педагогическаго опыта выясняется, что одного знанія своего предмета учителемъ не всегда бываетъ достаточно, и что громадное значеніе имѣетъ также тотъ способъ преподаванія, который выбранъ учителемъ.

Выборъ способа преподаванія зависитъ, конечно, отъ возраста учениковъ, отъ ихъ степени математическаго развитія и ихъ способностей.

Чѣмъ меньше возрастъ учащихся, тѣмъ важнѣе бываетъ развить у знающаго свой предметъ учителя искусство хорошаго преподаванія. Особенно важнымъ является это требованіе при преподаваніи ариѳметики вслѣдствіе юнаго возраста учащихся.

Методика ариѳметики особенно разработана въ Россіи. Эта методика идетъ очень далеко въ своихъ совѣтахъ, она даетъ подробныя указанія, какъ при различныхъ обстоятельствахъ вести дѣло преподаванія.

§ 16. Нѣсколько иначе обстоитъ дѣло съ элементарной алгеброй. Общепедагогическіе и дидактическіе совѣты методики ариѳметики остаются конечно въ силѣ и для преподаванія алгебры, но тутъ встаетъ новая сторона дѣла, которую невозможно игнорировать.

Является необходимость методики элементарной алгебры съ точки зрѣнія строго логическаго изложенія этого предмета, такъ какъ алгебра, будучи предметомъ старшихъ классовъ гимназіи, заслуживаетъ уже болѣе или менѣе систематическаго изложенія. Строгость изложенія, конечно, не должна нарушать элементарности его и доступности ученикамъ.

Эта сторона методики алгебры поставлена до сихъ поръ въ высшей степени слабо.

Если мы обратимся къ разсмотрѣнію современныхъ курсовъ элементарной алгебры, то мы замѣчаемъ въ нихъ одну общую черту, а именно, логическая сторона дѣла становится тѣмъ лучше, чѣмъ ближе къ концу курса.

Да простятъ мнѣ авторы курсовъ элементарной алгебры быть можетъ нѣсколько сильное выраженіе, если я скажу, что начало

алгебры, гдѣ вводятся въ разсмотрѣніе числа отрицательныя и начинаются дѣйствія съ многочленами, излагаются неудовлетворительно съ логической точки зрѣнія даже въ лучшихъ курсахъ, получившихъ большое распространеніе.

Указанныя мною недостатки изложенія находятъ свое оправданіе въ томъ, что эволюція перехода преподаванія отъ старыхъ схоластическихъ пріемовъ изложенія къ новымъ, болѣе строгимъ, не закончилась еще даже въ преподаваніи высшей математики.

Стоитъ припомнить, что лишь сравнительно недавно получило болѣе или менѣе законченный видъ изложеніе теоріи ирраціональныхъ чиселъ, благодаря изслѣдованіямъ Weierstrass'a, Cantor'a и Dedekind'a.

§ 17. Что касается преподаванія геометріи, то здѣсь является важнымъ развить у учениковъ среднихъ учебныхъ заведеній навыки яснаго пространственнаго мышленія, и было бы едва ли цѣлесообразнымъ увлекаться особенною строгостью и систематичностью изложенія.

Такъ какъ въ основѣ изложенія геометріи мы принуждены ставить рядъ аксіомъ, изъ которыхъ должно вытекать все остальное, то дѣло строгаго изложенія геометріи сводится къ тому, чтобы установить циклъ этихъ аксіомъ, удовлетворяющій слѣдующимъ двумъ требованіямъ: 1) не должно быть лишнихъ аксіомъ, т. е. такихъ, которыя вытекаютъ изъ предыдущихъ, 2) не должно быть пропуска аксіомъ.

Въ этомъ направленіи произведены выдающіяся изслѣдованія професоромъ Hilbert'омъ, съ которыми необходимо познакомиться всякому преподавателю математики.

Наиболѣе строгимъ способомъ изложенія геометріи былъ бы аналитическій способъ, указанный въ § 85 гл. II.

Здѣсь мы не нуждались бы ни въ какихъ аксіомахъ. Все дѣло сводилось бы къ опредѣленіямъ и теоремамъ.

Очевидно, что такой способъ не пригоденъ для средней школы.

Заключеніе.

Итакъ, мы закончили нашъ обзоръ различныхъ частей математики. Если читатель задумается надъ вопросомъ, какое прикладное значеніе имѣютъ всѣ эти разобранныя нами теоріи, то ему придется поставить себѣ самый общій вопросъ о томъ, въ чемъ состоитъ сущность прикладного знанія.

Единственнымъ звеномъ, связывающимъ нашъ внутренній міръ съ внѣшней природой, являются наши чувства. Эти чувства суть посредники, при помощи которыхъ мы составляемъ себѣ наши представленія о внѣшнемъ мірѣ. Процессъ полученія показаній этихъ посредниковъ составляетъ то, что называется наблюденіемъ, опытомъ. Желаніе разобраться въ правдивости показаній чувствъ привело къ критическому отношенію къ опыту и наблюденію. Явилось убѣжденіе въ необходимости отдѣлить то, что въ показаніяхъ чувствъ можно считать за достовѣрное, отъ того, что представляетъ иллюзію, самообманъ. Явился научный опытъ и, какъ слѣдствіе его, теорія. Что такое есть всякая наша теорія, относящаяся къ внѣшнему міру? Такая теорія есть всегда до нѣкоторой степени произвольно выбранная логическая схема, въ рамки которой мы укладываемъ результаты опыта и наблюденія. Съ свойственнымъ человѣку самомнѣніемъ мы придаемъ часто предложеніямъ нашей теоріи громкое названіе законовъ природы и думаемъ, что явленія на самомъ дѣлѣ совершаются по тѣмъ правиламъ, которыя мы себѣ представляемъ въ нашей теоріи. Мы забываемъ, что находимся въ зависимости отъ нашихъ чувствъ. Мы не можемъ отрицать того, что могутъ существовать другія мыслящія существа, хотя-бы, напримѣръ, жители какой нибудь планеты, которые имѣютъ болѣе пяти чувствъ или эти чувства иного характера. Конечно, у такихъ существъ будетъ совершен-

но другая натуральная философія, будутъ другіе законы природы, вѣроятно, совершенно непонятные для насъ.

Итакъ, мы должны остаться въ рамкахъ нашего познанія, ограниченнаго показаніями нашихъ чувствъ. Въ этомъ отношеніи натуральный философъ похожъ на человѣка, введеннаго съ закрытыми глазами въ грандіозный храмъ. Онъ ходитъ по стѣнкамъ храма и ощупываетъ украшенія пьедесталовъ колоннъ и стѣнъ. Онъ стремится составить себѣ по этимъ малымъ даннымъ общее представленіе о храмѣ.

Какимъ же образомъ изъ того немногаго, что даютъ намъ чувства, создать грандіозную общую систему мірозданія. Для этой цѣли является на помощь догадка, гипотеза. Такая гипотеза, какъ бы она наивна ни была, остается въ видѣ теоріи до тѣхъ поръ, пока не обнаружится ея неудовлетворительность. Происходитъ обыкновенно одно изъ двухъ: или обнаруживаются новые факты, не укладывающіеся въ рамки гипотезы, или же путемъ планомѣрныхъ обсужденій и сравненія съ наблюденіями обнаруживается разногласіе. Гипотеза замѣняется новою, которая въ свою очередь можетъ уступить мѣсто болѣе совершенной. Возьмемъ, напримѣръ, астрономію. Какой длинный путь измѣненій міросозерцанія долженъ былъ быть пройденъ, чтобы отъ плоской земли съ хрустальнымъ колпакомъ неба перейти къ безконечному пространству, въ которомъ двигаются по законамъ механики милліарды міровъ, изъ которыхъ многіе, вѣроятно, обитаемы. Вполнѣ справедливо замѣчаніе одного астронома, что исторія астрономіи есть исторія постепенно устраненныхъ заблужденій человѣческаго ума. Подобнымъ же образомъ *въ теоріи свѣта Newton'овская теорія истеченія* замѣнена была теоріей колебаній эфира, которая въ свою очередь вылилась въ современную электромагнитную. Если мы желаемъ представить себѣ точнѣе образованіе теорій натуральной философіи, то мы должны сказать такъ. Натуръ-философъ строитъ собственный внутренній міръ идей и образовъ, причемъ старается достигнуть совершеннаго параллелизма съ внѣшнимъ міромъ. Что я понимаю подъ словомъ параллелизмъ? Я понимаю это такъ: каждому факту внѣшняго міра долженъ соотвѣтствовать фактъ нашего новаго внутренняго міра и обратно. Послѣдняя фраза нуждается въ болѣе точномъ толкованіи. Такъ какъ мы не можемъ мыслить внѣшнихъ предметовъ въ самихъ себѣ, а лишь по ихъ аналогамъ въ томъ самомъ внутреннемъ мірѣ, который мы желаемъ построить,

то ясно, что установленіе параллелизма двухъ міровъ не можетъ основываться на какихъ либо апріорныхъ соображеніяхъ, но должно совершаться a posteriori, т. е. на основаніи опыта, на основаніи показаній нашихъ чувствъ. Можно такъ характеризовать требованіе параллелизма двухъ міровъ. Міръ идей долженъ быть таковъ, чтобы всѣ логическіе выводы его не противорѣчили показаніямъ чувствъ и обратно, чтобы всякое чувственное воспріятіе находило себѣ объясненіе въ мірѣ идей. Уже давно было обнаружено, что подлежащій построенію міръ идей долженъ быть характера математическаго, такъ какъ другого характера мышленіе не имѣетъ той точности и разнообразія, которыя могли бы претендовать на сравненіе съ безконечнымъ разнообразіемъ чувственныхъ воспріятій изъ внѣшняго міра. Одинъ изъ выдающихся математиковъ высказалъ мысль, что всякая наука имѣетъ своею цѣлью сдѣлаться математикой. Эту мысль мы выскажемъ иначе: для всякой изъ натуральныхъ наукъ необходимо построеніе математической схемы.

Итакъ, мы приходимъ къ заключенію, что тотъ внутренній міръ идей, который мы строимъ, долженъ быть ничѣмъ инымъ, какъ совокупностью математическихъ теорій всѣхъ явленій природы. Теперь мы становимся лицомъ къ лицу съ основнымъ вопросомъ, возможна ли задача математическаго объясненія явленій природы. Можетъ явиться сомнѣніе, что задача эта невозможна по существу; что законы нашего мышленія находятся въ коренномъ противорѣчіи съ внѣшнимъ міромъ; что, замѣняя несовершенныя теоріи новыми, мы получаемъ также несовершенныя теоріи, причемъ такія, которыя исправляютъ нѣкоторыя погрѣшности своихъ предшественницъ, но грѣшатъ еще болѣе въ другихъ своихъ выводахъ, такъ что, смѣняя теоріи, мы будемъ вращаться въ нѣкоторомъ circulus vitiosus. По моему мнѣнію такое сомнѣніе неустранимо, ибо провѣрка теорій возможна только изъ опыта, и ни за одну теорію нельзя поручиться, что она не будетъ замѣнена новою, болѣе совершенною. Къ счастью для науки этотъ скептицизмъ не былъ распространенъ. Большинство натуръ-философовъ вѣрило въ возможность рѣшенія міровой задачи или, по крайней мѣрѣ, въ возможность безконечнаго приближенія къ такому рѣшенію. Мы вѣримъ, что, постепенно исправляя наши теоріи и поправляя наши ошибки, мы строимъ зданіе внутренняго міра идей, все ближе и ближе приближающагося къ параллелизму съ внѣшнимъ міромъ.

Обратимся теперь къ исторіи науки и поставимъ себѣ вопросъ, чему эта исторія учитъ: склоняетъ ли она нашу мысль въ сторону скептицизма или въ сторону вѣры въ могущество математическаго міросозерцанія. Отвѣтъ получается утвердительный; дѣйствительно, эта исторія даетъ цѣлый рядъ поразительныхъ примѣровъ гармонической связи между математической теоріей и опытнымъ знаніемъ, связи, покоящейся несомнѣнно на какихъ-то внутреннихъ причинахъ. Исторія науки какъ бы учитъ, что дѣйствительно человѣкъ по разуму есть образъ и подобіе Божества, создавшаго міръ, и что ему дано проникновеніе въ тайны природы, построенной повидимому какъ разъ по тѣмъ же законамъ, по которымъ онъ ее мыслитъ. Въ самомъ дѣлѣ, чѣмъ иначе объяснить знаменательный фактъ возможности теоретическихъ предсказаній новыхъ явленій природы. Возможность такихъ предсказаній, число которыхъ растетъ съ каждымъ днемъ, должна укрѣплять у натуръ-философа вѣру въ силы его разума, вѣру въ то, что онъ идетъ по вѣрному пути проникновенія въ тайны природы.

Первая, самая близкая къ внутреннему міру человѣка схема есть, конечно, алгебра, или, вообще говоря, математическій анализъ. Эта схема есть самая отвлеченная, но зато самая близкая къ внутреннему міру человѣка, а потому, я сказалъ бы, самая реальная. Въ самомъ дѣлѣ, алгебраическіе символы, надъ которыми мы оперируемъ въ анализѣ, суть продуктъ нашей свободной воли. Я желаю разсматривать такіе-то символы, я надѣляю ихъ свойствами по моему произволу, я устанавливаю такія основныя дѣйствія надъ этими символами, которыя мнѣ нравятся. Остальное есть слѣдствіе умозаключеній, совершающихся по законамъ моего мышленія. Если васъ не интересуютъ мои символы, вы ихъ отбрасываете, если они васъ интересуютъ, то вы становитесь моими слушателями. Опытъ болѣе двухъ тысячъ лѣтъ исторіи математики показалъ, что законы мышленія одинаковы у всѣхъ людей, и оказалось, что всѣ выводы анализа, считающіеся правильными однимъ человѣкомъ, кажутся правильными всѣмъ другимъ. Вы мнѣ можете сказать, что при установленіи основъ анализа произволъ выбора символовъ и дѣйствій надъ ними былъ ограниченъ желаніемъ получить доктрину, прилагаемую въ жизни и естествознаніи. Все это правильно, но для насъ не такъ важно знать, что насъ заставило установить тѣ или другія основы алгебры, сколько констатировать фактъ, что мы могли бы создать новую

алгебру съ совершенно другими основными законами, которая была бы вполнѣ логична во всѣхъ своихъ выводахъ, хотя быть можетъ и не могла бы заинтересовать такое большое число людей, какъ алгебра, приспособленная къ приложеніямъ.

Обращаемся теперь къ схемамъ, тѣсно связаннымъ съ наблюденіемъ внѣшняго міра. Самая отвлеченная изъ этихъ схемъ есть, конечно, геометрія. Геометрія изучаетъ свойства одного основнаго понятія, безъ котораго человѣкъ не представляетъ себѣ внѣшняго міра, а именно, понятія о пространствѣ. Существуетъ ли пространство на самомъ дѣлѣ—вопросъ вполнѣ праздный. Фактъ тотъ, что человѣкъ безъ этого понятія не представляетъ себѣ внѣшняго міра. Человѣкъ представляетъ себѣ пространство, какъ предметъ, въ различныхъ мѣстахъ котораго находятся предметы внѣшняго міра. Въ пространствѣ происходятъ всѣ движенія и совершается жизнь. Ясное дѣло, что геометрія является слѣдующей послѣ анализа схемой, зависящей уже отъ наблюденія и опыта.

Дальнейшей схемой является кинематика—наука о движеніи. Связанная тѣсно съ геометріей, кинематика вводитъ новое понятіе, а именно, понятіе о времени. Дальнѣйшее завершеніе схемъ естествознанія представляютъ понятія о силѣ и о матеріи.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію фактовъ изъ исторіи науки, укрѣпляющихъ вѣру въ могущество математическаго міросозерцанія. Прежде чѣмъ я перейду къ перечисленію ряда поразительныхъ предсказаній новыхъ явленій на основаніи теоретическихъ соображеній, я разсмотрю дѣятельность родоначальника небесной механики Kepler'a. Вся дѣятельность Kepler'a состояла въ поискахъ математическихъ законовъ природы, въ обязательное существованіе которыхъ онъ вѣрилъ. Полемъ его изысканій была астрономія. Мы видѣли уже, въ чемъ состоитъ великое открытіе Kepler'a. Изучая таблицы движенія планеты Марсъ, составленныя его предшественникомъ Tycho Brahe, онъ замѣтилъ, что планета двигается по эллипсу, въ фокусѣ котораго стоитъ солнце. Желая подвести цифры таблицы подъ простую зависимость, Kepler провѣрилъ рядъ гипотезъ; такъ напримѣръ, онъ пробовалъ предположить движеніе круговымъ, причемъ солнце не находится въ центрѣ. Если принять въ соображеніе, что Kepler не располагалъ современной тригонометріей и, что еще болѣе важно, долженъ былъ всѣ выкладки производить безъ логариѳмовъ, которыхъ тогда еще не было, то придется изумляться энергіи, съ которой онъ произ-

велъ массу громадныхъ и утомительныхъ вычисленій. Эту энергію можно объяснить лишь вѣрою въ существованіе математическихъ законовъ мірозданія.

Приступимъ теперь къ разсмотрѣнію ряда научныхъ предсказаній. Какъ первый примѣръ, возьмемъ электромагнитную теорію свѣта Maxwell'я. Изучая теорію электромагнитныхъ явленій, положивъ на математическій языкъ дифференціальныхъ уравненій основные принципы Faraday'я, Maxwell замѣтилъ аналогію между математической теоріей электричества и таковою же теоріей свѣта. Аналогія двухъ математическихъ схемъ дала ему вѣру въ необходимость существованія связи самихъ изучаемыхъ явленій природы. Онъ высказалъ теорему, что свѣтъ и электричество явленія одной и той же природы и отличаются другъ отъ друга лишь количественно, а не качественно. Это было высказано въ 1862 году, а въ 1888 году, т. е. черезъ двадцатьшесть лѣтъ, вѣра Maxwell'я блистательно подтвердилась опытами Hertz'a.

Какъ второй примѣръ, возьмемъ открытіе новой планеты Нептунъ путемъ выкладокъ небесной механики. Астрономъ Leverrier, изучая движеніе планеты Уранъ, замѣтилъ, что наблюдаемое движеніе планеты Уранъ отличается отъ того движенія этой планеты, которое получается изъ выкладокъ небесной механики, если принять въ разсчетъ дѣйствіе всѣхъ планетъ. Leverrier дѣлаетъ гипотезу о томъ, что несогласіе теоріи съ опытомъ происходитъ отъ дѣйствія на Уранъ еще одной большой неизвѣстной намъ планеты. Сдѣлавъ эту гипотезу, Leverrier пытался подобрать орбиту этой новой планеты такимъ образомъ, чтобы дѣйствіе ея на Уранъ давало какъ разъ тѣ уклоненія теоріи съ наблюденіями, которыя имѣли мѣсто. Эта гипотеза увѣнчалась блистательнымъ успѣхомъ: Leverrier указалъ мѣсто на небѣ новой планеты, и, дѣйствительно, на этомъ мѣстѣ была найдена планета Нептунъ.

Какъ третій примѣръ, возьмемъ нахожденіе конической рефракціи въ кристаллахъ. Англійскій математикъ Hamilton изобрѣлъ новую алгебру, относящуюся къ символамъ, названнымъ имъ кватерніонами (§ 26 гл. I). Изъ этой алгебры въ примѣненіи ея къ геометрической оптикѣ онъ пришелъ къ убѣжденію въ существованіи въ кристаллахъ нѣкотораго направленія, въ которомъ лучъ свѣта преломляется въ цѣлый коническій пучекъ лучей, такъ что, если смотрѣть черезъ кристаллъ въ указанномъ направленіи на свѣтящуюся точку, то эта точка расплывается въ круговое свѣтящееся

кольцо, внутри котораго находится темный кружекъ. Наблюденіе подтвердило мысль Hamilton'а. Какъ четвертый примѣръ, укажемъ на открытіе новыхъ химическихъ элементовъ, предсказанныхъ періодической схемой Менделѣева. И, наконецъ, какъ пятый примѣръ, укажемъ на открытіе радія путемъ планомѣрныхъ, веденныхъ по указаніямъ теоріи, опытныхъ изслѣдованій.

Поставимъ себѣ вопросъ: чего именно требуетъ практика отъ математики? Какія математическія задачи, какіе методы имѣютъ болѣе значенія, какія менѣе? Исторія науки приводитъ насъ къ убѣжденію въ невозможности характеризовать въ немногихъ словахъ разнообразіе пріемовъ математическаго изслѣдованія при изученіи явленій природы. Въ самомъ дѣлѣ, сравнимъ примѣры Leverrier и Maxwell'я. Leverrier хорошій астрономъ математикъ, прекрасно знавшій вычисленія, рѣшающія задачи небесной механики; его открытіе требовало тонкихъ детальныхъ вычисленій. Не то мы видимъ на примѣрѣ Maxwell'я. Maxwell не былъ вовсе калькуляторомъ. Свое открытіе онъ сдѣлалъ, не рѣшая на самомъ дѣлѣ дифференціальныхъ уравненій, а лишь сравнивая внѣшній видъ формулъ электричества и свѣта. Если Leverrier производилъ точныя выкладки, то Maxwell обращалъ вниманіе на нѣчто совсѣмъ другое, а именно, на аналогію между математическими теоріями. Итакъ, нѣтъ возможности сказать напередъ, что именно изъ математическаго анализа потребуютъ для своихъ работъ будущіе натуръ-философы. Конечно, предоминирующее значеніе въ приложеніяхъ будетъ, вѣроятно, по прежнему имѣть аналитическая механика, основанная на дифференціальномъ и интегральномъ исчисленіяхъ.

Обращаемся теперь къ вопросу обратному, что даетъ для чистой математики прикладная наука. Значеніе приложеній для прогресса чистой математики по моему мнѣнію настолько важно, что я не берусь отвѣчать на вопросъ, что имѣетъ болѣе важное значеніе: математика для приложеній, или приложенія для математики. Мы не погрѣшимъ, если скажемъ, что развитіе математики совершалось подъ постояннымъ вліяніемъ приложеній. Эти приложенія были какъ теоретическія, въ натуральной философіи, такъ и практическія, въ техникѣ и вообще въ обыденной жизни. Несомнѣнно, что если бы не было Kepler'а, то все, что сдѣлано Newton'омъ, могло бы явиться, быть можетъ, гораздо позднѣе, и, быть можетъ, мы до сихъ поръ не имѣли бы дифференціальнаго и

интегральнаго исчисленій. Эти исчисленія могли бы явиться подъ вліяніемъ другихъ приложеній, и, вообще, исторія математики могла бы имѣть совершенно другое теченіе. Я приведу слова, которыя любилъ говорить въ частной бесѣдѣ нашъ знаменитый математикъ П. Л. Чебышевъ. Онъ говорилъ: „Въ старину задавали математическія задачи боги, какъ напримѣръ удвоеніе куба, по поводу измѣненія размѣровъ Дельфійскаго жертвенника. Далѣе наступилъ второй періодъ, когда задачи задавали полубоги: Newton, Euler, Lagrange. Теперь третій періодъ, когда задачи задаетъ практика". Я эти слова считаю вполнѣ справедливыми съ тою лишь разницей, что по моему мнѣнію существовалъ всегда только третій періодъ. Я бы позволилъ себѣ характеризовать значеніе приложеній для математики въ слѣдующихъ словахъ.

Умъ человѣческій склоненъ къ извѣстной рутинѣ. Привычка мыслить въ извѣстномъ направленіи часто бываетъ настолько велика, что громадныхъ трудовъ стоитъ вступить на новые пути изслѣдованія. Въ этомъ отношеніи окружающій міръ съ его безконечнымъ разнообразіемъ явленій оказываетъ неоцѣненныя услуги. Окружающая жизнь такъ разнообразна, такъ богата, что не можетъ быть уложена въ рамки какой нибудь рутинной теоріи. Эта жизнь не дастъ покоя уму. Она будитъ его и направляетъ его насильно въ новыя области, ставитъ новыя математическія задачи, и, что еще важнѣе, даетъ возможность находить новые методы изслѣдованія. Практика при постановкѣ новой математической задачи даетъ всегда данныя для догадокъ объ искомомъ ея рѣшеніи. Мы знаемъ, напримѣръ, какъ часто помогаютъ геометрическія соображенія при рѣшеніи алгебраическихъ задачъ. Еще болѣе разнообразна помощь, которую могутъ дать естественныя науки; по этому аналитикъ съ удовольствіемъ привѣтствуетъ всякое новое приложеніе математическаго анализа на практикѣ, ибо онъ ожидаетъ отъ такихъ новыхъ приложеній возможности новыхъ плодотворныхъ догадокъ относительно рѣшенія затрудняющихъ его задачъ. Профессоръ Klein въ одной изъ работъ, относящихся къ Riemann'овой теоріи алгебраическихъ функцій, примѣняетъ теорію электричества, черезъ что получаетъ большую наглядность въ этой отвлеченной теоріи. Эта статья Klein'а вызвала ироническія замѣчанія, что вѣкъ электричества наложилъ свой отпечатокъ и на математику: хотятъ прилагать электричество къ рѣшенію математическихъ задачъ.

Какъ бы то ни было, а фактъ тотъ, что цѣлый рядъ весьма важныхъ математическихъ теорій создался подъ вліяніемъ приложеній.

Итакъ, наша мысль резюмируется въ томъ что математикъ, натуралистъ и техникъ должны идти рука объ руку. Каждый изъ нихъ нуждается въ помощи другого. Только совмѣстная ихъ работа можетъ быть успѣшна и дать нужные плоды. Приступающій къ изученію натуральной философіи долженъ отбросить иллюзіи и помнить, что путь, который необходимо пройти, безконечно далекъ. Природа ревниво скрываетъ свои тайны и человѣку стоитъ громадныхъ усилій и потери времени каждый шагъ впередъ въ этой области. Несомнѣнно, что этапы движенія впередъ натуральной философіи будутъ измѣряться столѣтіями, если не тысячелѣтіями.

Въ особенности изучающіе чистую математику не должны терять энергіи и вѣры въ высокое значеніе ихъ науки. Ихъ не должна оставлять вѣра въ существованіе заложенныхъ въ нѣдрахъ ихъ разума качествъ, дающихъ возможность возноситься духомъ все выше и выше въ Безконечность.

Не даромъ сказалъ поэтъ:

os homini sublime dedit coelumque tueri.

Указатель именъ.

(Цифры обозначаютъ страницы).

Указатель предметовъ.

(Цифры обозначаютъ страницы).