22.161.55 я73
П75

І. І. ПРИВАЛОВ

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО

ГОНТИ - ДНТВУ - НКТП

І. І. Привалов

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО

Переклад з четвертого російського
переробленого й доповненого видання

*Затверджено НКО УРСР як підручник
для фізико-математичних факультетів
державних університетів УРСР*

Ціна 5 крб. 50 к., оправа 1 крб. 50 к.

ГОНТИ НКТП
Державне Науково-Технічне Видавництво України
Харків 1938

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літописі Українського Друку“, „Картковому Репертуарі“ та інших покажчиках Української Книжкової Палати

5-2

Редактор *В. К. Балтага*
Літредактор *І. І. Горошко*
Техредактор *Я. С. Фонін*
Коректор *В. В. Кемарська*

Типо-цинкографія ГОНТИ. Харків, Суздальські ряди 18/20. Уповноваж. Головліту № 1378. Зам. № 1527. Тираж 5000. $23^3/_4$ друк. арк., облік.-авт. 27,6. Папір фабр. „Сокол“ 60 × 92. Вага 1 метр. стопи 38,6 кг. В друк. аркуші 51.000 зн. Здано на виробництво 16/I-38 року. Підписано до друку 7/VI-38 року.

Передмова до четвертого (російського) видання

В цьому виданні моєї книги „Вступ до теорії функцій комплексного змінного“ перероблено й доповнено весь текст попередніх видань.

Найбільш істотні зміни зроблені в частині геометричної теорії функцій комплексного змінного, яку поділено на три розділи: третій, присвячений лінійним та іншим елементарним перетворенням, дванадцятий, який містить у собі загальні принципи теорії конформного зображення, і тринадцятий, в якому розглядаються загальні властивості однолистих функцій.

І. Привалов

Передмова до першого (російського) видання

В основу цієї книги „Вступ до теорії функцій комплексного змінного“ покладено лекції, читані мною за останні роки в І Московському університеті. Теорія функцій комплексного змінного, основи якої створені класичними роботами Коші, Рімана і Вейерштрасса, аж до останнього часу привертає до себе увагу багатьох дослідників. Складаючи цей підручник, я ставив собі за мету дати читачеві строгий і в той же час ясний виклад елементів цієї дуже широкої і важливої галузі математичної науки, побіжно намічаючи більш складні сучасні проблеми комплексного аналізу. Я вважатиму свою мету досягнутою, коли читання цієї книги послужить стимулом для вивчання більш спеціальних питань з теорії функцій комплексного змінного.

Вважаю за свій обов'язок висловити тут подяку моєму слухачеві, студентові І Московського університету, С. Прокоф'єву, який дав у моє розпорядження записки моїх лекцій і цим дуже допоміг мені при складанні десятого розділу цієї книги.

І. Привалов

ЗМІСТ

Стор.

Передмови . . . . . 3—4
Вступ 11

Розділ I

Комплексні числа

§ 1. Комплексні числа і дії над ними

1. Поняття комплексного числа . . 15
2. Додавання й множення комплексних чисел 15
3. Віднімання й ділення комплексних чисел 17

§ 2. Геометричне зображення комплексних чисел. Теореми про модуль і аргумент

1. Геометричне зображення комплексних чисел 18
2. Геометричне тлумачення додавання й віднімання комплексних чисел 18
3. Поняття про модуль і аргумент . 19
4. Теореми про модуль і аргумент . 20
5. Геометричне зображення числа . 21
6. Геометричне тлумачення множення й ділення комплексних чисел 22

§ 3. Границі

1. Основний принцип теорії границь 23
2. Поняття граничної точки 25
3. Обмежені і необмежені послідовності комплексних чисел 26
4. Принцип Больцано-Вейєрштрасса 26
5. Поняття збіжної послідовності комплексних чисел 27
6. Основні теореми теорії границь . 28
7. Критерій Коші 28

Стор.

§ 4. Числова сфера. Нескінченно віддалена точка

1. Зображення комплексних чисел на сфері. Нескінченно віддалена точка 29
2. Формули стереографічної проекції 31
3. Основна властивість стереографічної проекції 32

§ 5. Ряди

1. Поняття збіжного і розбіжного ряду 33
2. Необхідна ознака збіжного ряду 33
3. Поняття абсолютно збіжного ряду 34
4. Додавання й віднімання рядів . . 36
5. Теорема про подвійні ряди . . . 36
6. Переставлення членів ряду . . . 38
7. Множення рядів 38
Вправи до розділу I 40

Розділ II

Комплексне змінне і функції комплексного змінного

§ 1. Функції комплексного змінного

1. Поняття функції комплексного змінного 42
2. Поняття області. Лінія Жордана . 43
3. Неперервність функції комплексного змінного 46
4. Теорема про рівномірну неперервність. Лема Гейне-Бореля . . . 49

§ 2. Ряди функцій

1. Поняття рівномірно збіжного ряду 50
2. Теорема про неперервність суми ряду 52
3. Ознака рівномірно збіжного ряду 53

Стор.

§ 3. Степеневі ряди

1. Поняття області збіжності степеневого ряду 54
2. Перша теорема Абеля 55
3. Круг збіжності 55
4. Поняття найбільшої границі . . 57
5. Визначення радіуса збіжності . . 58
6. Рівномірна збіжність степеневого ряду 62
7. Друга теорема Абеля 62
8. Показникова функція. Функції тригонометричні і гіперболічні . 65

§ 4. Диференціювання функцій комплексного змінного

1. Поняття похідної 69
2. Поняття функції, аналітичної в області 69
3. Поняття диференціала 71
4. Умови Коші-Рімана 71
5. Спряжені гармонічні функції . . 75

§ 5. Конформне відображення

1. Геометричне значення аргументу похідної 76
2. Геометричне значення модуля похідної 79
3. Конформне відображення 79
4. Конформне відображення II роду 80
5. Геометричне значення диференціала 82
6. Головна частина відображення $w = f(z)$ 83
Вправи до розділу II 85

Розділ III

Лінійні та інші найпростіші перетворення

§ 1. Лінійна функція

1. Ціла лінійна функція 88
2. Функція $w = \frac{1}{z}$ 89
3. Загальна лінійна функція 90
4. Кругова властивість лінійної функції 91
5. Визначення лінійного перетворення 92
6. Відображення верхньої півплощини в саму себе 94
7. Інваріантність пари взаємно симетричних точок при лінійному перетворенні 95
8. Відображення круга на верхню півплощину 96
9. Відображення круга самого в себе 97
0. Представлення лінійного перетворення за допомогою симетричних відображень 98
1. Інваріант лінійного перетворення 99
2. Різні типи лінійних перетворень 101
3. Природа подвійних точок . . 104
4. Геометрична інтерпретація еліптичного перетворення 105
5. Характер перетворення круга самого в себе 106

§ 2. Лінійні перетворення і геометрія Лобачевського

1. Евклідове зображення на крузі геометрії Лобачевського 107
2. Обчислення неевклідової віддалі двох точок з даними афіксами . 109
3. Неевклідове коло 110
4. Неевклідова довжина кривої . . 110
5. Неевклідова площа 111
6. Горицикли 111
7. Гіперцикли 112
8. Евклідове зображення геометрії Лобачевського на півплощині . 113
9. Неевклідова довжина кола . . 114
10. Кут паралелізму в геометрії Лобачевського 115
11. Неевклідові площі круга і трикутника 116

§ 3. Деякі елементарні функції і відображення, давані ними

1. Степенева функція і радикал . . 118
2. Показникова і логарифмічна функції 122
Вправи до розділу III 125

Розділ IV

Криволінійні інтеграли в дійсній і комплексній областях

§ 1. Криволінійні інтеграли

1. Поняття криволінійного інтеграла 127
2. Механічний зміст криволінійного інтеграла 131
3. Основні властивості криволінійного інтеграла 132
4. Постава питання про незалежність значення криволінійного інтеграла від путі інтегрування 132
5. Формула Гріна 133

Стор.

6. Обчислення площ 134
7. Умова незалежності значення криволінійного інтеграла від путі інтегрування 135
8. Умова, при якій $p\,dx + q\,dy$ є повний диференціал 136

§ 2. Застосування до гідродинаміки

1. Невихровий і вільний від джерел потік рідини 138
2. Характеристична функція потоку 140

§ 3. Інтеграли по комплексному змінному

1. Поняття інтеграла по комплексному змінному 142
2. Основні властивості інтеграла по комплексному змінному . . . 144
3. Інтегрування рівномірно збіжного ряду 145
4. Теорема Коші 146
Вправи до розділу IV 148

Розділ V

Теорема Коші. Інтеграл Коші

§ 1. Теорема Коші

1. Основна лема 150
2. Зведення доведення теореми Коші до найпростішого випадку . 152
3. Доведення теореми Коші 153
4. Поняття невизначеного інтеграла в комплексній області 156
5. Поширення теореми Коші на випадок складних контурів . . 158
6. Логарифмічна функція 160
7. Лема 163
8. Узагальнення теореми Коші . . 165

§ 2. Інтеграл Коші

1. Формула Коші 166
2. Поширення формули Коші на випадок складних контурів 167
3. Інтеграл типу Коші 169
4. Існування похідних всіх порядків для функції аналітичної в області 171
5. Теорема Морера 172
6. Три різні погляди в побудові теорії аналітичних функцій . . . 173
7. Про граничні значення інтеграла типу Коші 173
8. Інтеграл Пуассона 178
Вправи до розділу V 180

Стор.

Розділ VI

Ряди аналітичних функцій. Розкладання аналітичних функцій в степеневий ряд

§ 1. Рівномірно збіжні ряди аналітичних функцій

1. Перша теорема Вейєрштрасса . 182

§ 2. Ряд Тейлора

1. Застосування теореми Вейєрштрасса до степеневих рядів . 186
2. Розкладання аналітичної функції в степеневий ряд 187
3. Поняття голоморфної функції і його еквівалентність з поняттям аналітичної функції 191
4. Властивість єдиності аналітичних функцій 191
5. Принцип максимального модуля . 194
6. Нулі аналітичної функції 195
7. Порядок нуля 196
8. Нерівності Коші для коефіцієнтів степеневого ряду 197
9. Теорема Ліувілля 197
10. Друга теорема Вейєрштрасса . 198

Вправи до розділу VI 198

Розділ VII

Ізольовані особливі точки однозначної функції

§ 1. Ряд Лорана

1. Розклад аналітичної функції в ряд Лорана 200
2. Правильна і головна частини ряду Лорана 202
3. Єдиність розкладу Лорана . . . 203

§ 2. Класифікація особливих точок однозначної функції

1. Три типи ізольованих особливих точок 204
2. Усувана особлива точка 204
3. Полюс 205
4. Зв'язок між нулем і полюсом . . 206
5. Істотно особлива точка 207
6. Поведінка функції в околі ізольованої особливої точки 208

Стор.

§ 3. Поведінка аналітичної функції в нескінченності

1. Окіл нескінченно віддаленої точки 210
2. Розклад Лорана в околі нескінченно віддаленої точки 210
3. Поведінка функції в околі нескінченно віддаленої точки 211

§ 4. Найпростіші класи аналітичних функцій

1. Цілі функції 212
2. Мероморфні функції 213
3. Розклад раціональної функції на найпростіші дроби 214
4. Основний принцип алгебри . . . 214

§ 5. Застосування до гідродинаміки

1. Обтікання круглого циліндра потоком без циркуляції 215
2. Чисто циркулярний потік 217
3. *Загальний випадок* 218
Вправи до розділу VII 219

Розділ VIII

Теорія лишків

§ 1. Загальна теорія лишків

1. Лишок функції відносно ізольованої особливої точки 222
2. Основна теорема про лишки . . 223
3. Обчислення лишку функції відносно полюса 223
4. Лишок функції відносно нескінченно віддаленої точки 225
5. Логарифмічний лишок 226

§ 2. Застосування теорії лишків

1. Основна теорема алгебри 228
2. Застосування теорії лишків до обчислення визначених інтегралів 229
3. Твердження Руше 234
Вправи до розділу VIII 235

Розділ IX

Нескінченні добутки і застосування їх до аналітичних функцій

§ 1. Нескінченні добутки

1. Збіжні і розбіжні нескінченні добутки 237

Стор.

2. Основний критерій збіжності нескінченного добутку 238
3. Зображення голоморфної функції у вигляді нескінченного добутку 241

§ 2. Застосування нескінченних добутків до теорії цілих функцій

1. Формула Вейєрштрасса 243
2. Зображення цілої функції у вигляді нескінченного добутку . . 245
3. Зображення мероморфної функції у вигляді відношення двох цілих функцій 246
4. Задача Міттаг-Леффлера 247

§ 3. Узагальнення теореми єдиності аналітичних функцій

1. Можливі узагальнення теореми єдиності аналітичних функцій . 248
2. Формула Якобі і Іенсена 249
3. Доведення теореми єдиності . . 251
4. Неможливість дальшого узагальнення теореми єдиності для обмежених функцій 253
Вправи до розділу IX 254

Розділ X

Теорема Пікара

§ 1. Твердження Блоха

1. Теорема про обернення голоморфної функції 256
2. Доведення твердження Блоха . . 257

§ 2. Теорема Ландау

1. Доведення теореми Ландау . . . 260
2. Мала теорема Пікара 262

§ 3. Нерівність Шотткі

1. Виведення нерівності Шотткі . 262
2. Узагальнена нерівність Шотткі . 264

§ 4. Загальна теорема Пікара

Вправи до розділу X 266

Розділ XI

Аналітичне продовження

§ 1. Принцип аналітичного продовження

1. Поняття аналітичного продовження 267

Стор.

2. Поняття повної аналітичної функції в розумінні Вейєрштрасса . 268
3. Поширення функції дійсного змінного на комплексну область за принципом аналітичного продовження 271

§ 2. Приклади

1. Приклади однозначних функцій 272
2. Приклади многозначних функцій 272
Вправи до розділу XI 274

Розділ XII

Загальні принципи теорії конформного відображення

§ 1. Умови, що визначають конформне відображення

1. Відображення одиничного круга самого в себе 275
2. Умови, що визначають єдиність конформного відображення . . 277

§ 2. Основні принципи теорії конформних відображень

1. Принцип збереження області . . 278
2. Принцип взаємно однозначної відповідності 282
3. Принцип симетрії Рімана-Шварца 285
4. Узагальнення принципу симетрії 289
5. Принцип Шварца аналітичного продовження 290
6. Принцип Шварца для гармонічної функції 291
7. Застосування принципу симетрії

§ 3. Загальні перетворення одиничного круга у внутрішню область

1. Аналітичний вираз голоморфної функції, яка перетворює круг $|z|<1$ у внутрішню область . . 295
2. Лема Шварца 298
3. Застосування леми Шварца до оцінки похідної функції, що задовольняє умовам леми . . . 301
4. Загальна форма леми Шварца . 302
5. Існування подвійної точки перетворення 304

§ 4. Єдиність аналітичних функцій

1. Однозначне визначення аналітичної функції за її граничними значеннями 305
2. Узагальнення теореми єдиності . 307

Стор.

§ 5. Конформні відображення на верхню півплощину областей, обмежених лініями другого порядку

1. Рівностороння гіпербола 307
2. Парабола 309
3. Гіпербола і еліпс 314
4. Відображення середини еліпса на півплощину 319

§ 6. Конформне відображення однозв'язних областей

1. Спрощення поставлення теореми Рімана 322
2. Допоміжна функція і її основні властивості 324
3. Основна лема 325
4. Доведення твердження Рімана . 325

§ 7. Відповідність границь при конформному відображенні

1. Поставлення задачі 329
2. Доведення твердження про відповідність границь 329

§ 8. Відображення на верхню півплощину прямокутника і довільного многокутника

1. Прямокутник 331
2. Еліптична функція 335
3. Многокутник 337
4. Трикутник 342
5. Відображення зовнішньої області многокутника на верхню півплощину 345
Вправи до розділу XII 348

Розділ XIII

Загальні властивості однолистих функцій

§ 1. Проблема коефіцієнтів

1. Внутрішня теорема площ 351
2. Зовнішня теорема площ 353
3. Верхня межа для модуля коефіцієнта при z^2 в розкладі однолистої функції 354

Стор.

4. Константа Кебе 355
5. Теорема спотворення 356
6. Межі для модуля однолистої функції 358
7. Теорема обертання 359
8. Спільна межа для модулів коефіцієнтів у розкладі однолистої функції 360

§ 2. Межі опуклості і зіркоподібності

1. Межа опуклості 362
2. Межа зіркоподібності 363

Стор.

§ 3. Властивості функцій, що дають однолисті конформні відображення одиничного круга на області спеціального вигляду

1. Зіркоподібні і опуклі функції . . 364
2. Верхні межі модулів коефіцієнтів у розкладах опуклої і зіркоподібної функцій 365

§ 4. Екстремальні властивості функції, що відображає область на круг

1. Лема 368
2. Перша екстремальна проблема . 369
3. Друга екстремальна проблема . 371

Покажчик 374

Вступ

Ті операції, які доводиться розглядати в математиці, можна поділити на два класи: прямі і обернені. Наприклад, дії додавання відповідає обернена дія — віднімання, множенню — ділення, піднесенню до цілого додатного степеня — добування кореня.

Виконуючи дію додавання над двома якими завгодно цілими додатними числами, ми в результаті цієї дії матимемо завжди число також ціле додатне; інакше кажучи, ідучи від натурального ряду чисел, ми за допомогою прямої дії додавання не виходимо за межі цього ряду. Обернена дія — віднімання — виводить нас за межі сукупності натуральних чисел і виконання її завжди стає можливим лише після долучення до натурального ряду нуля і цілих від'ємних чисел. Обернена дія — ділення — потребує для свого виконання дальшого узагальнення поняття числа, яке здійснюється способом заведення дробових чисел. Сукупність чисел цілих і дробових, що називаються раціональними числами, буде замкнутою відносно перших чотирьох основних дій алгебри: додавання, віднімання, множення й ділення, тобто при виконанні будьякої з цих дій над двома якими завгодно раціональними числами (крім ділення на нуль) ми в результаті дістаємо елемент тієї ж самої сукупності — число раціональне. Нарешті, обернена дія — добування кореня, навіть у найпростішому випадку квадратного радикала, дає нам приклади, з одного боку, чисел дійсних, але не раціональних, які називаються ірраціональними числами, а з другого боку, чисел виду $y\sqrt{-1}$, де y означає дійсне число. Числа виду $y\sqrt{-1}$, де y — яке завгодно дійсне число, не рівне нулеві, називають *чисто уявними.*

Уже з наведених прикладів видно, що обернені операції приводять нас до необхідності поступового розширення поняття числа. Якщо ми перейдемо до оберненої операції, складнішої, ніж добування квадратного кореня, — розв'язання квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, де a, b і c є дійсні числа, то побачимо, що коренями його будуть числа виду $x+y\sqrt{-1}$, де через x і y позначено числа дійсні. Такі числа називаються *комплексними.* У випадку $y=0$ комплексне число перетворюється на дійсне, при $x=0$, $y\neq 0$ воно буде *чисто* уявним, нарешті, у випадку $y\neq 0$ воно називається уявним числом. Сукупність

комплексних чисел містить у собі дійсні числа і являє собою область, замкнуту відносно всіх математичних операцій. Наприклад, з алгебри відомо, що коренями якого завгодно рівняння n-го степеня з комплексними коефіцієнтами служать числа комплексні. Можливість виконувати всі математичні операції в області комплексних чисел, не виходячи за межі цієї області, значною мірою зумовлює те величезне значення, яке мають ці числа в математиці.

В цій книзі ми будемо вивчати властивості функцій комплексного змінного $z = x + y\sqrt{-1}$, де x і y є дійсні незалежні змінні. Функції комплексного змінного знаходять собі численні прикладання, з одного боку, в різних прикладних математичних дисциплінах, як от: фізика, гідродинаміка, небесна механіка, з другого боку, в різних галузях чистої математики, як от: алгебра, аналітична теорія чисел, диференціальні рівняння та ін. Крім того, теорія функцій комплексного змінного становить собою логічно струнку і гармонічно пов'язану будову, і обізнаність з основними питаннями цієї теорії, безперечно, є необхідним елементом математичної освіти.

Щоб відзначити велику силу методів функцій комплексного змінного, я обмежусь нагадуванням лише деяких великих досягнень, зроблених у галузі чистої математики за допомогою цих методів: дуже важкі проблеми розподілу простих чисел, як показав ще Ріман, ставляться в залежність від розподілу нулів певної функції комплексного змінного; проблема Варінга (Waring) про зображення всякого цілого додатного числа у вигляді суми обмеженого числа яких завгодно степенів, вперше розв'язана Гільбертом, в останній час була розв'язана англійськими математиками Гарді (Hardy) і Літтлевудом (Littlewood) на підставі методів функцій комплексного змінного; дуже важка проблема небесної механіки, так звана задача „про три тіла", вперше в загальному вигляді була розв'язана Зундманом (Sundmann) в результаті застосування методів комплексного аналізу. Нарешті, можна навести численні приклади з основних розділів математики, добре знайомих читачеві, з метою мотивувати те величезне значення і ту виключну роль, що є властиві функціям комплексного змінного.

Обмежимося лише декількома прикладами. Приміром, твердження про те, що всяке алгебричне рівняння має принаймні один комплексний корінь, є основним в алгебрі. Далі, з інтегрального числення добре відомо про те значення, яке мають комплексні числа при інтегруванні раціональних функцій і розв'язанні лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами. Необхідно також зазначити, що багато з питань класичного аналізу дістали ясне оформлення і знайшли своє повне розв'язання лише завдяки застосуванню комплексного аналізу. Наприклад відома тотожність Ейлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ дала йому змогу розкрити парадокс Ів. Бернуллі і Лейбніца, який полягає от у чому.

Помічаючи, що

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

розкладемо дріб $\frac{1}{1+x^2}$ на найпростіші дроби[1]):

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

і, проінтегрувавши, знайдемо:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-x}{i+x}.$$

Вважаючи тут $x = 1$, матимемо:

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-1}{i+1} = \frac{1}{4i} \ln \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^2 = \frac{1}{4i} \ln(-1) =$$

$$= \frac{1}{8i} \ln(-1)^2 = \frac{1}{8i} \ln 1 = 0, \quad \text{тобто } \frac{\pi}{4} = 0.$$

Ейлер розкрив цей парадокс, показавши періодичність показникової функції e^z. Дійсно, заміняючи в тотожності Ейлера x через $-iz$, матимемо:

$$e^z = \cos(-iz) + i \sin(-iz) = \cos iz - i \sin iz. \qquad (1)$$

Заміняючи в останній рівності z через $z + 2\pi i$, маємо:

$$e^{z+2\pi i} = \cos(iz - 2\pi) - i \sin(iz - 2\pi) = \cos iz - i \sin iz = e^z\ ^{2)},$$

тобто функція e^z не змінює свого значення при заміні z на $z + 2\pi i$, інакше кажучи $2\pi i$ є період цієї функції. Визначаючи натуральний логарифм $z = \ln w$, з рівності $e^z = w$ ми бачимо, що в наслідок періодичності e^z певному значенню w відповідає безліч різних значень $z = \ln w$, які відрізняються одно від одного на кратне $2\pi i$. Якщо $w > 0$, то одно значення $z = \ln w$ дійсне, всі ж інші уявні; у випадку ж $w < 0$ всі без винятку значення $z = \ln w$ є уявні. Таким чином, логарифмічна функція є многозначна, і парадокс зникає, якщо вважатимемо $\ln 1 = 2\pi i$.

Тотожність Ейлера розкриває залежність між функціями тригонометричними і показниковою. Далі, з формули (1), заміняючи z на $-z$, маємо:

$$e^{-z} = \cos iz + i \sin iz. \qquad (2)$$

Способом додавання й віднімання тотожностей (1) і (2) знаходимо:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

[1]) Далі символом i позначається $\sqrt{-1}$.

[2]) Тут ми скористувалися періодичністю синуса й косинуса від комплексного змінного. Це буде доведено в розд. II, § 3, п. 8.

що дає вирази гіперболічних синуса й косинуса через тригонометричні і таким чином дає змогу одержати всі формули гіперболічної тригонометрії, виходячи з формул звичайної тригонометрії.

Вкажемо ще на один факт з теорії степеневих рядів, повне з'ясування якого може бути дане лише з точки зору функцій комплексного змінного. З аналізу відомо, що розклад:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots$$

має місце лише при значеннях x, що задовольняють нерівність: $|x|<1$. Залишаючись в області дійсного змінного x, ми не маємо змоги розкрити зв'язок між природою функції і фактом збіжності ряду, який її зображає, лише при значеннях x, що задовольняють умову: $-1<x<+1$. Справді, функцію $\frac{1}{1+x^2}$ визначено для всіх значень x в проміжку від $-\infty$ до $+\infty$, і значення незалежного змінного -1 і $+1$ не є для неї винятковими. Звідси не можна зрозуміти, чому ряд $1-x^2+x^4-x^6+\ldots$ перестає збігатися при значеннях x, що задовольняють нерівності: $x\leqslant-1$ і $x\geqslant+1$. Картина цього явища, однак, цілком з'ясовується, коли розглядати його в комплексній області. Дійсно, знаменник дробу $\frac{1}{1+x^2}$ обертається в нуль при $x=\pm i$, отже ці два значення незалежного змінного є особливими для нашої функції. Зображаючи комплексне число $\alpha=a+bi$ точкою на площині з координатами a і b і помічаючи, що віддалі відмічених вище особливих точок від початку координат дорівнюють одиниці, ми робимо висновок: дана функція не має особливих точок всередині круга з центром у початку координат радіуса одиниця, в той час як на його колі є особливі точки цієї функції. Ця обставина, як ми далі побачимо, зумовлює розбіжність даного ряду для значень x, модуль яких більший одиниці.

На закінчення скажемо ще декілька слів про план цього курсу. В перших розділах ми вивчатимемо розвиток в комплексній області відомих з дійсного аналізу основних понять і операцій, як от: границі, похідної, інтеграла; таким чином будуватимемо за аналогією з дійсною областю аналітичний апарат для дослідження функцій комплексного змінного. Побудувавши цей фундамент, ми перейдемо до з'ясування основних властивостей класу диференційованих функцій комплексного змінного, які називаються аналітичними, тобто викладемо найважливіші розділи теорії таких функцій.

Розділ I

Комплексні числа

§ 1. Комплексні числа і дії над ними

1. Поняття комплексного числа. Комплексним числом α називається пара дійсних чисел a і b, взятих в певному порядкові: $\alpha=(a, b)$. Якщо $b=0$, то відповідну пару ми умовимося коротко позначати через a, вважаючи: $(a, 0)=a$. Таким чином сукупність всіх дійсних чисел є частиною сукупності всіх комплексних чисел. Після запровадження поняття комплексного числа як пари дійсних чисел означимо основні операції над цими числами. Тому що сукупність всіх дійсних чисел є частиною області всіх комплексних чисел, то при встановленні основних арифметичних операцій над комплексними числами ми повинні вимагати, щоб ці операції, будучи застосовані до дійсних чисел, давали в результаті ті самі числа, які ми одержуємо в арифметиці дійсних чисел. З другого боку, якщо ми хочемо, щоб комплексні числа мали універсальне застосування в питаннях аналізу, то ми повинні вимагати, щоб запроваджувані основні операції над ними задовольняли звичайні аксіоми арифметики дійсних чисел.

2. Додавання й множення комплексних чисел. Додавання двох комплексних чисел $\alpha=(a, b)$, $\beta=(c, d)$ ми означимо за допомогою рівності:

$$\alpha+\beta=(a+c, b+d). \tag{I}$$

Застосовуючи це означення до двох дійсних чисел a і c, знайдемо

$$(a, 0)+(c, 0)=(a+c, 0)=a+c,$$

тобто перша вимога, яку ми ставимо до запроваджуваних операцій, виконується щодо додавання.

Множення двох комплексних чисел α і β означимо за допомогою рівності:

$$\alpha\beta=(ac-bd, ad+bc). \tag{II}$$

Це означення, будучи застосоване до двох дійсних чисел a і c, дає: $(a, 0)(c, 0)=(ac, 0)=ac$, тобто дія множення не дає суперечності з арифметикою дійсних чисел.

Користуючись означеннями (I) і (II), легко перевірити, що операції додавання й множення комплексних чисел підлягають відомим п'ятьом законам арифметики:

1) комутативність додавання: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$,
2) множення: $\alpha\beta=\beta\alpha$,
3) асоціативність додавання: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$,
4) множення: $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$,
5) дистрибутивність відносно додавання й множення:

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

Читачеві рекомендується перевірити справедливість всіх цих законів в області комплексних чисел.

В операціях з комплексними числами особливу роль відіграє число, зображуване парою (0, 1) і позначуване буквою i (від французького слова imaginaire). Підносячи цю пару до квадрата, що зводиться до множення її на саму себе, дістаємо на підставі означення (II):

$$(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1,$$

тобто $i^2=-1$, звідки бере свій початок позначення: $i=\sqrt{-1}$. Помітивши це, ми всяке комплексне число α можемо записати так:

$$\alpha=(a,\ b)=(a,\ 0)+(0,\ b)=(a,\ 0)+(b,\ 0)(0,1)=a+bi,$$

тобто *всяке комплексне число* $\alpha=(a,\ b)$ *можна зобразити у вигляді суми дійсного числа* a *і чисто уявного числа* bi.

Прийнято називати a дійсною частиною комплексного числа α і позначати через $R(\alpha)$ (від французького слова reelle), b — коефіцієнтом при уявній частині числа α і позначати через $I(\alpha)$ (від французького слова imaginaire). Очевидно, якщо $I(\alpha)=0$ — комплексне число α перетворюється на дійсне число, якщо $R(\alpha)=0$ — на чисто уявне. Два комплексні числа за означенням називаються рівними, якщо рівні між собою їх дійсні частини і рівні їх уявні частини.

Два комплексні числа, що мають ту саму першу компоненту, але супротивні знаком другі компоненти, називаються спряженими і їх позначають так:

$$\alpha=a+bi,\quad \bar{\alpha}=a-bi.$$

Як окремий випадок рівності (II) відзначимо закон множення двох спряжених чисел:

$$\alpha\cdot\bar{\alpha}=a^2+b^2.$$

В арифметиці модулем додавання називається таке число, від додавання якого результат не змінюється: число 0; аналогічно 1 є модуль множення, тобто число, від множення на яке результат не змінюється. Покажемо, що в області всіх комплексних чисел є один модуль додавання — число 0, і один модуль множення — число 1.

Дійсно, нехай δ є модуль додавання, тобто

$$\alpha+\delta=\alpha, \tag{1}$$

де α — довільне комплексне число. Покажемо, що таке число δ існує, і до того єдине. Додаючи до обох частин рівності (1) число $-\alpha = \alpha \cdot -1$, дістанемо: $\delta = 0$.

Нехай, далі, ε є модуль множення, тобто:

$$\alpha \cdot \varepsilon = \alpha, \tag{2}$$

де $\alpha \neq 0$. Помножаючи обидві частини рівності (2) на число $\beta = \frac{\bar{\alpha}}{a^2 + b^2}$, дістаємо:

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \bar{\alpha}\alpha \cdot \varepsilon = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \bar{\alpha}\alpha.$$

Тому що $\bar{\alpha} \cdot \alpha = a^2 + b^2$, то звідси виходить: $\varepsilon = 1$.

На підставі означення (II) добуток двох комплексних чисел є нуль, якщо хоч один множник дорівнює нулеві. Справедливе обернене положення: якщо добуток двох комплексних чисел дорівнює нулеві, то принаймні один з множників є нуль. Справді, нехай $\alpha \cdot \xi = 0$, $\alpha \neq 0$. Помножаючи обидві частини цієї рівності на число $\beta = \frac{\bar{\alpha}}{a^2 + b^2}$, матимемо: $\xi = 0$.

3. Віднімання й ділення комплексних чисел. Віднімання означається як дія, обернена додаванню. Різницею двох комплексних чисел $\beta = c + di$ і $\alpha = a + bi$ ми називаємо за означенням число z, яке задовольняє рівність:

$$\alpha + z = \beta. \tag{3}$$

Покажемо, що операція віднімання однозначно виконується в області комплексних чисел. Додамо до обох частин рівності (3) число $-\alpha$; матимемо:

$$z = \beta + (-\alpha) = \beta - \alpha = c - a + (d - b)i.$$

Нарешті, ділення є дія, обернена множенню. Наприклад, під символом $\frac{1}{\alpha} (\alpha \neq 0)$ ми за означенням розуміємо число z, що задовольняє рівність:

$$\alpha \cdot z = 1. \tag{4}$$

Помножаючи обидві частини рівності (4) на число $\frac{\bar{\alpha}}{a^2 + b^2}$, знайдемо:

$$z = \frac{\bar{\alpha}}{a^2 + b^2}.$$

Частку двох комплексних чисел β і α ми позначимо через $\frac{}{\alpha}$ вважаючи:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \beta.$$

Отже, ділення за винятком ділення на нуль завжди і до того однозначно виконується в області комплексних чисел. Рівності:

$$(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i,$$
$$(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i,$$

будучи порівняні з рівностями (I) і (II), показують, що коли в сумі або в добуткові двох комплексних чисел замінимо доданки або множники спряженими їм числами, то в результаті дістанемо числа спряжені. Тому що віднімання й ділення є дії, обернені відносно додавання й множення, то той же самий висновок є справедливий і щодо цих дій. Таким чином, якщо кожному комплексному числу ми приведемо у відповідність його спряжене число, то дістанемо відображення системи всіх комплексних чисел на саму себе з тією властивістю, що рівняння:

$$\alpha+\beta=\gamma,\quad \alpha-\beta=\gamma,\quad \alpha\cdot\beta=\gamma,\quad \frac{\beta}{\alpha}=\gamma$$

залишаються справедливими, якщо замінити числа, які в них входять, їхніми відображеннями. Звідси зокрема випливає, що всяке рівняння між комплексними числами, обидві частини якого містять у собі дії додавання й віднімання, множення й ділення, залишається непорушним, якщо кожне з комплексних чисел замінити через його спряжене число.

§ 2. Геометричне зображення комплексних чисел. Теореми про модуль і аргумент

1. Геометричне зображення комплексних чисел. Всяке комплексне число $\alpha=(a, b)$ ми можемо зображати, як точку на площині з координатами a і b (рис. 1). Далі точку, якій відповідає комплексне число α, ми часто будемо позначати через α. Площину, точки якої зображають комплексні числа, називають комплексною числовою площиною. Початок координат, якому відповідає число 0, називають нульовою точкою. При такому зображенні комплексних чисел дійсні числа зображаються точками осі абсцис, а точки осі ординат представляють чисто уявні числа. Тому вісь абсцис називають *дійсною віссю*, вісь ординат — *уявною віссю*. Комплексне число α можна також зображати вектором, початок якого міститься в нульовій точці, а кінець у точці α (рис. 1). При такому зображенні комплексного числа його дійсна частина a і коефіцієнт при уявній частині b є компоненти зображаючого вектора.

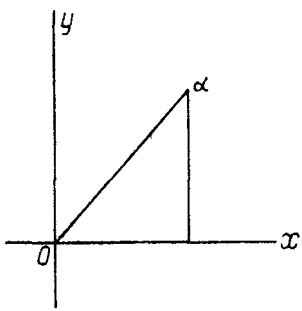

Рис. 1

2. Геометричне тлумачення додавання й віднімання комплексних чисел. Щоб дати геометричну інтерпретацію суми двох ком-

плексних чисел α і β, зобразимо ці числа у вигляді відповідних векторів. Тоді сума $\alpha+\beta$ буде зображена вектором, компоненти якого дорівнюють сумам відповідних компонент векторів α і β (згідно з означенням дії додавання), тобто число $\alpha+\beta$ буде зображено діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах α і β як сторонах (рис. 2).

Помітивши, що $\beta-\alpha=\beta+(-\alpha)$, ми повинні додати за правилом паралелограма один до одного два вектори β і $-\alpha$; в результаті матимемо вектор, що зображає різницю $\beta-\alpha$ (рис. 3).

3. Поняття про модуль і аргумент. Перше ніж дати геометричне тлумачення операцій множення й ділення, ми ознайомимося з представленням комплексного числа в тригонометричній формі. Віддаль r точки α від нульової точки, тобто довжина вектора α, буде:

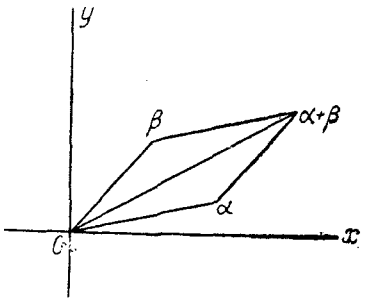

Рис. 2

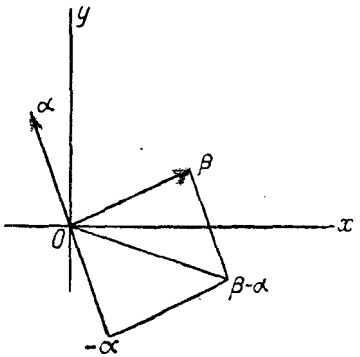

Рис. 3

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\alpha\cdot\bar{\alpha}}.$$

Це додатне число r називається *модулем* комплексного числа α і його позначають через $|\alpha|$; у випадку дійсного числа α модуль, очевидно, збігається з його абсолютною величиною. Числа, які мають той самий модуль r, зображаються, очевидно, точками кола радіуса r з центром у нульовій точці. Число 0 є єдине комплексне число з модулем, який дорівнює нулеві.

Напрям вектора α визначається за допомогою кута φ між додатним напрямом осі Ox і напрямом цього вектора; отже φ зображає кут, на який можна повернути додатний напрям осі Ox, щоб він збігся з напрямом вектора α; ми вважаємо цей кут додатним, якщо повертаємо проти годинникової стрілки, і від'ємним — при повертанні за годинниковою стрілкою. Це число φ називається *аргументом* комплексного числа α і його позначають через $\arg\alpha$ (рис. 4). Очевидно, для кожного числа α його аргумент φ має нескінченну кількість значень, які відрізняються одно від одного на кратне 2π. Число 0 є єдине комплексне число, аргумент якого неозначений.

Тому що r і φ є полярні координати точки $\alpha=(a, b)$, то маємо: $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$, і, значить,

$$\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (I)$$

Ця форма комплексного числа називається *тригонометричною*.

4. Теореми про модуль і аргумент. Складаючи добуток двох комплексних чисел:

$$\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \quad \beta=\rho(\cos\psi+i\sin\psi),$$

матимемо:

$$\alpha\beta=r\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi+i\sin\psi)=r\rho[\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)].$$

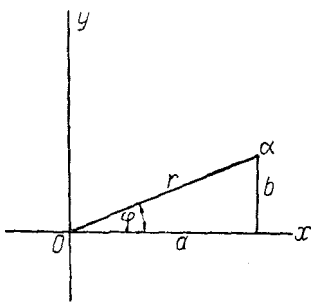

Рис. 4

Порівнюючи останню форму числа $\alpha\beta$ з формою (I), ми робимо висновок:

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|,$$

$$\arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta, \qquad (5)$$

тобто *модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добуткові їх модулів; аргумент добутку двох комплексних чисел дорівнює сумі аргументів множників.* Рівності (5) легко поширюються на випадок добутку $\alpha\beta\gamma\ldots\lambda$ довільного числа комплексних множників. Для такого добутку мають місце рівності:

$$|\alpha\beta\gamma\ldots\lambda|=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\gamma|\ldots|\lambda|,$$

$$\arg(\alpha\beta\ldots\lambda)=\arg\alpha+\arg\beta+\ldots+\arg\lambda,$$

і, зокрема, якщо всі множники рівні між собою,

$$|\alpha^n|=|\alpha|^n, \quad \arg(\alpha^n)=n\arg\alpha. \qquad (6)$$

Рівності (6) виражають так звану *формулу Муавра* (Moivre):

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (6')$$

Вважаючи $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, ми означимо $\sqrt[n]{\alpha}$ як комплексне число, яке, будучи піднесене до степеня n, дорівнює α. Модуль цього числа, очевидно, дорівнюватиме $\sqrt[n]{r}$, а аргумент дорівнюватиме $\frac{\varphi+2k\pi}{n}$, де k — яке завгодно ціле число. Даючи k значення $0, 1, 2, \ldots, n-1$, матимемо n різних значень аргумента виразу $\sqrt[n]{\alpha}$; отже, $\sqrt[n]{\alpha}$ має n різних значень згідно з формулою:

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Геометрично ці n значень виразу $\sqrt[n]{\alpha}$, очевидно, будуть зображені вершинами якогось правильного n-кутника, вписаного в коло, з центром у нульовій точці, радіуса $\sqrt[n]{r}$.

Зауваживши, що

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\bar{\alpha}}{\alpha\cdot\bar{\alpha}}=\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}, \tag{7}$$

дістаємо згідно з (5):

$$\left|\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{|\bar{\alpha}|}{|\alpha|^2}=\frac{1}{|\alpha|},$$

тому що $|\bar{\alpha}|=|\alpha|$.

Звідси, далі, знаходимо:

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{1}{\alpha}\cdot\beta\right|=\left|\frac{1}{\alpha}\right|\cdot|\beta|=\frac{|\beta|}{|\alpha|}, \tag{8}$$

тобто *модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці їх модулів.*

Далі, з (7) робимо висновок:

$$\arg\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\arg(\bar{\alpha})=-\arg\alpha,$$

і, значить,

$$\arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\arg\left(\beta\cdot\frac{1}{\alpha}\right)=\arg\beta+\arg\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\arg\beta-\arg\alpha, \tag{8'}$$

тобто *аргумент частки двох комплексних чисел дорівнює різниці аргументів діленого і дільника.*

З рис. 2 ми бачимо, що *модуль суми двох комплексних чисел менший або дорівнює сумі модулів доданків*, тому що в трикутнику всяка сторона менша від суми двох інших сторін (знак рівності може бути в тому випадку, коли трикутник перетворюється на відрізок):

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|. \tag{9}$$

З рис. 3 ми бачимо, що різниця $\beta-\alpha$ двох комплексних чисел може бути зображена вектором, початок якого міститься в точці α і кінець в точці β, тому що такий вектор еквівалентний векторові з початком у нульовій точці і кінцем у точці $\beta-\alpha$. Отже, *модуль різниці $\beta-\alpha$ дорівнює віддалі між точками α і β; далі, модуль різниці двох комплексних чисел більший або дорівнює різниці їх модулів*:

$$|\beta-\alpha|\geqslant|\beta|-|\alpha|, \tag{10}$$

тому що в трикутнику $O\alpha\beta$ (рис. 3) сторона $\alpha\beta$ більша від різниці двох інших сторін (рівність може бути у випадку, коли трикутник перетворюється на відрізок).

5. Геометричне зображення числа $\frac{1}{\alpha}$. Покажемо, як із точки α можна побудувати точку $\frac{1}{\alpha}$

Для цього побудуємо спочатку точку, що зображає допоміжне число $\beta = \frac{1}{\bar{\alpha}}$; тому що $|\beta| = \frac{1}{|\alpha|}$ або $|\alpha| \cdot |\beta| = 1$ і $\arg \beta = -\arg \bar{\alpha} = \arg \alpha$, то точку β одержують із точки α в результаті застосування перетворення взаємних радіусів-векторів, яке полягає ось у чому. Описуючи з нульової точки як центра коло з радіусом, рівним одиниці, сполучаємо прямою лінією його центр з точкою α і ставимо в цій точці перпендикуляр до проведеної прямої до перетину в точці T з колом; проводячи нарешті дотичну до кола в точці T, дістанемо в перетині її з прямою $O\alpha$ шукану точку β (рис. 5).

Дійсно, з трикутника $OT\beta$ (рис. 5) знаходимо: $\frac{|\beta|}{1} = \frac{1}{|\alpha|}$ або $|\alpha| \cdot |\beta| = 1$; з другого боку, очевидно, маємо; $\arg \beta = \arg \alpha$ [1]).

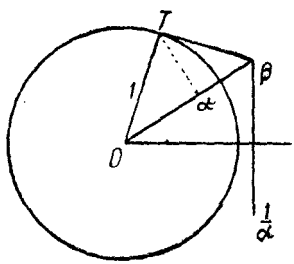

Рис. 5

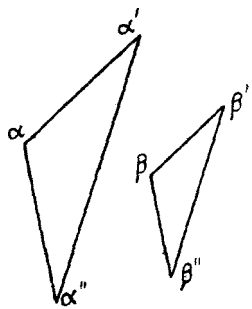

Рис. 6

Такі дві точки α і β називають взаємно симетричними відносно кола з центром у нульовій точці радіуса одиниця. Зауваживши, далі, що $\frac{1}{\bar{\alpha}} = \bar{\beta}$, ми повинні виконати симетричне відображення точки β відносно дійсної осі, щоб дістати шукану точку $\frac{1}{\alpha}$ (рис. 5).

6. Геометричне тлумачення множення й ділення комплексних чисел. Переходячи тепер до геометричного тлумачення операцій множення й ділення, ми розглянемо шість комплексних чисел α, α', α'', β, β', β'', зв'язаних умовою:

$$\frac{\alpha'' - \alpha}{\alpha' - \alpha} = \frac{\beta'' - \beta}{\beta' - \beta}. \tag{11}$$

Точки α, α', α'' служать вершинами одного трикутника; точки β, β', β'' є вершини другого трикутника (рис. 6).

[1]) Беручи коло з центром у нульовій точці радіуса R і виконуючи те саме побудування, ми дістанемо з точки α точку $\beta = \frac{R^2}{\bar{\alpha}}$.

Точки α і β називаються взаємно симетричними відносно згаданого кола.

Умова (11) виражає той факт, що ці два трикутники подібні між собою і однаково розміщені. Дійсно, з умови (11) виходить, якщо ми віднімемо по 1 з обох її частин:

$$\frac{\alpha''-\alpha'}{\alpha'-\alpha}=\frac{\beta''-\beta'}{\beta'-\beta}$$

і потім перейдемо до модулів, то матимемо такі співвідношення:

$$|\alpha''-\alpha|:|\alpha'-\alpha|:|\alpha''-\alpha'|=|\beta''-\beta|:|\beta'-\beta|:|\beta''-\beta'|,$$

тобто сторони трикутника $\alpha\alpha'\alpha''$ пропорціональні відповідним сторонам трикутника $\beta\beta'\beta''$, що доводить подібність трикутників. Доведемо тепер, що наші трикутники однаково розміщені, тобто якщо точка α'' лежить праворуч від напряму $\alpha\alpha'$, то й точка β'' лежить праворуч від напряму $\beta\beta'$; якщо ж точка α'' міститься ліворуч від напряму $\alpha\alpha'$, то й точка β'' міститься ліворуч від $\beta\beta'$. Інакше кажучи, вершини $\alpha\alpha'\alpha''$ і $\beta\beta'\beta''$ проходяться в однаковому напрямі. Дійсно, з умови (11) виходить:

$$\arg(\alpha''-\alpha)-\arg(\alpha'-\alpha)=\arg(\beta''-\beta)-\arg(\beta'-\beta).$$

Тому що число $\alpha''-\alpha$ зображається вектором $\alpha\alpha''$, то $\arg(\alpha''-\alpha)$ характеризує напрям цього вектора відносно дійсної осі. Аналогічні висновки матимуть місце для $\arg(\alpha'-\alpha)$, $\arg(\beta''-\beta)$, $\arg(\beta'-\beta)$. Отже, якщо точка α'' лежить праворуч від напряму вектора $\alpha\alpha'$, тобто $\arg(\alpha''-\alpha)<\arg(\alpha'-\alpha)$, то з останньої рівності робимо висновок, що $\arg(\beta''-\beta)<\arg(\beta'-\beta)$, тобто точка β'' лежить праворуч від вектора $\beta\beta'$. Аналогічний висновок буде, якщо точка α'' міститься ліворуч від вектора $\alpha\alpha'$.

Якщо з точок α, α', α'', β, β', β'' дано, наприклад, перші п'ять точок, то легко побудувати шосту точку

$$\beta''=\beta+(\beta'-\beta)\frac{\alpha''-\alpha}{\alpha'-\alpha}. \qquad (11')$$

Для цього необхідно побудувати трикутник $\beta\beta'\beta''$ з даною стороною $\beta\beta'$, який був би подібний і однаково розміщений з трикутником $\alpha\alpha'\alpha''$.

Вважаючи зокрема $\beta=0$, $\alpha=0$, $\alpha'=1$, ми матимемо побудування добутку $\beta'\cdot\alpha''$, а виборові $\beta=0$, $\beta'=1$, $\alpha=0$ відповідатиме побудування частки $\frac{\alpha''}{\alpha'}$.

§ 3. Границі

1. Основний принцип теорії границь. Після того як ми запровадили поняття комплексного числа і означили основні алгебричні операції для комплексних чисел, ми повинні перейти до розгляду основної операції аналізу нескінченно малих — переходу до границі в комплексній області. Вся теорія границь дійсних чисел може бути побудована на одному принципі, який у своїй геометричній формі виражається так.

Нехай дано на числовій прямій послідовність відрізків $i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots$, з яких кожний містить наступний відрізок, і нехай довжини цих відрізків прямують до нуля при необмеженому зростанні номера n. Існує одна і тільки одна точка, яка належить всім відрізкам даної послідовності (рис. 7).

Насамперед зауважимо, що дві різні точки s і s' не можуть належати всім відрізкам: дійсно, в супротивному разі довжини всіх відрізків i_n були б не менші від додатної віддалі між точками s і s', що є неможливе, бо з необмеженим зростанням n довжина відрізка i_n прямує до нуля. Залишається показати, що існує точка, спільна всім відрізкам i_n. З цією метою розглянемо ліві кінці a_n відрізків i_n, які зображають нескінченну неспадну послідовність чисел a_n, що залишаються весь час меншими від сталого числа, наприклад числа b_1, яке зображає правий кінець відрізка i_1. Отже, ця неспадна послідовність чисел a_n, будучи обмежена зверху, має єдину границю a^*, $a_n \leqslant a^*$. Аналогічно числа b_n, зображувані правими кінцями відрізків i_n, утворюють незростаючу послідовність чисел, що залишаються весь час більшими від сталого числа, наприклад a_1. Отже, ця незростаюча послідовність числа b_n, будучи обмеженою знизу, має єдину границю b^*, $b^* \leqslant b_n$. Тому що довжина відрізка i_n прямує до нуля при необмеженому зростанні n, тобто ліві і праві кінці a_n і b_n відрізків i_n безмежно зближаються, то границі обох послідовностей a_n і b_n повинні збігатися, тобто $a^* = b^*$. Точка a^*, очевидно, належить усім відрізкам i_n, тому що маємо: $a_n \leqslant a^* = b^* \leqslant b_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$[1]. Цей принцип легко поширюється на випадок комплексної числової площини.

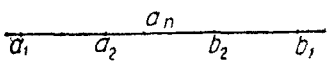

Рис. 7

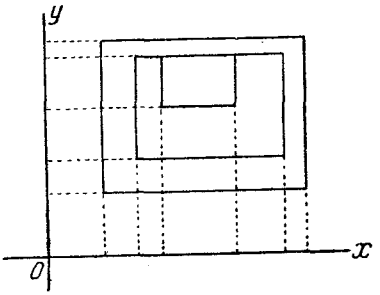

Рис. 8

Нехай дано на площині послідовність прямокутників $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, з сторонами, паралельними осям координат, з яких кожний містить у собі наступний, і нехай діагональ прямокутника r_n прямує до нуля при необмеженому зростанні номера n (рис. 8). *Існує єдина точка, яка належить усім прямокутникам даної послідовності.*

[1]) Основою теорії границь служить звичайно аксіома Дедекінда: якщо множина *всіх* чисел поділена на два класи так, що кожне число першого класу менше якого завгодно числа другого класу і кожне число другого класу більше якого завгодно числа першого класу, то існує одно і тільки одно число, яке ділить множину всіх чисел на розглядані два класи. Зважаючи на обставини, це число може бути або найбільшим у першому класі або найменшим у другому. Використана в тексті теорема про існування границі монотонної і обмеженої змінної є безпосереднім висновком з аксіоми Дедекінда. (*Ред.*).

Для того, щоб довести цей принцип, розглянемо проекції всіх прямокутників r_n на дійсну і уявну осі. На дійсній осі ми матимемо послідовність відрізків $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$, з яких кожний відрізок містить у собі наступний; на уявній осі ми теж матимемо послідовність відрізків $j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots$, таких, що кожний відрізок містить у собі наступний відрізок. Тому що за умовою діагональ прямокутника r_n прямує до нуля при необмеженому зростанні n, то довжини відрізків i_n і j_n повинні також прямувати до нуля. За доведеним принципом — існує на дійсній осі одна точка a^*, яка належить всім відрізкам i_n; за тим же принципом — на уявній осі існує єдина точка b^*, яка належить всім відрізкам j. Очевидно, точка площини з координатами a^*, b^* належить всім прямокутникам r_n.

Ясно, що така точка є єдина, тобто не може існувати двох різних точок, які належать всім прямокутникам r_n. Дійсно, віддаль між цими точками була б не більша за діагональ прямокутника r_n, що є неможливе, бо за умовою ця остання прямує до нуля при необмеженому зростанні n. Цей принцип ми покладемо в основу розвитку теорії границь комплексних чисел.

2. Поняття граничної точки. Нехай маємо нескінченну послідовність комплексних чисел:

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \tag{12}$$

Ми назвемо число z *граничним числом* для даної послідовності (12), якщо воно задовольняє умову: *при якому завгодно додатному скільки завгодно малому* ε *нерівність* $|z - z_n| < \varepsilon$ *виконується для нескінченної множини натуральних чисел* n. Цьому означенню граничного комплексного числа ми можемо надати геометричної форми, коли числа $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots, z$ будемо розглядати як точки числової площини. Зауваживши, що $|z - z_n|$ є віддаль між точками z і z_n, ми скажемо, що точка z *є гранична точка* для послідовностей точок $z_1, z_2, \ldots, z_n \ldots$, *якщо всередині круга як завгодно малого радіуса* ε *з центром у точці* z *лежить нескінченна множина точок, які належать даній послідовності* (12). Інакше кажучи, навколо граничної точки z утворюється згусток точок з послідовності $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ (рис. 9).

Примітка. Числа послідовності (12), рівні між собою, зображаються однією і тією ж точкою, яка називається *кратною* точкою. Кратність точки дорівнює числу рівних чисел, зображенням яких вона є; зокрема, кратність точки може бути нескінченною, коли серед чисел даної послідовності є нескінченна множина рівних між собою. Кожна точка вважається за стільки точок, яка її кратність. Наприклад, послідовність точок 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, ... має єдину граничну точку 0.

Може статися, що послідовність точок не має граничної точки, як наприклад послідовність 1, 2, 3, ..., n, ... Бувають випадки, коли послідовність має декілька граничних точок, як наприклад послідовність $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 1 - \frac{1}{5}, \ldots$, яка має дві граничні точки: 0 і 1, при чому перша точка не належить послідовності, а друга є елемент послідовності.

3. Обмежені і необмежені послідовності комплексних чисел. Наведений вище приклад послідовності 1, 2, 3, ..., n, ..., яка не має граничної точки, характерний тією властивістю, що точки цієї послідовності йдуть в нескінченність. Ми будемо називати послідовність комплексних чисел *обмеженою*, коли модулі всіх чисел цієї послідовності залишаються меншими від якогось додатного числа M:

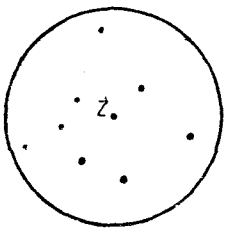

Рис. 9

$$|z_n| < M.$$

В противному разі послідовність чисел називається *необмеженою*. Геометрично, у випадку обмеженої послідовності точок, існує круг з центром у нульовій точці достатньо великого сталого радіуса M, всередині якого лежать усі точки даної послідовності (рис. 10).

Необмежена послідовність точок, як ми бачили на прикладі, може не мати граничної точки. Ця обставина не може мати місця у випадку обмеженої послідовності точок, як це виходить з теореми Больцано-Вейєрштрасса.

4. Принцип Больцано-Вейєрштрасса. *Всяка нескінченна обмежена послідовність точок має принаймні одну граничну точку.* Це основне положення теорії границь ми доведемо, скориставшись установленим вище принципом вкладених прямокутників (п. 1).

Нехай маємо обмежену послідовність точок

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \tag{12}$$

Всі точки цієї послідовності лежать всередині якогось прямокутника r_1 з сторонами, паралельними осям координат. Поділивши сторони прямокутника r_1 пополам і сполучивши середини протилежних сторін, ми розіб'ємо прямокутник r_1 на чотири конгруентні прямокутники (рис. 11). Серед цих чотирьох прямокутників є принаймні

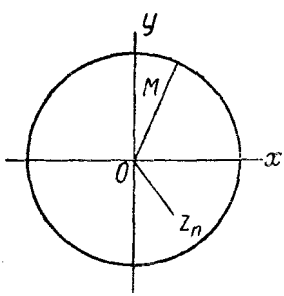

Рис. 10

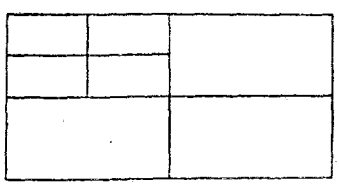

Рис. 11

один, який має в собі нескінченну множину точок даної послідовності (12), тому що в противному разі на прямокутнику r_1 було б скінченне число точок послідовності (12). Назвемо цей прямокутник r_2 і поділимо його знову тим самим способом на чотири конгруентні прямокутники. Принаймні на од-

ному з них, назвемо його r_3, буде знову лежати нескінченна множина точок даної послідовності (12); поділимо його на чотири конгруентні прямокутники і продовжуємо так далі. Наш процес буде продовжуватися необмежено, і ми дістанемо нескінченну послідовність прямокутників r_1, r_2, $r_3, \ldots$, кожний з яких містить в собі дальший прямокутник, з діагоналями, що прямують до нуля, і таких, що кожному прямокутникові r_n належить нескінченна множина точок даної послідовності (кожну точку лічимо стільки разів, яка її кратність). На підставі принципу „вкладених прямокутників" (п. 1) ми робимо висновок, що існує точка, яка належить всім прямокутникам r_n. Ця точка буде граничною для даної послідовності точок. Справді, описавши навколо цієї точки, як центра, коло довільно малого радіуса ε, ми бачимо, що, починаючи з якогось достатньо великого n, всі прямокутники r_n лежатимуть всередині цього кола, і тому що на кожному прямокутнику r_n є нескінченна множина точок даної послідовності, то і всередині проведеного кола буде міститися нескінченна множина таких точок. Отже, побудована точка є гранична для даної послідовності точок (12), що і доводить нашу теорему [1]).

5. Поняття збіжної послідовності комплексних чисел. Ми щойно показали, що всяка обмежена послідовність чисел має принаймні одно граничне число.

Якщо обмежена послідовність чисел

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \tag{12}$$

має єдине граничне число z, то кажуть, що ця послідовність збігається до числа z, і символічно це позначають так:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z.$$

Отже, згідно з означенням, збіжна послідовність точок задовольняє дві умови:

1) ця послідовність обмежена;

2) ця послідовність має єдину граничну точку.

Пригадавши означення граничної точки (п. 2), легко виразити за допомогою нерівності збіжність послідовності чисел (12) до числа z: *при всякому як завгодно малому додатному ε нерівність $|z - z_n| < \varepsilon$ вдовольняється, починаючи з якогось достатньо великого n*, або, що є те саме, $\lim\limits_{n \to \infty} |z - z_n| = 0$.

Геометрично: *послідовність точок z_n збігається до точки z, коли майже всі точки цієї послідовності* (тобто всі точки крім скінченного числа точок) *лежать всередині круга з центром у точці z як завгодно малого радіуса ε.*

[1]) Ніде в доведенні не було використано припущення про те, що розглядана множина точок є послідовність; тому, якщо всюди замінити термін „послідовність" словом „множина", матимемо довід теореми Больцано-Вейєрштрасса в такому загальному формулюванні: всяка нескінченна і обмежена множина точок має принаймні одну граничну точку. (*Ред.*).

6. Основні теореми теорії границь. Користуючись встановленим поняттям границі послідовності комплексних чисел, ми можемо перенести в комплексну область відомі теореми про границі послідовностей дійсних чисел. Наприклад, коли дано дві послідовності комплексних чисел

$$z_1,\ z_2, \ldots,\ z_n, \ldots;\ z_1',\ z_2', \ldots,\ z_n', \ldots, \tag{13}$$

які збігаються відповідно до чисел z і z', то, утворюючи нову послідовність чисел

$$w_1,\ w_2, \ldots,\ w_n, \ldots, \tag{14}$$

де взято $w_n = z_n \pm z_n'$, або $w_n = z_n \cdot z_n'$, або $w_n = \frac{z_n}{z_n'}$ (в останньому випадку $z_n' \neq 0$), ми впевнюємося, що ця послідовність (14) збігається і має за свою границю w, при чому $w = z \pm z'$ або $w = z \cdot z'$, або $w = \frac{z}{z'}$ (в останньому випадку припускаємо $z' \neq 0$), тобто

$$\lim_{n\to\infty} (z_n \pm z_n') = \lim_{n\to\infty} z_n \pm \lim_{n\to\infty} z_n';$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n z_n' = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} z_n';$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z_n'} = \frac{\lim z_n}{\lim z_n'} \qquad (\lim z_n' \neq 0).$$

На доведенні цих елементарних теорем теорії границь ми не спиняємося, тому що воно виконується аналогічно доведенню відповідних положень теорії границь дійсних чисел.

7. Критерій Коші. Як відомо з основ теорії границь, Коші дав критерій, що характеризує збіжну послідовність чисел. Ця ознака Коші полягає ось у чому: *умова, необхідна й достатня для збіжності послідовності комплексних чисел*

$$z_1,\ z_2, \ldots,\ z_n, \ldots, \tag{12}$$

полягає в тому, щоб при всякому скільки завгодно малому додатному ε *існувало натуральне число* $N = N(\varepsilon)$ *таке, щоб нерівність:* $|z_{N+m} - z_N| < \varepsilon$ *виконувалась, яке б не було* m, $m \geqslant 0$.

Геометрично цей критерій означає, *що послідовність точок* z_n *буде збіжною лише в тому разі, коли всі її точки, починаючи з номера* N, $N = N(\varepsilon)$, *лежать всередині круга з центром у точці* z_N *радіуса* ε.

Необхідність цієї умови довести дуже легко. Справді, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, то знайдеться таке число $N = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, що при $n \geqslant N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ справджується нерівність: $|z - z_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Помітивши, що $z_{N+m} - z_N = (z_{N+m} - z) + (z - z_N)$,

маємо:

$$|z_{N+m}-z_N| \leqslant |z_{N+m}-z|+|z-z_N|$$

За умовою матимемо:

$$|z-z_N|<\frac{\varepsilon}{2},\ |z_{N+m}-z|<\frac{\varepsilon}{2},$$

отже

$$|z_{N+m}-z_N|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

при всякому $m \geqslant 0$, що й потрібно.

Покажемо достатність ознаки. Вважаючи умову Коші виконаною, ми бачимо, що всі точки послідовності (12), починаючи з точки z_N, лежать всередині круга радіуса ε з центром у цій точці. Отже, наша послідовність точок (12) є обмежена. Залишається показати, що вона не може мати двох різних граничних точок A і B. Справді, припускаючи супротивне, візьмемо $\varepsilon<\frac{1}{2}\overline{AB}$. Цьому числу ε відповідає натуральне число $N=N(\varepsilon)$ таке, що абсолютна величина різниці $|z_{N+m}-z_N|<\varepsilon$, тобто всі точки послідовності (12), починаючи з точки z_N, лежать всередині круга з центром у точці z_N радіуса ε (рис. 12). Поза цим кругом може бути лише скінченне число точок даної послідовності, і, значить, обидві граничні точки A і B повинні лежати всередині круга або на його колі. В такому разі віддаль між ними $\overline{AB}$ повинна бути не більша ніж діаметр 2ε, а ми взяли $\overline{AB}>2\varepsilon$, звідки виходить суперечність. Отже, при виконанні умови Коші послідовність точок (12) збігається, тому що вона обмежена і не може мати більше однієї граничної точки, а значить, — за принципом Больцано-Вейєрштрасса (п. 4) — має одну граничну точку.

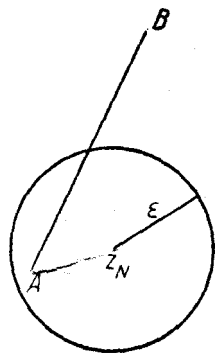

Рис. 12

§ 4. Числова сфера. Нескінченно віддалена точка

1. Зображення комплексних чисел на сфері. Нескінченно віддалена точка. Послідовність точок

$$z_1,\ z_2,\ldots,z_n,\ldots \tag{12}$$

називається, як відомо, необмеженою, коли є точки цієї послідовності, які лежать поза кругом з центром у нульовій точці скільки завгодно великого радіуса. Необмежена послідовність точок, як ми бачили, може не мати граничних точок. В цьому разі умовимося казати, що послідовність чисел (12) прямує до нескінченності, це символічно будемо записувати так:

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\infty. \tag{15}$$

Остання рівність показує, що послідовність чисел (12) не має граничного числа.

Щоб дати рівності (12) просте геометричне тлумачення, будемо зображати комплексні числа точками на сфері. З цією метою візьмемо сферу, дотичну до площини в нульовій точці O (рис. 13). Діаметр сфери OP, що проходить через точку O, буде перпендикулярним до площини; другу точку його перерізу з сферою, точку P, назвемо полюсом. Всяке комплексне число z зображається точкою на площині; сполучаючи цю точку з полюсом прямою лінією Pz, матимемо в перерізі цієї прямої і сфери єдину точку (відмінну від P), яку вважатимемо за зображення комплексного числа z. Отже, кожне комплексне число зображається якоюсь точкою сфери; навпаки, кожній точці сфери, крім полюса P, відповідає єдина точка на площині, яка утворюється в перерізі з площиною променя, що проходить через P і досліджувану точку; таким чином всяка точка сфери, крім полюса P, зображає якесь комплексне число. Отже, ми встановлюємо взаємно однозначну і взаємно неперервну відповідність між точками площини і точками сфери (з виключенням точки P). Ця сфера, з якої викинуто точку P, є зображенням сукупності всіх комплексних чисел. Подивимось, яке взаємне відношення точки P з іншими точками сфери. Якщо послідовність чисел z_n прямує до нескінченності, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, то точки, які їх зображають на сфері, необмежено наближаються до точки P. Звідси природно вважати точку P за зображення символу нескінченності, а відповідну їй єдину точку площини назвати *нескінченно віддаленою* точкою цієї площини.

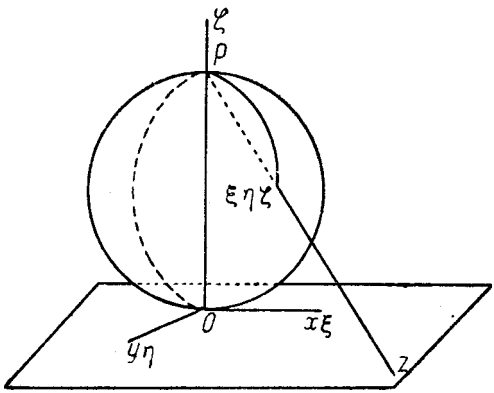

Рис. 13

Таким чином на комплексній числовій площині ми приймаємо єдину нескінченно віддалену точку (зображувану на сфері точкою P) на відміну від площини проективної геометрії, де розглядається нескінченно віддалена пряма, тобто нескінченна множина різних нескінченно віддалених точок.

Таким чином за допомогою зазначеного перетворення, яке називається стереографічною проекцією, ми встановлюємо взаємно однозначну відповідність між точками сфери і точками площини, включаючи її єдину нескінченно віддалену точку. Ця сфера, точки якої зображають сукупність всіх комплексних чисел і нескінченності, називається *комплексною числовою сферою* або

сферою Рімана. Перевага зображення комплексних чисел на сфері замість площини полягає в тому, що нескінченно віддалена точка стає при цьому рівноправною з усіма іншими точками сфери. З попереднього ясно, що одним з мотивів, які пояснюють, чому є одна нескінченно віддалена точка на числовій площині, служить та обставина, що рівність $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ еквівалентна умові: $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, подібно до того, як рівність $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ рівнозначна з умовою: $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$. Інакше кажучи, подібно до того, як нульова точка не має певного аргументу, так само нескінченно віддалена точка не має певного аргументу.

В усьому дальшому, якщо не зостережено супротивного, ми будемо позначати буквою z всяку звичайну точку площини, і сукупність всіх таких точок будемо називати *площиною комплексного змінного.* Площину комплексного змінного разом з нескінченно віддаленою точкою будемо називати *розширеною* площиною комплексного змінного.

2. Формули стереографічної проекції. В попередньому пункті ми дали геометричну конструкцію стереографічної проекції; тепер ми почнемо виведення формул цього перетворення, тобто розв'яжемо задачу: *знаючи комплексне число, визначити координати відповідної точки сфери, і навпаки.* Для розв'язання цієї задачі виберемо систему просторових осей координат $O\xi\eta\zeta$ так, що осі $O\xi$ і $O\eta$ збігаються відповідно з осями Ox і Oy на числовій площині, а вісь $O\zeta$ напрямлена по діаметру OP (рис. 13). Величину діаметра сфери для простоти приймемо за одиницю.

Комплексне число $z = x + yi$ зображається на площині точкою з координатами x, y; на сфері нехай це число зобразиться точкою з координатами ξ, η, ζ. Тому що центр сфери лежить в точці $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ і радіус її дорівнює $\frac{1}{2}$, то ξ, η, ζ повинні задовольняти таке рівняння сфери:

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{або} \quad \xi^2 + \eta^2 = \zeta(1 - \zeta). \tag{16}$$

Далі, через те що три точки $(0, 0, 1)$, (ξ, η, ζ) і $(x, y, 0)$ лежать на одній і тій же прямій лінії, то їх координати повинні задовольняти співвідношенням:

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}. \tag{17}$$

З цих рівностей (17) можна виразити x і y через ξ, η, ζ. Наприклад, порівнюючи перше відношення з третім, а потім друге з третім, знайдемо:

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \quad \text{або} \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}. \tag{18}$$

Ці формули (18) дають вираз координат точки площини через координати відповідної точки сфери. Щоб мати обернені формули, зауважимо, що

$$x^2+y^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}=\frac{\zeta}{1-\zeta}, \tag{18'}$$

звідки знаходимо:

$$\zeta=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}; \tag{19''}$$

знаючи ж ζ, з формул (18) зараз же визначаємо ξ і η:

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+1}, \tag{19}$$

$$\eta=\frac{y}{x^2+y^2+1}. \tag{19'}$$

Формули (19), (19′) і (19″) дають вирази для координат точки сфери через компоненти x і y комплексного числа.

3. Основна властивість стереографічної проекції. Тепер ми доведемо таку дуже важливу властивість стереографічної проекції: *при стереографічній проекції всяке коло площини переходить в коло сфери, і навпаки.* Треба зауважити, що в цьому скороченому формулюванні теореми слово „коло“ треба розуміти в його широкому значенні, включаючи сюди і пряму лінію, як коло з нескінченно великим радіусом.

Дійсно, рівняння якого завгодно кола на площині xy має вигляд:

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0, \tag{20}$$

де A, B, C і D — дійсні числа. Зокрема, при $A=0$ рівняння (20) зображає пряму лінію. Щоб визначити відповідну лінію на сфері, замінимо в рівнянні (20) x і y їх виразами через ξ, η, ζ; за формулами (18) і (18′) знайдемо:

$$A\frac{\zeta}{1-\zeta}+B\frac{\xi}{1-\zeta}+C\frac{\eta}{1-\zeta}+D=0,$$

або

$$B\xi+C\eta+(A-D)\zeta+D=0. \tag{21}$$

Одержане рівняння (21), будучи першого степеня, зображає площину. Таким чином, координати ξ, η, ζ задовольняють два рівняння: (16) і (21), і, значить, точки (ξ, η, ζ) лежать на перерізі сфери (16) з площиною (21), тобто утворюють коло на числовій сфері.

Легко бачити, що, навпаки, всяке коло сфери (16) перейде в коло числової площини, тому що, користуючись довільністю чисел A, B, C і D, ми можемо у вигляді (21) зобразити рівняння якої завгодно площини. Очевидно, коло сфери переходить у пряму лінію площини в тому разі, якщо це коло проходить через полюс сфери, бо площина (21) при $A=0$ проходить через точку P (0, 0, 1).

Цей факт, проте, очевидний і геометрично: коло сфери, яке відповідає прямій лінії площини, повинно проходити через точку P, яка відповідає нескінченно віддаленій точці площини.

§ 5. Ряди

1. Поняття збіжного і розбіжного ряду. Розглянемо нескінченний ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{22}$$

всі члени якого є комплексні числа, і утворимо суму перших n членів цього ряду:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n. \tag{23}$$

Даючи n значення 1, 2, 3, ..., ми дістаємо нескінченну послідовність комплексних чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, яка відповідає рядові (22). Навпаки, знаючи послідовність чисел s_n, легко написати відповідний їй ряд, для якого сума перших n членів дорівнює s_n:

$$s_1 + (s_2 - s_1) + \ldots + (s_n - s_{n-1}) + \ldots$$

Ми умовимося казати, що *ряд* (22) *збігається, коли відповідна йому послідовність чисел* s_n *збігається, і в цьому разі назвемо сумою ряду* (22) *границю зазначеної послідовності.* Отже, ряд (22) називається збіжним, якщо сума (23) перших n його членів збігається, коли n прямує до нескінченності $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Число s є сума даного нескінченного ряду. Якщо сума s_n перших n членів ряду (22) не збігається, то ряд (22) називають розбіжним.

У випадку розбіжного ряду може трапитися, що або сума s перших n його членів прямує до нескінченності, або s_n не прямує ні до якої певної границі. В першому випадку ряд називають власне розбіжним, у другому — коливним. З викладеного виходить, що питання про збіжність або розбіжність ряду (22) еквівалентне питанню про збіжність або розбіжність відповідної послідовності комплексних чисел (23). Наприклад, ряд $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$ збігається при $|q| < 1$ і є власне розбіжний при $|q| > 1$. Дійсно, сума s_n перших членів n цього ряду зображається так:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Тому що $|q^n| = |q|^n$, то у випадку $|q| < 1$ змінна q^n прямує до нуля при необмеженому зростанні n, а у випадку $|q| > 1$ прямує до нескінченності. Отже маємо:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q} \quad \text{при} \quad |q| < 1 \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \quad \text{при} \quad |q| > 1.$$

2. Необхідна ознака збіжного ряду. Припускаючи, що ряд (22) збіжний, легко показати, що його загальний член u_n прямує

до нуля при необмеженому зростанні номера n. Дійсно, через те, що послідовність чисел s_n збігається, то

$$\lim_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=0,$$

тому що

$$\lim_{n\to\infty}s_{n+1}=s \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty}s_n=s,$$

або, що є те саме,

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0. \tag{24}$$

Отже, в усякому збіжному ряду загальний член прямує до нуля при необмеженому зростанні його номера n. Рівність (24) виражає необхідну ознаку збіжності нескінченного ряду; значить у тих випадках, коли ця ознака не виконується, ряд розбігається. Наприклад, ряд $1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$ розбіжний при $|q|\geqslant 1$, тому що в цьому разі його загальний член q^n не прямує до нуля при необмеженому зростанні n: при $|q|>1$ змінна q^n прямує до нескінченності, при $|q|=1$ модуль цієї змінної q^n весь час дорівнює одиниці. В попередньому пункті ми бачили, що цей ряд є власне розбіжний, коли $|q|>1$; при $|q|=1$ цей ряд буде, взагалі кажучи, коливний (за винятком $q=1$, коли він власне розбіжний), тому що в цьому разі сума перших n його членів $s_n=\frac{1-q^n}{1-q}$ $(q\neq 1)$ не прямує до нескінченності при необмеженому зростанні n [1]).

Встановлена ознака збіжності (24), будучи необхідною, не є достатньою, тобто цей критерій може виконуватися і у випадку розбіжного ряду, як це показує приклад відомого з аналізу гармонічного ряду

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

3. Поняття абсолютно збіжного ряду. В теорії рядів з комплексними членами дуже важливим є поняття абсолютно збіжного ряду. Розглянемо разом з рядом (22) новий ряд, членами якого є модулі членів ряду (22):

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots \tag{22'}$$

[1]) Коли $|q|=1$, $q\neq 1$, то, поклавши $q=\cos\alpha+i\sin\alpha$ $(0<\alpha<2\pi)$, знайдемо, що

$$s_n=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos(n-1)\frac{\alpha}{2}+i\sin(n-1)\frac{\alpha}{2}\right],$$

$$|s_n|=\frac{\left|\sin\frac{n\alpha}{2}\right|}{\sin\frac{\alpha}{2}}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \quad (\textit{Ред.}).$$

Дослідження збіжності ряду (22′) з додатними членами становить задачу більш просту, ніж дослідження збіжності ряду (22). Справді, сума перших n членів ряду (22′) — позначимо її σ_n — не спадає з зростанням n і, значить, або залишається обмеженою при якому завгодно n, або прямує до нескінченності при необмеженому зростанні n. В першому випадку послідовність неспадних чисел σ_n має єдину границю, і, значить, ряд (22′) збігається; в другому випадку цей ряд є розбіжний. Таким чином, збіжність ряду з додатними членами характеризується тим фактом, що суми перших n його членів утворюють обмежену послідовність чисел. Користуючись цим зауваженням, у теорії рядів виводять різні достатні ознаки збіжності таких рядів.

Щождо залежності між рядами (22) і (22′), то вона встановлюється за допомогою такої теореми:

Якщо ряд (22′), *утворений з модулів членів даного ряду* (22), *збігається, то збігається і даний ряд* (22); *коротше, із збіжності ряду* (22′) *випливає збіжність ряду* (22).

При доведенні теореми скористуємося необхідною і достатньою ознакою збіжності Коші (§ 3, п. 7). Помітивши, що

$$|s_{N+m}-s_N|=|u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots+u_{N+m}|\leqslant|u_{N+1}|+$$
$$+|u_{N+2}|+\ldots+|u_{N+m}|,$$

напишемо останню суму у вигляді різниці $\sigma_{N+m}-\sigma_N$; матимемо:

$$|s_{N+m}-s_N|\leqslant\sigma_{N+m}-\sigma_N. \tag{25}$$

За умовою теореми ряд (22′) є збіжний, отже, через необхідність ознаки Коші при всякому як завгодно малому додатному ε знайдеться таке $N=N(\varepsilon)$, що $\sigma_{N+m}-\sigma_N<\varepsilon$, де m — довільне ціле додатне число. З нерівності (25) виходить:

$$|s_{N+m}-s_N|<\varepsilon,$$

при чому остання нерівність має місце при всякому $\varepsilon>0$, $N=N(\varepsilon)$, незалежно від $m\geqslant 0$. Через достатність ознаки Коші звідси виходить збіжність даного ряду (22).

Умовимося називати ряд з комплексними членами (22) *абсолютно або безумовно збіжним, якщо збігається ряд* (22′), *складений з модулів його членів.* Доведена теорема переконує нас у тому, що всякий абсолютно збіжний ряд є ряд збіжний. Був би помилковим супротивний висновок: інакше кажучи, існують ряди збіжні, але не абсолютно. Такі ряди назвемо *умовно збіжними.* Прикладом умовно збіжного ряду може бути ряд: $1-\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ З теорії рядів відомо, що цей ряд збіжний; ряд з модулів його членів, будучи гармонічним, — розбіжний. Прикладом абсолютно збіжного ряду може бути ряд: $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-$ $-\frac{1}{4^2}+\ldots$

Абсолютно збіжні ряди мають важливе значення в аналізі, тому що основні операції над ними, як ми це далі побачимо, підлягають тим самим законам, що й дії над скінченними сумами.

4. Додавання й віднімання рядів. Нехай нам дано два ряди з комплексними членами:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{22}$$

$$u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots \tag{26}$$

Додаючи (або віднімаючи) відповідні члени цих рядів, ми утворюємо новий ряд:

$$(u_1 \pm u'_1) + (u_2 \pm u'_2) + \ldots + (u_n \pm u'_n) + \ldots, \tag{27}$$

який називається *сумою* (або різницею) *двох даних рядів. Якщо дані ряди збіжні і мають відповідно суми* s і s', *то ряд* (27) *збіжний і має своєю сумою* $S = s \pm s'$. Справді, позначаючи через s_n і s'_n суми перших n членів рядів (22) і (26), маємо:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n, \quad s' = \lim_{n\to\infty} s'_n,$$

звідки виходить

$$s \pm s' = \lim_{n\to\infty} (s_n \pm s'_n).$$

Остання рівність переконує нас у справедливості наведеного вище твердження, бо

$$s_n \pm s'_n = (u_1 \pm u'_n) + (u_2 \pm u'_n) + \ldots + (u_n \pm u'_n)$$

є сума перших n членів ряду (27).

Отже, всякі два збіжні ряди можна почленно додавати або віднімати. Операції додавання й віднімання поширюються, таким чином, на клас усіх (умовно або безумовно) збіжних нескінченних рядів. Інакше буде справа з операцією множення, яку, взагалі кажучи, не можна застосовувати до умовно збіжних рядів.

5. Теорема про подвійні ряди. З даного нескінченного ряду

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{22}$$

можна утворити — і до того безліччю різних способів — нескінченну множину рядів таких, що кожний член u_n початкового ряду входить до одного і тільки до одного з нових рядів і, до того, лише один раз. Наприклад, таким розкладом ряду (22) на нескінченну множину рядів буде:

$$\begin{array}{l}
u_1 + u_2 + u_4 + u_7 + u_{11} \ldots \\
u_3 + u_5 + u_8 + u_{12} + \ldots \\
u_6 + u_9 + u_{13} + \ldots \\
u_{10} + u_{14} + u_{19} + \ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

В загальному випадку такий розклад ряду (22) на нескінченну множину рядів позначимо у вигляді таблиці:

$$\left.\begin{array}{l} u_{\alpha_1}+u_{\alpha_2}+u_{\alpha_3}\ldots \\ u_{\beta_1}+u_{\beta_2}+u_{\beta_3}\ldots \\ u_{\gamma_1}+u_{\gamma_2}+u_{\gamma_3}\ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \tag{28}$$

Доведемо таке твердження: *якщо ряд* (22) *абсолютно збіжний і має своєю сумою* s, *то кожний з рядів* (28) *також абсолютно збіжний*; *якщо суми рядів* (28) *позначимо відповідно через* s_1, s_2, s_3, ..., *то ряд*

$$s_1+s_2+s_3+\ldots \tag{29}$$

абсолютно збіжний і має своєю сумою s.

Зауваження. Властивість, що виражається цією теоремою, вірна для нескінченного ряду лише при умові його абсолютної збіжності. Для умовно збіжного ряду, взагалі кажучи, не можна твердити, що його частина збіжна. Наприклад, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ збіжний; однак ряди $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots$, $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\ldots$ розбіжні.

Доведемо, що ряд $|u_{\alpha_1}|+|u_{\alpha_2}|+\ldots$ є збіжний. Дійсно, його частинні суми (суми якого завгодно числа перших членів) залишаються меншими від скінченного числа

$$\sigma=|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots$$

Отже, перший з рядів (28) абсолютно збіжний; аналогічно доведемо, що кожний з рядів (28) абсолютно збіжний. Виявимо тепер, що ряд (29) абсолютно збіжний. Дійсно, додаючи одну до одної нерівності:

$$\begin{array}{l} |s_1|\leqslant|u_{\alpha_1}|+|u_{\alpha_2}|+\ldots, \\ |s_2|\leqslant|u_{\beta_1}|+|u_{\beta_2}|+\ldots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ |s_m|\leqslant|u_{\gamma_1}|+|u_{\gamma_2}|+\ldots, \end{array}$$

матимемо:

$$|s_1|+|s_2|+\ldots+|s_m|\leqslant\sigma;$$

тому що остання нерівність вірна при всякому m, то звідси виходить абсолютна збіжність ряду (29).

Залишається показати, що сума абсолютно збіжного ряду (29) дорівнює сумі s початкового ряду (22). Для цього досить показати, що різниця $s-(s_1+s_2+\ldots+s_m)$ прямує до нуля при необмеженому зростанні m. Оцінимо модуль цієї різниці. Через те, що s є сума даного ряду (22), а s_1, s_2, ..., s_m — суми перших m рядів таблиці (28), то ми можемо твердити, що

$$|s-(s_1+s_2+\ldots+s_m)|\leqslant|u_{\nu_1}|+|u_{\nu_2}|+\ldots,$$

де індекси $\nu_1, \nu_2, \ldots$ є номери всіх тих членів даного ряду, які не входять ні до одного з m перших рядів таблиці (28). Позначаючи через n довільне натуральне число, виберемо m таке велике, щоб усі індекси $\nu_1, \nu_2, \ldots$ були більші n.

В цьому випадку, очевидно, маємо $|s-(s_1+s_2+\ldots+s_m)| \leqslant |u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots$; тому що даний ряд абсолютно збіжний, то, вважаючи n достатньо великим, ми маємо право твердити:

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots<\varepsilon,$$

де ε — як завгодно мале додатне число. Таким чином ми бачимо, що, починаючи з достатньо великого m, виконується нерівність

$$|s-(s_1+s_2+\ldots+s_m)|<\varepsilon,$$

що доводить збіжність ряду (29) до суми s.

6. Переставлення членів ряду. *В абсолютно збіжному ряду можна довільно переставляти його члени, не змінюючи суми ряду.* Дійсно, переставивши члени ряду (22), матимемо новий ряд:

$$u_{\alpha_1}+u_{\alpha_2}+u_{\alpha_3}+\ldots, \tag{30}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ означає сукупність всіх натуральних чисел, написаних в будьякому порядку. Вважаючи $s_1=u_{\alpha_1}$, $s_2=u_{\alpha_2}, \ldots$, ми бачимо, на підставі доведеної в попередньому пункті теореми, що коли ряд (22) абсолютно збіжний, то абсолютно збіжний є і новий ряд (30), при чому сума нового ряду дорівнює, як і раніше, s.

З теорії рядів відомо, що в ряді умовно збіжному, взагалі кажучи, не можна переставляти членів без зміни його суми. Більш того, існує твердження, що з усякого умовно збіжного ряду за допомогою переставлення його членів можна дістати новий ряд, збіжний до числа, зображуваного якою завгодно точкою якоїсь прямої лінії[1]).

7. Множення рядів. Нехай нам дано два ряди

$$u_1+u_2+u_3+\ldots, \tag{22}$$

$$u'_1+u'_2+u'_3+\ldots \tag{26}$$

Утворюємо новий ряд:

$$u_1u'_1+(u_1u'_2+u_2u'_1)+\ldots+(u_1u'_n+u_2u'_{n-1}+\ldots+u_nu'_1)+\ldots, \tag{31}$$

який називається *добутком двох даних рядів.*

---

[1]) Ось повне формулювання цього твердження, яке належить Штейніцу (E. Steinitz, Journ. für die reine und angew. Math. т. 143, 1913): для кожного ряду комплексних чисел завжди має місце один і тільки один із таких трьох випадків: або при довільному переставленні членів ряду його сума зображається однією і тією ж точкою числової площини, або відповідним переставленням членів ряду можна примусити точку — зображення суми ряду збігтися з довільною точкою певної цілком визначеної цим рядом прямої, або, нарешті, переставляючи відповідним чином члени ряду, можна примусити точку, що зображає суму ряду, збігтися з довільною точкою числової площини. *(Ред.).*

Доведемо таке твердження: *якщо дані ряди* (22) *і* (26) *абсолютно збіжні і мають своїми сумами відповідно* s і s', *то новий ряд* (31) *також абсолютно збігається і має сумою число* $S = s \cdot s'$.

Для доведення розглянемо попарні добутки всіх членів рядів (22) і (26):

$$u_1u'_1, \quad u_1u'_2, \quad u_2u'_1, \quad u_1u'_3, \quad u_2u'_2, \ldots \tag{32}$$

і покажемо, що ряд, членами якого є числа (32), абсолютно збігається. Для цього досить довести, що всяка сума виду: $|u_1u'_1| + |u_1u'_2| + |u_2u'_1| + \ldots + |u_ku'_s|$ залишається меншою від сталого числа. Позначаючи через n найбільший номер членів рядів (22) і (26), що входять в розглядану суму, легко бачимо, що вона не більша за добуток:

$$(|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|)\,(|u'_1| + |u'_2| + \ldots + |u'_n|),$$

а значить і менша $\sigma \cdot \sigma'$, де було взято: $\sigma = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots$; $\sigma' = |u'_1| + |u'_2| + |u'_3| + \ldots$ Таким чином, до ряду, членами якого служать числа (32), можна застосувати доведену в п. 5 теорему подвійних рядів, взявши:

$$s_1 = u_1u'_1, \quad s_2 = u_1u'_2 + u_2u'_1, \ldots,$$
$$s_n = u_1u'_n + u_2u'_{n-1} + \ldots + u_nu'_1, \ldots$$

На підставі цієї теореми ряд (31) є абсолютно збіжний. Залишається показати, що сума ряду (31) дорівнює $s \cdot s'$. Для цього інакше групуємо члени (32), а саме вважаємо: $s_1 = u_1u'_1 + u_1u'_2 + u_1u'_3 + \ldots$; $s_2 = u_2u'_1 + u_2u'_2 + u_2u'_3 + \ldots$ і т. д. Ряди $s_1, s_2, \ldots$ абсолютно збіжні на підставі загальної теореми п. 5. Виносячи в першому ряду u_1 за дужку, упевнюємося, що його сума s_1 дорівнює $u_1 \cdot s'$. Аналогічно матимемо: $s_2 = u_2 \cdot s'$ і т. д. Нарешті, ряд $s_1 + s_2 + \ldots$ або $u_1 \cdot s' + u_2 \cdot s' + \ldots$ є абсолютно збіжний, сума якого, очевидно, дорівнює:

$$(u_1 + u_2 + \ldots) \cdot s' = s \cdot s'.$$

На підставі теореми п. 5 ця сума збігається з сумою ряду (31).

Отже, ми бачимо, що основні операції з скінченними сумами як от: переставлення доданків і множення таких сум, поширюються на нескінченні ряди при умові їх абсолютної збіжності. Перемножаючи, взагалі кажучи, два умовно збіжні ряди, ми можемо в результаті дістати розбіжний ряд, і, таким чином, теорема про множення рядів не може бути застосована до умовно збіжних рядів.

Проте, як ми побачимо далі, ця теорема може бути поширена на умовно збіжні ряди, якщо a priori відомо, що в результаті їх множення виходить збіжний ряд.

Викладаючи теорію рядів, ми обмежилися розглядом основних властивостей збіжних рядів. Розбіжні ряди також широко за-

стосовуються в математичному аналізі. Подібно до того, як з усяким збіжним рядом пов'язується певне число, що називається його сумою, можна дати різні регулярні процеси, за допомогою яких визначаються суми для більш або менш широких класів розбіжних рядів. Однак виклад теорії розбіжних рядів виходить за межі цього підручника.

Вправи до розділу I

1. Виразити $\cos nx$ і $\sin nx$ через степені $\sin x$ і $\cos x$, користуючись формулою Муавра.

Відп.

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4} x \sin^4 x -$$

$$\sin nx = n\cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5}\cos^{n-5} x \sin^5 x -$$

2. Де лежать точки z, для яких $|z| + R(z) \leqslant 1$?

Відп. Всередині параболи $r = \dfrac{1}{1+\cos\varphi}$ і на ній.

3. Зобразити в комплексній формі вираз $\sqrt{1+i}$.

Відп. $\sqrt{1+i} = \pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$.

4. Визначити x і y, якщо $x + yi = \sqrt{a+bi}$.

Відп. $x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$;

знаки треба взяти однакові, коли b додатне, і різні, коли b від'ємне.

5. Де лежать точки z, для яких:

a) $|z| \leqslant 2$; b) $|z| > 2$; c) $R(z) \geqslant \dfrac{1}{2}$; d) $R(z^2) = a$;

e) $|z^2 - 1| = a > 0$; f) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1$; g) $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| = 1$.

Відп. d) Гіпербола, пара прямих при $a = 0$. e) Лемніската. f) Права півплощина, включаючи границю. g) Пряма, перпендикулярна до середини відрізка z_1z_2.

6. Коли три точки z_1, z_2, z_3 лежать на прямій лінії?

Відп. Відношення різниць $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ повинно бути дійсним числом.

7. Коли чотири точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежать на колі?

Відп. Подвійне відношення $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ — дійсне число.

8. Перевірити тотожність $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1| + |z_2|^2)$. Яке геометричне твердження виражає це рівняння?

Відп В паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює подвоєній сумі квадратів суміжних сторін.

9. Яка точка z поділяє відрізок z_1z_2 у відношенні $\lambda_1 : \lambda_2$?

Відп. $z = \dfrac{\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

10. Трикутник має вершини z_1, z_2, z_3. Де лежить його центр ваги, якщо: a) в кожній вершині маса λ, b) у вершинах маси λ_1, λ_2, λ_3?

Відп. a) $z = \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$; b) $z = \dfrac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$

11. Показати, що центр ваги системи матеріальних точок з масами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, які містяться в геометричних точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежить в точці $z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots + \lambda_n z_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}$.

12. Для трьох точок z_1, z_2, z_3 виконуються умови:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \quad \text{і} \quad |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1.$$

Показати, що z_1, z_2, z_3 є вершини вписаного в одиничне коло рівностороннього трикутника.

13. Якщо $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ і $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$, то чотири точки z_i утворюють вписаний в одиничне коло прямокутник.

14. $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ — довільна послідовність точок, z_0 — її гранична точка. Показати, що з послідовності z_i можна завжди вибрати частинну послідовність $z_1', z_2', \ldots$ так, щоб $z_n' \to z_0$.

15. З умови $z_n \to z_0$ показати $z_n' = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} \to z_0$. Чи правильно це, коли $z_0 = \infty$?

16. Нескінченний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ тоді і тільки тоді збіжний, коли при довільному виборі цілих додатних чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ маємо:

$$\lim_{n \to \infty} (c_{n+p_1} + c_{n+p_2} + \ldots + c_{n+p_n}) = 0.$$

Розділ II

Комплексне змінне і функції комплексного змінного

§ 1. Функції комплексного змінного

1. Поняття функції комплексного змінного. Розглянемо множину E комплексних чисел і умовимося, що комплексне число $z=x+yi$ можна утотожнити з кожним числом цієї множини E; в такому разі ми назвемо *z комплексним змінним*, а *E — його областю зміни*. Геометрично область E зміни комплексного змінного z зобразиться через множину точок у комплексній числовій площині або на числовій сфері. Як і раніше, ми будемо позначати через E цю множину точок і будемо її називати областю зміни комплексного змінного z. Якщо ми скористуємося для зображення чисел множини E числовою сферою, то немає потреби виключати випадок, коли нескінченно віддалена точка належить до E, тобто коли серед чисел множини E є нескінченність. Ми назвемо *w функцією незалежного комплексного змінного z, коли кожному значенню, яке може приймати z, тобто кожному числу множини E, відповідає за певним законом комплексне числове значення $w=u+vi$*. Символічно це позначають так: $w=f(z)$. Якщо $z=x+yi$, то u і v є дійсні функції двох дійсних змінних x, y. Таким чином, завдання w як функції комплексного змінного z зводиться до завдання двох функцій u і v змінних x і y. Може трапитися, що кожному значенню комплексного змінного z відповідає декілька значень змінного w. В цьому випадку w називається многозначною функцією комплексного змінного z, тоді як в першому випадку вона називається однозначною функцією. Надалі, якщо не застережено супротивного, ми матимемо справу лише з однозначними функціями.

Кожній точці множини E, яка служить областю зміни для змінного z, відповідає певне комплексне число w. Зображаючи останнє як точку в числовій площині або на числовій сфері, ми дістаємо множину точок E'. Отже, завдання w як функції комплексного змінного z геометрично зводиться до встановлення відповідності між множинами точок E і E', на підставі якої кожній точці множини E відповідає певна точка множини E' В цьому разі кажуть, що множина точок E відображається на множину точок E'. При цьому деякі точки множини E' можуть

бути кратними, це буде тоді, коли різним значенням z відповідає те саме значення w. Розглядаючи відповідність між точками множин E і E' як відображення множини E' на множину E, ми дістаємо для кожного значення комплексного змінного w, яке змінюється на множині точок E', одно або декілька (скінченну або нескінченну множину) значень z. Отже, навпаки, z можна розглядати як функцію комплексного змінного w. Така функція називається *оберненою* функцією відносно функції $w=f(z)$. Якщо різним значенням комплексного змінного z відповідають різні значення функції w, то відображення множин E і E' буде взаємно однозначним, тобто таким, що кожній точці множини E відповідає єдина точка множини E', і, навпаки, кожній точці множини E' — одна точка множини E[1]). В цьому разі z, розглядане як обернена функція w, буде також однозначною функцією. В загальному ж випадку функція, обернена однозначній функції, може бути многозначною і навіть нескінченнозначною. Більш того, функція, обернена однозначній, може мати при кожному значенні незалежного змінного нескінченну множину значень, що утворюють неперервну лінію. Наприклад, $w=|z|$ є однозначна функція комплексного змінного z. Розглядаючи ж z як функцію w, ми бачимо, що даному значенню $w=c$ відповідає нескінченна множина значень z, для яких $|z|=c$, тобто ціле коло. Втім, явища такого роду не можуть мати місця для класу диференційовних функцій, виклад теорії яких є головним завданням цього підручника.

2. Поняття області. Лінія Жордана. В попередньому пункті ми вважали функцію комплексного змінного $w=f(z)$ визначеною на якійсь довільній множині точок E. Далі ми майже виключно вважатимемо за множину точок E, на якій змінюється незалежне змінне z, так звану область площини, означення якої ми і маємо тепер дати. Насамперед з'ясуємо поняття внутрішньої точки множини.

Точку P називають *внутрішньою* точкою множини E, коли всі точки достатньо малого круга з центром у точці P належать цій множині E. Наприклад, розглядаючи всі точки, що містяться між двома концентричними колами, ми дістаємо множину, яка складається з самих тільки внутрішніх точок. Долучаючи ж до цієї множини точки, що лежать на колі (на одному або обох), ми матимемо множину, яка має точки, що не є для неї внутрішніми: такими будуть всі точки, розміщені на колах.

Областю ми називаємо множину G точок площини, яка (множина) задовольняє такі дві умови:

1) G складається з самих тільки внутрішніх точок,

2) які завгодно дві точки множини можна сполучити ламаною з достатньо великим числом ланок, так щоб усі точки цієї лінії належали самій множині.

[1]) Згідно з зробленим вище зауваженням припускаємо, що функція $w=f(z)$ однозначна.

Приміром, наведений вище приклад множини являє собою область; в другому ж випадку ми не маємо області. Коли дано область G, то всі точки площини можна поділити на два класи відносно цієї області. До першого класу ми віднесемо всі точки області G, до другого — точки, які не належать G. Очевидно, точка Q, яка не належить області G (точка другого класу), може бути двоякого типу: або всі точки достатньо малого круга з центром у цій точці Q не належать області G — таку точку Q ми назвемо *зовнішньою* точкою області G,— або, при як завгодно малому крузі з центром у точці Q, в цьому крузі будуть завжди точки області G,— таку точку Q ми назвемо *граничною* точкою області G. Сукупність всіх граничних точок області G називають її *границею* або *межею*. Єдиним прикладом області без границі служить вся розширена площина комплексного змінного. Таким чином, абстрагуючись від цього випадку, можна сказати, що всяка область G має границю. Важливо відмітити, що не завжди існують зовнішні точки області G; наприклад, сукупність всіх точок площини, які не лежать на відрізку дійсної осі $(-1, +1)$, являє собою область, що не має зовнішніх точок.

З'ясувавши поняття області, перейдемо до означення поняття неперервної лінії в розумінні Жордана. Нехай $x(t)$ і $y(t)$ є дійсні неперервні функції змінного t, яке змінюється на відрізку $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Два рівняння:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \qquad (1)$$

дають параметричне зображення неперервної лінії. Якщо ми будемо вимагати, щоб двом різним значенням параметра t відповідали завжди дві різні точки лінії, то наша лінія не матиме кратних точок. Таку лінію ми називатимемо *лінією Жордана* або просто неперервною лінією. Якщо ми візьмемо $z = x + yi$ так, що $z(t) = x(t) + y(t)i$, то її аналітичне зображення можна записати за допомогою одного рівняння:

$$z = z(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \qquad (1')$$

Коли параметр t змінюється, зростаючи на відрізку (α, β), точка z описує лінію Жордана, початком якої служить точка $z(\alpha)$ і кінцем точка $z(\beta)$; тим самим на лінії (1′) встановлюється додатний напрям.

Геометрично лінія Жордана, очевидно, представляє множину точок площини, яка (множина) є взаємно однозначним і неперервним відображенням прямолінійного відрізка. Якщо початок і кінець лінії Жордана збігаються між собою, тобто $z(\alpha) = z(\beta)$, то вона називається замкнутою. Як показав Жордан, неперервна замкнута лінія без кратних точок поділяє площину на дві різні області: одну, яка не має в собі нескінченно віддаленої точки і називається внутрішньою відносно даної лінії, другу, яка має в собі нескінченно віддалену точку і називається зовнішньою відносно даної кривої. Для обох цих областей дана лінія є границею. Ми будемо припускати, що зазначений вище додатний

напрям на лінії вибраний так, що внутрішня частина кривої лежить зліва від точки $z(t)$, яка рухається в цьому напрямі. Замкнуту лінію Жордана геометрично ми можемо розглядати, як взаємно однозначний і неперервний образ кола. Дійсно, не зменшуючи загальності, ми можемо вважати $\alpha=0$, $\beta=2\pi$ і розглядати параметр t як аргумент точки кола. Ті дві області, на які замкнута лінія Жордана поділяє всю розширену площину, мають одну визначну властивість: яку б замкнуту неперервну лінію ми не провели в цій області, її можна неперервною деформацією перетворити в одну точку, не виходячи за границі області.

Взагалі всяку область, яка має цю властивість, ми назвемо *однозв'язною*, а області, які не мають згаданої властивості, — *многозв'язними*. Наприклад, частина площини, що лежить всередині многокутника, є однозв'язна область, границею якої служить цей многокутник; цілком так само частина площини (включаючи нескінченно віддалену точку), яка лежить зовні многокутника, є однозв'язна область, тому що яку завгодно замкнуту неперервну лінію, що лежить в цій області, ми можемо, залишаючись весь час в області, деформувати в одну точку; якщо всередині даної лінії лежить границя області, тобто многокутник, то деформація приводить до нескінченно віддаленої точки.

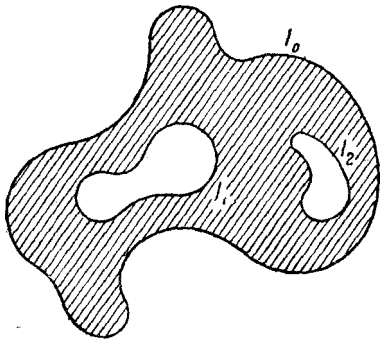

Рис. 14

Навпаки, частина площини (за винятком нескінченно віддаленої точки), яка лежить зовні многокутника, буде многозв'язною, бо замкнуту неперервну лінію, що оточує многокутник, не можна в цьому випадку деформувати в одну точку, залишаючись в даній області. Так само многозв'язною буде область, яка складається з точок z кругового кільця $r<|z-z_0|<R$.

Ми вже відмітили, що частина площини, яка лежить всередині довільної замкнутої лінії Жордана, є однозв'язна область, границею якої служить ця лінія Жордана. Розглядаючи області, границі яких складаються з декількох замкнутих ліній Жордана, ми матимемо приклади многозв'язних областей. Наприклад, нехай $l_0, l_1, \ldots, l_n$ є замкнуті лінії Жордана, такі, що кожна з ліній $l_1, l_2, \ldots, l_n$ лежить зовні поза всіма іншими і всі вони розміщені всередині l_0 (рис. 14).

Множина точок площини, які лежать одночасно всередині лінії l_0 і поза всіма лініями $l_1, l_2, \ldots, l_n$, буде представляти область, границею якої служить сукупність точок ліній $l_0, l_1, \ldots, l_n$. Наприклад, множина точок z, які задовольняють нерівність $r<|z-z_0|<R$, буде областю, границя якої складається з двох кіл радіусів r і R з спільним центром у точці z_0. При $n=0$ ми маємо попередній найпростіший випадок однозв'язної області.

Навпаки, у випадку $n > 0$ існують такі неперервні замкнуті лінії, які не можна деформувати в точку, не виходячи за границі області. Таким чином область, границя якої складається з декількох $n+1$ замкнутих ліній, буде многозв'язною.

Область називається *обмеженою*, коли всі її точки лежать всередині якогось круга з центром у нульовій точці достатньо великого сталого радіуса. В противному разі область називається необмеженою. Далі, якщо не застережено супротивного, під словом „область" ми будемо розуміти довільну обмежену або необмежену область площини, однозв'язну або многозв'язну, яка не має в собі нескінченно віддаленої точки, і будемо її позначати через G. Множину точок, яка складається з точок області G і її граничних точок, ми будемо називати *замкнутою* областю і позначати через $\overline{G}$.

3. Неперервність функції комплексного змінного. Нехай дано однозначну функцію $w = f(z)$ комплексного змінного, визначену в області G площини. Ми скажемо, що *функція $f(z)$ прямує до границі A, коли z прямує до точки z_0 області G, якщо вона задовольняє умову: для кожного довільно малого додатного числа ε можна знайти додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, таке, щоб виконувалась нерівність $|f(z) - A| < \varepsilon$ для всіх z $(z \neq z_0)$, що задовольняють нерівність $|z - z_0| < \delta$.*

Символічно це записують так:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A. \tag{2}$$

Зокрема, якщо $A = f(z_0)$, функція $f(z)$ називається неперервною в точці z_0, тобто, за означенням, *$f(z)$ неперервна в точці z_0, якщо для кожного скільки завгодно малого додатного числа ε існує додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, таке, що виконується нерівність:*

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \tag{3}$$

для всіх z, що задовольняють нерівність:

$$|z - z_0| < \delta, \tag{4}$$

або коротше:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{2'}$$

Геометричний зміст цього означення полягає в тому, що для всіх точок z, які лежать всередині круга $|z - z_0| < \delta$ з центром у точці z_0 достатнього малого радіуса δ, відповідні значення функції $w = f(z)$ зображаються точками, що лежать всередині круга $|w - w_0| < \varepsilon$ з центром в точці $w_0 = f(z_0)$ як завгодно малого радіуса ε. Називаючи множину точок z, які задовольняють нерівність $|z - z_0| < \delta$, околом δ точки z_0, ми можемо формулювати коротше означення неперервності так: *функція $w = f(z)$ називається неперервною в точці z_0, якщо для всіх точок достатньо малого околу точки z_0 відповідні значення функції лежать у довільно малому околі точки $w_0 = f(z_0)$.*

Функція, неперервна в кожній точці області G, називається *неперервною в цій області*. Наприклад, $w = z^n$ неперервна в кожній точці z_0 площини. Дійсно, вважаючи $w_0 = z_0^n$, маємо:

$$w - w_0 = z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \ldots + z_0^{n-1}),$$

переходячи до модулів, ми дістанемо таку нерівність:

$$|w - w_0| = |z - z_0| \cdot |z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \ldots + z_0^{n-1}| \leqslant$$
$$\leqslant |z - z_0| (r^{n-1} + r^{n-2} r_0 + \ldots + r_0^{n-1}),$$

де взято: $|z| = r$, $|z_0| = r_0$. Розглядаючи тепер окіл δ точки z_0, ми бачимо, що для всіх точок z цього околу має місце очевидна нерівність: $r = |z| < OM = r_0 + \delta$ (рис. 15). Тому будемо мати:

$$|w - w_0| \leqslant |z - z_0| [(r_0 + \delta)^{n-1} +$$
$$+ (r_0 + \delta)^{n-2} r_0 + \ldots + r_0^{n-1}] \leqslant n\delta (r_0 + \delta)^{n-1}.$$

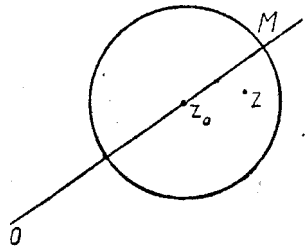

Рис. 15

Звідси ясно, що ми можемо δ вибрати таким малим, щоб $|w - w_0|$ був менший від якого завгодно наперед заданого додатного числа ε. Отже, $w = z^n$ є функція, неперервна в усій площині комплексного змінного z.

Тому що означення неперервності функції комплексного змінного з формального боку аналогічне відповідному означенню для функції дійсного змінного, то доведення теорем про операції над неперервними функціями залишаються ті самі в комплексній області, як і в дійсному аналізі. Наприклад, *сума, різниця і добуток двох функцій $f(z)$ і $\varphi(z)$, неперервних у точці z_0* (в області G), *є функція неперервна в тій же точці* (в тій же області); також *частка таких функцій є функція, неперервна в точці z_0* (в області G), *якщо* $\varphi(z_0) \neq 0$ [якщо $\varphi(z) \neq 0$ в області G]. Користуючись цим положенням, ми можемо, наприклад, зробити висновок, що яка завгодно ціла раціональна функція $w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ неперервна в усій площині комплексного змінного z; далі всяка раціональна функція

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}$$

неперервна в кожній точці площини комплексного змінного z, за винятком тих значень z, при яких знаменник дорівнює нулеві.

Приклади

1. $f(0) = 0$; $f(z) = \varphi$, якщо $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, де $r > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Це є функція однозначно визначена в усій площині комплексного змінного z, неперервна в усякій точці, яка відрізняється від точок дійсної додатної осі. Чи буде ця функція неперервною в нульовій точці? Очевидно, ні, тому що в противному разі для всіх точок z достатньо малого околу нульової точки повинно бути $|f(z) - f(0)| < \varepsilon$, тобто $|f(z)| < \varepsilon$, що не виконується, коли точка z мі-

ститься на промені, для якого $\varphi > \varepsilon$. Нарешті, зауважимо, що коли z наближається до нульової точки вздовж додатної дійсної осі ($\varphi = 0$), то умова неперервності виконується, тому що для таких точок весь час $|f(z) - f(0)| = 0$, і, значить, $|f(z) - f(0)| < \varepsilon$.

Проте означення неперервності функції w у точці z_0 вимагає, щоб при довільному наближенні точки z до точки z_0 значення функції w прямувало до w_0.

2. $w = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Очевидно, $w = |z|$ є неперервна функція в усій площині комплексного змінного z, бо, очевидно, $\lim\limits_{z \to z_0} |z| = |z_0|$.

3. $w = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Це є функція, визначена в усій площині комплексного змінного z крім $z = 0$, многозначна, тому що кожний вектор z має нескінченну множину різних напрямних кутів, які відрізняються один від одного кратним 2π. Коли точка z описує коло з центром у нульовій точці, то при одному додатному обході цього кола $w = \arg z$ зростає на 2π, при n-кратному обході — на $2\pi n$. Якщо ж точка z описує коло, для якого нульова точка буде зовнішньою, то $w = \arg z$ після обходу набирає початкового значення (рис. 16). Дійсно, після обходу кола (рис. 16) $w = \arg z$ може набрати лише такого значення, яке відрізняється від початкового значення кратним 2π. Проте вектор z весь час залишається в куті, утвореному двома дотичними до кола, проведеними з точки $z = 0$; отже, $\arg z$ не може набирати значень, які відрізнялися б від початкового його значення більше, ніж на кут між обома дотичними. Тому що цей кут менший π, то при обході зазначеного кола $\arg z$ повинен вернутися до початкового значення. Звідси виходить, що $w = \arg z$ можна розглядати як однозначну неперервну функцію в околі якої завгодно точки z, $z \neq 0$ площини, який не містить у собі нульової точки. Аналогічно можна показати, що $w = \arg z$ є функція однозначна і неперервна в усякій однозв'язній області, яка не має в собі нульової точки[1]).

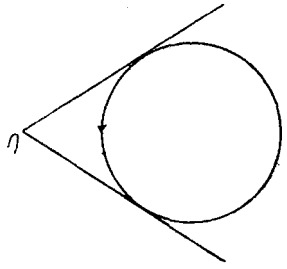

Рис. 16

Іноді функція $w = f(z)$ вважається означеною також і в граничних точках області G, тобто в усій замкнутій області $\bar{G}$. В цьому випадку під неперервністю функції в граничній точці z_0 області $\bar{G}$ розуміють таке: умови неперервності (3) і (4) виконуються для всіх точок z, які належать області $\bar{G}$, тобто точки z, що лежать поза областю $\bar{G}$, залишають без розгляду. *Функція, неперервна в усіх точках замкнутої області $\bar{G}$, називається неперервною в $\bar{G}$.*

Так само кажуть також *про неперервність вздовж кривої*, розуміючи під цим, що умови неперервності (3) і (4) виконуються тільки для точок, які лежать на розгляданій кривій, не звертаючи уваги на значення функції в інших точках.

Так, у прикладі 1 функція $f(z)$ неперервна вздовж дійсної додатної осі в усякій точці цієї лінії, тому що в цих точках вона

[1]) Точніше: рівність $w = \arg z$ визначає в такій області нескінченну множину однозначних і неперервних функцій, і значення двох якихнебудь з них відрізняються в усіх точках цієї області на $2k\pi$ (де k — ціле і залежить лише від функцій, а не від точки області).

Кожна з функцій цілком визначена, якщо дано її значення в якійсь точці розглядуваної області (в усіх інших точках цю функцію визначають за неперервністю). *(Ред.).*

весь час дорівнює нулеві, не зважаючи на те, що ця функція не буде просто неперервною ні в якій точці цієї лінії.

4. Теорема про рівномірну неперервність. Лема Гейне-Бореля. Функція $w=f(z)$, неперервна в замкнутій обмеженій області $\bar{G}$, має властивість, яка виражається такою теоремою:

Яке б не було мале додатне число ε, існує число $\delta=\delta(\varepsilon)$ таке, що для яких завгодно двох точок z' і z'' області $\bar{G}$, віддаль між якими $|z'-z''|<\delta$, різниця відповідних значень функції задовольняє нерівність:

$$|w'-w''|=|f(z')-f(z'')|<\varepsilon.$$

Ця властивість виражає, як кажуть, рівномірну неперервність функції в замкнутій області $\bar{G}$. Отже, теорема полягає в тому, щоб довести для якої завгодно функції, неперервної в замкнутій області $\bar{G}$ (тобто неперервній в усякій точці області $\bar{G}$), рівномірну неперервність в області $\bar{G}$. З умови неперервності функції в кожній точці z області $\bar{G}$ виходить, що при всякому $\varepsilon>0$ існує круг з центром у точці z радіуса ρ_z, такий, що для будьяких двох точок z' і z'', які лежать всередині цього круга, маємо: $|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$. Із зміною z радіус ρ_z змінюється, і постає питання: чи не буде він ставати меншим від як завгодно малого числа? Сформульована теорема твердить, що радіус цього круга можна вважати більшим від якогось сталого додатного числа. Доведення цієї теореми буде випливати з такого додаткового твердження, відомого під назвою леми Гейне-Бореля:

Якщо кожна точка z замкнутої і обмеженої області $\bar{G}$ є центр круга K_z, то існує скінченне число цих кругів, які покривають область $\bar{G}$, тобто таких, що всяка точка області $\bar{G}$ лежить всередині принаймні одного з цих кругів.

Щоб довести це, обмежимо область $\bar{G}$ квадратом Q_1 з сторонами, паралельними осям координат, і поділимо цей квадрат на чотири конгруентні квадрати. Припускаючи твердження невірним для області $\bar{G}$, ми повинні припустити, що воно невірне для множини точок області $\bar{G}$, які лежать хоч би на одному з цих чотирьох квадратів. Позначимо такий квадрат через Q_2 і поділимо його знову на чотири конгруентні квадрати; матимемо квадрат Q_3. Продовжуючи таке ділення далі, ми досягнемо квадрата Q_n, що має в собі частину області $\bar{G}$, для якої наша теорема невірна, тобто для покриття якої потрібна нескінченна множина кругів системи K_z. Нехай z_0 є точка, що належить всім квадратам Q_n (розд. I, § 3, п. 4). Якщо n достатньо велике, то в довільному околі точки z_0 лежать квадрати Q_n і, значить, точки області $\bar{G}$. Таким чином точка z_0 належить сама області $\bar{G}$ і є, значить, центром круга K_{z_0}. Позначимо радіус цього круга через ρ. Вибираючи n таким великим, щоб діагональ квадрата Q_n була

менша ρ, ми бачимо, що всі точки області G, які належать такому Q_n, покриваються за допомогою одного круга K_{z_0}, в той час як за припущенням для покриття цих точок необхідна нескінченна множина кругів системи K_z. Ця суперечність переконує нас у справедливості леми.

Зауваження. Лема, очевидно, залишається вірною, якщо замість області $\bar{G}$ візьмемо *неперервну криву* або взагалі яку завгодно *обмежену замкнуту множину* точок площини. Множина точок площини називається обмеженою, коли вона цілком лежить в скінченній частині площини; вона називається ще до того замкнутою, коли до неї належать всі її граничні точки, тобто точки z площини, в довільних околах яких містяться точки множини, відмінні від z.

Звертаючись до доведення теореми про рівномірну неперервність, розглянемо біля кожної точки z області $\bar{G}$ круг радіуса ρ_z такий, що для яких завгодно двох точок z' і z'', які лежать всередині цього круга, має місце нерівність: $|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$; це виходить безпосередньо з неперервності функції $f(z)$ в кожній точці z області $\bar{G}$. Яку лемі Гейне-Бореля, поставимо у відповідність кожній точці z області $\bar{G}$ круг з центром у цій точці радіуса $\frac{1}{2}\rho_z$. На підставі леми існує система скінченного числа таких кругів, яка покриває область $\bar{G}$. Нехай радіус найменшого серед цих кругів дорівнює δ; ми твердимо, що це число δ задовольняє умови теореми, яку ми доводимо. Справді, якщо $|z'-z''|<\delta$ і точка z' лежить всередині круга з центром у точці ζ радіуса $\frac{1}{2}\rho_\zeta$, то $\delta\leqslant\frac{1}{2}\rho_\zeta$, і, значить, точки z' і z'' лежать всередині круга з центром у точці ζ радіуса ρ_ζ; звідси виходить: $|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$, що і треба було довести.

§ 2. Ряди функцій

1. Поняття рівномірно збіжного ряду. Нехай маємо ряд:

$$u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z)+\ldots, \tag{5}$$

всі члени якого є однозначні функції комплексного змінного z, визначені в якійсь області G; припустимо, що цей ряд збіжний в усякій точці z області G. В цьому разі сума s ряду (5) буде однозначно визначена в кожній точці z області G і, значить, буде представляти однозначну функцію $s(z)$ в області G. Припустимо, що всі члени збіжного ряду (5) є неперервні функції в області G; тоді постає питання: чи не буде і сума ряду неперервною функцією? Легко дати приклади, коли збіжні ряди неперервних функцій зображають розривні функції. Візьмемо спочатку приклад з області дійсного змінного. Припускаючи $0\leqslant x\leqslant 1$, утворюємо ряд, сума перших n членів якого $s_n(x)$ дорівнює x^n. Це буде ряд:

$$x+(x^2-x)+\ldots+(x^n-x^{n-1})+\ldots$$

Якщо $0 \leqslant x < 1$, то $s_n(x) = x^n$ прямує до нуля при необмеженому зростанні n; якщо ж $x = 1$, то $s_n(1) = 1$ і $\lim\limits_{n \to \infty} s_n(1) = 1$. Отже, сума розгляданого ряду $s(x)$ дорівнює нулеві при $0 \leqslant x < 1$ і дорівнює одиниці при $x = 1$. Таким чином, сума $s(x)$ має точку розриву при $x = 1$, не зважаючи на те, що даний ряд збіжний в кожній точці відрізка $0 \leqslant x \leqslant 1$ і всі його члени неперервні функції. Цей приклад можна, звичайно, розглядати і з точки зору комплексного змінного, коли зауважити, що $x = R(z)$.

Як другий приклад візьмемо ряд:

$$z + (z^2 - z) + \ldots + (z^n - z^{n-1}) + \ldots,$$

припускаючи $|z| < 1$ або $z = 1$. Якщо $|z| < 1$, то сума його перших n членів $s_n(z) = z^n$ прямує до нуля при необмеженому зростанні n, тому що $|s_n(z)| = |z|^n$. Якщо ж $z = 1$, то $s_n(1) = 1$ і $\lim\limits_{n \to \infty} s_n(1) = 1$. Отже, сума розгляданого ряду $s(z)$ дорівнює нулеві в усякій точці z, яка лежить всередині круга $|z| < 1$, і дорівнює одиниці в точці $z = 1$ кола цього круга. Тут, як і в першому прикладі, функція $s(z)$ є розривною при $z = 1$ і зображається у вигляді суми збіжного ряду неперервних функцій.

Таким чином, для того, щоб сума збіжного ряду неперервних функцій була неперервною функцією, треба на цей ряд накласти додаткове обмеження. Таким обмеженням може бути умова рівномірної збіжності ряду. Позначаючи через $s_n(z)$ суму перших n членів даного ряду (5), збіжного в області G, розглянемо різницю $s(z) - s_n(z)$, яка в наслідок збіжності ряду прямує до нуля при необмеженому зростанні n для якої завгодно точки z області G. Це значить, що виконується нерівність:

$$|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon, \tag{6}$$

де ε — як завгодно мале додатне число, якщо $n \geqslant N(\varepsilon, z)$. При зміні точки z в області G може трапитися, що $N(\varepsilon, z)$ набирає як завгодно великих значень. В цьому випадку не можна знайти такого числа $N = N(\varepsilon)$, починаючи з якого виконувалася б нерівність (6) у всій області G. Друга можливість полягає в тому, що $N(\varepsilon, z)$ для всіх точок області G залишається менше від якогось числа $N = N(\varepsilon)$. В цьому випадку нерівність (6) виконується для всіх розгляданих точок z при $n \geqslant N = N(\varepsilon)$; в цьому випадку кажуть, що даний ряд (6) збіжний рівномірно в області G до функції $s(z)$.

Отже *ряд* (5), за означенням, *збігається рівномірно в області G до функції $s(z)$, якщо для всякого як завгодно малого додатного числа ε можна знайти таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n \geqslant N$ виконується нерівність $|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon$, яка б не була точка z в області G.*

Інакше кажучи, у випадку рівномірної збіжності ряду його суму можна апроксимувати з яким завгодно степенем точності ε за допомогою суми одного й того ж числа n перших членів, припускаючи $n \geqslant N = N(\varepsilon)$.

В попередньому прикладі $|s(z)-s_n(z)|=|z^n|=|z|^n$, якщо $|z|<1$. Для того, щоб виконувалась нерівність $|s(z)-s_n(z)|<\varepsilon$, треба вимагати, щоб $|z|^n<\varepsilon$, звідки $n>\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{|z|}}$. Позначаючи через $N(\varepsilon, z)$ найбільше ціле число, що міститься в числі $\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{|z|}}+1$, ми бачимо, що нерівність (6) буде виконана при $n\geqslant N(\varepsilon, z)$. Коли $|z|$ прямує до одиниці, то $N(\varepsilon, z)$ прямує до нескінченності, і, значить, не можна вказати натурального числа N, яке було б більше, ніж $N(\varepsilon, z)$, для якого завгодно z, $|z|<1$. Отже, цей ряд не буде рівномірно збіжний в крузі $|z|<1$. Але ж цей ряд буде рівномірно збіжний в усякому крузі $|z|\leqslant r$, $r<1$. Справді, тому що $\ln\frac{1}{|z|}\geqslant\ln\frac{1}{r}$, то

$$\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{|z|}}\leqslant\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{r}},$$

і, отже, позначаючи через $N=N(\varepsilon)$ найбільше натуральне число що міститься у виразі $\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{r}}+1$, ми маємо $N(\varepsilon, z)\leqslant N=N(\varepsilon)$, яке б не було z, $|z|\leqslant r$.

2. Теорема про неперервність суми ряду. *Якщо ряд* (5) *збігається рівномірно в області G і всі члени цього ряду є неперервні функції в точці z_0 області, то й сума ряду буде неперервною функцією в тій самій точці.*

Висновок. *Ряд функцій, неперервних в області G і рівномірно збіжний у цій області, зображає функцію, неперервну в тій же області.*

Дійсно, через те що всі члени ряду є неперервні функції в кожній точці області G, то згідно з теоремою сума ряду повинна бути неперервною функцією в кожній точці області G, тобто всюди в області.

Для того, щоб довести теорему, позначимо через z_0+h будь-яку точку області G і подивимося, як змінюється сума ряду $s(z)$, коли ми переходимо від точки z_0 до точки z_0+h, тобто оцінимо модуль різниці $s(z_0+h)-s(z_0)$.

Позначаючи через $s_N(z)$ суму перших N членів ряду (5), напишемо цю рівність так:

$$s(z_0+h)-s(z_0)=[s(z_0+h)-s_N(z_0+h)]+[s_N(z_0+h)-s_N(z_0)]+$$
$$+[s_N(z_0)-s(z_0)],$$

звідки дістаємо:

$$|s(z_0+h)-s(z_0)|\leqslant|s(z_0+h)-s_N(z_0+h)|+|s_N(z_0+h)-s_N(z_0)|+$$
$$+|s(z_0)-s_N(z_0)| \qquad (7)$$

В наслідок рівномірної збіжності даного ряду ми можемо при якому завгодно $\varepsilon>0$ вибрати натуральне число $N=N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ так, щоб виконувалася нерівність: $|s(z)-s_N(z)|<\frac{\varepsilon}{3}$, яка б не була точка z області G. Зокрема, вважаючи тут $z=z_0$ і $z=z_0+h$, маємо дві нерівності

$$|s(z_0)-s_N(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad (8)$$

$$|s(z_0+h)-s_N(z_0+h)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (9)$$

З другого боку, зауважимо, що $s_N(z)$, як сума скінченного числа функцій, неперервних у точці z_0, є функція, неперервна в цій точці (розд. II, § 1, п. 3). Отже, вважаючи $|h|$ достатньо малим, $|h|<\delta=\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, можемо написати

$$|s_N(z_0+h)-s_N(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (10)$$

Нарешті, з нерівності (7) додаванням нерівностей (8), (9) і (10) одержуємо:

$$|s(z_0+h)-s(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

коли $|h|<\delta$, що доводить неперервність функції $s(z)$ у точці z_0.

3. Ознака рівномірно збіжного ряду. Дуже часто можна зробити висновок про рівномірну збіжність ряду (5) на підставі такої простої ознаки:

якщо всі члени (5) *в області* G *задовольняють умову*:

$$|u_n(z)|\leqslant a_n, \qquad (11)$$

де a_n — *сталі додатні числа, при чому числовий ряд*

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (12)$$

збіжний, то даний ряд (5) *збіжний рівномірно* (*і до того абсолютно*) *в області* G. Дійсно, ряд

$$|u_1(z)|+|u_2(z)|+\ldots+|u_n(z)|+\ldots$$

збіжний в усякій точці z області G, тому що його члени не більші за відповідні члени a_n збіжного ряду (12). Отже, даний ряд (5) абсолютно збіжний у кожній точці z області G. Позначаючи через $s(z)$ і $s_n(z)$ відповідно повну суму ряду (5) і суму перших n його членів, дістанемо:

$$|s(z)-s_n(z)|\leqslant|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots\leqslant a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots \qquad (13)$$

Через те що ряд (12), за умовою, збіжний, то його остача $a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$ буде менша ε, яке б не було $\varepsilon>0$, починаючи з достатньо великого $n\geqslant N=N(\varepsilon)$.

Таким чином, з нерівності (13) дістаємо:

$$|s(z)-s_n(z)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad n\geqslant N=N(\varepsilon),$$

незалежно від точки z області G, що і доводить рівномірну збіжність ряду (5) в області G. Як приклад розглянемо ряд:

$$z+(z^2-z)+\ldots+(z^n-z^{n-1})+\ldots,$$

рівномірну збіжність якого ми вже виявили при

$$|z|\leqslant r,\ r<1$$

(розд. II, § 2, п. 1). Тут $u_n(z)=z^n-z^{n-1}$, отже:

$$|u_n(z)|=|z^n-z^{n-1}|=|z|^{n-1}|z-1|\leqslant r^{n-1}(r+1)=a_n.$$

Через те що ряд із загальним членом $a_n=r^{n-1}(r+1)$ при $r<1$ збіжний як нескінченно спадна геометрична прогресія, то на підставі доведеної ознаки розгляданий ряд повинен збігатися рівномірно (і абсолютно) при $|z|\leqslant r,\ r<1$.

§ 3. Степеневі ряди

1. Поняття області збіжності степеневого ряду. В теорії функцій комплексного змінного особливо важливе значення має клас так званих *степеневих рядів*.

Степеневим рядом називається ряд виду:

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots, \tag{14}$$

де коефіцієнти $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ є сталі комплексні числа, а z — незалежне комплексне змінне.

Ряд (14) являє собою окремий випадок загального ряду (5) функцій, коли загальний член $u_n(z)=c_nz^n$. *Областю збіжності степеневого ряду* (14) *назвемо множину всіх точок z площини, в яких цей ряд збігається.* Очевидно, всякий ряд виду (14) збігається при $z=0$, тобто нульова точка належить завжди до області збіжності. Природно виникає питання: чи існують такі степеневі ряди, області збіжності яких складаються з єдиної нульової точки? Прикладом такого ряду може бути ряд

$$1+z+2^2z^2+\ldots+n^nz^n+\ldots,$$

загальний член якого n^nz^n у випадку якого завгодно $z\neq 0$ прямує до нескінченності при необмеженому зростанні n, тому що, починаючи з якогось достатньо великого n, буде: $n|z|>2$ і, значить, $|n^nz^n|=(n|z|)^n>2^n$. Отже, цей ряд розбіжний при якому завгодно $z\neq 0$. Залишаючи осторонь клас таких рядів, припустимо, що ряд (14) збіжний у якійсь точці z_0, що відріз-

няється від нульової точки; в цьому випадку має місце така теорема.

2. Перша теорема Абеля. *Якщо степеневий ряд* (14) *збігається при* $z=z_0$, *то він збігається, і до того абсолютно, при всякому* z, для якого $|z|<|z_0|$.

В термінах геометрії це твердження Абеля може бути сформульоване так: *якщо степеневий ряд* (14) *збіжний в точці* z_0, *то він абсолютно збіжний в усякій точці, що лежить всередині кола, яке проходить через точку* z_0 *і має центр у нульовій точці* (рис. 17).

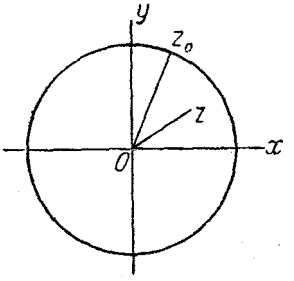

Рис. 17

В наслідок умови ряд

$$c_0+c_1z_0+c_2z_0^2+\ldots+c_nz_0^n+\ldots$$

збіжний, і, значить, $\lim\limits_{n\to\infty} c_nz_0^n=0$ (розд. I, § 5, п. 2). Остання рівність показує, що точки, які зображають числа $c_nz_0^n$, лежать в якомусь околі нульової точки, тобто яке б не було n, маємо:

$$|c_nz_0^n|<g, \qquad (15)$$

де g — стале додатне число. Перепишемо даний ряд (14) у вигляді:

$$c_0+c_1z_0\left(\frac{z}{z_0}\right)+c_2z_0^2\left(\frac{z}{z_0}\right)^2+\ldots+c_nz_0^n\left(\frac{z}{z_0}\right)^n+$$

і зауважимо, що на підставі (15) буде:

$$|c_nz^n|=|c_nz_0^n|\cdot\left|\frac{z}{z_0}\right|^n<g\left|\frac{z}{z_0}\right|^n=gk^n,$$

де взято: $k=\left|\frac{z}{z_0}\right|=\left|\frac{z}{z_0}\right|$, при чому $k<1$, тому що за умовою $|z|<|z_0|$. Отже, модулі всіх членів даного ряду (14) менші відповідних членів геометричної прогресії:

$$g+gk+\ldots+gk^n+\ldots$$

Через те що знаменник цієї прогресії $k<1$, то вона збіжна і, значить, збіжний є ряд, складений з модулів членів даного ряду; звідси виходить абсолютна збіжність самого даного ряду (14).

3. Круг збіжності. Користуючись даною в попередньому пункті теоремою Абеля, можна з'ясувати структуру області збіжності довільного степеневого ряду. Ми вже знаємо, що існують, поперше, степеневі ряди, області збіжності яких складаються з однієї нульової точки; подруге, існують степеневі ряди, збіжні в усякій точці площини, тобто такі, що мають за області збіжності всю площину. На підставі теореми Абеля такі ряди повинні абсолютно збігатися в усякій точці площини. Щоб

довести існування степеневих рядів цього другого типу, досить вказати хоч на один приклад такого ряду. Візьмемо, наприклад, ряд

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{n^n}+\ldots$$

Яке б не було z, модуль загального члена цього ряду $\left|\frac{z^n}{n^n}\right| = \left(\frac{|z|}{n}\right)^n$ буде менший, ніж $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, починаючи з якогось n, для якого $\frac{|z|}{n}<\frac{1}{2}$. Таким чином, всі члени нашого ряду, крім скінченного числа перших членів, щодо модулів менші, ніж відповідні члени нескінченно спадної прогресії

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots;$$

отже, розгляданий ряд є абсолютно збіжний при всякому z.

Нарешті, до третього типу віднесемо всякий степеневий ряд, який не належить ні до першого, ні до другого типу. Дослідимо область збіжності ряду останнього виду. Такий ряд має, з одного боку, точки збіжності, відмінні від нульової точки, а з другого боку, він має точки розбіжності. Проведемо з нульової точки довільний промінь і розподілимо всі точки цієї напівпрямої на два класи: до першого класу віднесемо ті точки нашого променя, в яких ряд збігається, а до другого — всі інші точки, тобто точки розбіжності ряду. Цей поділ точок променя на два класи має такі властивості:

1) кожний клас має в собі точки (через те що ряд належить до третього типу);

2) яка завгодно точка першого класу міститься ближче до нульової точки, ніж всяка точка другого класу.

Остання властивість негайно випливає з теореми Абеля, коли пригадаємо, що точки першого класу є точки збіжності ряду, а точки другого класу є точки розбіжності.

В наслідок неперервності променя зазначений поділ його точок визначає єдину точку M, яка називається, за Дедекіндом, перерізом і лежить на межі обох класів, тобто таку, що всяка точка першого класу міститься на віддалі, не більшій, ніж OM, від нульової точки, всяка ж точка другого класу міститься від нульової точки на віддалі, не меншій, ніж OM. Очевидно сама точка M може належати або до першого класу (в цьому випадку ряд збігається в точці M), або до другого класу (в цьому випадку ряд розбіжний в точці M).

Отже, всі точки відрізка OM, крім, можливо, точки M, є точки збіжності ряду, всі ж інші точки нашого променя є точки розбіжності ряду (рис. 18).

Провівши через точку M коло з центром в нульовій точці, ми побачимо, що даний ряд абсолютно збіжний в усякій точці, яка лежить всередині цього кола. Дійсно, нехай z — яка завгодно точка, розміщена всередині проведеного кола. Виберемо

на радіусі OM внутрішню точку M' так, щоб $\overline{Oz} < \overline{OM'}$. Через те що в точці M' даний ряд збіжний, то, за теоремою Абеля, він буде абсолютно збіжний в точці z. В усякій точці z, що лежить поза побудованим колом, даний ряд розбіжний. Справді, виберемо поза радіусом OM на промені OM точку M'' так, щоб $\overline{Oz} > \overline{OM''}$. Через те що в точці M'' ряд розбіжний, то, за теоремою Абеля, він буде розбіжний і в точці z. Вважаючи $OM = R$, ми можемо все сказане резюмувати в таких словах:

Існує круг з центром у нульовій точці радіуса R такий, що даний степеневий ряд збігається (і до того абсолютно) *всередині цього круга і є розбіжний поза цим кругом.*

Щоб це твердження було вірне для всякого степеневого ряду, залишається включити сюди ряди двох перших типів. В першому випадку (область збіжності складається з однієї нульової точки) треба, очевидно, взяти $R = 0$, а в другому випадку (ряд збіжний в усій площині) треба взяти $R = +\infty$.

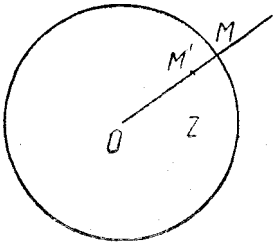

Рис. 18

Цей круг радіуса R називають *кругом збіжності* степеневого ряду, а число R — *його радіусом збіжності*. Згідно з викладеним всякий степеневий ряд має певний радіус збіжності R, при чому: $0 \leqslant R \leqslant +\infty$. Щождо точок, які лежать на колі круга збіжності ($0 < R < +\infty$), то в одних з цих точок ряд може збігатися, в інших розбігатися.

Попереду ми показали, що всякий степеневий ряд (14) має круг збіжності певного радіуса R. Задача, яку ми тепер поставимо, полягає в тому, щоб визначити радіус збіжності степеневого ряду залежно від його коефіцієнтів. Повний розв'язок цієї задачі можна дати за допомогою поняття про найбільшу границю послідовності дійсних невід'ємних чисел, яке ми і повинні попереду з'ясувати.

4. Поняття найбільшої границі. Нехай дано послідовність дійсних невід'ємних чисел[1]):

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n, \tag{16}$$

Може трапитись, що послідовність чисел (16) необмежена, тобто серед чисел (16) знайдуться числа, більші від якого завгодно наперед заданого додатного числа. В цьому випадку умовимося казати, що найбільша границя l послідовності (16) дорівнює $+\infty$. Другий випадок буде той, коли послідовність чисел (16) обмежена, $a_n < A$, тобто всі точки, що зображають числа (16), лежать на скінченному відрізку $(0, A)$. Як ми знаємо, обмежена послідовність точок має принаймні одну граничну точку (розд. I, § 3, п. 4); взагалі кажучи, множина всіх граничних точок нашої послідовності (16) буде нескінченною множиною

[1]) Ми обмежуємося розглядом найбільшої границі послідовності невід'ємних чисел, оскільки для дальших застосувань нам цього досить.

(позначимо її через E), що лежить на відрізку $(0, A)$. Коли ми маємо скінченне число точок відрізка, то серед них є одна точка, що лежить правіше від усіх інших. У випадку нескінченної множини точок, розміщених на скінченному відрізку, може трапитися, що у множини немає самої правої точки. Наприклад множина точок відрізка $(0, 1)$: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ не має точки, яка була б розміщена правіше від усіх останніх. Однак цього не може бути для розгляданої множини E граничних точок. Дійсно, легко показати, що серед точок множини E граничних точок обмеженої послідовності (16) існує точка, яка лежить правіше від усіх інших. Справді, припускаючи супротивне, розподілимо всі точки дійсної осі на два класи: до першого класу віднесемо кожну точку множини E разом з усіма точками дійсної осі, які лежать ліворуч від цієї точки, а до другого класу віднесемо всі інші точки дійсної осі. Такий розподіл усіх точок дійсної осі на два класи має властивості:

1) кожний клас має в собі точки (до другого класу належать, наприклад, усі точки, що лежать правіше від точки A);

2) всяка точка першого класу лежить ліворуч від якої завгодно точки другого класу. В наслідок неперервності дійсної осі такий поділ її точок на два класи визначає єдину точку M, що лежить на границі обох класів. Ця гранична точка M повинна бути самою лівою точкою другого класу, тому що згідно з умовою в першому класі немає точки, що лежить правіше від усіх інших точок. Точка M, будучи елементом другого класу, не належить множині E. З другого боку, в якому завгодно околі точки M містяться точки множини E, а значить і точки даної послідовності (16). Отже, точка M є граничною точкою даної послідовності (16), а тому повинна належати множині E. Така суперечність переконує нас у справедливості висловленого положення.

Отже, множина E граничних точок обмеженої послідовності (16) має точку, що лежить правіше від усіх інших точок множини E. Число, що відповідає цій „самій правій" граничній точці, буде граничним числом даної послідовності чисел (16), найбільшим серед усіх граничних чисел цієї послідовності. Таким чином, ми довели існування скінченного числа l, найбільшого серед граничних чисел обмеженої послідовності (16) невід'ємних чисел. Згідно з попереднім всяка послідовність невід'ємних чисел має найбільшу границю l, скінченну або рівну $+\infty$, тобто $0 \leqslant l \leqslant +\infty$. Символічно це записують так: $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Через те що всяке граничне число послідовності невід'ємних чисел не менше нуля, то у випадку $l = 0$ дана послідовність чисел (16) повинна збігатися до нуля.

5. Визначення радіуса збіжності. Виходячи з коефіцієнтів степеневого ряду (14), утворюємо послідовність чисел:

$$|c_1|, \quad \sqrt{|c_2|}, \quad \sqrt[3]{|c_3|}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{|c_n|}, \ldots \tag{17}$$

Всі члени цієї послідовності розглядаємо як дійсні невід'ємні числа.

Позначимо через l найбільшу границю послідовності чисел (17): $l=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$. Тоді радіус збіжності R степеневого ряду (14) визначається за формулою:

$$R=\frac{1}{l}. \tag{18}$$

Ця формула має назву формули Коші-Адамара (Cauchy-Hadamard).

Зауваження. У випадку $l=0$ у формулі (18) треба взяти $R=+\infty$, у випадку $l=+\infty$ необхідно взяти $R=0$.

При виведенні формули (18) ми розглянемо окремо три випадки:

$$\begin{array}{lll} 1) & l=+\infty & (R=0), \\ 2) & l=0 & (R=+\infty), \\ 3) & 0<l<+\infty & \left(R=\frac{1}{l}\right). \end{array}$$

У випадку 1) ($l=+\infty$) послідовність чисел (17) необмежена. Нам треба довести, що степеневий ряд (14) є розбіжний в усякій точці z, яка відрізняється від нульової точки. Допускаючи супротивне, припустимо, що ряд (14) є збіжний в деякій точці $z_0\neq 0$. Тоді маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n=0$ (розд. I, § 5, п. 2); отже, існує стале додатне число g таке, що виконується нерівність $|c_n z_0^n|<g\,(n=0, 1, 2, \ldots)$. Ми можемо вважати число g більшим одиниці. З останньої нерівності через добування з обох її частин кореня n степеня дістаємо: $\sqrt[n]{|c_n|}\cdot|z_0|<\sqrt[n]{g}$ або $\sqrt[n]{|c_n|}<\frac{g}{|z_0|}$, тому що $\sqrt[n]{g}<g\,(g>1)$. Таким чином, послідовність чисел (17) виявляється обмеженою. Ця суперечність переконує нас в розбіжності ряду (14) при якому завгодно $z\neq 0$.

У випадку 2) ($l=0$) нам треба показати, що ряд (14) збіжний в якій завгодно точці $z=z_0$. Через те що послідовність (17) збігається до нуля, то, починаючи від достатньо великого n, маємо:

$$\sqrt[n]{|c_n|}<\varepsilon,$$

наприклад,

$$\sqrt[n]{|c_n|}<\frac{1}{2|z_0|},$$

звідки

$$\sqrt[n]{|c_n|}\cdot|z_0|<\frac{1}{2},$$

або, після піднесення до степеня n:

$$|c_n|\,|z_0|^n=|c_n z_0^n|<\frac{1}{2^n}.$$

Через те що ряд з загальним членом $\frac{1}{2^n}$ збіжний, то абсолютно збіжний є і ряд з загальним членом $c_n z_0^n$.

Якщо, нарешті, l є скінченне число, яке відрізняється від нуля, то формула (18), яку ми доводимо, зводиться ось до чого: ряд (14) абсолютно збіжний при всякому $z = z_1$, для якого $|z_1| < \frac{1}{l}$, і розбіжний для кожного $z = z_2$, для якого $|z_2| > \frac{1}{l}$.

Через те що l є найбільша границя послідовності чисел (17), то маємо, починаючи з достатньо великого n:

$$\sqrt[n]{|c_n|} < l + \varepsilon, \tag{19}$$

де ε — як завгодно мале додатне число. Помітивши, що $l|z_1| < 1$, візьмемо: $\varepsilon = \frac{1 - l|z_1|}{2|z_1|}$ Нерівність (19) набере вигляду:

$$\sqrt[n]{|c_n|} < l + \frac{1 - l|z_1|}{2|z_1|} = \frac{1 + l|z_1|}{2|z_1|},$$

або

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z_1| < \frac{1 + l|z_1|}{2} = q < 1. \tag{20}$$

Підносячи обидві частини нерівності (20) до степеня n, знайдемо:

$$|c_n|\,|z_1|^n < q^n, \quad \text{або} \quad |c_n z^n| < q^n. \tag{21}$$

Через те що ряд з загальним членом q^n, $q < 1$ збіжний, то на підставі (21) абсолютно збігається і даний степеневий ряд при $z = z_1$.

З другого боку, з означення l як граничного числа послідовності чисел (17) виходить, що при нескінченно багатьох значеннях n маємо:

$$\sqrt[n]{|c_n|} > l - \varepsilon, \tag{22}$$

де — як завгодно мале додатне число.

Помітивши, що $l|z_2| > 1$, візьмемо: $\varepsilon = \frac{l|z_2| - 1}{|z_2|}$.
Нерівність (22) перепишеться так:

$$\sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{|z_2|}, \quad \text{або} \quad \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z_2| > 1,$$

що після піднесення до степеня n дає:

$$c_n| \cdot |z_2|^n > 1, \quad \text{або} \quad |c_n z_2^n| > 1.$$

Через те що остання нерівність справджується для безлічі значень n, то $c_n z_2^n$ не може прямувати до нуля при необмеженому зростанні n. Звідси виходить розбіжність даного ряду (14) при $z = z_2$ (розд. I, § 5, п. 2).

Приклади

1. Радіус збіжності ряду $1+z+z^4+z^9+\ldots$ дорівнює одиниці. Справді, тут $c_n=1$, якщо n — квадратне число, і дорівнює нулеві в противному разі. Таким чином $\sqrt[n]{|c_n|}=1$ або 0, залежно від того, чи маємо ми перший чи другий випадок. Граничні числа послідовності (17) будуть 0 і 1. Отже $l=1$ і $R=1$.

2. Радіус збіжності ряду

$$1+\frac{z}{1^s}+\frac{z^2}{2^s}+\ldots+\frac{z^n}{n^s}+$$

дорівнює одиниці. Дійсно,

$$\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{1}{n^{\frac{s}{n}}}=\frac{1}{e^{\frac{s\ln n}{n}}}$$

Через те що $\frac{\ln n}{n}$ прямує до нуля при $n\to\infty$, то $\sqrt[n]{|c_n|}$ прямує до одиниці. Отже, $l=1$ і $R=1$.

3. Ряд

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+$$

збіжний в усій площині комплексного змінного z.

Дійсно, $(n!)^2=(1\cdot n)\,[2(n-1)]\ldots(n\cdot 1)$. Кожна дужка правої частини останньої рівності не менша n, тому що маємо:

$$a(n-a+1)-n=(a-1)(n-a)\geqslant 0 \qquad (a=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Отже, дістаємо: $(n!)^2>n^n$, або $n!>(\sqrt{n})^n$, далі $\sqrt[n]{n!}>\sqrt{n}$, тобто

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}<\frac{1}{\sqrt{n}},\quad \text{звідки}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=0,\quad \text{тобто } l=0.$$

Отже, $R=\infty$.

4. Аналогічно можна показати, що ряди

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots,\quad z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots$$

збіжні в усій площині комплексного змінного z, а ряд $1+z+2!\,z^2+\ldots+n!\,z^n+\ldots$ збіжний лише в нульовій точці ($R=0$).

Ми вказували, що на колі круга збіжності степеневий ряд може виявляти себе різно в різних випадках. Так, узявши приклад 2 при $s=0$, 1 і 2, дістаємо три ряди, для яких $R=1$:

$$1+z+z^2+\ldots,\quad 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\ldots,\quad 1+\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots$$

Перший ряд розбіжний в усіх точках кола $|z|=1$; останній збігається в усіх точках цього кола, а другий ряд збіжний в одних

точках цього кола (наприклад при $z=-1$) і розбіжний в інших (при $z=1$)[1]).

6. Рівномірна збіжність степеневого ряду. Ми бачили, що степеневий ряд

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots \tag{14}$$

абсолютно збігається в усякій точці всередині його кола збіжності. Постає питання: чи не буде ряд (14) рівномірно збіжний всередині його кола збіжності, тобто при $|z|<R$? На питання в такому формулюванні треба відповісти негативно; так, ряд

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots$$

не буде рівномірно збіжним при $|z|<1$. Справді, з одного боку, маємо: $|1+z+z^2+\ldots+z^N|<N+1$, незалежно від z, якщо $|z|<1$. З другого боку, коли z прямує до одиниці, $|z|<1$, функція $\frac{1}{1-z}$ прямує до нескінченності. Таким чином модуль різниці $\frac{1}{1-z}-(1+z+z^2+\ldots+z^N)$ не може залишатися меншим від якого завгодно наперед заданого додатного числа незалежно від z, $|z|<1$. Проте *всякий степеневий ряд є рівномірно збіжний в крузі* $|z|\leqslant r$, якщо $r<R$. Дійсно, $|c_nz^n|=|c_n|\cdot|z|^n\leqslant|c_n|r^n$, і тому що числовий ряд з загальним членом $|c_n|r^n$ є збіжний ($r<R$), то, на підставі ознаки рівномірно збіжних рядів (розд. II, § 2, п. 3), даний ряд збігається рівномірно.

Взявши до уваги, що члени степеневого ряду (14) є неперервні функції, з доведеного ми робимо висновок [на підставі теореми про неперервність суми рівномірно збіжного ряду (розд. II, § 2, п. 2)]:

Сума степеневого ряду є функція, неперервна при $|z|\leqslant r$, *яке б не було* r, $r<R$, *а значить і при* $|z|<R$, *тобто всередині всього круга збіжності.* Отже, степеневий ряд, для якого $R>0$, зображає неперервну функцію всередині його круга збіжності.

7. Друга теорема Абеля. Ми бачили, що степеневий ряд

$$P(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots \tag{14'}$$

може збігатися в точках, які лежать на колі його круга збіжності. В усякій такій точці z_0, $|z_0|=R$, функція $P(z)$ має певне скінченне значення, і постає питання: як це значення $P(z_0)$ по-

---

[1]) Можна було б показати, що цей ряд є розбіжний лише при $z=1$, в усіх же інших точках кола $|z|=1$ збіжний.

[Для цього досить, наприклад, звернувши увагу на обмеженість сум $s_n=1+\cos\alpha+\ldots+\cos(n-1)\alpha$ і $\sigma_n=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin(n-1)\alpha$ ($\alpha\neq 2k\pi$) (див. зноску до стор. 34), застосувати ознаку збіжності Абеля (див., наприклад, Валле-Пуссен — „Курс анализа бесконечно малых", т. I). (*Ред.*).

в'язане із значеннями $P(z)$ у точках z, внутрішніх до круга збіжності?

На це питання дає відповідь така теорема, що належить Абелю:

Якщо степеневий ряд (14′) *є збіжний в точці* z_0 *кола його круга збіжності, то його сума* $P(z)$ *прямує до границі* $P(z_0)$, *коли точка* z *прямує до* z_0, залишаючись на радіусі Oz_0:

$$\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0).$$

Інакше кажучи: *сума* $P(z)$ *ряду* (14′) *є функція неперервна в точці* z_0 *вздовж радіуса* Oz_0.

Не зменшуючи загальності теореми, ми можемо припускати радіус збіжності рівним одиниці і $z_0 = 1$. Дійсно, вважаючи $z = z_0\zeta$, матимемо: $P(z) = P(z_0\zeta) = Q(\zeta)$, при чому радіус збіжності перетвореного ряду $Q(\zeta)$ буде одиниця, тому що нерівність $|z| < |z_0|$ рівнозначна нерівності $|\zeta| < 1$, точці $z = z_0$ відповідатиме точка $\zeta = 1$. Через те що за умовою ряд (14′) є збіжний при $z = z_0$, то ряд $Q(\zeta)$ буде збіжний при $\zeta = 1$. Далі, ми можемо для простоти вважати $P(1) = 0$, тому що в противному разі замість $P(z)$ взяли б $P(z) - P(1)$. Отже, нехай даний ряд (14′) має радіус збіжності $R = 1$ і збігається в точці $z = 1$ до значення 0. Треба довести, що

$$\lim_{z \to 1} P(z) = 0, \tag{23}$$

якщо z залишається додатним і $z < 1$. Розглянемо допоміжний ряд:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \tag{24}$$

радіус збіжності якого теж дорівнює одиниці. Перемножаючи ряди (14′) і (24), що можливе на підставі їх абсолютної збіжності при $|z| < 1$, матимемо

$$\frac{P(z)}{1-z} = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots)(1 + z + z^2 + \ldots) =$$
$$= c_0 + (c_0 + c_1) z + (c_0 + c_1 + c_2) z^2 +$$

або

$$\frac{P(z)}{1-z} = s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \ldots s_n z^n + \tag{25}$$

де $s_n = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ являє собою частинну суму ряду $P(1)$. Ряд (25) має радіус збіжності, рівний одиниці. Справді, його радіус збіжності R не може бути, очевидно, меншим одиниці, тому що цей ряд утворився в результаті множення рядів (14′) і (24) з радіусами збіжності, рівними одиниці; з другого боку, R не може бути більшим одиниці, бо в противному разі ряд

$$P(z) = (1 - z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n z \tag{26}$$

мав би радіус збіжності більший одиниці, що неможливе.

Щоб оцінити $P(z)$, позначимо через m натуральне число, покищо довільне, і перепишемо (26) у вигляді:

$$P(z)=(1-z)\cdot\sum_{n=0}^{m} s_n z^n+(1-z)\cdot\sum_{n=m+1}^{\infty} s_n z^n. \qquad (27)$$

Нехай ε — дане як завгодно мале додатне число. Виберемо m таким великим, щоб при $n>m$ справджувалася нерівність: $|s_n|<\frac{\varepsilon}{2}$, що є можливе, бо $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=0$. З рівності (27) знаходимо, пригадавши, що z — додатне число, менше одиниці,

$$|P(z)|<(1-z)M+\frac{\varepsilon}{2}(1-z)\cdot\sum_{n=m+1}^{\infty} z^n,$$

де

$$M=|s_0|+|s_1|+\ldots+|s_m|$$

і значить не залежить від z. Тому що $\sum\limits_{m+1}^{\infty} z^n=\frac{z^{m+1}}{1-z}$,

то остання нерівність матиме вигляд:

$$|P(z)|<(1-z)M+\frac{\varepsilon}{2}z^{m+1}<(1-z)M+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (28)$$

Досі z було довільним додатним числом, меншим одиниці. Вважаючи тепер $1-z<\frac{\varepsilon}{2M}$, з (28) матимемо:

$$|P(z)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

що переконує нас у справедливості теореми.

Ця теорема Абеля була узагальнена А. Прінгсгеймом (A. Pringsheim), який показав, що функція $P(z)$ неперервна в точці z_0 „вздовж всякої лінії", при умові, що ця лінія не дотикається до кола в точці z_0.

Теорема Абеля має в аналізі численні застосування. Наприклад відомо, що $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots(-1<x<+1)$. При $x=1$ цей ряд буде: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$ і значить є збіжний. За доведеною теоремою Абеля сума останнього ряду дорівнює $\lim\limits_{x\to 1}\ln(1+x)=\ln 2$, тобто $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$

За допомогою теореми Абеля можна поширити теорему про множення абсолютно збіжних рядів на випадок рядів умовно збіжних. Дійсно, маючи два збіжні ряди з комплексними членами

$$\begin{aligned} s&=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots\\ s'&=u_1'+u_2'+u_3'+\ldots+u_n'+\ldots, \end{aligned} \qquad (29)$$

складемо їх добуток:

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots, \tag{30}$$

де взято: $w_n = u_1 u'_n + u_2 u'_{n-1} + \ldots + u_n u'_1$.

Припустимо, що ряд (30) збіжний, і позначимо його суму через S. В цьому випадку можна довести, що $S = s \cdot s'$, тобто два які завгодно збіжні ряди (29) можна перемножити за відомим правилом (розд. I, § 3, п. 7), якщо в результаті виходить збіжний ряд (30).

Для доведення утворимо два степеневі ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n z^n \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u'_n z^n \tag{29'}$$

Через те що при $z = 1$ за умовою обидва ці ряди збіжні, то вони є абсолютно збіжні при $|z| < 1$ (розд. II, § 3, п. 2). На підставі цього ми можемо їх перемножити за відомим правилом (розд. I, § 3, п. 7):

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n z^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u'_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} w_n z^n. \tag{31}$$

Через те що ряди (29) і (30) збіжні згідно з умовою, то за другою теоремою Абеля маємо:

$$\lim_{z \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} u_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \lim_{z \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} u'_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n, \quad \lim_{z \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

Помітивши це, з рівності (31) в наслідок переходу до границі дістанемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u'_n = \sum_{n=1}^{\infty} w_n, \quad \text{або} \quad s \cdot s' = S.$$

8. Показникова функція. Функції тригонометричні і гіперболічні. Ми бачили, що степеневі ряди

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \quad z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \quad 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots$$

збігаються абсолютно в усій площині комплексного змінного z (розд. II, § 3, п. 5). Суми цих рядів будуть функціями комплексного змінного z, неперервними в усій площині (розд. II, § 3, п. 6). З аналізу відомо, що коли z набирає дійсних значень x, то суми цих рядів є відповідно: e^x, $\sin x$, $\cos x$. Умовимося при якому завгодно комплексному значенні z суми наших рядів позначати відповідно через e^z, $\sin z$, $\cos z$, тобто візьмемо:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots$$

Таким чином, ми визначимо три функції комплексного змінного z, неперервні в усій площині. Покажемо, що відомі у випадку дійсного z властивості цих функцій поширюються на випадок всякого комплексного z.

Наприклад формулу множення показникової функції:

$$e^z \cdot e^t = e^{z+t}, \tag{32}$$

доводять для яких завгодно комплексних z і t за допомогою множення відповідних рядів. Взявши до уваги, що

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots, \quad e^t = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \ldots,$$

дістаємо:

$$e^z \cdot e^t = \left(1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \ldots\right) =$$
$$= 1 + \frac{z+t}{1} + \frac{(z+t)^2}{2!} + \ldots$$

Ряд, що стоїть в правій частині останньої рівності, утворюється з ряду для e^z заміною z на $z+t$; отже, його сума дорівнює e^{z+t}, і формулу (32) доведено. Вважаючи у формулі (32) $t = -z$, знайдемо:

$$e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1,$$

звідки

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}. \tag{33}$$

Користуючись формулою (33), легко вивести формулу ділення показникової функції:

$$\frac{e^z}{e^t} = e^z \cdot e^{-t} = e^{z-t},$$

тобто

$$\frac{e^z}{e^t} = e^{z-t}. \tag{34}$$

В дійсній області тригонометричні функції $\sin z$, $\cos z$ не пов'язані з показниковою функцією e^z. Розглядаючи ці функції в комплексній області, Ейлер встановив визначне співвідношення між ними:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{35}$$

Щоб довести тотожність (35), замінимо в ряді для e^z букву z через iz і зберемо окремо члени, які не мають i, і члени, що мають i; дістанемо:

$$e^{iz} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right).$$

Помітивши, що ряд, який стоїть у дужках, виражає $\sin z$, а ряд, що стоїть за дужками, означає $\cos z$, дістаємо тотожність (35).

Через те що ряд для $\cos z$ має лише парні степені z, а ряд, що виражає $\sin z$, — лише непарні степені z, то маємо:

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Заміняючи в тотожності Ейлера (35) z на $-z$, дістаємо:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{35'}$$

Додаючи між собою тотожності (35) і (35′), знаходимо:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{36}$$

Відніманням цих тотожностей дістаємо:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{36'}$$

Користуючись тотожністю Ейлера, легко довести, що показникова функція e^z має період $2\pi i$. Дійсно, з одного боку, за формулою (32) маємо: $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i}$; з другого боку, на підставі тотожності (35) маємо: $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$. Отже, дістаємо: $e^{z+2\pi i} = e^z$, тобто функція e^z не змінює свого значення при додаванні до незалежного змінного сталого числа $2\pi i$.

Нарешті, користуючись тотожністю Ейлера, ми дістаємо так звану показникову форму для зображення якого завгодно комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

звідки

$$z = re^{\varphi i} \tag{37}$$

Аналогічно поширюються на комплексну область відомі з тригонометрії формули додавання і віднімання синуса й косинуса:

$$\cos(z \pm t) = \cos z \cos t \mp \sin z \sin t, \tag{38}$$

$$\sin(z \pm t) = \sin z \cos t \pm \cos z \sin t. \tag{39}$$

Справді, за формулою (32) маємо: $e^{i(z+t)} = e^{iz} \cdot e^{it}$, звідки на підставі тотожності Ейлера дістаємо:

$$\cos(z+t) + i \sin(z+t) = (\cos z + i \sin z)(\cos t + i \sin t). \tag{40}$$

Змінюючи в тотожності (40) знаки при z і t, знайдемо:

$$\cos(z+t) - i \sin(z+t) = (\cos z - i \sin z)(\cos t - i \sin t). \tag{41}$$

Розкриваючи дужки в рівностях (40) і (41) і додаючи між собою, дістаємо:

$$\cos(z+t) = \cos z \cos t - \sin z \sin t;$$

а відніманням рівностей (40) і (41) знайдемо:

$$\sin(z+t) = \sin z \cos t + \cos z \sin t.$$

Отже, ми вивели формули додавання для косинуса й синуса. Формули віднімання вийдуть з формул додавання в наслідок заміни t на $-t$. Нарешті, вважаючи в формулах додавання $t = 2\pi$, матимемо:

$$\cos(z+2\pi) = \cos z \cdot \cos 2\pi - \sin z \cdot \sin 2\pi = \cos z,$$

$$\sin(z+2\pi) = \sin z \cdot \cos 2\pi + \cos z \cdot \sin 2\pi = \sin z,$$

тобто число 2π є період синуса й косинуса і в комплексній області; вважаючи ж у формулі косинуса різниці (38) $t = z$, знайдемо:

$$\cos 0 = \cos^2 z + \sin^2 z, \quad \text{або} \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1. \tag{42}$$

Таким чином, ми бачимо, що всі формули тригонометрії залишаються в силі і для комплексної області.

Зазначимо ще, що показникова функция e^z не обертається в нуль ніде на площині. Справді, вважаючи $z = x + yi$, маємо $e^z = e^x \cdot e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$, звідки виходить, що модуль функції e^z дорівнює e^x. При якому завгодно дійсному значенні x вираз e^x не дорівнює нулеві, а значить $|e^z|$ не може стати нулем.

Визначимо нарешті всі ті точки площини, в яких $\sin z$ і $\cos z$ обертаються в нуль. На підставі формули (36′) рівність $\sin z = 0$ рівнозначна рівнянню: $e^{iz} = e^{-iz}$, або $e^{2iz} = 1$. Вважаючи $z = \alpha + \beta i$, знаходимо:

$$e^{2i(\alpha+\beta i)} = 1, \quad \text{або} \quad e^{-2\beta} \cdot e^{2i\alpha} = 1. \tag{43}$$

В рівнянні (43) праворуч стоїть одиниця, а ліворуч комплексне число, модуль якого дорівнює $e^{-2\beta}$, а аргумент 2α. Отже, маємо: $e^{-2\beta} = 1$, $2\alpha = 2\pi k$, де k — яке завгодно ціле число, звідки знаходимо: $\beta = 0$, $\alpha = \pi k$. Таким чином нулі $\sin z$ будуть: $z = \alpha + \beta i = \pi k$, де k — яке завгодно ціле число. Аналогічно покажемо, що всі нулі $\cos z$ будуть: $\frac{\pi}{2} + \pi k$, де k — яке завгодно ціле число.

Згідно з означенням гіперболічні синус і косинус будуть:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{44}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{45}$$

Порівнюючи ці формули (44) і (45) відповідно з формулами (36′) і (36), матимемо:

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \tag{46}$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz. \tag{47}$$

Ці формули показують, що гіперболічні синус і косинус можуть бути виражені через кругові синус і косинус, якщо користуватися комплексними числами. Записавши формули (46) і (47) у вигляді:

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \quad \cos iz = \operatorname{ch} z$$

і вважаючи $iz = z'$, маємо:

$$\sin z' = i \operatorname{sh} z, \quad \cos z' = \operatorname{ch} z. \tag{48}$$

Звідси виходить таке: яке завгодно співвідношення між тригонометричними функціями $\sin z$ і $\cos z$ переходить у відповідне співвідношення між гіперболічними функціями $\operatorname{sh} z$ і $\operatorname{ch} z$, якщо в цьому співвідношенні ми замінимо $\sin z$ через $i \operatorname{sh} z$, а $\cos z$ через $\operatorname{ch} z$.

Таким чином, паралельно з формулами звичайної тригонометрії ми дістаємо всі формули гіперболічної тригонометрії.

§ 4. Диференціювання функцій комплексного змінного

1. Поняття похідної. Нехай $w = f(z)$ є однозначна функція, визначена в області G площини комплексного змінного z. Означення диференційовності за комплексним змінним з формального боку цілком аналогічне відповідному означенню для функцій дійсного змінного. Ми скажемо, що *функція $w = f(z)$ диференційовна в точці z області G, якщо, позначаючи через $z + h$ яку завгодно точку цієї області, відношення*

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{49}$$

прямує до певної скінченної границі, коли $\Delta z = h$ як завгодно прямує до нуля при сталому z. Границю цього відношення (49) ми назвемо *похідною функції $f(z)$ у точці z* і позначимо через $f'(z)$, так що

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z). \tag{50}$$

Рівність (50) означає таке: при всякому скільки завгодно малому $\varepsilon > 0$ і даному z знайдеться відповідне додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що нерівність $\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| < \varepsilon$ має місце для всіх h, для яких $|h| < \delta$.

Функція $w = f(z)$, диференційовна в точці z, називається *моногенною* в цій точці.

2. Поняття функції аналітичної в області. Якщо функція $w = f(z)$ є моногенна в кожній точці області G, то ми скажемо, що вона *аналітична в області G*. Отже, за означенням однозначна функція називається аналітичною в області G, коли в кожній точці цієї області вона має певну скінченну похідну.

Ми відносимо, таким чином, до функції властивість бути аналітичною завжди в областях; але ж і про кожну окрему точку такої області кажуть, що в ній наша функція аналітична. При цьому важливо зауважити, що функція аналітична в точці тим самим повинна бути аналітична в якомусь околі цієї точки. Наприклад, функція $w = zR(z)$, неперервна в усій площині, має в точці $z = 0$ похідну, рівну нулеві, тому що відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{hR(h)}{h} =$

$=R(h)$ прямує до нуля разом з h. Ця функція, моногенна в нульовій точці, не буде аналітичною в цій точці, тому що в якій завгодно іншій точці площини ця функція не буде диференційовною. Справді, відношення

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{(z+h)R(z+h)-zR(z)}{h}=$$

$$=z\frac{R(z+h)-R(z)}{h}+R(z+h)$$

при $z\neq 0$ не прямує до певної границі, коли h прямує до нуля. Це буде очевидним, коли візьмемо $h=h_1+h_2i$ і зауважимо, що відношення

$$\frac{R(z+h)-R(z)}{h}=\frac{h_1}{h_1+h_2i}$$

має границю, рівну одиниці при $h_2=0$ і h_1, що прямує до нуля, і це саме відношення прямує до нуля при $h_1=0$ і h_2, що прямує до нуля.

Наведений приклад дає функцію, неперервну в усій площині і ніде не диференційовну крім $z=0$. Взявши $w=R(z)$, аналогічно попередньому показали б, що ця функція, неперервна в усій площині, ніде не диференційовна. Другим прикладом неперервної і ніде не диференційовної функції може бути: $w=\bar{z}=x-yi$. Таким чином, ми бачимо, що дуже легко утворити приклади неперервних функцій комплексного змінного, позбавлених похідних у кожній точці площини. Простота утворення таких функцій пояснюється тим, що вимога диференційовності функції в точці по комплексному змінному значно сильніша, ніж по дійсному змінному. Справді, припускаючи диференційовність функції $w=f(z)$ в точці z, ми вважаємо, що границя відношення $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ буде одним і тим же числом, незалежно від напряму, в якому змінна точка $z+h$ наближається до сталої точки z. Ще більшою буде вимога диференційовності функції в кожній точці області; звідси стає зрозумілим, що функції, аналітичні в області, повинні мати ряд специфічних властивостей, належних тільки їм самим серед множини всіх функцій комплексного змінного.

Основне завдання цього підручника полягає в тому, щоб виявити основні визначні властивості таких функцій. Через те що означення похідної функції комплексного змінного цілком аналогічне з формального боку відповідному означенню для функції дійсного змінного, то всі відомі з диференціального числення правила диференціювання легко можна перенести в комплексну область. Звідси, зокрема, виходить, що ціла раціональна функція є аналітична в усій площині; функція раціональна є аналітична в усій площині комплексного змінного, крім точок, в яких її знаменник обертається в нуль.

3. Поняття диференціала. Подібно до похідної, поняття диференціала для функцій комплексного змінного з формального боку аналогічне відповідному поняттю диференціала функції дійсного змінного.

Пригадавши, що похідна функція комплексного змінного $w = f(z)$ в точці z визначається як

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z),$$

маємо

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \eta, \tag{51}$$

де η прямує до нуля разом з Δz. З рівності (51) знаходимо:

$$\Delta w = f'(z) \cdot \Delta z + \eta \Delta z. \tag{52}$$

Остання формула (52) показує, що нескінченно малий приріст функції Δw є сума двох нескінченно малих величин: $f'(z)\Delta z$ і $\eta \Delta z$. Ці дві нескінченно малі величини мають різну природу. Перша з них $f'(z)\Delta z$ того самого порядку, що й Δz, тому що, будучи поділена на Δz, має скінченну границю $f'(z)$; відношення ж другої величини до Δz, рівне η, прямує до нуля разом з Δz, тобто другий доданок формули (52) є нескінченно мала величина вищого порядку відносно Δz.

Перший доданок формули (52) $f'(z)\Delta z$ називається *головною частиною* приросту Δw або, інакше, *диференціалом* функції w і позначається так:

$$dw = f'(z)\Delta z. \tag{53}$$

Зокрема, при $w = z$ з рівності (53) знаходимо $dz = 1 \cdot \Delta z$, тобто диференціал незалежного змінного збігається з його приростом. Заміняючи у формулі (53) Δz через dz, маємо:

$$dw = f'(z)\, dz, \tag{53'}$$

звідки

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{df(z)}{dz}, \tag{54}$$

тобто диференціал функції дорівнює добуткові її похідної на диференціал незалежного змінного; похідна ж дорівнює відношенню диференціала функції до диференціала незалежного змінного.

Формулу (52) одержано в припущенні, що функція $w = f(z)$ в точці z має скінченну похідну. З цієї формули бачимо, що при Δz нескінченно малому Δw теж нескінченно мале, а це значить, що дана функція неперервна в точці z, тобто *всяка функція, диференційовна в точці, необхідно неперервна в цій точці.*

4. Умови Коші-Рімана (C.-R.). Нехай $w = f(z) = u + vi$ є однозначна функція комплексного змінного $z = x + yi$, визначена в області G. Ця функція буде відома, якщо дано дві функції u і v двох дійсних змінних x, y. Якщо функції u і v взяти незалежно одну від одної, то функція $f(z)$, взагалі кажучи, не буде

диференційовною, не зважаючи на те, що обидві функції u і v мають кожна частинні похідні відносно x і y.

Наприклад, у зазначеному вище прикладі $w=\bar{z}=x-yi$ неперервної, ніде не диференційовної функції $u=x$, $v=-y$ мають кожна частинні похідні по x і y. Отже, у випадку диференційовності функції $f(z)$ її дійсна частина u і коефіцієнт при уявній частині v повинні бути вибрані не незалежно, а так, щоб виконувалися деякі умови. До виведення цих умов зараз і перейдемо.

Нехай функція $f(z)$ в якійсь точці z має певну скінченну похідну. Таким чином маємо:

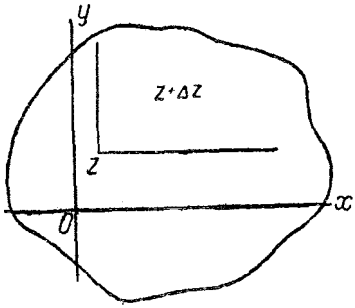

Рис. 19

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=f'(z). \qquad (55)$$

Через те що $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ може прямувати до нуля за довільним законом, то, зокрема, ми можемо вважати, що $\Delta y=0$ і Δx прямує до нуля. Геометрично (19) це означає, що ми змушуємо точку $z+\Delta z$ наближатися до точки z, ідучи за прямою лінією, паралельною дійсній осі. При цій умові рівність (55) нам дасть:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}=f'(z), \text{ або } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=f'(z),$$

що можна записати так:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=f'(z). \qquad (56)$$

Аналогічно, беручи $\Delta x=0$, тобто змушуючи точку $z+\Delta z$ наближатися до точки z (рис. 19), йдучи за прямою лінією, паралельною уявній осі, матимемо з рівності (55):

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}=f'(z), \text{ або } -i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y}=f'(z),$$

що можна записати так:

$$-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=f'(z). \qquad (56')$$

Через те що праві частини рівностей (56) і (56′) рівні між собою, то повинні бути рівні і ліві частини цих рівностей.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (57)$$

Порівнюючи між собою в обох частинах останньої рівності (57) дійсні і уявні частини, дістаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad \text{(C.-R.)}$$

Отже, ми бачимо, що коли функція $w = u + vi$ диференційовна в точці $z = x + yi$, то в цій точці існують частинні похідні функцій u і v, при чому ці останні пов'язані між собою умовами (C.-R.) Ці умови називаються *умовами моногенності функції в точці* z і були знайдені Коші і Ріманом.

Ми показали, що умови (C.-R.) необхідні для того, щоб функція $w = f(z)$ була моногенною в точці z. Покажемо, що ці умови достатні. При доведенні достатності умов (C.-R.) ми будемо припускати, що частинні похідні функцій u і v неперервні в розгляданій точці

$$z = x + yi.$$

З диференціального числення відомо, що при умові неперервності частинних похідних маємо:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \eta_1,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \eta_2,$$

де η_1 і η_2 — нескінченно малі величини вищого порядку, ніж

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Помітивши це, ми можемо написати:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right)}{dx + idy} + \frac{\eta_1 + i\eta_2}{dx + idy}.$$

Заміняючи тут $\frac{\partial u}{\partial y}$ і $\frac{\partial v}{\partial y}$ за формулами (C.-R.) і беручи до уваги, що відношення $\frac{\eta_1 + i\eta_2}{dx + idy} = \eta_3$ є величина нескінченно мала разом з $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ми для відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ матимемо такий вираз:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + i\frac{\partial v}{\partial x} dx + i\frac{\partial u}{\partial x} dy}{dx + idy} + \eta_3,$$

або

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \eta_3.$$

Переходячи в останній рівності до границі при Δz, що прямує до нуля (або, що є те саме, при $|\Delta z| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, що прямує до нуля), матимемо:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Зауваження. Це доведення достатності умов (C.-R.) залишається, очевидно, в силі, якщо замість неперервності частинних похідних функцій u і v ми поставимо легшу умову: існування повних диференціалів du і dv, а це рівнозначне тому, що різниці $\Delta u - du$ і $\Delta v - dv$ є нескінченно малі вищого порядку, ніж $\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

З попереднього випливає, що для функції $w=f(z)$, аналітичної в області G, умови (C.-R.) виконуються в кожній точці цієї області; і навпаки: якщо умови (C.-R.) здійснюються всюди в області G і частинні похідні, що входять в них, неперервні в цій області (або функції u і v мають повні диференціали в області), то функція $w=u+vi$ буде аналітичною в G.

Природно, постає питання: чи не буде виконання умов (C.-R.) всюди в області G (без додаткових умов неперервності частинних похідних або повної диференційовності функцій u і v) достатнім для того, щоб функція $w=u+vi$ була аналітичною в області G? На простому прикладі легко показати, що це не так. Справді, нехай

$$w=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & \text{при } z\neq 0, \\ 0 & \text{при } z=0. \end{cases}$$

В усякій точці z площини, відмінної від нульової точки, функція w диференційовна, а тому в усякій такій точці виконуються умови (C.-R.). Легко показати, що і в нульовій точці умови (C.-R.) виконуються.

Дійсно, при $z=0$ маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^4}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x e^{\frac{1}{(\Delta x)^4}}}=0,$$

звідки

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0=0.$$

Аналогічно знаходимо при $z=0$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{(\Delta y)^4}}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y e^{\frac{1}{(\Delta y)^4}}}=0,$$

звідки $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0=\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0=0$. Отже, в нульовій точці всі чотири частинні похідні функцій u і v дорівнюють нулеві, і значить умови (C.-R.) залишаються в силі. Таким чином, для розгляданої функції умови (C.-R.) виконані в усій площині комплексного змінного z, в той час як наша функція не буде аналітичною всюди в площині, тому що в нульовій точці вона не буде навіть неперервною. Щоб це показати, досить наближати точку z до нульової точки по прямій лінії $y=x$; тоді

$$z=x+yi=(1+i)x,\quad z^4=(1+i)^4x^4=-4x^4\quad\text{і}\quad e^{-\frac{1}{z^4}}=e^{\frac{1}{4x^4}};$$

коли x прямує до нуля, останній вираз прямує до нескінченності. В розгляданому прикладі сама функція не є неперервною всюди в площині, хоч в усякій точці площини вона задовольняє умови (C.-R.).

Обмежуючись неперервними функціями, в останній час було доведено [1]), що *виконання умов* (C.-R.) *всюди в області G необхідне і достатнє для того, щоб дана функція була аналітичною в області G.* Однак доведення цього положення не є елементарним і тому виходить за межі цього підручника.

5. Спряжені гармонічні функції. Далі ми упевнимося в тому, що функція, аналітична в області G, матиме похідні всіх порядків. Зокрема, для такої функції u і v мають неперервні частинні похідні другого порядку в області G. Подивимось, як треба вибирати u і v для того, щоб функція $u+vi$ була аналітична в розгляданій області.

Диференціюючи першу з умов (C.-R.) відносно x, а другу відносно y, матимемо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x},$$

додаючи ці рівності, ми маємо:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{58}$$

Рівняння $\Delta u=0$ називається рівнянням Лапласа, і всяка функція, що задовольняє це рівняння, називається *гармонічною* [2]). Отже, u є гармонічна функція в області G. Також покажемо, що і v є гармонічна функція в області G. Для цього треба продиференціювати першу з рівностей (C.-R.) відносно y, другу ж відносно x і відняти результати:

$$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Але ж, якщо взяти за u і v дві довільні функції, гармонічні в області G, то $u+vi$ не буде, взагалі кажучи, аналітичною функцією в цій області. Для того щоб $u+vi$ була функцією аналітичною в однозв'язній області G, треба, очевидно, зробити так: взявши за одну з цих функцій, наприклад u, довільну гармонічну функцію, визначити потім v з рівнянь

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{C.-R.}$$

Зазначимо, що вираз:

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

є повний диференціал, тому що $\Delta u=0$; отже v визначається квадратурами з точністю до аддитивного довільного сталого:

$$v=\int -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

[1]) Loman, Göttinger Nachrichten, 1923.
[2]) Або потенціальною. (*Ред.*).

Визначувана так гармонічна функція v називається *спряженою* з гармонічною функцією u.

Приклади

1. Показникова функція $w = e^z$ задовольняє умови (C.-R.) в усій площині. Справді:

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Отже, $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.
Диференціюванням знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Отже, умови (C.-R.) виконуються скрізь у площині, і функція e^z є аналітична в усій площині.
Похідна функції e^z дорівнює:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z,$$

тобто

$$\frac{de^z}{dz} = e^z.$$

2. Тригонометричні функції $\sin z$ і $\cos z$ виражаються, як відомо, за допомогою показникової функції:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Отже, $\sin z$ і $\cos z$ — функції аналітичні в усій площині. Похідні цих функцій складемо на підставі правила диференціювання складних функцій:

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \frac{1}{2i}(ie^{iz} + ie^{-iz}) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z;$$

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$

3. Аналогічно доводимо, що

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

є функції аналітичні в усій площині, при чому

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sh} z) = \operatorname{ch} z \quad \text{і} \quad \frac{d}{dz}(\operatorname{ch} z) = \operatorname{sh} z.$$

§ 5. Конформне відображення

1. Геометричне значення аргументу похідної. Нехай $w = f(z)$ є функція, аналітична в області G. Значення функції $w = u + vi$ будемо зображати точками в площині uv. Кожній точці $z = x + yi$ в площині незалежного змінного z відповідатиме одна точка $w = u + vi$ в площині функції w (рис. 20 і 21). При рухові точки z в площині xy по якійсь лінії C відповідна їй точка w буде

описувати в площині uv лінію Г, яка є відображенням лінії C. Нехай z_0 — довільна точка області G, і C — лінія, дана разом з своїм напрямом, яка виходить із цієї точки і має певну дотичну в точці z_0. Припустимо, що $f'(z_0) \neq 0$. В площині uv лінії C буде відповідати як її відображення лінія Г, яка виходить з точки $w_0 = f(z_0)$. Якщо рівняння довільно вибраної лінії C є $z = z(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, то рівняння лінії Г матимемо, коли замінимо в рівності $w = f(z)$ змінне z через $z(t)$: $w = f[z(t)] = w(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Щоб з'ясувати геометричне значення похідної $f'(z_0)$, зобразимо комплексне число $f'(z_0)$ в тригонометричній формі: $f'(z_0) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ і з'ясуємо геометричне значення аргументу α

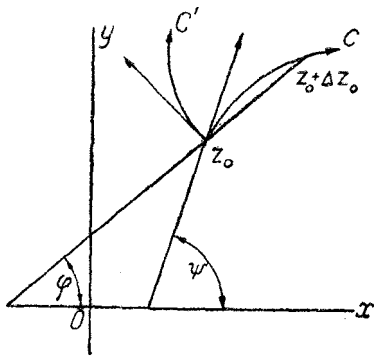

Рис. 20

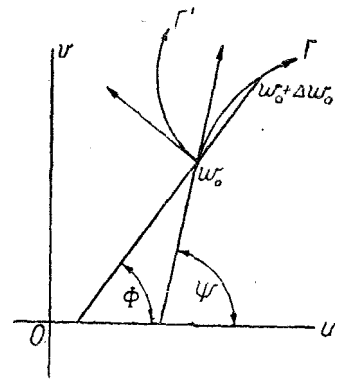

Рис. 21

похідної і її модуля r. Візьмемо довільну точку $z_0 + \Delta z_0$ на лінії C і позначимо через $w_0 + \Delta w_0$ відповідну їй точку на площині uv, що лежить на лінії Г. Якщо точка $z_0 + \Delta z_0$ прямує по лінії C до точки z_0, то відповідна їй точка $w_0 + \Delta w_0$ рухається по лінії Г до точки w_0, при чому Δz_0 і Δw_0 одночасно прямують до нуля. З рівності

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z_0 \to 0} \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

знаходимо:

$$\lim_{\Delta z_0 \to 0} \left| \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} \right| = r, \tag{59}$$

$$\lim_{\Delta z_0 \to 0} \arg \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = \alpha \tag{60}$$

(з точністю до кратних 2π). Сюди входить вимога, щоб $f'(z_0) \neq 0$, тому що в противному разі α не мав би певного значення. Розглянемо докладніше рівність (60). Через те що аргумент дробу дорівнює різниці аргументів чисельника і знаменника, то

$$\arg \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = \arg \Delta w_0 - \arg \Delta z_0,$$

і рівність (60) матиме вигляд:

$$\lim \arg \Delta w_0 - \lim \arg \Delta z_0 = \alpha. \qquad (60')$$

З'ясуємо геометричний зміст рівності (60′), користуючись рис. 20 і 21. Очевидно, $\Delta z_0 = (z_0 + \Delta z_0) - z_0$ зображається вектором, що сполучає точку z_0 з точкою $z_0 + \Delta z_0$; також Δw_0 є вектор, що йде від точки w_0 до точки $w_0 + \Delta w_0$. Отже, $\arg \Delta z_0$ є кут φ між додатним напрямом осі Ox з відповідним вектором Δz_0, а $\arg \Delta w_0$ є кут Φ осі Ou з вектором Δw_0. Таким чином, рівність (60′) буде виду:

$$\lim \Phi - \lim \varphi = \alpha. \qquad (60'')$$

В границі напрям вектора Δz_0 збігається з напрямом дотичної до лінії C в точці z_0 (рис. 20), а напрям вектора Δw_0 з напрямом дотичної до лінії Г в точці w_0 (рис. 21), яка необхідно повинна існувати в наслідок рівності (60″). Позначаючи через ψ і Ψ кути осей Ox і Ou відповідно з дотичними до ліній C і Г в точках z_0 і w_0, перепишемо (60″):

$$\Psi - \psi = \alpha, \quad \text{або} \quad \Psi = \psi + \alpha. \qquad (61)$$

Будемо вважати додатні напрями осей Ox і Ou однаковими. Тоді з рівності (61) бачимо, що α є кут, на який повертається дотична до лінії C в точці z_0 при відображенні за допомогою $w = f(z)$, або, інакше, α є кут між початковим і відображеним напрямами. Істотно важливо зауважити, що лінію C ми беремо довільною; при зміні напряму лінії C будуть змінюватися ψ і Ψ, але α залишається сталим. Отже, проводячи з точки z_0 другу лінію C' і позначаючи відповідну їй лінію, що виходить з точки w_0, через Г′ (рис. 20 і 21), залишимо рівність (61) в силі і для цієї пари ліній. Вона матиме вигляд:

$$\Psi' = \psi' + \alpha, \qquad (61')$$

де ψ' і Ψ' є значення відповідно ψ і Ψ для ліній C' і Г′. Віднімаючи від рівності (61′), матимемо:

$$\Psi' - \Psi = \psi' - \psi. \qquad (62)$$

Зваживши на те, що $\psi' - \psi$ означає кут між дотичними в точці z_0 до ліній C і C', а $\Psi' - \Psi$ — відповідний кут для Г і Г′, бачимо з рівності (62) таке: дві довільні лінії, що виходять з точки z_0, відображаються в дві відповідні лінії, що виходять з точки $w_0 = f(z_0)$, так що кут між дотичними до даних і відображених ліній буде той самий як величиною, так і напрямом. Це значить, що коли додатний напрям лінії C в точці z_0 переводиться в додатний напрям лінії C' поворотом на якийсь кут в певному напрямі, то відповідний напрям лінії Г переходить в напрям лінії Г′ в наслідок повороту на той самий кут і в тому самому напряму. Отже, ***відображення за допомогою аналітичної функції має властивість консерватизму кутів в усіх точках, де похідна $f'(z)$ не дорівнює нулеві.***

2. Геометричне значення модуля похідної. Після того, як ми з'ясували геометричне значення аргумента похідної, перейдемо до розгляду її модуля. Рівність (59) можна записати так:

$$\lim \frac{|\Delta w_0|}{|\Delta z_0|} = r. \qquad (59')$$

Геометрично $|\Delta z_0|$ означає довжину вектора Δz_0, тобто віддаль між точками z_0 і $z_0 + \Delta z_0$ (рис. 20); аналогічно $|\Delta w_0|$ є віддаль між відповідними точками w_0 і $w_0 + \Delta w_0$ (рис. 21). Рівність (59′) показує, що відношення нескінченно малої віддалі між точками на відображенні до нескінченно малої віддалі між початковими точками, в границі рівне $r = |f'(z_0)|$, не залежить від напряму лінії C. З цього ясно, що $r = |f'(z_0)|$ можна розглядати як величину зміни масштабу в точці z_0 при зображенні за допомогою функції $w = f(z)$. Якщо $r > 1$, то масштаб збільшується, тобто відбувається розтягання довільного нескінченно малого елементу, що виходить з точки z_0; якщо $r < 1$, то, навпаки, стискання; при $r = 1$ масштаб залишається незмінним, тобто нескінченно малий елемент, який виходить з точки z_0, заміняється йому еквівалентним нескінченно малим елементом, який виходить з точки w.

Через те що $r = |f'(z_0)|$ залежить тільки від z_0 і не залежить від напряму лінії C, то зміна масштабу в даній точці z_0 буде та сама незалежно від напряму. Таким чином, можна сказати, що зображення за допомогою аналітичної функції $w = f(z)$ має в кожній точці z_0, де $f'(z_0) \neq 0$, постійний розтяг, який не залежить від напряму.

3. Конформне відображення. Отже, всяке аналітичне відображення, встановлюване за допомогою аналітичної функції $w = f(z)$, має в кожній точці z_0, де $f(z_0) \neq 0$, дві властивості:

1) консерватизму кутів,

2) постійності розтягів.

Якщо ми візьмемо в площині комплексного змінного z нескінченно малий трикутник, одна з вершин якого міститься в точці z_0, то йому в площині змінного w відповідатиме нескінченно малий трикутник з вершиною в точці w_0 (рис. 22 і 23). Відповідні кути в цих трикутниках будуть рівні на підставі властивості консерватизму кутів; відношення ж відповідних сторін, з точністю до нескінченно малих, дорівнюватимуть тому самому сталому числу $r \neq 0$. Такі два трикутники називаються подібними між собою. Отже, аналітичне відображення буде подібним у нескінченно малому [поблизу кожної точки, де $f'(z) \neq 0$]. Звідси природно буде назвати відображення, яке має властивість консерватизму кутів і властивість постійності розтягів, *конформним відображенням*.

Резюмуючи дослідження, зроблене в п. 1 і 2, ми скажемо: всяке відображення, встановлюване за допомогою аналітичної функції $w = f(z)$, є конформне в усіх точках, де похідна цієї функції не дорівнює нулеві. З попереднього легко бачити, що і

навпаки, коли однозначна функція $w=f(z)$ дає конформне відображення, то функція $f(z)$ буде аналітичною, з похідною, не рівною нулеві.

4. Конформне відображення II роду. Через те що при аналітичному відображенні кути між відповідними напрямами зберігаються не тільки щодо величини, але і щодо знаку, то при такому відображенні всякий замкнутий контур переходить в замкнутий контур того самого напряму. Очевидно, існують такі відображення, при яких величина кутів зберігається, але напрям їх відліку змінюється на супротивний. В цьому випадку замкнутому контурові, що проходиться в одному напрямі, відповідатиме замкнутий контур, який проходиться в супротивному напрямі. Всяке відображення площини комплексного змінного z (або її частини) на площину w, при якому кути зберігаються щодо величини, а напрям їх відліку змінюється на супротивний, і яке має крім того властивість постійності розтягів, називається *конформним відображенням II роду,* на відміну від аналітичних відображень, які називають *конформними відображеннями I роду.* Всі такі відображення встановлюються за допомогою функцій, тісно зв'язаних з аналітичними функціями.

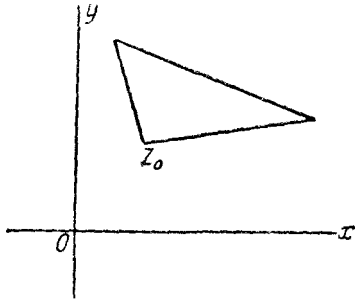

Рис. 22

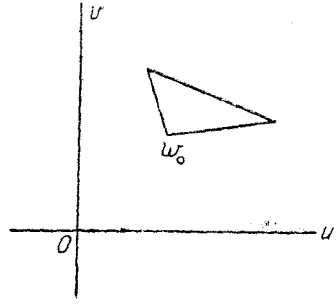

Рис. 23

Нехай нам дано відображення $w=\bar{z}$. Будемо інтерпретувати змінне w в тій же площині, що і z; ми бачимо, що при розгляданому відображенні всяка точка z переходить в точку їй симетричну відносно дійсної осі. Ясно, що при такому відображенні всякі два напрями, які виходять з точки z і утворюють між собою якийсь кут α, перейдуть у два відповідні напрями, симетричні з першими, кут між якими буде $-\alpha$, тобто величина кутів зберігається, а напрям їх відліку змінюється на супротивний (рис. 24). Далі, це відображення має властивість постійності розтягів, тому що при ньому немає взагалі ніякої зміни масштабу. Отже, розглядане відображення $w=\bar{z}$ є конформне відображення II роду.

Припускаючи тепер $f(z)$ аналітичною функцією, ми можемо зробити висновок, що відображення $w=\overline{f(z)}$ буде конформним

II роду. Справді, це відображення можна розбити на два послідовні відображення: $\zeta = f(z)$ і $w = \bar{\zeta}$. При першому перетворенні кути зберігаються як щодо величини, так і щодо напряму; при другому ж — напрям відліку кутів змінюється на супротивний. Отже, в результуючому відображенні кути зберігаються щодо величини, але напрям їх відліку змінюється на супротивний. Крім того, дане відображення має властивість постійності розтягів, тому що ця остання властивість належить обом складовим перетворенням.

Таким чином ми довели, що *всяке перетворення, встановлюване за допомогою функції, значення якої спряжені із значеннями аналітичної функції, є конформне II роду. Навпаки, всяке конформне відображення II роду здійснюється за допомогою функції, спряженої з якоюсь аналітичною функцією.* Справді, якщо $w = F(z)$ встановлює конформне відображення II роду, то $w = \overline{F(z)}$ повинно визначати конформне відображення I роду і значить $\overline{F(z)}$ є функція аналітична в розгляданій області: $\overline{F(z)} = f(z)$, звідки виходить:

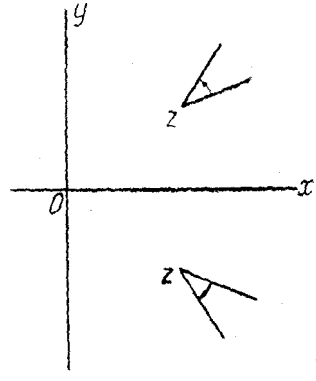

Рис. 24

$$F(z) = \overline{f(z)}.$$

Ми бачили, що аналітичне відображення характеризується двома властивостями: консерватизмом кутів і постійністю розтягів. Природно буде поставити питання: чи всяке неперервне відображення, яке має властивість консерватизму кутів, буде аналітичним, тобто чи викликає властивість збереження кутів постійність розтягів? Або інше аналогічне питання: неперервне відображення, що має постійний розтяг, чи не буде завжди конформним I або II роду? Не торкаючись розгляду цих питань, ми лише зауважимо, що обидві поставлені задачі розв'язуються позитивно і до того елементарними методами, якщо a priori припускати для даного відображення $w = u + vi$ неперервність частинних похідних функцій u і v. Розв'язання тих самих проблем стає набагато важчим, коли розглядати довільне неперервне перетворення, а priori не припускаючи існування частинних похідних функцій u і v. Однак за останній час зроблено великі успіхи в розв'язанні зазначених проблем в їх загальній поставі. Приміром доведено, що всяке неперервне і взаємно однозначне відображення, яке має консерватизм кутів, є необхідно аналітичним[1]). Залишається покищо не розв'язаним питання, чи буде вимога взаємної однозначності перетворення істотною для спра-

[1]) D. Menschoff, Sur la représentation conforme des domaines planes, Math. Ann., 1926.

ведливості теореми, чи твердження залишається в силі і без цього обмеження? Щодо другої проблеми, то вона розв'язана цілком. Доведено, що *всяке неперервне і взаємно однозначне відображення, яке має постійність розтягів, необхідно повинно бути конформним I або II роду*[1]). З другого боку, на простому прикладі легко показати, що тут вимога взаємної однозначності відображення є істотна. Дійсно, легко дати приклад неперервного відображення з постійним розтягом, яке не буде конформним ні I, ні II роду. З цією метою візьмемо таке перетворення: $w=z$, якщо точка z міститься у верхній півплощині, $w=\bar{z}$, якщо точка z лежить в нижній півплощині (на дійсній осі z і $\bar{z}$ збігаються). Очевидно, це відображення буде неперервним в усій площині комплексного змінного z, матиме постійний розтяг і проте воно не буде ні аналітичним в усій площині, ні спряженим з аналітичним в усій площині. Отже, друга проблема дістає негативний розв'язок, якщо розглядати однозначні відображення, не оборотні однозначно.

5. Геометричне значення диференціала. Звертаючись до позначень п. 1, припустимо, що лінія C, яку дано разом з її напрямом, виходить з точки z_0 і має певну дотичну в цій точці. В площині w, $w=f(z)$, лінії C відповідатиме як її зображення лінія Γ, яка виходить з точки $w_0=f(z_0)$. Припустимо, що $f'(z_0)\neq 0$. Якщо рівняння довільно обраної лінії C є $z=z(t)$, то рівняння лінії Γ матимемо, коли замінимо в рівності $w=f(z)$ змінне z через $z(t)$:

$$w=f[z(t)]=w(t).$$

Зазначимо, що

$$(dz)_0=(dx)_0+i(dy)_0=(\cos\psi+i\sin\psi)(ds)_0=e^{i\psi}(ds)_0$$

і аналогічно

$$(dw)_0=(du)_0+i(dv)_0=(\cos\Psi+i\sin\Psi)(d\sigma)_0=e^{i\Psi}(d\sigma)_0,$$

де ψ і Ψ — кути з осями Ox і Ou дотичних до ліній C і Γ відповідно в точках z_0 і w_0, а $(ds)_0$ і $(d\sigma)_0$ є диференціали дуг ліній C і Γ, утворені в тих же точках z_0 і w_0.

Розглядаючи написані вище рівняння, ми бачимо, що геометрично $(dz)_0$ зображається вектором довжини $(ds)_0$, напрямленим по дотичній до лінії C в точці z_0; аналогічно $(dw)_0$ є вектор довжини $(d\sigma)_0$, напрямлений по дотичній до лінії Γ в точці w_0. Звідси, зокрема, дістаємо

$$f'(z_0)=\left(\frac{dw}{dz}\right)_0=\frac{(dw)_0}{(dz)_0}=\frac{(d\sigma)_0}{(ds)_0}e^{i(\Psi-\psi)},$$

тобто $|f'(z_0)|=\frac{(d\sigma)_0}{(ds)_0}$ є відношення диференціала дуги на відображенні до диференціала початкової дуги у відповідних точках.

[1]) H. Bohr, Über streckentreue und konforme Abbildung, Math. Zeitschr. Bd. 1, 1918, S. 403.

Вважаючи $(ds)_0$, а значить і $(d\sigma)_0$ нескінченно малим, сказати, що $|f'(z_0)|$ є границя відношення елементу $(\Delta\sigma)_0$ відображення до елементу $(\Delta s)_0$ початкової дуги у точках, що збігається з результатом п. 2. З виразу $f'(z_0)$ ми, далі, бачимо, що

$$\arg f'(z_0) = \Psi - \psi,$$

тобто $\arg f'(z_0)$ є кут між початковим і відображеним напрямами вважаючи додатні напрями осей Ox і Ou однаковими. Цей висновок також збігається з відповідним результатом п. 1.

6. Головна частина відображення $w = f(z)$. Припустимо, що функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ мають повні диференціали в точці $z_0 = x_0 + iy_0$; розглянемо головну частину відображення $w = u + iv$ нескінченно малого круга з центром у точці z_0. Під *головною частиною відображення* $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ ми розуміємо його лінійну частину, тобто

$$\left.\begin{aligned} u - u_0 &= a(x - x_0) + b(y - y_0), \\ v - v_0 &= a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0), \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

де величини, які входять в (63), мають такі значення:

$$u_0 = u(x_0, y_0), \quad v_0 = v(x_0, y_0), \quad a = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0,$$

$$b = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0, \quad a_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0, \quad b_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0.$$

Нескінченно мале коло радіуса ρ з центром у точці z_0

$$x - x_0 = \rho\cos\varphi, \quad y - y_0 = \rho\sin\varphi$$

переходить на площині (u, v) в нескінченно малий еліпс, рівняння якого дістанемо, виключаючи φ з рівності:

$$u - u_0 = \rho(a\cos\varphi + b\sin\varphi), \quad v - v_0 = \rho(a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi).$$

Виконавши це виключення, знайдемо:

$$[a_1(u - u_0) - a(v - v_0)]^2 + [b_1(u - u_0) - b(v - v_0)]^2 = \delta^2\rho^2, \qquad (64)$$

де взято: $\delta = ab_1 - a_1b$. Рівняння (64), очевидно, представляє еліпс з центром у точці (u_0, v_0), що є відображенням нашого кола радіуса ρ, при чому цей еліпс вироджується в подвійний прямолінійний відрізок, коли $\delta = 0$.

Подивимося, при яких умовах цей еліпс перетворюється в коло, тобто при яких умовах перетворення (63) переводить коло площини (x, y) в коло площини (u, v).

Умови перетворення еліпса (64) в коло будуть:

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2, \quad aa_1 + bb_1 = 0, \qquad (65)$$

при чому, коли $\delta = 0$, замість кола ми матимемо точку. Дійсно, в цьому останньому випадку, користуючись тотожністю

$$(a_1^2 + b_1^2)(a^2 + b^2) - (aa_1 + bb_1)^2 = (ab_1 - a_1 b)^2,$$

бачимо, що при $\delta = 0$ умови (65) обертаються в такі: $a = b = a_1 = b_1 = 0$, і значить перетворення (63) вироджується в таке:

$$u = u_0, \quad v = v_0 \quad \text{і} \quad w = f(z) = w_0.$$

Очевидно, цей окремий випадок відповідає перетворенню в нуль похідної $f'(z)$ в точці z_0. Через те що тут нескінченно малий окіл точки z_0 відображається, коли знехтувати нескінченно малими членами вищого порядку, в одну точку, то розтяг масштабу зображення в цій точці $[f'(z_0) = 0]$ перетворюється в нуль, і конформність порушується, що згоджується з результатом п. 3.

Вертаючись до дослідження загального випадку $\delta \neq 0$, з умов (65) знаходимо:

$$a_1 = -kb, \quad b_1 = ka, \quad k^2(a^2 + b^2) = a^2 + b^2.$$

В даному випадку $a^2 + b^2 \neq 0$, тому що $\delta \neq 0$, і, скорочуючи останнє співвідношення на $a^2 + b^2$, матимемо: $k^2 = 1$, звідки $k = \pm 1$, і значить умови (65) матимуть вигляд:

$$a_1 = -b, \quad b_1 = a, \tag{66}$$

або

$$a_1 = b, \quad b_1 = -a. \tag{67}$$

Перша група (66) представляє умови Коші-Рімана для точки (x_0, y_0) і при цих умовах перетворення (63) буде:

$$u - u_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

$$v - v_0 = -b(x - x_0) + a(y - y_0),$$

або

$$w - w_0 = (a - ib)(z - z_0).$$

З геометричного погляду це лінійне перетворення зводиться до паралельного перенесення, обертання і подібного змінювання, тобто дійсно всяке нескінченно мале коло радіуса ρ площини z з центром у точці z_0 переходить у нескінченно мале коло з центром у точці w_0, при чому напрям обходу зберігається.

Отже умова, необхідна й достатня для того, щоб однозначна функція $f(z)$, яка має повний диференціал у точці z_0, мала похідну по комплексному змінному, відмінну від нуля, полягає от у чому: *якщо обмежитися розглядом лише головної частини відображення $w = f(z)$, то всякому нескінченно малому кругові площини z з центром у точці z_0 відповідає нескінченно малий круг площини w з центром у точці $w_0 = f(z_0)$ і з тим же напрямом обходу.*

Очевидно, в цьому випадку ми маємо постійність розтягів у z_0 і консерватизм кутів, тобто конформність відображення, цілком згоджується з результатом п. 3. Перетворення в нуль хідної $f'(z)$ в точці z_0 характеризується тим геометричним фактом, що нескінченно малий круг площини z з центром у z_0 за допомогою головної частини відображення $w=f(z)$ переходить у точку w_0 і, таким чином, в цьому випадку конформність порушується.

Зауважимо нарешті, що при умовах (67) перетворення (63), очевидно, буде: $w-w_0=(a+ib)(\bar{z}-\bar{z}_0)$, тобто спряженим з попереднім лінійним перетворенням. З геометричного погляду це перетворення характеризується тим, що нескінченно малий круг площини z з центром у точці z_0 переходить в нескінченно малий круг площини w з центром у точці w_0, при цьому напрям обходу змінюється на супротивний. Таким чином, цьому випадку (67) відповідає конформне відображення II роду (п. 4).

Вправи до розділу II

1. Чи буде диференційовною функція $|z|$?
Відп. Ні.

2. Встановити, чи виконуються умови Коші-Рімана для функцій:

$$f(z)=z,\ z^2,\ z^n,\quad \sin z,\quad \cos z?$$

3. Якщо функція $f(z)$ в кожній точці області задовольняє умову: $f'(z)=0$, то довести, що $f(z)$ є стале в цій області.

4. Написати умови Коші-Рімана в полярних координатах.
Відп. $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}.$

5. Показати, що функція $w=\ln r+\varphi i(-\pi<\varphi<\pi)$, де $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ аналітична всюди, крім нульової точки.

6. Визначити радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, якщо $a_n=\dfrac{1}{n^n}$, $a_n=n^{\ln n}$,

$$a_n=\frac{n!}{n^n},\quad a_n=n^n.$$

Відп. $R=\infty$, 1, e, 0.

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ має радіус збіжності r і $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a'_n z^n$ радіус збіжності r'
Який радіус збіжності R мають ряди:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+a'_n)z^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n-a'_n)z^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot a'_n z^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{a'_n}z^n.$$

(В останньому випадку всі $a'_n\neq 0$).

Відп. В перших двох випадках R не менше від найменшого з чисел r і r' тобто $R\geqslant\dfrac{r+r'-|(r-r')|}{2}$ В третьому випадку $R\geqslant rr'$, і в четвертому $R\leqslant\dfrac{r}{r'}$

8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ має радіус збіжності r і в якійсь точці z_0 кола круга збіж-

ності абсолютно збіжний. Показати, що цей ряд збіжний абсолютно і рівномірно для всіх z, $|z| \leqslant r$.

9. Коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \ldots$ степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — дійсні додатні числа, які монотонно прямують до нуля. Довести, що: a) його радіус збіжності r не менший одиниці, b) якщо $r = 1$, то він збіжний в усіх граничних точках його круга збіжності, крім, можливо, $z = 1$.

10. Чи буде функція $f(z) = \frac{1}{1-z}$ всередині одиничного круга неперервна? Чи буде вона рівномірно неперервна?

Відп. Неперервна, але не рівномірно неперервна.

11. Функція $f(z)$ визначена при $|z| < 1$ і не тільки неперервна, але і рівномірно неперервна. Довести, що коли $z_n \longrightarrow z_0$, де $|z_n| < 1$, а z_0 — гранична точка, то існує $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ і має значення, яке залежить тільки від z_0.

12. Довести, що при умові задачі 11 однозначно визначені граничні значення $f(z_0)$ утворюють неперервну функцію вздовж кола $|z| = 1$.

13. Для $0 < |z| < 1$ довести, що: $\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z|$.

14. Для якого завгодно z показати, що $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z| e^{|z|}$.

15. Нехай z рухається по променю, який виходить з початку координат, і по модулю необмежено зростає. Для яких напрямів цього променя існує $\lim e^z$, для яких ні?

Відп. При $-\frac{\pi}{2} < \arg z < +\frac{\pi}{2}$ $\lim |e^z| = +\infty$; при $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{2}\pi$, $e^z \longrightarrow 0$; коли $\arg z = \pm\frac{\pi}{2}$, границі немає.

16. Чому дорівнюють значення e^{2+i}, $\cos(5-i)$, $\sin(1-5i)$?

Відп. $e^{2+i} = e^2(\cos 1 + i \sin 1) = 3{,}992 + i\,6{,}218$,

$$\cos(5-i) = \cos 5 \frac{e+e^{-1}}{2} + i \sin 5 \frac{e-e^{-1}}{2} = 0{,}438 - i\,1{,}127,$$

$$\sin(1-5i) = \sin 1 \cdot \frac{e^5+e^{-5}}{2} - i \cos 1 \cdot \frac{e^5-e^{-5}}{2} = 62{,}45 - i\,40{,}09.$$

17. Яка залежність існує між a) $\arcsin z$; і $\ln z$; b) $\operatorname{arctg} z$ і $\ln z$?

Відп. a) $\arcsin z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$;

$$\text{b) } \operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \ln \frac{1-iz}{1+iz}.$$

18. Дано $w = u + iv = \ln(z-c)$. Вважаючи $z = x + yi$, $c = a + bi$, знайти u і v. Перевірити умову Коші-Рімана в якій завгодно точці.

Відп. $u = \ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, $v = \operatorname{arctg}\frac{y-b}{x-a}$.

19. Змінне $z = x + yi$ описує відрізок $x = 1$, $-1 \leqslant y \leqslant +1$. Чому дорівнює довжина лінії, на яку відображається цей відрізок в площині $w = z^2$?

Відп. $4\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2})$.

20. Яку лінію описує $w = z^2$, коли z змінюється в границях $R(z) = 1$, $-1 \leqslant I(z) \leqslant +1$?

Відп. Дугу параболи $y^2 = 4(1-x)$, яка міститься між точками $(0, -2)$ і $(0, 2)$.

21. Якщо елемент площі площини z є $d\omega$, то як виразити елемент площі відображеної площини $w = f(z)$?

Відп. $|f'(z)|^2 d\omega$, де z — точка елементу $d\omega$.

22. Якщо z описує область G, то чому дорівнює площа області D, на яку зображається G за допомогою аналітичної функції $w = f(z)$?

Відп. $\iint |f'(z)|^2 d\omega$, де інтеграл поширений на область G.

23. Якщо $w = z^2$ і z описує область, визначувану умовами: $1 \leqslant |z| \leqslant 2$, $-\frac{\pi}{4} < \arg z \leqslant +\frac{\pi}{4}$, то чому дорівнює площа області, описуваної при цьому точкою w?

Відп. $7{,}5\pi$.

Розділ III

Лінійні та інші найпростіші перетворення

При з'ясуванні геометричного значення похідної (розд. II, § 5, п. 3) ми бачили, що відображення, визначуване за допомогою функції $w=f(z)$, аналітичної в якійсь області G, є конформним в усіх точках z, для яких $f'(z)\neq 0$. Цей розділ ми присвятимо розглядові деяких відображень, виконуваних за допомогою найпростіших аналітичних функцій.

§ 1. Лінійна функція

1. Ціла лінійна функція. Ми почнемо з дослідження лінійної функції виду

$$w=az+b, \tag{1}$$

де a і b — якісь сталі комплексні числа ($a\neq 0$). Очевидно, що відображення (1) буде конформним в усій площині комплексного змінного $z(w'=a\neq 0)$ і до того взаємно однозначним. Розглянемо спочатку три окремі випадки, при чому для простоти z і w будемо зображати точками на одній площині.

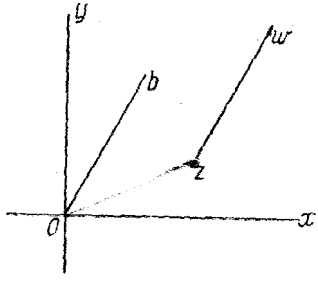

Рис. 25

1. $w=z+b$. Ясно, що при такому відображенні точка z переноситься в точку w в напрямі вектора b на віддаль, що дорівнює його довжині (рис. 25). Вважаючи $w=u+vi$, $z=x+yi$, $b=b_1+b_2i$, ми запишемо перетворення (1) у вигляді двох формул: $u=x+b_1$, $v=y+b_2$. Дві останні рівності являють собою відомі формули паралельного перенесення осей координат.

2. $w=e^{\alpha i}z$. В такому випадку маємо $|w|=|z|$, $\arg w=\arg z+\alpha$, тобто точка z переходить в точку w в наслідок повороту вектора z навколо нульової точки на кут α (рис. 26). Таким чином, відображення 2 є не що інше, як обертання навколо початку координат на кут α. Крім того, можна написати: $w=u+vi=(x+yi)(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, звідки знаходимо: $u=x\cos\alpha-y\sin\alpha$, $v=x\sin\alpha+y\cos\alpha$. Дві останні рівності являють собою відомі формули повороту осей координат.

3. $w=rz$, де r — дійсне додатне стале число. В даному випадку маємо: $|w|=r|z|$, $\arg w=\arg z$, тобто точка z перетво-

ється в точку w, яка лежить на прямій Oz на віддалі від точки O, рівній r разів узятій віддалі точки z. Це — так зване *перетворення подібності* з центром подібності в точці O і модулем r (рис. 27).

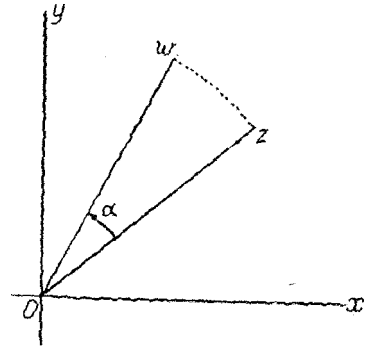

Рис. 26

Загальне перетворення $w = az + b$ виконується за допомогою трьох найпростіших описаних вище відображень. Справді, нехай $a = re^{\alpha i}$. Повернемо спочатку вектор Oz на кут α: $z' = e^{\alpha i} \cdot z$. Змінимо далі $|z'|$ у r разів: $z'' = rz'$. Нарешті, зробимо паралельне перенесення точки z'': $w = z'' + b$. Перевірка дає: $w = z'' + b = rz' + b = re^{\alpha i} \cdot z + b = az + b$. Але ж можна розглядати відображення, дане функцією $w = az + b$, з трохи *іншого погляду*. Для цього знайдемо комплексне число A, що задовольняє таку умову:

$$w - A = a(z - A), \qquad (1')$$

звідки виходить: $A - aA = b$ і, значить, $A = \frac{b}{1-a}$. Якщо $a \neq 1$ (коли $a = 1$, то відображення буде простим паралельним перенесенням), то перетворення (1′) являє собою обертання навколо точки A, поєднане з відображенням подібності. Отже, ми можемо точку z перенести в точку w або за допомогою паралельного перенесення ($a = 1$), *або* ($a \neq 1$) за допомогою *самого*

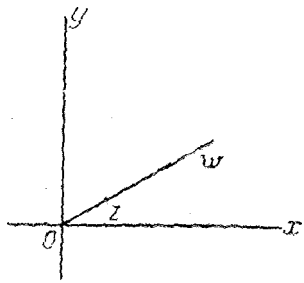

Рис. 27

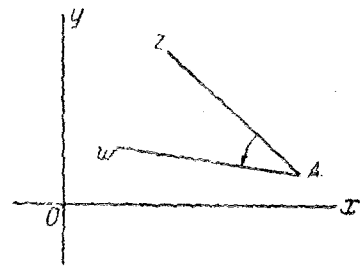

Рис. 28

тільки обертання навколо точки $A = \frac{b}{1-a}$ і подібної зміни (рис. 28).

2. Функція $w = \frac{1}{z}$.

4. Відповідність, що її дає ця формула, є взаємно однозначна в усіх точках площини, при чому нульовій точці $z = 0$ (або $w = 0$) відповідає нескінченно віддалена точка $w = \infty$ (або $z = \infty$). Для дослідження відображення, що його дає ця функція,

найпростіше буде запровадити полярні координати, вважаючи: $z = re^{\varphi i}$, $w = \rho e^{\theta i}$. Легко бачити, що в даному разі буде:

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \theta = -\varphi. \tag{2}$$

Опишемо з нульової точки, як із центра коло C радіуса одиниця. При перетворенні (2) це коло переходить само в себе, а саме кожна його точка перетворюється в симетричну точку відносно дійсної осі. Перетворення (2) зручно розбити на два простіші;

$$r' = \frac{1}{r}, \quad \varphi' = \varphi. \tag{I}$$

$$\rho = r', \quad \theta = -\varphi'. \tag{II}$$

При першому з цих перетворень аргумент зберігається, а модуль змінюється на обернений. Точка z, що міститься всередині кола C, перетворюється в точку w', що міститься зовні кола і лежить на продовженні відрізка Oz, при чому добуток віддалей від точки O відображеної і первісної точки дорівнює одиниці. Таке відображення ми називали (розд. I, § 2, п. 5) перетворенням за допомогою взаємних радіусів-векторів, або інверсією відносно кола C. Точки z и w', що переходять одна в одну за допомогою цього перетворення (I), ми називали взаємно симетричними відносно кола C. Геометричне побудування точки w' по даній точці z (або навпаки) було вказане в розд. I, § 2, п. 5. Слід зауважити, що відображення (I) можна записати так:

$$w' = \frac{1}{\bar{z}}; \tag{I'}$$

воно не буде таким чином аналітичним перетворенням і належить до класу конформних відображень II роду (розд. II, § 5, п. 4): при такому відображенні кути хоч і зберігаються абсолютною величиною, але мають різні напрями.

Перетворення (II) можна записати так: $w = \overline{w'}$. Очевидно, це перетворення також є конформне II роду, яке переводить кожну точку в точку, їй симетричну відносно дійсної осі. Сукупність двох неаналітичних (конформних II роду) відображень (I) і (II) дає аналітичне (крім $z = 0$) відображення $w = \frac{1}{z}$. Це відображення буде зберігати кути в усіх точках площини z, включаючи $z = 0$ і $z = \infty$, тому що за означенням під кутом двох ліній при $z = \infty$ ми розуміємо кут, утворений відображеними лініями за допомогою функції $w = \frac{1}{z}$ в площині w при $w = 0$.

3. Загальна лінійна функція. Загальне лінійне перетворення має вигляд:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{3}$$

де a, b, c і d — сталі комплексні числа і до того такі, що $ad - bc \neq 0$, тому що в противному разі наша лінійна функція (3) не залежала б від z. Навпаки, z можна виразити через w:

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}. \tag{3'}$$

Відповідність, яку дає функція (3), буде, отже, взаємно однозначною. Точці $z = -\frac{d}{c}$ відповідатиме нескінченно віддалена точка площини w, а точці $w = \frac{a}{c}$ відповідатиме нескінченно віддалена точка площини z. Загальне лінійне перетворення (3) зберігає кути в усіх точках розширеної площини комплексного змінного z. Дійсно, похідна

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(cz + d)a - (az + b)c}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

є скінченне число, не рівне нулеві в усякій точці z, $z \neq -\frac{d}{c}$, $z = \infty$, звідки виходить інваріантність кутів в усіх згаданих точках z. В нескінченно віддаленій точці кути теж зберігаються, тому що, виконавши підставлення $z = \frac{1}{z'}$, ми знайдемо, що функція $\frac{a + bz'}{c + dz'}$ в точці $z' = 0$ є аналітична, якщо $c \neq 0$, і має похідну $-\frac{ad - bc}{c^2}$, не рівну нулеві. Якщо ж $c = 0$, то ми виявляємо те ж саме, розглядаючи функцію $\frac{d}{az + b}$ при $z = \infty$. Нарешті, при $z = -\frac{d}{c}$ ми також швидко виявимо консерватизм кутів, розглядаючи функцію $\frac{cz + d}{az + b}$.

Вивчимо склад загального лінійного перетворення (3). Покажемо, що це перетворення виконується за допомогою розглянених вище відображень 1, 2, 3, 4. Дійсно, виконуючи ділення, ми знайдемо:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}. \tag{3''}$$

Запровадивши нове змінне $z' = c(cz + d)$, ми переконуємося в доводжуваному.

4. Кругова властивість лінійної функції. Перейдемо тепер до розгляду властивостей загального лінійного перетворення. Воно має одну цікаву властивість, яка характеризує це перетворення. Ця властивість полягає от у чому. Якщо точка z описує коло на площині комплексного змінного z, то точка w на w-площині описує теж коло або пряму лінію. Якщо ж точка z описує пряму лінію, то w описує пряму або коло. Вважаючи пряму лінію за коло нескінченно великого радіуса, ми можемо описану властивість сформулювати коротше: *при лінійному*

перетворенні коло переходить у коло, тобто при такому перетворенні здійснюється інваріантність системи всіх кіл.

Як виявити цю властивість? Очевидно, для цього досить показати справедливість доводжуваної властивості відносно перетворень 1, 2, 3 і 4.

Щождо перетворень 1 і 2, то це цілком ясно з їх геометричної суті (п. 1). Перейдемо до перетворення 3. Рівняння кола має вигляд:

$$A(x^2+y^2)+mx+ny+l=0. \tag{4}$$

При $A=0$ рівняння (4) зображає пряму лінію. Підставляючи в рівняння (4) замість x і y їх значення $\frac{u}{r}$ і $\frac{v}{r}$, ми дістаємо в площині w знову рівняння кола. Отже, в цьому випадку коло переходить у коло. Перейдемо, нарешті, до перетворення 4 (п. 2) $w=\frac{1}{z}$.

Рівняння (4) можна записати так:

$$Az\bar{z}+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0,$$

де A і C — дійсні сталі. При перетворенні $w=\frac{1}{z}$ дістаємо: $A\frac{1}{w\bar{w}}+\frac{\bar{B}}{w}+\frac{B}{\bar{w}}+C=0$, або, зводячи до спільного знаменника і відкидаючи його, знаходимо

$$A+\bar{B}\bar{w}+Bw+Cw\bar{w}=0. \tag{4'}$$

Рівняння ж (4′) зображає коло в площині w. [При $C=0$ рівняння (4′) представляє пряму лінію].

Отже, ми бачимо, що при всіх чотирьох перетвореннях (1, 2, 3 і 4) коло переходить у коло, а тому та сама властивість буде належати і загальному лінійному перетворенню, яке являє собою комбінацію щойно зазначених перетворень.

5. Визначення лінійного перетворення. Припустимо, що на площині z маємо три точки α, β і γ, а на площині w три точки α', β', γ'. Постає питання, *чи існує* таке лінійне перетворення, яке переводило б точки α, β і γ відповідно в точки α', β' і γ', і якщо існує, то чи буде воно *єдиним*?

Насамперед запровадимо поняття нерухомої точки лінійного перетворення $w=\frac{az+b}{cz+d}$. Інтерпретуючи z і w як точки однієї площини, ми назвемо z нерухомою точкою даного лінійного перетворення, якщо вона при цьому перетворенні залишається незмінною. Таким чином, нерухомі точки нашого лінійного перетворення будуть коренями рівняння:

$$z=\frac{az+b}{cz+d},$$

$$cz^2+(d-a)z-b=0. \qquad (5)$$

Квадратне рівняння (5) не може мати більше двох коренів, воно не обертається в тотожність. Остання обставина буде $c=0$, $b=0$, $d=a$, тобто у випадку тотожного $w=z$. Таким чином, лінійне перетворення, яке відріз від тотожності $w=z$, не може мати більше двох точок.

Вертаючись тепер до задачі, сформульованої на початку пункту, припустимо, що $w=L(z)$ є шукане лінійне перетворення. Вводячи в розгляд допоміжні площини комплексних змінних t і T, відобразимо площину z на площину t так, щоб точкам $z=\alpha$, β, γ відповідали відповідно три точки $t=0$, а площину w перетворимо лінійно в площину T так, щоб точки $w=\alpha'$, β', γ' переходили відповідно в три точки $T=0$, Легко побудувати лінійну функцію $t=l(z)$, яка при $z=\alpha$, має значення 0, 1, ∞. Очевидно, це буде функція:

$$t=\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$$

Аналогічно лінійна функція, яка переводить площину w у площину T, буде зображена формулою:

$$T=\frac{w-\alpha'}{w-\gamma'}\cdot\frac{\beta'-\gamma'}{\beta'-\alpha'}$$

Через те що $w=L(z)$ є шукана лінійна функція, то, виключаючи z з двох останніх формул, ми дістанемо лінійну залежність між t і T, для якої точки 0, 1, ∞ будуть нерухомими. Отже, ця лінійна незалежність між t і T зводиться до тотожності $T=t$, звідки маємо:

$$\frac{w-\alpha'}{w-\gamma'}\cdot\frac{\beta'-\gamma'}{\beta'-\alpha'}=\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}. \qquad (6)$$

Формула (6) розв'язує поставлене питання, встановлюючи лінійну залежність w від z, при якій точки $z=\alpha$, β, γ переходять відповідно в точки $w'=\alpha'$, β', γ'. Крім того, з самого виводу формули (6) виходить єдність і самого перетворення.

Таким чином, ми довели, що існує лінійне перетворення і до того єдине, яке переводить точки α, β, γ в точки α', β', γ'.

Поєднуючи цей результат з установленим вище фактом інваріантності системи кіл при лінійному перетворенні, ми доходимо такого висновку. Візьмемо в площині z три точки α, β, γ. Через ці точки можна провести коло і до того тільки одно. Так само в площині w задамо три точки α', β', γ', які визначають коло, що через них проходить. На підставі попереднього ми можемо сказати, що існує єдина лінійна функція, яка переведе перше коло в друге, при чому точкам α, β і γ відповідатимуть точки α', β', γ'. При впорядкуванні первісних точок α, β, γ і ві-

дображених α', β', γ' так, як указано на рис. 29, внутрішня частина одного круга переходить у внутрішню частину другого. При іншому ж упорядкуванні первісних точок, а саме так, як указано на рис. 30, внутрішня частина одного круга перейде в зовнішню частину другого. Справді, коли точка z описує коло (рис. 29, 30) в додатному напрямі, то внутрішні частини кругів залишаються ліворуч. Тому при відповідних обходах відповідних кіл на площині w, на підставі консерватизму кутів при відображенні, відображені області також повинні бути ліворуч.

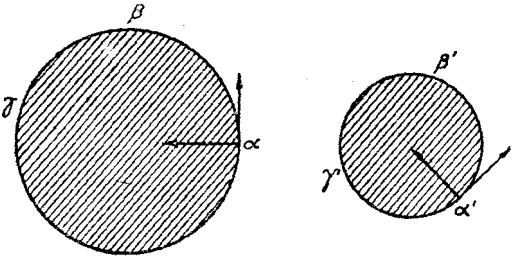

Рис. 29

6. Відображення верхньої півплощини в саму себе. Верхню півплощину можна вважати за окремий випадок круга нескінченно великого радіуса. З'ясуємо питання: яка має бути лінійна функція, що переводить верхню півплощину площини z у верхню півплощину площини w. З попереднього пункту ясно, що для цього треба перевести дійсну вісь, яка обмежує верхню півплощину, саму в себе.

Відмітимо на дійсній осі площини z три точки α, β, γ і припустимо, що при нашому перетворенні вони переходять відповідно в точки 0, 1, ∞. На підставі п. 5 дістаємо: якщо наприклад $\alpha<\beta<\gamma$, то верхня півплощина площини z за допомогою формули (6) перейде у верхню ж півплощину площини w (рис. 31); якщо ж, наприклад, $\gamma<\beta<\alpha$, то верхня півплощина площини z перейде в нижню півплощину w (рис. 32). Розглядаючи най-

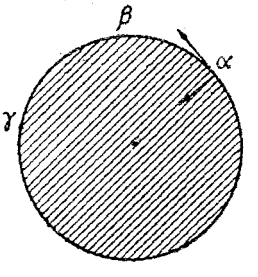

Рис. 30а

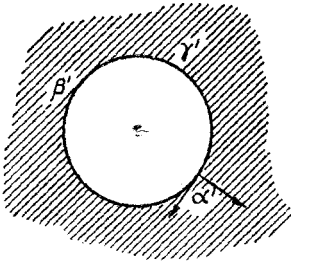

Рис. 30б

можливіші упорядкування точок α, β, γ на дійсній осі, ми легко помітимо, що лінійне перетворення (6) буде переводити верхню півплощину у верхню ж тільки в тому разі, коли маємо:

$$(\gamma-\beta)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)>0. \qquad (7)$$

Лінійне перетворення (6), що переводить у верхню можна написати у вигляді:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{6'}$$

a, b, c, d — дійсні цілком довільні числа, які задовольняють умову:

$$ad - bc > 0. \tag{7'}$$

Безпосередньою перевіркою неважко показати, що маємо:

$$ad - bc = (\gamma - \beta)(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha).$$

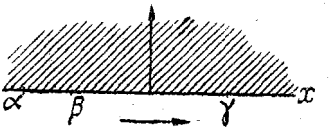

Рис. 31а

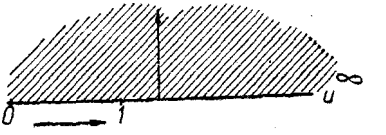

Рис. 31б

Якщо ж $ad - bc < 0$, то тоді функція (6') буде відтворювати верхню півплощину площини z на нижню півплощину площини w, а нижню z-півплощину у верхню w-півплощину.

7. Інваріантність пари взаємно симетричних точок при лінійному перетворенні. Нехай маємо коло довільного радіуса R. Дві точки P і P' ми називаємо взаємно симетричними відносно цього кола, коли вони лежать на одній півпрямій, що виходить з центра, так, що добуток їх віддалей від центра кола дорівнює квадратові радіуса R (розд. I, § 2, п. 5)[1]). Візьмемо яку завгодно

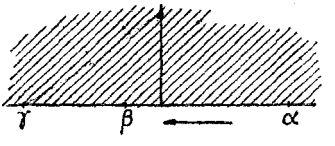

Рис. 32а

Рис. 32б

пару точок, взаємно симетричних відносно даного кола. Відображуючи це коло за допомогою довільного лінійного перетворення, ми доведемо, що *пара взятих взаємно симетричних точок перейде в пару точок взаємно симетричних відносно відображеного кола.*

Попереду покажемо, що пара взаємно симетричних точок P і P' характеризується тією властивістю, що пучок кіл, які проходять через ці точки, є ортогональний до основного кола (рис. 33).

Якщо одна з взаємно симетричних відносно кола C точок наближається до центра кола C, то друга віддаляється в нескінченність, і навпаки. За означенням вважають, що центр кола C і нескінченно віддалена точка взаємно симетричні відносно C. (*Ред.*).

Справді, через точку P і довільну точку A основного кола можна провести коло, ортогональне до основного кола, і до того тільки одно (це коло перетворюється в пряму OP, якщо точка A лежить на цій прямій). Розглядаючи точку перетину P' побудованого кола з півпрямою OP, з рис. 33 дістаємо

$$AO^2 = OP \cdot OP', \quad \text{або} \quad R^2 = OP \cdot OP',$$

тобто точки P і P' є взаємно симетричні відносно основного кола. Таким чином, всяке коло, що проходить через точку P, ортогональне до основного кола, належить пучкові кіл, що проходять через точки P і P'. Навпаки, довільне коло цього пучка перетинає основне коло в якійсь точці A (бо точка P лежить на полі основного круга, а точка P' — зовні основного круга) і значить збігається з якимсь колом, ортогональним до кола основного.

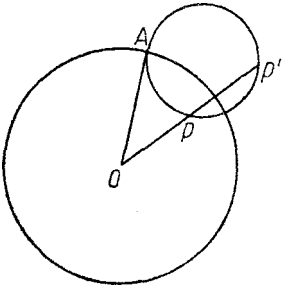

Рис. 33

Звертаючись тепер до доведення теореми цього пункту, зауважимо, що лінійне перетворення переводить дане коло і ортогональний до нього пучок кіл, що проходять через точки P і P', в якесь інше коло (п. 4) і пучок кіл, до нього ортогональний, що проходить через відповідні точки Q і Q'. За доведеним точки Q і Q' взаємно симетричні.

Зокрема, якщо дане коло переходить при лінійному перетворенні в пряму, то центри всіх кіл перетвореного ортогонального пучка лежать на цій прямій. Звідси виходить, що відповідні точки Q і Q' симетричні відносно цієї прямої.

8. Відображення круга на верхню півплощину. Знайдемо перетворення, яке переводило б верхню півплощину в круг з центром у нульовій точці одиничного радіуса. Це перетворення ми шукаємо у вигляді:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{8}$$

Точки 0 і ∞ є взаємно симетричні відносно кола $|w| = 1$; відповідні їм точки $z = -\frac{b}{a}$ і $z = -\frac{d}{c}$ за доведеним у попередньому пункті повинні бути симетричні відносно дійсної осі, тобто, вважаючи $-\frac{b}{a} = \beta$, маємо: $-\frac{d}{c} = \bar{\beta}$. (Очевидно, $c \neq 0$, тому що нескінченно віддаленій точці площини z повинна відповідати скінченна точка площини w, а саме точка, що лежить на колі одиничного радіуса). Користуючись запровадженими позначеннями, перепишемо рівність (28) у вигляді:

$$w = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}. \tag{9}$$

Через те що при $z=0$, $|w|=1$, то з рівності (9) виходить:

$$\left|\frac{a}{c}\right|=1, \quad \text{або} \quad \frac{a}{c}=e^{\alpha i}.$$

Остаточно маємо:

$$w=e^{\alpha i}\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}}. \tag{10}$$

В якому випадку наш круг переходитиме у верхню півплощину? Центрові круга $w=0$ відповідатиме на підставі формули (10) точка $z=\beta$. Звідси видно, що для того, щоб круг переходив у верхню півплощину, треба, щоб точка β лежала у верхній півплощині, тобто $I(\beta)>0$.

9. Відображення круга самого в себе. Нехай маємо круг з центром у нульовій точці одиничного радіуса. Припустимо, що при відображенні круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$ якась точка $z=\alpha$ ($\alpha\neq 0$, $|\alpha|<1$) переходить в нульову точку $w=0$. Точка, симетрична з нульовою точкою відносно кола $|w|=1$, буде, очевидно, нескінченно віддаленою точкою. Таким чином, на підставі теореми п. 7 ми повинні мати

$$w=\infty \quad \text{при} \quad z=\frac{1}{\bar{\alpha}}.$$

Отже, шукане перетворення матиме вигляд:

$$w=k\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}}, \tag{11}$$

де k — стале число. Очевидно, ми вправі написати:

$$|z-\alpha|=|\bar{z}-\bar{\alpha}|.$$

Коли точка z міститься на колі $|z|=1$, то буде:

$$|z-\alpha|=|\bar{z}-\bar{\alpha}|=\left|1-\frac{\bar{\alpha}}{\bar{z}}\right|=|\alpha|\left|\frac{1}{\bar{\alpha}}-\frac{1}{\bar{z}}\right| \tag{12}$$

Помітивши, що при $|z|=1$ здійснюється рівність $\frac{1}{\bar{z}}=z$, перепишемо останнє співвідношення так:

$$|z-\alpha|=|\bar{\alpha}|\left|\frac{1}{\bar{\alpha}}-\frac{1}{\bar{z}}\right|=|\bar{\alpha}|\left|z-\frac{1}{\bar{\alpha}}\right|=|\bar{\alpha}z-1|. \tag{13}$$

Співвідношення (13) справедливе для всіх точок кола $|z|=1$. Переписавши формулу (11) у вигляді:

$$w=k\bar{\alpha}\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}=k'\cdot\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \tag{11'}$$

ми бачимо із співвідношень (11′) і (13), що $|k'|=1$, бо колу

$|z|=1$ відповідає коло $|w|=1$. Отже, $k'=e^{i\theta}$ і формула (11′) матиме вигляд:

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\text{[1]}. \tag{14}$$

Очевидно, результат (11′) поширюється і на випадок $\alpha=0$.

Таким чином, остаточно: *лінійне перетворення, яке переводить круг $|z|\leqslant 1$ у самого себе, матиме вигляд:*

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \tag{15}$$

при чому $|\alpha|<1$, якщо ж $|\alpha|>1$, то формула (15) *переводить внутрішню частину круга $|z|\leqslant 1$ у зовнішню частину круга $|w|\leqslant 1$.*

10. Представлення лінійного перетворення за допомогою симетричних відображень. Ми знаємо, що всяке лінійне перетворення (2) можна розкласти на такі елементарні перетворення: 1) паралельний зсув, 2) обертання, 3) подібність, 4) обернене перетворення. З другого боку, ми бачили, що перетворення 4) еквівалентне двом послідовним симетричним відображенням відносно кола і дійсної осі. Щождо перетворення 1), то, очевидно, воно рівнозначне двом послідовним симетричним відображенням відносно двох паралельних прямих (розміщених перпендикулярно до напряму зсуву на віддалі одна від одної, рівній половині зсуву). Перетворення 2) — обертання — еквівалентне двом послідовним симетричним відображенням відносно двох прямих, що перетинаються (з точкою перетину в центрі обертання і кутом, рівним половині кута обертання). Нарешті, перетворення 3) — подібність — рівнозначне двом послідовним інверсіям відносно двох концентричних кіл (з центром у центрі подібності і відношенням квадратів радіусів, рівним модулю подібності)[2]).

Таким чином всяке лінійне перетворення 2) еквівалентне парному числу симетричних відображень відносно прямих і кіл. Це справедливо також і для нескінченно віддаленої точки, якщо за відповідну їй точку будемо брати при симетрії відносно прямої її саму, а при інверсії відносно кола — центр цього останнього. Покажемо, що справедливе і супротивне положення, тобто парне число послідовних симетрій представляє якесь лінійне перетворення.

[1]) Той же самий результат можна одержати таким способом. Припустимо $z=e^{i\varphi}$. Тоді (11′) дає:

$$|k'|\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|=|w|=1=|k'|\frac{|e^{i\varphi}-\alpha|}{|1-\bar{\alpha}e^{i\varphi}|}=|k'|\frac{|e^{i\varphi}-\alpha|}{|e^{-i\varphi}-\bar{\alpha}|}=|k'|,$$

звідки $|k'|=1$ і $k'=e^{i\theta}$. (*Ред.*).

[2]) Під модулем подібності розуміється коефіцієнт r в формулі $w=rz$ (розд. III, § 1, п. 3). (*Ред.*).

Справді симетричне відображення (z, w)[1]) відносно кола з центром у точці α і радіуса R можна аналітично записати так:

$$w - \alpha = \frac{R^2}{\overline{z - \alpha}}$$

або

$$w - \alpha = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{\alpha}} \tag{16}$$

Щоб представити аналітично перетворення симетрії відносно прямої, додамо до розгляданої симетрії (z, w) дві послідовні симетрії відносно паралельної прямої, що проходить через початок координат; потім дві послідовні симетрії відносно дійсної осі; все це не змінить розгляданого перетворення (z, w), але, з другого боку, групуючи дві перші симетрії, ми матимемо паралельний зсув $(z, z+h)$, групуючи дві дальші, ми матимемо обертання навколо координат $(z+h, (z+h)e^{i\theta})$, і тоді, щоб дістати w, залишається виконати симетрію відносно дійсної осі, тобто

$$w = \overline{(z+h)e^{i\theta}},$$

або

$$w = e^{-i\theta}\bar{z} + e^{-i\theta}\bar{h}, \tag{17}$$

що і виражає симетрію відносно прямої.

З розгляду формул (16) і (17) негайно виходить, що добуток двох яких завгодно симетрій є лінійне перетворення. Зауваживши, з другого боку, що лінійні перетворення утворюють *групу* (тобто добуток двох лінійних перетворень є знову лінійне перетворення), ми робимо висновок, що парне число послідовних симетричних відображень еквівалентне добуткові якогось числа лінійних перетворень, а значить одному лінійному перетворенню.

11. Інваріант лінійного перетворення. Назвемо *ангармонічним відношенням* чотирьох чисел z_1, z_2, z_3, z_4, позначаючи його через (z_1, z_2, z_3, z_4), подвійне відношення:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

Покажемо, що воно не зміниться, коли виконати яке завгодно лінійне перетворення.

Справді, нехай наше лінійне перетворення переводить три різні точки z_1, z_4, z_2 відповідно в три різні точки w_1, w_4, w_2; тоді на підставі п. 5 це перетворення буде:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_4 - w_2}{w_4 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1},$$

через те що точці z_3 відповідає точка w_3, то

$$\frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} : \frac{w_4 - w_2}{w_4 - w_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1},$$

[1]) Символ (z, w) означає, що z перетворюється в $w = f(z)$.

або

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4),$$

що і треба було показати.

Отже, лінійне перетворення зберігає ангармонічне відношення[1]). До цього цікаво додати, що ангармонічне відношення афіксів[2]) чотирьох точок, які лежать на прямій або колі, дорівнює геометричному ангармонічному відношенню чотирьох точок на прямій або колі[3]).

Дійсно, якщо точки A, B, C і D з координатами z_1, z_2, z_3 і z_4 лежать на прямій

$$z = a + te^{i\alpha} \qquad (-\infty < t < \infty),$$

яка проходить через точку a і перетинає вісь x-ів під кутом α, то

$$z_k = a + t_k e^{i\alpha}, \quad z_k - z_l = (t_k - t_l)e^{i\alpha} \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4)$$

і

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} : \frac{t_4 - t_1}{t_4 - t_2} =$$
$$= (t_1, t_2, t_3, t_4) = (A, B, C, D).$$

Якщо ж точки A, B, C і D лежать на колі

$$z = a + re^{i\varphi} \qquad (0 \leqslant \varphi < 2\pi),$$

то

$$z_k - z_l = r(e^{i\varphi_k} - e^{i\varphi_l}) = 2ire^{i\frac{\varphi_k + \varphi_l}{2}} \sin\frac{\varphi_k - \varphi_l}{2} \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4)$$

[1]) Ця властивість лінійного перетворення справедлива і в тому випадку, якщо серед розглядуваних точок є нескінченно віддалена точка. В цьому випадку треба тільки визначати ангармонічне відношення, користуючись міркуваннями неперервності. (*Ред.*).

[2]) *Афіксом* точки називається комплексне число, яке зображається цією точкою.

[3]) Тут під геометричним ангармонічним відношенням чотирьох точок A, B, C, D, розміщених на прямій, розуміється подвійне відношення: $(A, B, C, D) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$. Знак кожного з простих відношень, що входять в ангармонічне, береться додатним, якщо відрізки CA і CB (відповідно DA і DB) однаково направлені, і від'ємним — в протилежному випадку.

Якщо ж розглядані точки лежать на колі, то їх геометричне ангармонічне відношення дорівнює (за означенням) ангармонічному відношенню чотирьох променів, що сполучають довільну п'яту точку M цього кола з ними, тобто в цьому випадку:

$$(A, B, C, D) = \frac{\sin\frac{CA}{2}}{\sin\frac{CB}{2}} : \frac{\sin\frac{DA}{2}}{\sin\frac{DB}{2}}.$$

Відношення синусів, які входять у цю формулу, беруться додатними, якщо промені AM і MB не розділяються променями MC і MD і від'ємними — в протилежному випадку). (*Ред.*).

значить:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\sin\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}} : \frac{\sin\frac{\varphi_4-\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_4-\varphi_2}{2}} = \frac{\sin\frac{CA}{2}}{\sin\frac{CB}{2}} : \frac{\sin\frac{DA}{2}}{\sin\frac{DB}{2}} = (A, B, C, D),$$

що і треба було довести.

З доведеної рівності геометричного ангармонічного відношення чотирьох точок, що лежать на прямій або на колі, і ангармонічного відношення їх афіксів випливає, що геометричне ангармонічне відношення чотирьох точок інваріантне відносно довільного лінійного перетворення.

12. Різні типи лінійних перетворень. Ми бачили (п. 5), що всяке лінійне перетворення $w = \frac{az+b}{cz+d}$, яке відрізняється від тотожного $w = z$, має не більше двох нерухомих точок, які визначаються як корені квадратного рівняння:

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0. \tag{18}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння (18), ми дістаємо дві нерухомі точки даного лінійного перетворення:

$$z = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Ці точки зливаються в одну кратну, якщо $(a-d)^2 + 4bc = 0$; в противному разі ми маємо дві різні нерухомі точки.

Зауваження. Зокрема, може трапитися, що нерухомою точкою буде нескінченно віддалена точка площини комплексного змінного z. Очевидно, це буде тільки в тому разі, коли $c = 0$, тобто для цілого лінійного перетворення. Нарешті, обидві нерухомі точки зливаються з нескінченно віддаленою точкою, коли $c = 0$ і $d = a$, тобто у випадку паралельного перенесення.

Розглянемо докладніше лінійне перетворення L з двома різними нерухомими точками, які позначимо через z_1 і z_2. Для більшої ясності ми будемо зображати z і w точками в одній площині. Перейдемо до допоміжної площини, в якій ми будемо зображати змінні v і ζ, де взято:

$$v = \frac{w-z_1}{w-z_2} = S$$

і

$$\zeta = \frac{z-z_1}{z-z_2} = S.$$

У випадку $z_2 = \infty$ треба взяти:

$$v = w - z_1 = S, \quad \zeta = z - z_1 = S.$$

Для лінійної функції SLS^{-1}, яка встановлює залежність між v і ζ, нерухомими точками будуть 0 і ∞; тому ця залежність повинна бути виду: $v = K\zeta$, де K — якесь комплексне стале.

Звідси випливає, що дане лінійне перетворення L можна зобразити так:

$$\frac{w-z_1}{w-z_2}=K\frac{z-z_1}{z-z_2},$$

або

$$w-z_1=K(z-z_1). \tag{19}$$

Це так звана ***нормальна форма*** лінійного перетворення з двома різними нерухомими точками. Стале K легко можна виразити через первісні коефіцієнти, коли взяти до уваги, що

$$K=\frac{w-z_1}{w-z_2}\cdot\frac{z-z_2}{z-z_1}$$

не залежить від z. Вважаючи $z=0$, $w=\frac{b}{d}$, ми знайдемо:

$$K=\frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}. \tag{20}$$

У випадку $z_2=\infty$ маємо:

$$K=\frac{a}{d}.$$

Нам необхідно докладніше дослідити перетворення $v=K$ тому що з нього, на підставі попереднього, негайно виходить загальне перетворення L. Ми будемо тут розрізняти три випадки:

1) K — число дійсне і додатне,
2) $K=e^{\alpha i}$ $(\alpha \neq 0)$,
3) $K=re^{\alpha i}$ $(\alpha \neq 0,\ r \neq 1)$.

В першому випадку дане перетворення (19) ми назвемо ***гіперболічним***, в другому — ***еліптичним*** і в третьому — ***локсодромічним***.

Щождо геометричної суті цих відображень, то вона виявляється негайно у спеціальному випадку

$$v=K\zeta. \tag{21}$$

Приміром гіперболічному відображенню відповідає перетворення подібності, еліптичному — обертання і локсодромічному — перетворення, утворене з обертання і подібності. У випадку відображень (21) першого і другого типу особливу роль відіграють дві системи ліній: з одного боку, система прямих ліній, що проходять через нульову точку, з другого боку, система кіл з центром у цій точці $\zeta=0$. Обидві ці сім'ї ліній залишаються незмінними при наших відображеннях. У випадку гіперболічних перетворень (21) кожна із згаданих прямих переходить сама в себе, в той час як кола переставляються між собою. У випадку еліптичних перетворень (21), навпаки, кожне із згаданих кіл переходить само в себе, а прямі переставляються.

Щоб перейти до загального випадку (19), залишається ввести до розгляду дві сім'ї кіл, які утворюються в площині z з попередніх сімей за допомогою відображення:

$$\zeta=\frac{z-z_1}{z-z_2}, \quad \text{або} \quad \zeta=z-z_1.$$

Це, очевидно, будуть дві сім'ї ліній, з яких перша складається з усіх кіл, що проходять через дві нерухомі точки z_1 і z_2, а друга — з кіл, їм ортогональних (рис. 34). У випадку $z_2 = \infty$ перша сім'я ліній складається з пучка прямих з центром у точці z_1, а друга — з кіл з центром в точці z_1. У випадку перетворень третього типу немає сімей кіл, що відіграють зазначену роль. Щоб дати просте механічне тлумачення гіперболічних і еліптичних перетворень, розглянемо в площині ζ довільне перетворення подібності $v = r\zeta$, де r — стале, більше одиниці. Виходячи з цього перетворення, ми можемо за допомогою дійсного параметра t представити всі гіперболічні відображення площини z у вигляді:

$$v = r^t \cdot \zeta. \qquad (22)$$

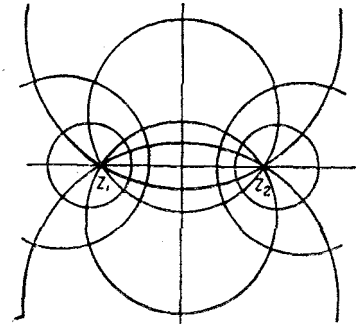

Рис. 34

Аналогічно з якогось певного обертання в площині ζ можна дістати всі *еліптичні перетворення в площині* z. Розглядаючи параметр t як час, ми бачимо з (22), що з його зміною кожна точка z рухається по нерухомому колу першої із зазначених вище сімей. Тому ці кола називаються ***траєкторіями*** перетворення (у випадку еліптичного перетворення траєкторіями, очевидно, будуть кола другої сім'ї). Зауважимо, що подібно до попереднього з окремої локсодромічної функції можна дістати цілу сім'ю (але не всю) таких функцій. Якщо ми будемо розглядати довільну точку z для різних моментів часу, то матимемо як її траєкторії, взагалі кажучи, логарифмічну спіраль.

Переходячи тепер до розгляду лінійних перетворень з однією нерухомою точкою z_0, ми назвемо їх ***параболічними***. Знову будемо z і w зображати точками однієї площини. Вважаючи

$$v = \frac{1}{w - z_0}, \quad \zeta = \frac{1}{z - z_0},$$

перейдемо до допоміжної площини ζ, v. У випадку $z_0 = \infty$ треба вважати:

$$v = w, \quad \zeta = z.$$

Перетворення, що зв'язує ζ і v, має єдину нерухому точку в нескінченності, а тому воно буде виду: $v = \zeta + h$. Звідси в загальному випадку нормальна форма параболічного відображення запишеться так:

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + h,$$

або

$$w = z + h. \qquad (23)$$

Спеціальним випадком параболічного перетворення, до якого зводиться загальний випадок, буде, таким чином, перетворення переносу. Прямі лінії площини ζ, паралельні вектору h, переходять при такому перетворенні кожна окремо сама в себе, в той час як їх ортогональні лінії, що утворюють другу сім'ю паралельних прямих, переставляються між собою. Роль щойно згаданих двох сімей прямих ліній приймають в площині z відповідні їм дві ортогональні сім'ї кіл, що проходять через точку z_0.

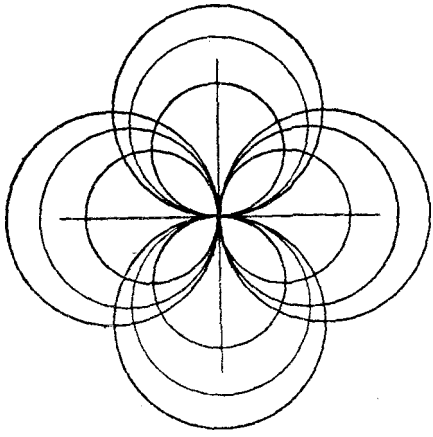

Рис. 35

Кола кожної сім'ї, будучи зображеннями паралельних прямих, повинні мати той самий напрям у точці z_0, тобто повинні в цій точці дотикатися до однієї й тієї ж прямої (рис. 35).

Очевидно, запроваджуючи параметр t, який означає час, ми можемо, виходячи з одного параболічного перетворення, дістати цілу сім'ю таких перетворень, траекторіями яких будуть служити кола, що проходять через точку z_0 і стикаються в цій точці.

13. Природа подвійних точок. Нехай ζ — подвійна точка перетворення

$$[z, f(z)], \quad \text{тобто} \quad f(\zeta) = \zeta,$$

яка лежить на скінченній віддалі. Назвемо точку ζ *притягаючою*, якщо в достатньо малому її околі здійснюється нерівність:

$$\left|\frac{f(z)-\zeta}{z-\zeta}\right| \leqslant q < 1.$$

Будемо називати її *відштовхуючою*, якщо в достатньо малому її околі виконується нерівність:

$$\left|\frac{f(z)-\zeta}{z-\zeta}\right| \geqslant q > 1.$$

Нарешті, назвемо подвійну точку *байдужою*, якщо модуль зазначеного відношення має границю, рівну одиниці, коли z прямує до ζ. Те саме означення можна поширити і на подвійну нескінченно віддалену точку, замінюючи попереднє відношення через $\left|\frac{z}{f(z)}\right|$.

Вважаючи перетворення $[z, f(z)]$ аналітичним, розглянемо похідну $f'(\zeta) = s$; число s називають *множником* подвійної точки. Очевидно, має місце такий висновок:

якщо $|s| < 1$, ζ — *притягаюча подвійна точка*, тому що в її околі $|f(z) - f(\zeta)| < |z - \zeta|(|s| + \varepsilon)$;

якщо $|s| > 1$, ζ — *відштовхуюча подвійна точка*, тому що в її околі $|f(z) - \zeta| > |z - \zeta|(|s| - \varepsilon)$;

якщо $|s| = 1$, ζ — *байдужа подвійна точка*.

Вертаючись тепер до лінійного перетворення, припустимо, що воно має дві подвійні точки на скінченній віддалі. Звівши його до нормальної форми (19):

$$\frac{w-z_1}{w-z_2}=K\frac{z-z_1}{z-z_2},$$

ми звідси дістаємо:

$$\frac{w-z_1}{z-z_1}=K\frac{w-z_2}{z-z_2},$$

звідки виходить:

$$\lim_{z\to z_1}\frac{w-z_1}{z-z_1}=K^{1)},\ \text{або}\ \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=z_1}=K.$$

Аналогічно знайдемо:

$$\lim_{z\to z_2}\frac{w-z_2}{z-z_2}=\frac{1}{K},\quad \text{або}\quad \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=z_2}=\frac{1}{K}.$$

Таким чином, подвійні точки еліптичного перетворення — байдужі. В перетвореннях гіперболічному і локсодромічному подвійні точки мають множники K і $\frac{1}{K}$: одна точка буде притягаючою, а друга відштовхуючою. Нарешті, з нормальної форми параболічного перетворення $\frac{1}{w-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+h$ виходить

$$\frac{w-z_0}{z-z_0}=1-h(w-z_0),$$

звідки

$$\lim_{z\to z_0}\frac{w-z_0}{z-z_0}=1,$$

тобто подвійна точка параболічного перетворення є байдужа. Всі ці результати легко поширити на випадок, коли подвійна точка лежить в нескінченності.

14. Геометрична інтерпретація еліптичного перетворення. Розглянемо еліптичне перетворення з подвійними точками z_1 і z_2 на скінченній віддалі і встановимо сферу Рімана так, щоб точки, які відповідають точкам z_1, z_2 на сфері, були кінцями діаметра. Обертанню сфери навколо цього діаметра відповідає в площині взаємно однозначне перетворення розширеної площини. Це перетворення в наслідок формул стереографічної проекції буде алгебричним, а значить лінійним, тому що воно взаємно однозначне. Для цього лінійного перетворення z_1, z_2 будуть подвійними точками. Можна так повернути сферу, що точки z_3 (z_3 відрізняється від z_1 і z_2) і w_3, відповідні в розгляданому еліптичному перетворенні, будуть відповідними також і при цьому обертанні.

Дійсно, колам сфери, площини яких перпендикулярні до діаметра — осі обертання, незмінюваним при обертанні, відпові-

[1]) Тому що при $z\to z_1$ $w\to z_1$. (*Ред.*).

дають кола на площині комплексного змінного, відносно яких точки z_1 і z_2 симетричні. Отже, обертанню сфери, належним чином виконаному, відповідає в площині (z) лінійне перетворення, в якому трьом точкам z_1, z_2, z_3 відповідають ті самі три точки z_1, z_2, w_3, що і в розгляданому еліптичному перетворенні. Звідси ми бачимо, що справджується тотожність між даним еліптичним підставленням і перетворенням площини (z), що відповідає обертанню сфери Рімана. Якщо одна з подвійних точок міститься в нескінченності, то еліптичне перетворення є обертання навколо другої точки і відповідає обертанню сфери Рімана, для якої ця подвійна точка служить точкою дотикання до площини (z).

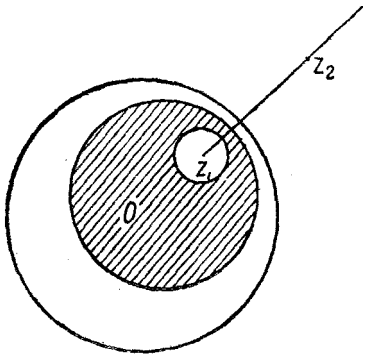

Рис. 36

15. Характер перетворення круга самого в себе. Всяке лінійне перетворення, яке переводить коло само в себе, необхідно повинно бути еліптичним, гіперболічним або параболічним, тому що його траєкторією служить це коло. Навпаки, для всякого кола можна знайти лінійні перетворення цих різних видів, які зберігають це коло і не перетворюються в нескінченність всередині нього.

Справді, досить спочатку довільно вибрати подвійні точки, симетричні відносно даного кола або розміщені на колі (різні або злиті в одну), потім визначити параметр K або h так, щоб лінійне підставлення перетворювалося в нескінченність у точці, заданій поза колом. Тоді, очевидно, внутрішній частині круга відповідатиме він сам, і додатний напрям на контурі зберігається. В еліптичному перетворенні подвійні точки будуть симетричними відносно даного кола. Кола пучка, для яких подвійні точки є симетричними (ці точки називаються *точками Понселе*), будуть інваріантні, а також інваріантні будуть кільця, обмежені двома з них (рис. 36). З погляду проективної геометрії в цьому випадку на інваріантному колі встановлюється проективна відповідність з уявними подвійними точками, так що перетворення виконує переміщення весь час в одному й тому ж напрямі.

Якщо перетворення гіперболічне, то подвійні точки містяться на основному колі, і кола пучка з центрами в цих подвійних точках будуть інваріантні; отже, будуть незмінюваними серпики, обмежені двома дугами кіл з кінцями в подвійних точках z_1, z_2 (рис. 37).

З геометричного погляду на інваріантному колі встановлюється проективна відповідність з дійсними подвійними точками z_1 і z_2. На всякій дузі z_1z_2 перетворення здійснює змінне переміщення, але завжди в одному напрямі від z_1 до z_2, якщо z_1 — відштовхуюча точка, а z_2 — притягаюча. Кола, дотичні до основного в кожній з подвійних точок, переставляються між

собою. Очевидно, у відштовхуючій точці достатньо малі кола збільшуються через перетворення, а в притягаючій точці — зменшуються. На підставі дослідження відповідності на інваріантному колі робимо висновок, що попереднє твердження справедливе для всіх кіл, внутрішніх до основного і дотичних у подвійній точці, а не тільки достатньо малих.

Якщо перетворення параболічне, то є одна подвійна точка на колі, і дотичні до нього кола в подвійній точці є незмінюваними. Отже, будуть незмінюваними також кругові серпики, обмежені двома колами, що стикаються в подвійній точці (рис. 38).

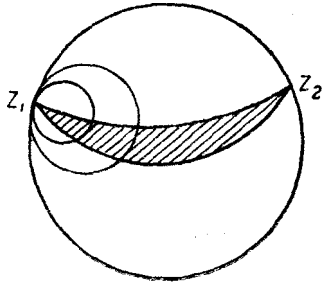

Рис. 37

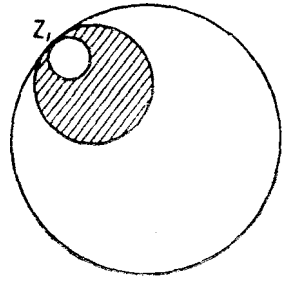

Рис. 38

З геометричного погляду на інваріантному колі встановлюється проективна відповідність із злитими подвійними точками; перетворення здійснює змінне переміщення весь час в одному напрямі.

§ 2. Лінійні перетворення і геометрія Лобачевського

1. Евклідове зображення на крузі геометрії Лобачевського. Відомо, що аксіоматика геометрії Лобачевського відрізняється від аксіоматики геометрії Евкліда тільки в одному пункті, а саме: замість постулату Евкліда про паралельні прямі: „через точку, що не лежить на прямій, можна провести пряму і до того тільки одну, яка не зустрічає даної прямої", вводиться такий постулат Лобачевського: „через точку, зовнішню до прямої, проходить нескінченна множина прямих, які не зустрічають даної прямої; ці прямі заповнюють якийсь кут, сторони якого — граничні прямі — називаються *паралельними* даній прямій". Далі, „властивість паралелізму двох прямих не залежить від точки, вибраної на одній або другій прямій".

Щоб виконати Евклідове зображення цієї геометрії, ми будемо розглядати в частині евклідового простору евклідові геометричні елементи і операції, які відповідатимуть елементам і операціям геометрії Лобачевського, позначаючи їх тією самою назвою з долученням слова „неевклідів"; ми констатуємо, що ці елементи мають властивості, які виражаються в указаних

термінах за допомогою фундаментальних тверджень геометрії Лобачевського.

Позначимо через G внутрішню частину евклідового кола Г, яке назвемо *фундаментальним*. Умовимося за неевклідову точку брати точку всередині Г, за неевклідову пряму — частину кола, ортогонального до Г, розміщену на G. Через дві точки A, B проходить єдина неевклідова пряма Δ (рис. 39); це коло Δ зустрічає Г у точках α і β. За означенням неевклідовою віддаллю між двома точками A, B буде логарифм геометричного ангармонічного відношення чотирьох точок α, β, B, A кола Δ з точністю до множника k, якому можна приписати довільне додатне числове значення:

$$D(A, B) = k \ln(\alpha, \beta, B, A) > 0. \quad (24)$$

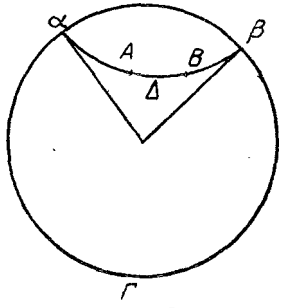

Рис. 39

Легко бачити, що неевклідова віддаль $D(A, B)$ необмежено зростає, коли одна з точок A або B прямує до α або β. Таким чином, коло Г можна розглядати як зображення множини нескінченно віддалених точок неевклідової площини. За означенням неевклідовим кутом між двома неевклідовими прямими буде кут між двома відповідними колами. Неевклідові переміщення будуть лінійні перетворення, які зберігають внутрішню частину кола Г.

Щоб показати, що ці означення задовольняють постулати геометрії Лобачевського, констатуємо, не вдаючись в деталі, лише таке:

a) Неевклідові переміщення зберігають неевклідові прямі, віддалі і кути. Це очевидно в зв'язку з властивостями лінійних перетворень, що зберігають внутрішню частину кола Г.

b) Неевклідові віддалі складаються на неевклідовій прямій, тобто коли A, B, C — три точки на неевклідовій прямій, то

$$D(A, C) = D(A, B) + D(B, C). \quad (25)$$

Дійсно, позначимо через α, β, a, b, c афікси в комплексній площині точок α, β, A, B, C кола Δ і покажемо, що

$$(\alpha, \beta, c, a) = (\alpha, \beta, b, a)\ (\alpha, \beta, c, b).$$

Справедливість останньої рівності легко перевірити, якщо написати її в розкритому вигляді:

$$\frac{c-\alpha}{c-\beta} \cdot \frac{a-\beta}{a-\alpha} = \frac{b-\alpha}{b-\beta} \cdot \frac{a-\beta}{a-\alpha} \cdot \frac{c-\alpha}{c-\beta} \cdot \frac{b-\beta}{b-\alpha}.$$

Логарифмуючи цю рівність і помножаючи на k, знайдемо (25).

c) Постулат Лобачевського про паралельні виконується.

Розглянемо неевклідові прямі, що виходять з точки P, і вивчимо їх розміщення відносно неевклідової прямої Δ, яка

не містить у собі P. Запроваджуючи кола $P\alpha$, $P\beta$, дотичні до Δ у точках α, β, ми бачимо, що неевклідові прямі, які виходять з P, поділяються на два класи: що зустрічають Δ і що її не зустрічають; останні належать якомусь кутові, заштрихованому на рис. 40, обмеженому паралельними прямими $P\alpha$, $P\beta$. Через те що умова паралелізму виражається при зображенні умовою зустрічі в точці фундаментального кола евклідових кіл, ортогональних до основного кола, то звідси стає очевидним сформульована вище властивість паралелізму[1]).

2. Обчислення неевклідової віддалі двох точок з даними афіксами. Позначимо афікси даних точок через z_1, z_2 і виконаємо неевклідове переміщення, яке переводить z_1 в центр O

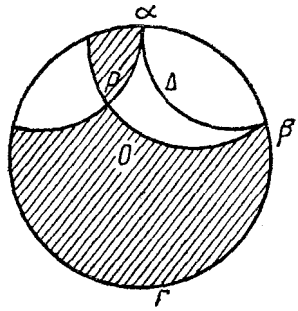

Рис. 40

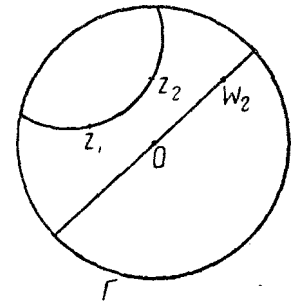

Рис. 41

кола Γ (рис. 41). Якщо Γ є одиничне коло, а w_2 — точка, що відповідає точці z_2 і $|w_2| = r$, то

$$D(z_1, z_2) = D(O, w_2) = k \ln(-1, +1, r, 0) = k \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

Справді, при неевклідовому переміщенні неевклідова пряма z_1, z_2 переходить в пряму Ow_2, при чому $D(z_1, z_2) = D(O, w_2)$. З другого боку, через обертання навколо точки O точка w_2 переходить в точку з афіксом r і значить $D(O, w_2) = D(O, r)$.

Остаточно знаходимо:

$$D(z_1, z_2) = D(O, r) = k \ln(-1, +1, r, 0) = k \ln \frac{1+r}{1-r},$$

що і треба було довести.

Отже, щоб виразити $D(z_1, z_2)$ через афікси точок z_1 і z_2, залишається зробити це для $r = |w_2|$.

Зауваживши, що лінійне перетворення, яке переводить z_1 у центр кола Γ і зберігає це коло, є

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_1}{1 - z\bar{z}_1},$$

знаходимо: $w_2 = e^{i\theta} \dfrac{z_2 - z_1}{1 - z_2 \bar{z}_1}$ і, значить, $r = |w_2| = \left| \dfrac{z_2 - z_1}{1 - z_2 \bar{z}_1} \right|$. От-

[1]) Тобто незалежність паралелізму двох прямих від вибору точки P на одній з них. (*Ред.*).

же ми дістали таку формулу для обчислення неевклідової віддалі між двома точками з даними афіксами z_1 і z_2:

$$D(z_1, z_2) = k \ln \frac{1+r}{1-r}, \tag{26}$$

де

$$r = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - z_2 \bar{z}_1} \right|.$$

3. Неевклідове коло. За означенням *неевклідовим колом* назвемо місце точок, неевклідова віддаль яких до даної точки є стале число $d\,(d > 0)$. На підставі формули (26), якщо z_1 є дана точка, то неевклідове коло є евклідова крива, що має рівняння:

$$\left| \frac{z - z_1}{1 - z \bar{z}_1} \right| = \frac{e^{\frac{d}{k}} - 1}{e^{\frac{d}{k}} + 1},$$

або

$$\frac{|z - z_1|}{\left| z - \frac{1}{\bar{z}_1} \right|} = |z_1| \frac{e^{\frac{d}{k}} - 1}{e^{\frac{d}{k}} + 1}.$$

З останнього рівняння ми бачимо, що воно зображає коло, яке є внутрішнє до фундаментального і яке належить до пучка кіл з точками Понселе z_1 і $\frac{1}{\bar{z}_1}$, симетричними відносно Г. *Точками Понселе* пучка кіл називають дві точки, симетричні відносно кожного кола пучка, або, що є те саме, центри пучка ортогонального до даного. Всяке внутрішнє до Г коло можна, очевидно, розглядати і до того однозначним способом як неевклідове коло. Точка z_1 називається *неевклідовим центром*, неевклідові прямі, що виходять з z_1, — *неевклідовими радіусами*. Легко бачити, що вони ортогональні до неевклідового кола і до всіх кіл з тим самим неевклідовим центром. Справді, це будуть кола, які є ортогональні до Г і проходять через z_1, а значить вони будуть ортогональні до всіх кіл пучка з точками Понселе z_1 і $\frac{1}{\bar{z}_1}$.

4. Неевклідова довжина кривої. Довжина дуги кривої в геометрії Лобачевського визначається, як і в евклідовій геометрії, за допомогою вписаної в неї ламаної лінії і переходу до границі. Звідси виходить, що для визначення неевклідової довжини дуги кривої треба взяти точки поділу на евклідовому зображенні, утворити суму неевклідових віддалей всіх пар послідовних точок і перейти до границі. Ми знаємо, що неевклідова віддаль точок z і $z + \Delta z$ дорівнює $k \ln \frac{1+r}{1-r}$, де $r = \frac{|\Delta z|}{|1 - (z + \Delta z)\bar{z}|}$. Вважаючи Δz нескінченно малим, ми бачимо, що ця віддаль екві-

валентна $2kr = \frac{2k\,|\Delta z|}{|1-(z+\Delta z)\bar{z}|}$ і значить $\frac{2k\,|\Delta z|}{1-|z|^2}$. Таким чином ми дістаємо, що

$$D(z,\ z+\Delta z) = \frac{2k\,|\Delta z|}{1-|z|^2}(1+\varepsilon),$$

де ε прямує до нуля разом з $|\Delta z|$ рівномірно відносно z в усякій замкнутій області, розміщеній всередині G. Звідси безпосередньо видно, що неевклідова довжина дуги L, внутрішньої до Γ, буде:

$$k\int_L \frac{2ds}{1-|z|^2}. \qquad (27)$$

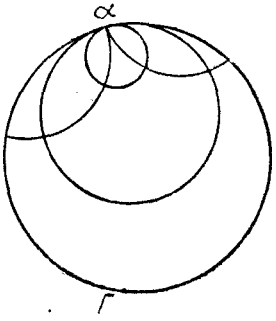

Рис. 42

5. Неевклідова площа. Площа області d в геометрії Лобачевського визначається, як і в евклідовій геометрії, за допомогою вписаного в неї квадрильяжа і переходу до границі. Звідси виходить, що для визначення неевклідової площі треба взяти на евклідовому зображенні d квадрильяж з кіл, ортогональних до Γ, утворити суму неевклідових площ усіх його елементів і перейти до границі.

З п. 4 ми бачимо, що елемент неевклідової площі має вираз: $\frac{4k^2 d\omega}{(1-|z|^2)^2}$, де $d\omega$ — елемент евклідової площі. Звідси ми робимо висновок, що неевклідова площа області d, внутрішньої разом з усією границею до G, буде

$$k^2\iint_d \frac{4d\omega}{(1-|z|^2)^2} = k^2\iint_d \frac{4dx\,dy}{(1-|z|^2)^2}. \qquad (28)$$

6. Горицикли. Розглянемо сім'ю неевклідових паралельних між собою прямих, зображуваних на рис. 42 колами, ортогональними до Γ в точці α. Їх ортогональні траекторії зображаються колами, дотичними до Γ в точці α, і називаються *горициклами*.

Легко показати, що неевклідова довжина частин неевклідових прямих, поміщених між двома певними горициклами, буде та сама для всієї сім'ї неевклідових прямих, що відповідають одній і тій же точці α. Дійсно, виконаємо лінійне перетворення, що переводить точку α в нескінченно віддалену. При цьому область G перейде в півплощину, неевклідові прямі, що проходять α, перейдуть в півпрямі, перпендикулярні до границі Γ_1 півплощини, два горицикли перетворяться в дві прямі, паралельні з Γ_1, нарешті неевклідова довжина частин неевклідових прямих, поміщених між двома горициклами, стає рівною неевклідовій довжині відповідних паралельних прямолінійних відрізків, поміщених між паралельними прямими, звідки випливає, що ця довжина зберігає незмінне значення для всієї сім'ї.

7. Гіперцикли. Ми бачили, що ортогональними траекторіями неевклідових прямих, які виходять з однієї точки, служать неевклідові кола (кола, внутрішні до Г); в попередньому пункті ми виявили, що ортогональні траекторії сім'ї паралельних неевклідових прямих будуть горицикли (кола, дотичні до Г).

Отже, ми розглянули, з одного боку, сім'ю неевклідових прямих, зображуваних пучком кіл, ортогональних до Г, з двома дійсними центрами, з другого боку, сім'ю паралельних неевклідових прямих, зображуваних пучком кіл, ортогональних до Г, з одним центром. Тепер природно буде розглянути сім'ю неевклідових прямих іншого виду, зображуваних пучком кіл, ортогональних до Г, з уявними центрами. Точки Понселе α, β цього

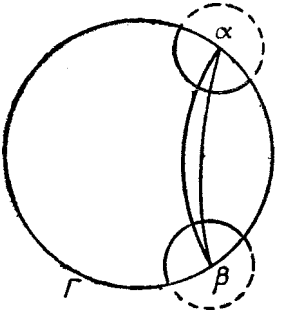

Рис. 43

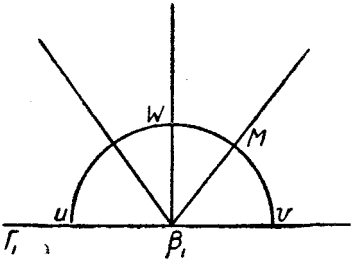

Рис. 44

пучка, очевидно, дійсні і лежать на Г. Вони служать центрами пучка кіл, ортогональних до розгляданого пучка. Частини цих кіл, які проходять через α, β, внутрішні до Г, назвемо *гіперциклами* (рис. 43).

Ми бачили, що неевклідове коло є геометричне місце точок, неевклідова віддаль яких до даної точки — центра — є величина стала. Покажемо, що гіперцикл є геометричне місце точок, неевклідова віддаль яких до даної неевклідової прямої $\alpha\beta$ є величина стала.

Для цього виконаємо лінійне перетворення, яке переводить α у нескінченність. Тоді область G, внутрішня до Г, перетворюється в півплощину, Г — в пряму Γ_1 — границю цієї площини, неевклідова пряма $\alpha\beta$ — у півпряму, перпендикулярну до Γ_1 в точці β_1 (рис. 44). Питання зводиться до того, щоб знайти в півплощині геометричне місце точок M таких, що на колі з центром β_1, яке проходить через M, ангармонічне відношення (u, v, M, w) мало дану сталу величину, де u, v — точки на Γ_1, w — точка на півпрямій.

Ми дістанемо два геометричні місця залежно від того, чи буде точка з одного чи з другого боку від півпрямої. Щоб визначити всі ці геометричні місця, треба ввести до розгляду чотири промені: uw, uM, uv і дотичну до кола в точці u, і зауважити, що їх ангармонічне відношення повинно бути незмінним; це буде лише в тому випадку, коли промінь uM зберігає певний напрям,

і значить точка M повинна лежати на півпрямій $\beta_1 M$. Отже шукані геометричні місця точки M у півплощині будуть дві симетричні відносно півпрямої $\beta_1 w$ півпрямі.

Вертаючись до рис. 44, ми дістаємо два гіперцикли, що проходять через α, β, де вони утворюють рівні кути з колом $\alpha\beta$, ортогональним до Г (рис. 45).

Резюмуючи, ми скажемо: *частина всякого кола G, внутрішня до Г, є неевклідове коло, горицикл або гіперцикл, залежно від того, чи буде C внутрішнім, дотичним чи січним колом з* Г. Ці класи елементів інваріантні при неевклідовому переміщенні. Очевидно, неевклідова пряма є окремий вид гіперциклу.

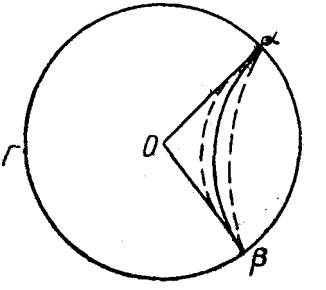

Рис. 45

8. Евклідове зображення геометрії Лобачевського на півплощині. Замість того, щоб зображати геометрію Лобачевського на полі G одиничного кола, як ми це робили досі, можна виконати це зображення на верхній півплощині. Для цього досить виконати лінійне перетворення області G одиничного круга на верхню півплощину (z) і за нове зображення всіх елементів геометрії Лобачевського взяти відповідні їм елементи при цьому лінійному перетворенні. Таким чином неевклідовими точками будуть точки верхньої півплощини, нескінченно віддаленими неевклідовими точками будуть точки дійсної осі і нескінченно віддалена точка площини (z). Далі, неевклідові прямі зобразяться півколами і півпрямими, ортогональними до дійсної осі, неевклідові кола — колами, що лежать у верхній півплощині, горицикли — колами, дотичними до дійсної осі, і прямими, їй паралельними, нарешті гіперцикли будуть частини, що лежать у верхній півплощині, кіл, які проходять через які завгодно дві точки α, β дійсної осі, а також пучки півпрямих верхньої півплощини, які виходять з якої завгодно точки дійсної осі. Щождо формул, виведених вище для неевклідових віддалей між двома точками, довжини і площі, то вони наберуть простішого вигляду. Їх вираз можна дістати, виходячи з раніше одержаних, виконуючи зазначене вище лінійне перетворення:

$$w = e^{i\theta} \frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}},$$

де $I(\beta) > 0$.

Наприклад, з формули (26) ми бачимо:

$$D(z_1, z_2) = k \ln \frac{1 + \left|\frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1}\right|}{1 - \left|\frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1}\right|}, \qquad (26')$$

тому, що $r = \left|\frac{w_2 - w_1}{1 - w_2 \bar{w}_1}\right| = \left|\frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1}\right|$ на підставі лінійного перетво-

рення. Вважаючи у формулі (26′) $z_1 = z$, $z_2 = z + \Delta z$ і вважаючи Δz нескінченно малим, матимемо для елементу дуги неевклідову довжину $k\frac{ds}{y}$. Справді

$$D(z, z+\Delta z) =$$

$$= k \ln \frac{1 + \left|\frac{\Delta z}{2iy + \Delta z}\right|}{1 - \left|\frac{\Delta z}{2iy + \Delta z}\right|} \sim 2k \left|\frac{\Delta z}{2iy + \Delta z}\right| \sim k \frac{|\Delta z|}{y} \sim k \frac{ds}{y}.$$

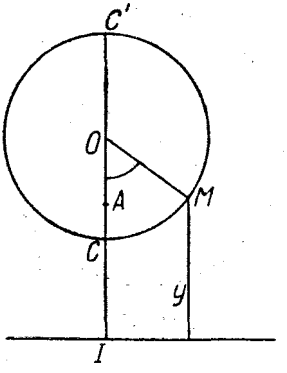

Рис. 46

Таким чином, неевклідова довжина дуги L, яка лежить у верхній півплощині, буде:

$$k \int_L \frac{ds}{y}. \tag{27}$$

Нарешті, замість формули (28) для неевклідової площі області d, яка лежить разом з своєю границею у верхній півплощині, знайдемо:

$$k^2 \iint_d \frac{dx\,dy}{y^2}. \tag{28}$$

9. Неевклідова довжина кола. Розглянемо неевклідове коло з центром A радіуса r і визначимо його довжину (рис. 46). Згідно з умовою для радіуса r маємо: $r = \frac{D(C, C')}{2} = \frac{k}{2} \ln \frac{IC'}{IC}$, тому що ангармонічне відношення чотирьох точок I, ∞, C', C на прямій IC' дорівнює $\frac{IC'}{IC}$. Для скорочення написання візьмемо:

$$IC = d, \quad IC' = d',$$

так що $\frac{d'}{d} = e^{2\frac{r}{k}}$.

Півколо має неевклідову довжину:

$$\frac{L}{2} = k \int_C^{C'} \frac{ds}{y}.$$

Позначаючи через R евклідів радіус кола, тобто $R = OC = OC' = \frac{d' - d}{2}$, маємо:

$$y = d + R(1 - \cos\omega), \quad ds = R\,d\omega,$$

і значить

$$\frac{L}{2} = k \int_0^{\pi} \frac{R\,d\omega}{d + R(1 - \cos\omega)} = k \int_0^{\pi} \frac{R\,d\omega}{\frac{d + d'}{2} - \frac{d' - d}{2} \cos\omega}.$$

Останній інтеграл легко обчислити, якщо взяти $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=u$:

$$\frac{L}{2}=2k\int_0^\infty \frac{R\,du}{d+d'u^2}=\frac{2kR}{\sqrt{dd'}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{d'}{d}}\,u\right)_0^\infty=\frac{kR\pi}{\sqrt{dd'}}.$$

Виключаючи R, матимемо: $\frac{L}{2}=\frac{k}{2}\left(\sqrt{\frac{d'}{d}}-\sqrt{\frac{d}{d'}}\right)\pi$. Зауваживши, що $\frac{d'}{d}=e^{2\frac{r}{k}}$, остаточно знайдемо:

$$L=k\pi\left(e^{\frac{r}{k}}-e^{-\frac{r}{k}}\right)=2k\pi\operatorname{sh}\frac{r}{k}. \qquad (29)$$

Зауваження. У сферичній геометрії довжина кола з сферичним радіусом r (r є довжина дуги великого кола, яке сполучає полюс з точкою кола) виражається формулою: $L=2\pi R\sin\frac{r}{R}$, де R — радіус сфери. Вважаючи в останній формулі $R=ik$, дістанемо формулу (29). Це відповідає тому фактові, що геометрію Лобачевського формально можна розглядати як сферичну геометрію з уявним радіусом. Змушуючи у формулі (29) параметр k необмежено зростати, дістанемо з неї у границі при $k=\infty$ результат евклідової геометрії $L=2\pi r$. Це відповідає тому фактові, що геометрію Евкліда можна розглядати як граничний випадок геометрії Лобачевського.

10. Кут паралелізму в геометрії Лобачевського. Неевклідів перпендикуляр AH, опущений з точки A на неевклідову пряму K, утворює з двома неевклідовими паралельними прямими один і той же кут, як ми це доведемо; цей неевклідів кут називається *неевклідовим кутом паралелізму* (рис. 47). Завдання цього пункту полягає в тому, що треба обчислити його значення $\Pi(p)$ у функції $p=D(A, H)$.

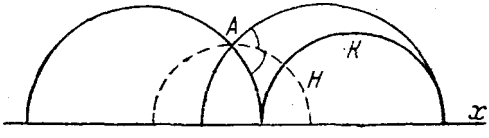

Рис. 47

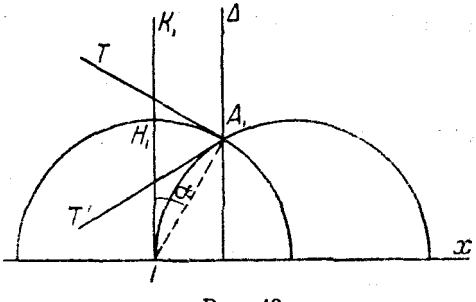

Рис. 48

Не зменшуючи загальності, для простоти, ми можемо за допомогою неевклідового переміщення, тобто лінійного перетворення, що зберігає верхню півплощину, зобразити неевклідову пряму K у вигляді прямої, перпендикулярної до дійсної осі.

Очевидно, дві неевклідові паралельні прямі, що проходять через точку A, зобразяться тоді прямою Δ, перпендикулярною до Ox, і півколом, дотичним у точці I до K_1 (рис. 48).

Неевклідів перпендикуляр, опущений з A_1 на K_1, зобразиться півколом з центром в I, що проходить через A_1.

Проведемо прямолінійний відрізок IA_1 і позначимо через α кут A_1IH_1. Очевидно, тоді маємо з рис. 48: $\Delta A_1T = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $T'A_1I = \alpha$, і значить $TA_1T' = \frac{\pi}{2} - \alpha = \Delta A_1T = \Pi(p)$, чим доводиться рівність кутів, утворених A_1H_1 з $A_1\Delta$ і A_1I. З другого боку, ми бачили, що $\Pi(p) = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Обчислимо $p = D(A_1, H_1) = k \int\limits_{A_1H_1} \frac{ds}{y}$. Очевидно, дістаємо:

$$p = k \int\limits_{\Pi(p)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R d\omega}{R \sin \omega} = k \int\limits_{\Pi(p)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sin \omega} = k \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right)_{\Pi(p)}^{\frac{\pi}{2}},$$

або

$$p = -k \ln \operatorname{tg} \frac{\Pi(p)}{2},$$

звідки

$$\operatorname{tg} \frac{\Pi(p)}{2} = e^{-\frac{p}{k}}. \tag{30}$$

З одержаної формули (30) для кута паралелізму в границі при $k \to \infty$ матимемо $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$, що відповідає геометрії Евкліда.

11. Неевклідові площі круга і трикутника. Користуючись позначеннями п. 7 (рис. 46), для неевклідової площі круга дістаємо вираз:

$$S = k^2 \iint \frac{dx\,dy}{y^2} = k^2 \iint \frac{\rho\, d\rho\, d\omega}{[d + \rho(1 - \cos \omega)]^2}.$$

Виконуючи внутрішнє інтегрування по ω в границях від $-\pi$ до $+\pi$, а зовнішнє по ρ в границях від 0 до R і замінюючи в результаті R через $\frac{d' - d}{2}$, знайдемо для S такий вираз:

$$S = \pi k^2 \left(\sqrt{\frac{d'}{d}} - 2 + \sqrt{\frac{d}{d'}}\right),$$

або

$$S = \pi k^2 \left(e^{\frac{r}{k}} - 2 + e^{-\frac{r}{k}}\right) = \pi k^2 \left(e^{\frac{r}{2k}} - e^{-\frac{r}{2k}}\right)^2 = 4\pi k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2k}. \tag{31}$$

Змушуючи k прямувати до нескінченності, матимемо з останньої формули евклідову площу круга $S = \pi r^2$.

Так само можна відзначити аналогію із сферичною геометрією. У сферичній геометрії площа круга сферичного радіуса r виражається так:

$$S = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{r}{2R}$$

де R — радіус сфери. З останньої формули при $R = ik$ дістанемо формулу (31), як повинні були сподіватися.

Перейдемо до обчислення неевклідової площі трикутника. Вона буде виражатися таким подвійним інтегралом:

$$S = k^2 \int\int \frac{dx \cdot dy}{y^2},$$

де інтегрування беруть по області криволінійного трикутника ABC (рис. 49).

Вважаючи у формулі Гріна [1]):

$$\int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C P\, dx + Q dy,$$

$P = \frac{1}{y}$, $Q = 0$, матимемо для S вираз:

$$S = k^2 \int\int \frac{dy\, dx}{y^2} = k^2 \int_{ABC} \frac{dx}{y}. \qquad (32)$$

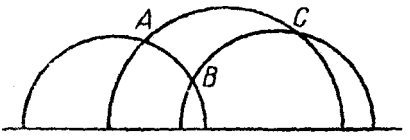

Рис. 49

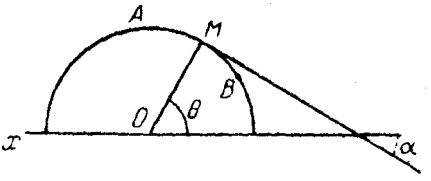

Рис. 50

Щоб обчислити інтеграл (32), обчислимо спочатку його значення вздовж дуги AB. Беручи за початок координат центр кола AB (паралельне перенесення вздовж осі Ox, очевидно, не змінює інтеграла), знайдемо:

$$x = R \cos \theta,$$

$$y = R \sin \theta, \quad \frac{dx}{y} = -d\theta.$$

Таким чином, інтеграл дорівнює варіації θ вздовж AB з супротивним знаком, тобто варіації із супротивним знаком α вздовж AB, де α *означає кут між додатними напрямами дотичної до дуги* AB і осі Ox (рис. 50). Отже шуканий інтеграл є сума варіацій α вздовж трьох сторін трикутника, взята з супротивним знаком. Повна варіація цього кута α, коли точка описує контур у додатному напрямі, виходячи з будьякої його точки і вертаючись в неї, очевидно, дорівнює 2π. В цю повну варіацію входить

[1]) Ця формула виведена в розд. IV, § 1, п. 5. Тут ми припускаємо, що вона відома з інтегрального числення; втім, читач легко може її встановити сам.

сума, яка нас цікавить, і сума варіацій у вершинах A, B, C, які будуть $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$. Таким чином, остаточно дістаємо:

$$\int\limits_{ABC} \frac{dx}{y} = -\left[\int\limits_{AB} d\alpha + \int\limits_{BC} d\alpha + \int\limits_{CA} d\alpha\right] = -[2\pi - (\pi - A + \pi - B + \\ + \pi - C)] = \pi - (A + B + C).$$

На підставі своєї геометричної суті, визначуваної формулою (32), цей інтеграл істотно додатний, тобто $\pi - (A + B + C) > 0$, звідки ми робимо висновок: *сума кутів неевклідового трикутника менша* π. Крім того, ми бачимо, що неевклідова площа трикутника дорівнює надвишкові π над сумою трьох його кутів, помноженою на k^2.

Зокрема, неевклідова площа якого завгодно трикутника не може перевищити скінченної величини πk^2. Ця максимальна неевклідова площа, яка дорівнює πk^2, очевидно, буде у трикутників, в яких всі три кути дорівнюють нулеві. Легко бачити, що зображення всіх вершин такого трикутника лежать на фундаментальному колі, тобто всі три вершини будуть нескінченно віддаленими точками площини Лобачевського.

На закінчення зауважимо, що в сферичній геометрії маємо результат: *сума трьох кутів трикутника більша* π, і площа *трикутника дорівнює добуткові* R^2 *на сферичний надвишок* $A + B + C - \pi$. Вважаючи $R = ik$, дістаємо попередній результат.

§ 3. Деякі елементарні функції і відображення, давані ними

1. Степенева функція і радикал. Розглянемо функцію

$$w = z^n, \tag{33}$$

де n є натуральне число, більше одиниці. Функція, обернена цій, є

$$z = \sqrt[n]{w}. \tag{33'}$$

Функція $w = z^n$ має похідну, яка відрізняється від нуля в усякій скінченній точці площини, крім початку координат. Отже, в усякій такій точці зберігаються кути при відображенні за допомогою функції $w = z^n$.

Подивимось, як виявляє себе наша функція в околі нульової точки. Для цього запровадимо полярні координати:

$$\left.\begin{aligned} z &= re^{\varphi i}, \\ w &= \rho e^{\theta i}, \end{aligned}\right\}$$

після чого рівність (33) дасть:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= r^n, \\ \theta &= n\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

З другої рівності (34) видно, що кути в нульовій точці не зберігаються, а збільшуються в n разів. Консерватизм кутів порушується і в нескінченно віддаленій точці площини z, тому що функція $\frac{1}{w\left(\frac{1}{z}\right)}$ в околі $z=0$ збігається з даною функцією. Точки 0 і ∞ будуть так звані критичні точки або точки розгалуження функції $z=\sqrt[n]{w}$. Особливість точок 0 і ∞, а також їх назва точками розгалуження будуть ще яснішими, коли ми зазначимо, що кожній точці площини w, крім цих двох, відповідають n різних точок площини z. Із співвідношень (34) видно, що кола

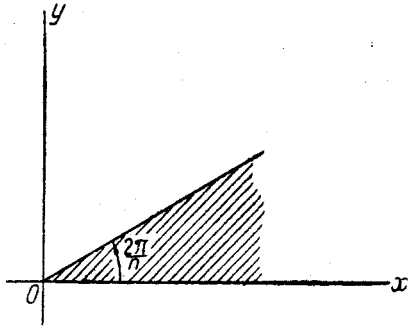

Рис. 51

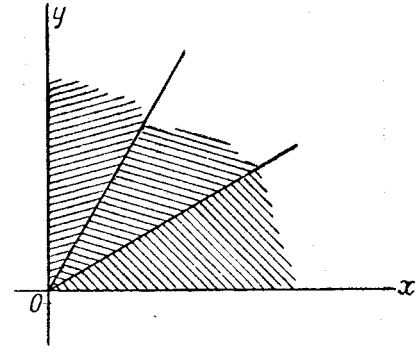

Рис. 52

з центром у нульовій точці площини змінного z ($r=\text{const}$) переходять на площині w теж у кола ($\rho=\text{const}$); півпрямим, що виходять з нульової точки ($\varphi=\text{const}$), відповідатимуть теж півпрямі ($\theta=\text{const}$).

Візьмімо на площині змінного z кут величини $\frac{2\pi}{n}$, утворюваний додатною дійсною віссю і півпрямою, що виходить з нульової точки (рис. 51). Цей кут $0\leqslant\varphi<\frac{2\pi}{n}$ за допомогою функції (33) відобразиться на всю площину змінного w. Дійсно, при $\varphi=0$ кут $\theta=0$; при $\varphi=\frac{2\pi}{n}$ кут $\theta=2\pi$.

Далі, легко бачити, що коли розбити площину z на n таких кутів з спільною вершиною в нульовій точці, то кожному такому кутові відповідатиме вся площина змінного w (рис. 52). Таким чином усій площині z відповідає n площин w; інакше кажучи, для кожної точки w ($w\neq 0$) є n різних точок z. Ці точки z, як цілком ясно, служать вершинами для якогось правильного n-кутника. Побудуємо, ідучи за Ріманом, таку поверхню w, щоб z і w відповідали одно одному взаємно однозначно і неперервно. Для цього візьмемо n площин, або, як кажуть, n листків. Розріжемо кожний листок вздовж додатної півосі Ou. Щоб утворити замкнуту поверхню w, залишається зв'язати ці листки, так

щоб перехід з одного листка в другий виконувався так само, як перехід точки z з одного кута в другий. Неважко бачити, що для цього треба зв'язати правий берег 1-го листка (якщо стати лицем у бік зростання u) з лівим 2-го, правий берег 2-го листка з лівим берегом 3-го, правий берег 3-го з лівим 4-го і т. д. Залишаються, нарешті, два незв'язані береги, а саме: лівий берег 1-го листка і правий останнього; ми їх і зв'яжемо. В результаті такої операції ми матимемо якусь замкнуту поверхню, що називається *рімановою поверхнею*. За допомогою співвідношення (33) ця ріманова поверхня і площина z відображаються вже одна на одну взаємно однозначно і неперервно. Крім того, ясно, що для того, щоб визначити точку ріманової поверхні, треба дати не тільки її координати, але і номер листка, або значення z. Отже, точка ріманової поверхні визначається парою

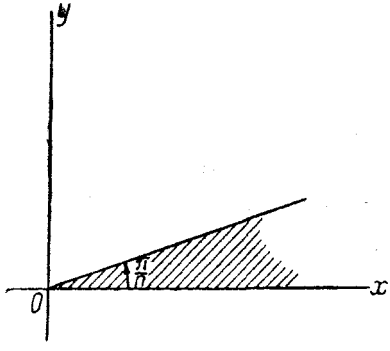

Рис. 53

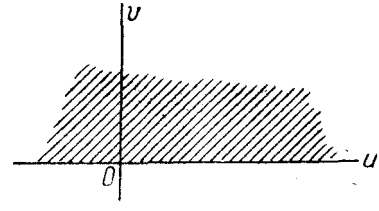

Рис. 54

(w, z). Припустимо тепер, що точка z описує коло з центром у нульовій точці; тоді точка w опише навколо початку координат площі w відповідне коло n разів (на n листках). Інакше кажучи, розгляданому кругові площини z відповідатиме n-листковий круг.

Розглянемо тепер деякі найпростіші відображення, пов'язані з функцією $w = z^n$. Цілком ясно, що сама ця функція дає змогу відобразити кут величиною $\frac{\pi}{n}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{n}$ (рис. 53) на верхню півплощину (рис. 54).

Задамося задачею відобразити півкруг з центром в нульовій точці радіуса одиниця на верхню півплощу (рис. 55). Спочатку відобразимо відрізок від -1 до $+1$ в додатну дійсну піввісь так, щоб точці -1 відповідала точка 0, а точці $+1$ точка ∞. Як функцію, що дає це відображення, можна взяти:

$$w' = -\frac{z+1}{z-1}.$$

Легко бачити, що дійсно така функція задовольняє потрібні умови, бо при зміні z від -1 до $+1$ функція w' пробігає, зростаючи, всі значення від 0 до $+\infty$.

Подивимося, в що ця функція переводитиме півколо. Маємо:

$$w' = -\frac{e^{\varphi i}+1}{e^{\varphi i}-1} = -\frac{e^{\frac{\varphi}{2}i}+e^{-\frac{\varphi}{2}i}}{e^{\frac{\varphi}{2}i}-e^{-\frac{\varphi}{2}i}} = -\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \frac{i}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}. \qquad (36)$$

Коли точка z пробігає півколо від 1 до -1, то φ змінюється від 0 до π, отже w' буде змінюватися по додатній уявній півосі. Зауважимо, що коли точка z описує півколо в додатному напрямі (рис. 55), то область півкола залишається ліворуч. З попередніх формул (35) і (36) неважко бачити, який буде напрям відповідного обходу на площині w'. На нашому рисунку (рис. 56) він позначений стрілками. Через те що відображена область повинна бути також ліворуч при обході змінним w' півосі Ov' і півосі Ou',

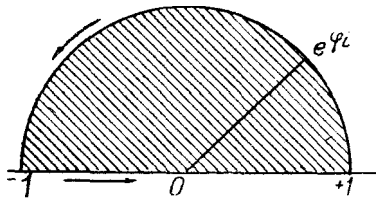

Рис. 55

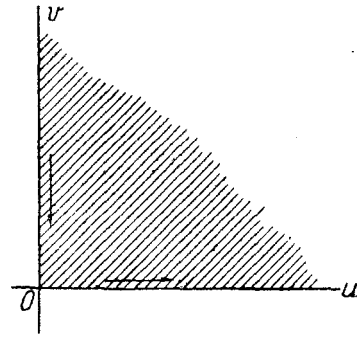

Рис. 56

то звідси висновуємо, що наш півкруг за допомогою функції (35) відобразиться на координатний кут площини w'. Для того щоб перетворити одержаний координатний кут у верхню півплощину, треба взяти:

$$w = w'^2.$$

Отже шукана функція напишеться так:

$$w = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2. \qquad (37)$$

Як відобразити сектор з кутом, який дорівнює $\frac{\pi}{n}$, радіуса одиниця на верхню півплощину? Очевидно, що функція $w' = z^n$ буде переводити цей сектор у півкруг. Цей же останній за допомогою вже знайомої функції (37) ми можемо відобразити на верхню півплощину. Таким чином шукана функція є

$$w = \left(\frac{z^n+1}{z^n-1}\right)^2. \qquad (38)$$

Як відобразити область, що міститься між двома колами, які перетинаються під кутом $\frac{\pi}{n}$, на верхню півплощину? Позначаючи

через a і b вершини даного двокутника (рис. 57), беремо лінійну функцію

$$\frac{z-a}{z-b}. \tag{39}$$

Ця функція переведе точку a в точку 0, а точку b в ∞. Отже, одне коло лінійна функція (39) переведе в один промінь, який виходить з нульової точки, друге коло—в другий промінь, який утворює з першим кут $\frac{\pi}{n}$, тому що функція (39) в точці a має похідну, що відрізняється від нуля. Залишається відобразити кут, обмежений двома щойно згаданими променями на півплощину. Це вже ми вміємо робити. Отже, шукана функція має вигляд:

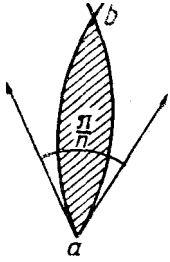

Рис. 57

$$w=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{n}\text{ [1]}. \tag{40}$$

2. Показникова і логарифмічна функції. Розглянемо тепер показникову функцію

$$w=e^{z}. \tag{41}$$

Обернена цій функції буде, як відомо, логарифмічна функція:

$$z=\ln w. \tag{41'}$$

Зобразимо z в декартових координатах, а w — в полярних: $z=x+yi$, $w=re^{\varphi i}$. Рівність (41) заміниться двома формулами:

$$r=e^{x}, \quad \varphi=y. \tag{41''}$$

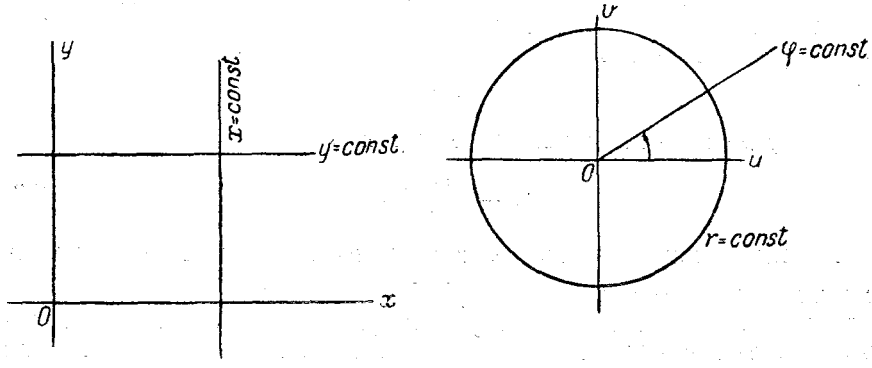

Рис. 58

З останніх рівностей (41″) бачимо, що прямій $x=\text{const}$ на площині w відповідає коло $r=\text{const}$, а прямій $y=\text{const}$ відповідає півпряма $\varphi=\text{const}$ (рис. 58).

[1]) При поставлених умовах функція (40) відображає розглядану область на півплощину, але, взагалі кажучи, не на верхню. Необхідно виконати ще обертання. (*Ред.*).

Візьмімо на площині z смугу, що міститься між дійсною віссю і прямою $y=2\pi: 0 \leqslant y < 2\pi$.

Ця смуга відобразиться за допомогою функції (41) на всю площину змінного w. Дійсно, нижній границі нашої смуги, тобто дійсній осі площини z, як і раніше, буде відповідати додатна дійсна піввісь площини w, верхній границі смуги — та сама піввісь. Розріжемо площину w вздовж додатної півосі Ou, а площину змінного z розіб'ємо на смуги завширшки 2π, як показано на рис. 59. Ці смуги ми перенумеруємо за допомогою чисел: $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Щоб виготовити ріманову поверхню, треба, очевидно, взяти нескінченну множину площин w з зазначеним розрізом, перенумерувати їх, як смуги, і зв'язати так: правий

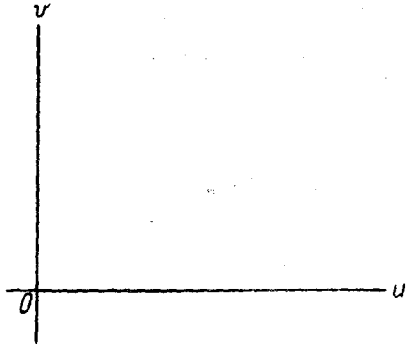

Рис. 59а

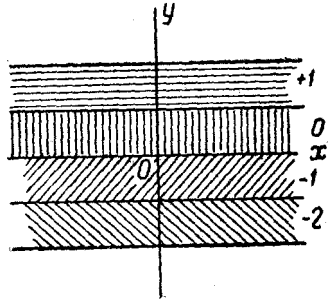

Рис. 59б

берег 0-го листка з лівим берегом 1-го, правий берег 1-го листка з лівим 2-го і т. д., лівий берег 0-го листка з правим берегом листка номера —1, лівий берег листка номера —1 з правим берегом листка номера —2 і т. д. В результаті дістанемо нескінченнолисту ріманову поверхню, на якій точки 0 і ∞ будуть точками розгалуження для функції $z=\ln w$; ці точки будуть мати складніший характер, ніж у випадку функції $\sqrt[n]{w}$, тому що їх кратність нескінченно велика. Всякій скінченній точці площини z відповідатиме одна точка (w, z) ріманової поверхні і, навпаки, кожній точці (w, z) ріманової поверхні (крім $w=0$) буде відповідати певна точка площини z. Крім того, зауважимо, що всі точки виду $z=z_0+2k\pi i$ (k — яке завгодно ціле число) відображаються в точки ріманової поверхні виду (w_0, z), тобто в точки, для яких w має одне й те саме значення (тому що $e^{z_0+2k\pi i} = e^{z_0} = w_0$). Таке є геометричне тлумачення періодичності функції e^z.

Візьмімо тепер смугу на площині z завширшки π, обмежену дійсною віссю і прямою $y=\pi: 0 \leqslant y \leqslant \pi$. За допомогою показникової функції (41) ця смуга відобразиться на верхню півплощину $v \geqslant 0$. Верхню півплощину, як ми знаємо (§ 1, п. 7), можна відобразити на круг за допомогою лінійного перетворення. Якщо нам дано смугу якої завгодно ширини і будьяк розміщену на

площині z, то, застосовуючи вже знайомі нам операції перенесення, обертання і подібності (§ 1, п. 1), ми їй надамо попереднього вигляду, потім відобразимо на верхню півплощину, а останню перетворимо в круг. Отже, ми бачимо, як можна всяку смугу відобразити на круг.

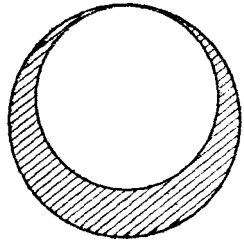

Рис. 60

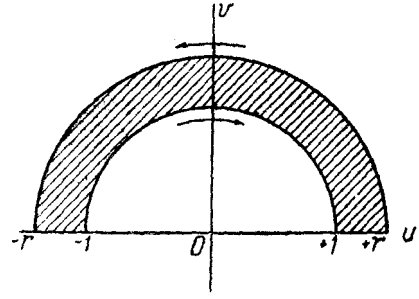

Рис. 61

Як відобразити область, що міститься між двома дотичними колами, на круг (рис. 60)? За допомогою тієї самої лінійної функції ми можемо відобразити наші кола на прямі, змушуючи відповідати точці дотику точку ∞. Ці прямі будуть паралельні, тому що кола дотичні одно до одного. Таким чином ми можемо відобразити задану область на смугу, а значить, як і раніше, на круг.

Розглянемо ще два приклади. Нехай у площині w дано криволінійний чотирикутник, дві сторони якого є концентричні півкола радіусів r і 1 $(r > 1)$, а дві інші сторони — прямолінійні відрізки осі Ou (рис. 61). Коли точка w рухається по великому півколі від r до $-r$, то відповідна точка $z = \ln w$ описуватиме прямолінійний відрізок завдовжки π, паралельний осі Oy і розміщений від неї на віддалі $\ln r$ (бо $z = \ln r + \varphi i$). Коли w рухається по осі Ou від $-r$ до -1, тобто коли $w = r' \cdot e^{\pi i}$, де r' змінюється від r до 1, то z рухається по відрізку AB, паралельному осі Ox (рис. 62). Далі, коли точка w рухається по малому колі від -1 до $+1$, то точка z рухається по уявній осі від B до O. Нарешті, коли w описує вісь Ou від 1 до r, то z змінюється по дійсній осі від 0 до $\ln r$. Отже, за допомогою логарифмічної функції наш криволінійний чотирикутник відображається на звичайний прямокутник.

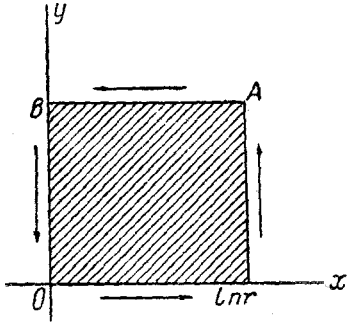

Рис. 62

Як останній приклад візьмемо півсмугу завширшки π, обмежену додатною піввіссю Ox, півпрямою $y = \pi$, яка поширюється від уявної півосі до нескінченності, і уявною піввіссю (рис. 63а). Як відобразити її на верхню півплощину? Візьмімо функцію $w' =$

$= -e^{-z}$ і подивимося, у що вона переведе нашу півсмугу в площині w'. Нехай z описує півпряму $y = \pi$ від ∞ до осі Oy. В цьому випадку значення w' буде:

$$w' = -e^{-(x+\pi i)} = +e^{-x}.$$

Коли x змінюється від $+\infty$ до 0, то w', таким чином, буде змінюватися від 0 до 1. Нехай, далі, z рухається по осі Oy від πi до 0; тоді w' набере вигляду: $w' = -e^{-yi}$, звідки $|w'| = 1$. Отже точка w' описує при цьому півколо від точки $+1$ до -1, тому що y змінюється від π до 0 (рис. 63б). Нарешті, коли точка z рухається по осі Ox від 0 до ∞, то $w' = -e^{-x}$ змінюється по осі Ou' від -1 до 0. Отже, функція $w' = -e^{-z}$ відображає півсмугу на півкруг. Тому що ми вже відображали півкруг на верхню півплощину (п. 1) за допомо-

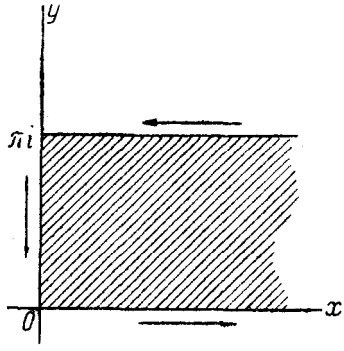

Рис. 63а

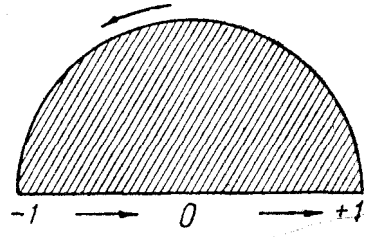

Рис. 63б

гою функції $w = \left(\frac{w'+1}{w'-1}\right)^2$, то ми можемо дану півсмугу перевести на верхню півплощину перетворенням:

$$w = \left(\frac{e^{-z}-1}{e^{-z}+1}\right)^2.$$

Вправи до розділу III

1. Виконати графічно інверсію прямої лінії відносно кола.

Вказівка. Треба окремо розглянути випадки, коли пряма перетинається з основним колом, дотикається до нього і не перетинається з ним.

2. Виконати графічне побудування інверсії кола, що проходить через полюс.

Вказівка. Побудування буде оберненим до задачі 1.

3. Виконати графічно інверсію кола, що не проходить через полюс.

Вказівка. Слід окремо розглянути випадки, коли коло перетинається з основним колом, дотикається до нього і не перетинається з ним.

4. Знаючи центр α і радіус r кола, визначити положення центра і величину радіуса кола, яке є інверсією даного кола, беручи полюс на початку координат і радіус інверсії рівним R.

Відп. $\beta = \frac{R^2\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}$, $\rho = \frac{R^2 r}{|\alpha|^2 - r^2}$.

5. Написати лінійне перетворення одиничного круга самого в себе, знаючи подвійні точки $\frac{1}{2}$, 2 і точку $\frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$, що переходить у нескінченність.

Відп. $\dfrac{w-\frac{1}{2}}{w-2}=i\,\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$.

6. Написати лінійне перетворення одиничного круга самого в себе, знаючи подвійні точки i, $-i$ і точку $2i$, що переходить в нескінченність.

Відп. $\dfrac{w-i}{w+i}=3\,\dfrac{z-i}{z+i}$.

7. Написати лінійне перетворення одиничного круга самого в себе, знаючи його подвійну точку 1 і точку 2, що переходить в нескінченність.

Відп. $\dfrac{1}{w-1}=\dfrac{1}{z-1}-1$, або $w=\dfrac{1}{2-z}$.

8. Скласти лінійне перетворення верхньої півплощини на одиничний круг, яке переводить точки дійсної осі -1, 0, $+1$ в точки $+1$, i, -1 кола.

Відп. $w=\dfrac{z-i}{iz-1}$.

9. Користуючись зображенням геометрії Лобачевського на півплощині, розв'язати задачу: знаючи евклідові центр $z_0=x_0+iy_0$ і радіус ρ кола, знайти його неевклідові центр z і радіус R.

Відп. $z=x_0+i\sqrt{y_0^2-\rho^2}$, $\quad R=\dfrac{k}{2}\ln\dfrac{y_0+\rho}{y_0-\rho}$.

10. Розв'язати задачу 9 побудуванням.

11. Відобразити на верхню півплощину одиничний круг з купюрою, що йде від центра по радіусу дійсної осі.

Відп. $w=\left(\dfrac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$.

12. Область задачі 11 відобразити на одиничний круг.

Відп. $\zeta=\dfrac{i(z+1)+2\sqrt{z}}{z+1+2i\sqrt{z}}$.

Розділ IV

Криволінійні інтеграли в дійсній і комплексній областях

§ 1. Криволінійні інтеграли

1. Поняття криволінійного інтеграла. Як відомо з інтегрального числення, до поняття інтеграла від неперервної функції $f(x)$ дійсного змінного можна прийти двома шляхами. З одного боку, інтегрування можна розглядати як операцію, обернену диференціюванню, називаючи невизначеним інтегралом функцію $F(x)$, похідна якої рівна даній функції $f(x)$: $F'(x)=f(x)$, або, що те ж саме, $dF(x)=f(x)\,dx$. З другого боку, можна дати конструктивне означення поняття інтеграла від неперервної функції $f(x)$, розглядаючи його як границю суми нескінченно великого числа нескінченно малих доданків. Для цього, припускаючи, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку (a, b) дійсної осі, і позначаючи через X яку завгодну точку цього відрізка, розіб'ємо відрізок (a, X) на довільне число n частинних відрізків за допомогою точок:

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_{n-1}<x_n=X.$$

Кожному частинному відрізкові (x_k, x_{k+1}) зведемо у відповідність число, одержане від множення значення даної функції в будьякій точці цього відрізка, наприклад у лівому кінці, на довжину цього відрізка. Це число буде $f(x_k)\cdot\Delta x_k$, де взято: $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$. Нарешті, утворимо суму:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\Delta x_k, \tag{1}$$

і перейдемо до границі, припускаючи, що довжини всіх частинних відрізків прямують до нуля. Як доводиться в інтегральному численні, яка б не була неперервна функція $f(x)$, зазначена сума (1) прямує до певної скінченної границі, що не залежить від того закону, за яким довжини всіх частинних відрізків прямують до нуля. За означенням ми покладаємо:

$$F(X)=\int_a^X f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$$

і називаємо $\int_a^X f(x)\,dx$ визначеним інтегралом функції $f(x)$ у про-

міжку (a, X). Далі, доводиться, що $F'(X)=f(X)$, тобто обидва означення інтеграла еквівалентні.

Якщо ми хочемо перенести поняття інтеграла в комплексну область, то у випадку аналітичних функцій, як ми далі побачимо, можна йти обома зазначеними шляхами, показавши, що обидва ці шляхи приводять нас до одного і того ж результату. Інакше буде у випадку довільних неперервних функцій комплексного змінного. Тут не можна розглядати інтегрування як дію, обернену диференціюванню, тоді як друге конструктивне означення інтеграла буде можливе.

Перед тим як перейти до означення поняття інтеграла в комплексній області, ми заведемо поняття криволінійного інтеграла в дійсній області. У визначеному інтегралі $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ змінне інтегрування x пробігає відрізок (a, b) дійсної осі, і ми можемо символ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ розглядати як інтеграл функції $f(x)$ вздовж цього відрізка, заводячи позначення:

$$\int\limits_{ab} f(x)\,dx.$$

Природно спробувати поширити поняття інтеграла на той випадок, коли путею інтегрування буде лінія довільної форми, а підінтегральна функція буде функцією від точки цієї лінії, тобто буде функцією двох дійсних змінних.

Умовимося називати лінію Жордана C *гладкою* лінією, якщо в кожній точці лінії існує певна дотична, яка змінюється неперервно при неперервному рухові по цій лінії. Гладка лінія C визначається аналітично за допомогою рівнянь: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, які для різних значень параметра t дають різні точки лінії C [крім випадку замкнутої лінії, коли $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$, $\psi(\alpha)=\psi(\beta)$], при чому функції φ і ψ мають неперервні похідні, не рівні нулеві одночасно ні при якому значенні параметра. Якщо неперервна лінія Жордана складена з скінченного числа гладких ліній, то ми її будемо називати *кусково-гладкою* лінією і позначатимемо через Г. Щоразу, коли ми беремо лінію C або Г, ми вважаємо її даною разом з додатним напрямом на ній, за який ми приймаємо напрям рухомої точки відповідно зростанню параметра t. У випадку замкнутої лінії за додатний напрям на ній прийнято вважати напрям рухомої точки, при якому внутрішня область, обмежена цією лінією, залишається зліва.

Переходячи тепер до означення поняття криволінійного інтеграла, розглянемо довільну неперервну функцію $p(x, y)$, визначену в деякій області G площини xy, і довільну гладку лінію C, що лежить в цій області, з початком у точці $M_0(x_0, y_0)$ і кінцем у точці $M(X, Y)$ (рис. 64). Розіб'ємо дугу M_0M лінії C на довільне число n частинних дуг за допомогою точок M_0, M_1, M_2,...,

M_{n-1}, $M_n = M$, розміщених послідовно в додатному напрямі лінії C. Позначаючи через (x_k, y_k) координати точки M_k, покладаючи для стислості $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, кожній частинній дузі зведемо у відповідність число $p(x_k, y_k)\Delta x_k$, одержане від множення значення даної функції в лівому кінці цієї дуги на відповідний цій дузі приріст змінного x. Складемо, далі, суму всіх таких добутків, поширивши її на всі частинні дуги:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} p(x_k, y_k)\Delta x_k. \qquad (2)$$

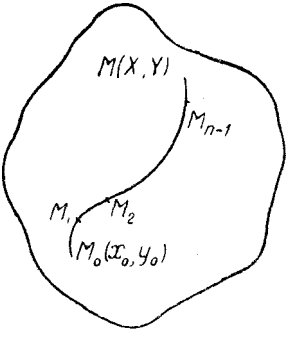

Рис. 64

Примушуючи всі частинні дуги прямувати до нуля, доведемо, що *вираз (2) прямує до певної скінченної границі, яка не залежить від того закону, за яким всі частинні дуги прямують до нуля*[1]).

З цією метою напишемо рівняння лінії C у вигляді $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ і позначимо через t_k значення параметра t, що відповідає точці M_k: $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$. Тому що точка M_k з зростанням номера k переміщається в додатному напрямі лінії C, то маємо: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$. За формулою скінченних приростів, відомою з диференціального числення, можемо написати:

$$\Delta x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\tau_k)\Delta t_k,$$

де

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k \quad \text{і} \quad t_k < \tau_k < t_{k+1}.$$

Таким чином вираз (2) набере вигляду:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} p(x_k, y_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{k=n-1} p[\varphi(t_k), \ \psi(t_k)]\varphi'(\tau_k)\Delta t_k. \qquad (2')$$

Вважаючи, що $\eta_k = \varphi'(\tau_k) - \varphi'(t_k)$, перепишемо (2′) у такому вигляді:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} p(x_k, y_k)\Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n-1} p[\varphi(t_k), \ \psi(t_k)]\varphi'(t_k)\Delta t_k + \sum_{k=0}^{k=n-1} p(x_k, y_k)\eta_k\Delta t_k. \qquad (3)$$

Питання зводиться до того, щоб довести існування границі виразу (3), коли всі Δt_k прямують до нуля. Тому що функція $\varphi'(t)$ за умовою неперервна на відрізку (α, β), а значить, і рівномірно

[1]) Цю теорему можна довести, не припускаючи існування неперервних похідних $\varphi'(t)$ і $\psi'(t)$. Досить обмежитися припущенням, що функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ з обмеженою зміною (à variation bornée), тобто, що дуга C має довжину. Див., наприклад, Валле-Пуссен — „Курс анализа бесконечно малых", т. I, ст. 398, ГТТИ, 1933. (*Ред.*).

неперервна на цьому відрізку, то при достатньо малих Δt_k маємо: $|\eta_k| = |\varphi'(\tau_k) - \varphi'(t_k)| < \varepsilon$, де $\varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ — як завгодно мале число. Зауважимо, нарешті, що функція $p(x, y)$, будучи за умовою неперервною на лінії C, буде обмеженою на цій лінії, тобто $|p(x, y)| < K$ для всіх точок лінії C. Взявши все це до уваги, одержимо:

$$\left|\sum_{k=0}^{k=n-1} p(x_k, y_k)\eta_k\Delta t_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{k=n-1} |p(x_k, y_k)|\,|\eta_k|\cdot\Delta t_k < K\varepsilon \sum_{k=0}^{k=n-1} \Delta t_k = K\varepsilon(\beta - \alpha).$$

Ця нерівність переконує нас в тому, що друга сума правої частини рівності (3) прямує до нуля, коли всі частинні дуги прямують до нуля. Щождо першої суми, то за основною теоремою інтегрального числення вона прямує до певної скінченної границі незалежно від закону, за яким частинні дуги (або що зводиться до того ж — Δt_k) прямують до нуля. Цією границею буде визначений інтеграл

$$\int_\alpha^\beta p[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Таким чином, з рівності (3), після переходу до границі при зазначених припущеннях, одержуємо:

$$\lim \sum_{k=0}^{k=n-1} p(x_k, y_k)\,\Delta x_k = \lim \sum_{k=0}^{k=n-1} p[\varphi(t_k),\ \psi(t_k)]\,\varphi'(t_k)\,\Delta t_k =$$

$$= \int_\alpha^\beta p[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (4)$$

Отже, ми довели, що вираз (2) прямує до певної скінченної границі, коли довжини всіх частинних дуг за довільним законом прямують до нуля. Цю границю ми символічно позначимо так: $\int\limits_C p(x, y)\,dx$ і будемо називати *криволінійним інтегралом від $p\,dx$, взятим вздовж C*. Таким чином в наслідок означення маємо:

$$\int\limits_C p(x, y)\,dx = \lim \sum_{k=0}^{k=n-1} p(x_k, y_k)\,\Delta x_k = \int_\alpha^\beta p[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (5)$$

Позначаючи через $q(x, y)$ другу функцію, неперервну в області G, і діючи аналогічно попередньому, ми доведемо, що сума $\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} q(x_k, y_k)\,\Delta y_k$ прямує до певної скінченної границі, коли довжини всіх частинних дуг за довільним законом прямують до нуля. За означенням ми покладемо:

$$\int\limits_C q(x, y)\,dy = \lim \sum_{k=0}^{k=n-1} q(x_k, y_k)\,\Delta y_k = \int_\alpha^\beta q[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\psi'(t)\,dt, \qquad (6)$$

і будемо називати $\int\limits_C q(x, y)\,dy$ криволінійним інтегралом від $q\,dy$ вздовж C. Більш загально ми назвемо криволінійним інтегралом від $p\,dx + q\,dy$ вздовж C суму $\int\limits_C p\,dx + \int\limits_C q\,dy$. Таким чином за означенням маємо:

$$\int\limits_C p\,dx + q\,dy = \int\limits_C p\,dx + \int\limits_C q\,dy =$$

$$= \lim \sum_{k=0}^{k=n-1} [p(x_k, y_k)\Delta x_k + q(x_k, y_k)\Delta y_k] =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \{p[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}\,dt. \qquad (7)$$

Зауваження. Очевидно, означення криволінійного інтеграла залишається в силі, якщо функції p і q неперервні тільки вздовж лінії C.

Формула (7) дає вираз криволінійного інтеграла за допомогою звичайного визначеного інтеграла і дає змогу, таким чином, звести задачу обчислення криволінійного інтеграла до обчислення звичайного інтеграла. Досі за путь інтегрування ми брали довільну гладку лінію C. Якщо ми маємо кусково-гладку лінію Г, що складається з гладких ліній $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то за означенням можна взяти:

$$\int\limits_\Gamma p\,dx + q\,dy = \int\limits_{C_1} p\,dx + q\,dy + \int\limits_{C_2} + \ldots + \int\limits_{C_n}. \qquad (8)$$

Очевидно, формула (7), що виражає криволінійний інтеграл за допомогою звичайного визначеного інтеграла, залишається в силі і для інтеграла, взятого вздовж лінії Г.

2. Механічний зміст криволінійного інтеграла. Щоб дати криволінійному інтегралові механічне тлумачення, будемо розглядати p і q як компоненти сили V, що діє на точку, яка рухається по траєкторії C. Очевидно, можна написати:

$$p\,dx + q\,dy = \left(p\frac{dx}{ds} + q\frac{dy}{ds}\right)ds = (p\cos\alpha + q\cos\beta)\,ds, \qquad (9)$$

де α і β є відповідно кути між додатним напрямом осей Ox і Oy і додатним напрямом дотичної до лінії C у точці (x, y). Приймаючи дотичну до лінії C за вісь проекцій, ми робимо висновок, що $p\cos\alpha + q\cos\beta$ є сума проекцій компонент сили V на цю вісь. З другого боку, відомо, що проекція сили V на будьяку вісь дорівнює сумі проекцій її компонент на ту ж саму вісь. Отже, одержуємо:

$$p\cos\alpha + q\cos\beta = \text{пр. } V, \qquad (10)$$

де проектування береться на напрям дотичної до лінії C. З формул (9) і (10) виходить, що $p\,dx + q\,dy = \text{пр. } V\,ds$, тобто підінтегральний вираз являє собою елементарну роботу сили V. Отже,

інтеграл $\int\limits_C p\,dx+q\,dy$, як сума елементарних робіт, являє повну роботу сили V вздовж траєкторії C.

3. Основні властивості криволінійного інтеграла. З самого означення криволінійного інтеграла випливають такі його властивості:

$$1)\quad \int\limits_{\Gamma^-} p\,dx+q\,dy=-\int\limits_{\Gamma^+} p\,dx+q\,dy, \tag{11}$$

де Γ^+ і Γ^- означають одну і ту ж путь, пройдену відповідно в додатному і від'ємному напрямах;

$$2)\quad \int\limits_{\Gamma} p\,dx+q\,dy=\int\limits_{\Gamma_1}+\int\limits_{\Gamma_2}+\ldots+\int\limits_{\Gamma_n}, \tag{12}$$

якщо путь інтегрування Γ описує рухома точка, яка проходить послідовно її частини $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$.

4. Постава питання про незалежність значення криволінійного інтеграла від путі інтегрування. Як випливає з означення криволінійного інтеграла, його значення залежить, взагалі кажучи, не тільки від підінтегрального виразу $p\,dx+q\,dy$, а й від путі інтегрування Γ. Інакше кажучи, сполучаючи точки M_0 і M двома різними лініями Γ і Γ', що належать до області G, і обчислюючи $\int p\,dx+q\,dy$ вздовж кожної з цих ліній, ми одержимо, взагалі кажучи, різні числа. Природно виникає питання: які умови повинні задовольняти функції p і q в області G для того, щоб значення інтеграла від $p\,dx+q\,dy$ не залежало від путі інтегрування, а визначалося лише положеннями початкової і кінцевої точок, тобто щоб існувала рівність:

$$\int\limits_{\Gamma} p\,dx+q\,dy=\int\limits_{\Gamma'} p\,dx+q\,dy, \tag{13}$$

які б не були лінії Γ і Γ' області G, що сполучають M_0 з точкою M (рис. 65)?

Нехай значення інтеграла не залежить від путі інтегрування; тоді має місце рівність (13), в якій лінії Γ і Γ' ми можемо припустити такими, що ніде не перетинаються, крім як у точках M_0 і M. Цю рівність (13) можна замінити рівнозначною:

$$\int\limits_{\Gamma} p\,dx+q\,dy+\int\limits_{\Gamma'^-} p\,dx+q\,dy=0. \tag{13'}$$

Помітивши, що лінії Γ і Γ'^- у своїй сукупності утворюють замкнутий контур $K=\Gamma^+ + \Gamma'^-$, ми запишемо (13′) так:

$$\int\limits_{K} p\,dx+q\,dy=0. \tag{13''}$$

Отже, *якщо значення інтеграла не залежить від путі інтегрування, то цей інтеграл, взятий по якому завгодно замкнутому контурові області G, дорівнює нулеві.*

Легко бачити, що й навпаки: *якщо значення інтеграла вздовж якого завгодно замкнутого контура області G дорівнює нулеві, то цей інтеграл не залежить від путі інтегрування.* Справді, сполучивши дві точки M_0 і M двома довільними лініями Γ і Γ' області G, припустимо для загальності, що вони перетинаються в точці S (рис. 65).

Вважаючи $\Gamma = M_0S + SM = \gamma_1 + \gamma_2$, $\Gamma' = M_0S + SM = \gamma_1' + \gamma_2'$, ми маємо за умовою:

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_1'-} = 0 \quad \text{і} \quad \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_2'-} = 0.$$

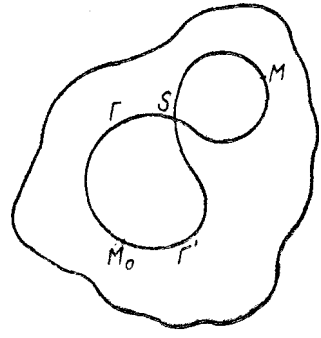

Рис. 65

Додаючи дві останні рівності, одержимо:

$$\int_{\Gamma} + \int_{\Gamma'-} = 0 \quad \text{і} \quad \int_{\Gamma} = \int_{\Gamma'},$$

що й потрібно.

Таким чином поставлена вище задача — про умови незалежності інтеграла від путі інтегрування — рівнозначна задачі про умови, при яких даний інтеграл, взятий по якому завгодно замкнутому контурові області G, обертається в нуль.

5. Формула Гріна. Щоб розв'язати задачу, поставлену в попередньому пункті, ми спочатку виведемо одну формулу, на підставі якої криволінійний інтеграл, взятий по замкнутому контурові Γ, замінюється подвійним інтегралом, поширеним на область D, обмежену цим контуром.

Отже, нехай D є однозв'язна область, обмежена кусково-гладкою лінією Γ; функції $p(x, y)$ і $q(x, y)$ нехай будуть неперервними разом з їх частинними похідними $\frac{\partial p}{\partial y}$ і $\frac{\partial q}{\partial x}$ у замкнутій області $\bar{D}$. Шукана формула, відома під назвою формули Гріна (Green), пишеться так:

$$\int_{\Gamma} p\,dx + q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{14}$$

Для виведення цієї формули припустимо для простоти доведення, що контур Γ перетинається якою завгодно прямою лінією, паралельною осі Ox або осі Oy, не більше ніж у двох точках (рис. 66). Проведемо дві крайні прямі, паралельні осі Oy, між якими розміщений контур Γ; нехай їх рівняння будуть $x = a$, $x = b$, а ординати точок M_1 і M_2, в яких довільна пряма, паралельна осі Oy, зустрічає контур, будуть відповідно y_1 і y_2. Тоді матимемо:

$$\iint_{D} \frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial p}{\partial y}\,dy = \int_a^b [p(x, y_2) - p(x, y_1)]\,dx,$$

або

$$\iint_D \frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b p(x, y_2)\,dx + \int_b^a p(x, y_1)\,dx = \int_{\Gamma} p\,dx = -\int_{\Gamma} p\,dx. \quad (15)$$

Діючи аналогічно, одержимо:

$$\iint_D \frac{\partial q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\Gamma} q\,dy. \quad (16)$$

Віднімаючи з рівності (16) рівність (15), остаточно одержимо:

$$\iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\Gamma} p\,dx + q\,dy. \quad (14)$$

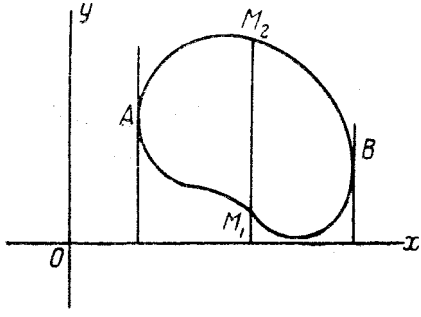

Рис. 66

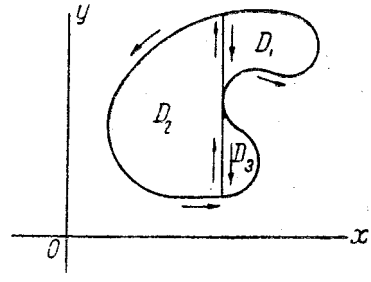

Рис. 67

В тому випадку, коли границя області D більш складного вигляду (рис. 67), ми розіб'ємо цю область допоміжними лініями на скінченне число областей D_1, D_2, D_3, границі яких перетинаються з прямими, паралельними осям координат, не більш ніж у двох точках. Застосуємо доведену формулу для кожної з областей D_1, D_2, D_3 і ці формули підсумуємо. Помітивши, що інтегрування по допоміжних лініях виконуються два рази в супротивних напрямах, а тому знищуються, ми в результаті одержимо формулу (14) для області D.

Зауваження. Формулу Гріна ми вивели при наявності зазначених додаткових обмежень загального характеру відносно кусково-гладкої лінії Г. Таким чином для більшого спрощення ми залишили без розгляду, наприклад, випадок, коли контур Г може перетинатися з прямими, паралельними осям координат, в нескінченній множині точок.

6. Обчислення площ. Зокрема, вважаючи в формулі (14) $p = -y$, $q = x$, одержимо:

$$\int_{\Gamma} x\,dy - y\,dx = \iint_D 2dx\,dy = 2\iint_D dx\,dy = 2D,$$

де буквою D позначено також площу області D. Отже, площа області D, обмеженої замкнутою лінією Г, визначається за формулою:

$$D = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} x\,dy - y\,dx. \tag{17}$$

В наслідок свого геометричного змісту інтеграл (17) залежить від путі інтегрування.

7. Умова незалежності значення криволінійного інтеграла від путі інтегрування. Перейдемо тепер до задачі, наміченої вище—в п. 4, про відшукання умов, при яких даний криволінійний інтеграл не залежить від путі інтегрування.

Нехай дана однозв'язна область G, в якій ми припускаємо функції p і q неперервними разом з частинними похідними $\frac{\partial p}{\partial y}$ і $\frac{\partial q}{\partial x}$.

Теорема. *Умова, необхідна і достатня для того, щоб криволінійний інтеграл* $\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} p\,dx + q\,dy$ *не залежав від путі інтегрування в однозв'язній області G, полягає у виконанні всюди в області G тотожності:*

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}. \tag{18}$$

Беручи до уваги механічний зміст криволінійного інтеграла (п. 2), ми можемо сказати: умова, необхідна і достатня для того, щоб робота сили з компонентами p і q не залежала від траєкторії рухомої точки в однозв'язній області G, полягає у виконанні всюди в цій області тотожності (18).

Як виходить з попереднього (п. 4), інтеграл не залежить від путі інтегрування тоді і тільки тоді, якщо цей інтеграл, взятий по якому завгодно замкнутому контурові, що лежить в області G, дорівнює нулеві. Достатність зазначеної вище умови (18) очевидна. Справді, нехай Г є довільний замкнутий контур, що лежить в області G. Позначаючи через D область, обмежену цим контуром Г, скористуємося формулою Гріна (14):

$$\int_{\Gamma} p\,dx + q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{14}$$

Тому що за умовою (18) маємо: $\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ всюди в області G, а значить і в області D, то права частина рівності (14) обертається в нуль. Звідси й ліва частина цієї рівності $\int\limits_{\Gamma} p\,dx + q\,dy$ повинна бути нулем.

Покажемо, що умова (18) є також і необхідною, тобто якщо

$\int\limits_{\Gamma} p\,dx - q\,dy = 0$, який би не був замкнутий контур Г, що лежить в області G, то всюди в області G має місце тотожність:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}. \tag{18}$$

Допускаючи супротивне, ми повинні припустити, що існує точка (x_1, y_1) області G, в якій рівність (18) порушується, тобто $\frac{\partial q}{\partial x} \neq \frac{\partial p}{\partial y}$. Отже, в цій точці різниця:

$$\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \tag{19}$$

має значення, відмінне від нуля, додатне або від'ємне. В наслідок неперервності функції $\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}$ існує круг з центром у точці (x_1, y_1), в кожній точці якого різниця (19) зберігає той самий знак, що і в точці (x_1, y_1) — додатний або від'ємний — і, значить, всюди в цьому крузі лишається $\geqslant m\,(m > 0)$ в першому випадку або $\leqslant -m$ в другому випадку.

Застосуємо формулу Гріна (14), розуміючи під Г який завгодно замкнутий контур, що лежить всередині зазначеного круга. Тому що в кожній точці області D, обмеженої контуром Г, підінтегральна функція (19) правої частини формули Гріна лишається $\geqslant m$ або $\leqslant -m$, то і вся права частина буде $\geqslant mD$ або $\leqslant -mD$.

Звідси випливає, що ліва частина формули (14) $\int\limits_{\Gamma} p\,dx + q\,dy$ не дорівнює нулеві, а це суперечить умові.

8. Умова, при якій $p\,dx + q\,dy$ є повний диференціал. Отже, ми бачили в попередньому пункті, що умова $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$, виконана всюди в однозв'язній області G, характеризує незалежність криволінійного інтеграла $\int\limits_{\Gamma} p\,dx + q\,dy$ від путі інтегрування, або, що зводиться до того ж самого, обернення його в нуль у випадку довільного замкнутого контура. Легко бачити, що та ж сама умова (18) є необхідною і достатньою для того, щоб підінтегральний вираз $p\,dx + q\,dy$ був повним диференціалом. Справді, якщо $du = p\,dx + q\,dy$, то звідси виходить: $\frac{\partial u}{\partial x} = p$, $\frac{\partial u}{\partial y} = q$, і, значить, одержуємо: $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, тобто умова (18) виконується.

Доведемо тепер достатність цієї умови (18), тобто, припускаючи її виконаною всюди в області G, покажемо, що існує функція $u\,(x, y)$, повний диференціал якої дорівнює $p\,dx + q\,dy$. Для цього візьмемо:

$$u(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} p\,dx + q\,dy, \tag{20}$$

де (x_0, y_0) є стала точка, а (x, y) — змінна точка області G, путею ж інтегрування служить довільна лінія, що сполучає точки (x_0, y_0) і (x, y) і лежить всіма своїми точками в області G. Очевидно, функція $u(x, y)$, визначена формулою (20), однозначна всюди в області D, тому що при умові (18) значення інтеграла (20) не залежить від путі інтегрування. Отже, щоб обчислити значення функції $u(x, y)$, досить прийняти за путь інтегрування довільну лінію, що лежить в області G і сполучає точку $M_0(x_0, y_0)$ і $M(x, y)$, наприклад ламану M_0CM, ланки якої M_0C

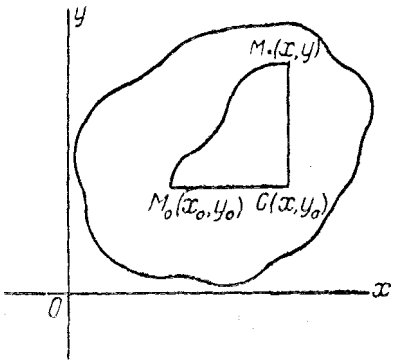

Рис. 68

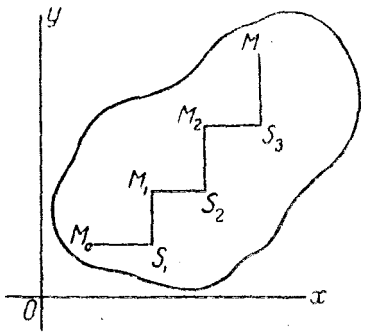

Рис. 69

і CM паралельні відповідно осям координат Ox і Oy (рис. 68). Таким чином матимемо:

$$u(x, y) = \int\limits_{M_0C} p\,dx + q\,dy + \int\limits_{CM} p\,dx + q\,dy = \int\limits_{x_0}^{x} p(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} q(x, y)\,dy, \quad (21)$$

де, при інтегруванні відносно y, x вважається сталим. Таким чином значення функції $u(x, y)$ обчислюється за допомогою двох квадратур. Покажемо тепер, що функція $u(x, y)$ є шукана, тобто $du = p\,dx + q\,dy$.

Справді, з формули (21), знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x, y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}\,dy = p(x, y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial p(x, y)}{\partial y}\,dy =$$

$$= p(x, y_0) + p(x, y) - p(x, y_0) = p(x, y),$$

і точно так само:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = q(x, y),$$

і, значить, одержуємо:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = p\,dx + q\,dy.$$

Зауваження. В попередньому доведенні ми припускали, що ламана лінія M_0CM лежить цілком в області G. Якщо це не так, то за путь інтегрування можна прийняти ламану лінію з більшим числом ланок, яка цілком лежить в області G, наприклад $M_0S_1M_1S_2M_2S_3M$ (рис. 69), ланки якої по черзі паралельні осі Ox і осі Oy.

В цьому випадку маємо:

$$u(x, y) = \int\limits_{M_0S_1M_1S_2M_2} p\,dx + q\,dy + \int\limits_{M_2S_3M} p\,dx + q\,dy, \tag{20'}$$

і в наслідок попереднього одержуємо:

$$du = d\int\limits_{M_2S_3M} p\,dx + q\,dy = p\,dx + q\,dy.$$

На підставі викладеного в п. 7 ми можемо сказати тепер, що умова, необхідна і достатня для незалежності інтеграла $\int p\,dx + q\,dy$ від путі інтегрування в однозв'язної області G, полягає в тому, щоб підінтегральний вираз $p\,dx + q\,dy$ був повним диференціалом. З механічного погляду це значить, що умова, необхідна і достатня для незалежності роботи сили з компонентами p і q від траекторії в однозв'язній області G, полягає в тому, щоб ця сила мала силову функцію.

Ми виходили з означення криволінійного інтеграла $\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} pdx + qdy$ як границі суми. Тепер ми бачимо, що операція криволінійного інтегрування може бути розглядувана як дія, обернена диференціюванню, тільки в тому випадку, коли маємо тотожно в однозв'язній області G умову:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}\ ^{1)}. \tag{18}$$

§ 2. Застосування до гідродинаміки

1. Невихровий і вільний від джерел потік рідини. Будемо виходити з розгляду векторного поля в області G площини xy, тобто системи двох неперервних функцій $p(x, y)$ і $q(x, y)$, визначених в області G, які ми приймемо за компоненти вектора W:

$$W_x = p(x, y), \quad W_y = q(x, y).$$

Це векторне поле можна тлумачити гідродинамічно, приймаючи його за розподіл швидкості стаціонарного плоского потоку нестискуваної рідини.

[1]) Якщо функції p і q та їх похідні $\frac{\partial p}{\partial y}$ і $\frac{\partial q}{\partial x}$ неперервні у многозв'язній області, то умова $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ так само буде необхідною і достатньою для того, щоб вираз $p\,dx + q\,dy$ був повним диференціалом якоїсь функції $u(x, y)$. Проте функція $u(x, y)$ в цьому випадку буде, взагалі кажучи, многозначною (тобто $\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} pdx + qdy$ залежатиме не тільки від координат x і y кінця путі інтегрування, а й від самої путі). Див., наприклад, Гурса „Курс математического анализа", т. I, § 146, а також Смірнов „Курс высшей математики", т. II, 72°, ОНТИ, 1937. (*Ред.*).

Вважаючи область G однозв'язною, ми припускаємо, що потік вільний від джерел, тобто що ні в якій частині області G рідина не виникає і не зникає; це значить, що в кожній частинній області, яка належить до G, з бігом часу відбувається зміна стану рідини виключно в наслідок притікання або витікання рідини через границю цієї частинної області. Це припущення приводить до умови, якій повинен задовольняти вектор швидкості W.

Розглянемо довільну замкнуту кусково-гладку криву Г в області G і позначимо W_n нормальну до Г компоненту вектора W, вважаючи, що додатний напрям нормалі йде від Г всередину області. Тоді вираз $\int\limits_{\Gamma} W_n ds$ буде пропорціональний збільшенню кількості рідини, що відбувається за одиницю часу в області, обмеженій кривою Г. В наслідок припущення, що джерел немає, цей вираз повинен бути рівним нулеві, якою б не була лінія Г, що належить до G. Помітивши, що

$$W_n = p\cos(n, x) + q\cos(n, y) = -p\frac{dy}{ds} + q\frac{dx}{ds},$$

ми одержимо умову:

$$\int\limits_{\Gamma}\left(q\frac{dx}{ds} - p\frac{dy}{ds}\right)ds = \int\limits_{\Gamma} q\,dx - p\,dy = 0.$$

На підставі § 1, п. 7, ми звідси робимо висновок: ***вільний від джерел потік рідини характеризується рівністю:***

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y}. \tag{22}$$

Рівність (22) повинна існувати в кожній точці однозв'язної області G, в якій розглядуваний потік рідини не має джерел.

Позначимо через W_s компоненту вектора швидкості W в напрямі дотичної до кривої Г, вважаючи за додатний напрям кривої той напрям, при якому область, внутрішня до Г, лишається зліва.

Вираз $\int\limits_{\Gamma} W_s ds$ називають ***циркуляцією потоку*** вздовж кривої Г. Потік рідини називається ***невихровим*** у G, якщо його циркуляція вздовж довільної замкнутої кривої Г, що належить G, є нуль. Помітивши, що

$$W_s = p\cos(s, x) + q\cos(s, y) = p\frac{dx}{ds} + q\frac{dy}{ds},$$

умову невихрового потоку запишемо так:

$$\int\limits_{\Gamma}\left(p\frac{dx}{ds} + q\frac{dy}{ds}\right)ds = \int\limits_{\Gamma} p\,dx + q\,dy = 0.$$

Користуючись результатом § 1, п. 7, ми, таким чином, одержуємо: ***невихровий потік рідини характеризується рівністю:***

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}. \tag{23}$$

Рівність (23) повинна здійснюватися всюди в області G при відсутності в цій області вихрів у потоці рідини.

Розглянемо ближче умову (28) невихрового потоку рідини. Ця умова, як це виходить з § 1, п. 8, показує, що p і q є частинні похідні якоїсь функції, яка може бути знайдена квадратурами. Отже, маємо:

$$p=\frac{\partial u}{\partial x},\quad q=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{24}$$

Функція u носить назву ***потенціала швидкостей*** даного потоку. Знаючи цю функцію, ми визначаємо компоненти швидкості потоку за формулами (24). Очевидно, величина швидкості дорівнює:

$$\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$$

Якщо невихровий потік вільний від джерел, то, вносячи вираз (24) у рівняння (22), знайдемо:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{25}$$

Таким чином кожний невихровий і вільний від джерел потік рідини має потенціал швидкостей $u(x, y)$, який задовольняє диференціальне рівняння (25).

Криві $u=\text{const}$ називаються лініями рівня. Вздовж цих кривих немає руху рідини, тому що рідина тече всюди до них перпендикулярно. Дійсно, позначаючи через W_s компоненти швидкості W в довільному напрямі s, очевидно, маємо:

$$W_s=p\frac{dx}{ds}+q\frac{dy}{ds}.$$

Отже, в наслідок (24) одержуємо:

$$W_s=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\frac{\partial u}{\partial s},$$

звідки, зокрема, випливає: вздовж лінії $u=\text{const}$ компонента швидкості дорівнює нулеві.

2. Характеристична функція потоку. Диференціальне рівняння траекторій потоку, очевидно, буде:

$$\frac{dx}{p}=\frac{dy}{q},\quad \text{або}\quad \frac{dx}{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{dy}{\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

Перепишемо це рівняння у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx=0.$$

В наслідок умови (25) ліва частина останнього рівняння становить собою повний диференціал деякої функції $v(x, y)$, тобто:

$$dv = \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = 0 \tag{26}$$

є диференціальне рівняння траекторій потоку.

Отже, рівняння $v = \text{const}$ зображує траекторії нашого потоку, які згідно з зауваженням, зробленим в кінці п. 1, будуть ортогональні відносно ліній рівня $u = \text{const}$. Функція $v(x, y)$ називається *функцією потоку*. З рівняння (26) випливає, що функції u і v пов'язані співвідношеннями:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{C.-R.}$$

Таким чином, потенціал швидкостей і функція потоку в області G пов'язані умовами Коші-Рімана (розд. II, § 4, п. 4) і, отже, являють собою дві спряжені гармонічні функції в цій області. Знаючи ці функції, ми можемо повністю схарактеризувати відповідний їм потік.

Щоб схарактеризувати потік рідини в однозв'язній області G, ми можемо замість пари функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ завести до розгляду одну функцію комплексного змінного z, $z = x + yi$, а саме: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Згідно умовам (C.-R.), функція $f(z)$ є аналітичною в області G (розд. II, § 4, п. 4); вона називається *характеристичною функцією потоку*. Отже, всякому невихровому і вільному від джерел в однозв'язній області G потокові рідини відповідає характеристична функція $f(z)$, що є аналітичною в області G; навпаки, завдання якої завгодно функції $f(z)$, аналітичної в однозв'язній області G, визначає в цій області невихровий і вільний від джерел потік рідини.

Запроваджуючи аналітичну функцію $f(z)$ як характеристику потоку, ми можемо застосовувати теорію аналітичних функцій до вивчення плоскої течії рідини.

Зазначимо, що швидкість потоку в якій завгодно точці $z = x + yi$ визначається за величиною і напрямом парою $p(x, y)$ і $q(x, y)$ або, що те ж саме, комплексним числом: $p + iq$. З другого боку, ми маємо:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = p - iq.$$

Таким чином, величина швидкості в точці z дорівнює:

$$|f'(z)|, \text{ бо } |f'(z)| = \sqrt{p^2 + q^2},$$

а напрям швидкості утворює з додатним напрямом осі x кут, рівний і супротивний знаком з аргументом $f'(z)$. Інакше кажучи, швидкість потоку в точці z цілком визначається комплексним числом $\overline{f'(z)}$, тобто числом, спряженим із значенням похідної $f'(z)$ в цій точці.

Отже, ми прийшли до гідродинамічного тлумачення модуля і аргументу похідної функції комплексного змінного, а саме: розглядаючи задану в однозв'язній області аналітичну функцію $f(z)$ як характеристичну функцію відповідного потоку рідини, ми можемо стверджувати, що $|f'(z)|$ дорівнює величині швидкості течії в точці z, а $\arg f(z)$ з супротивним знаком визначає напрям цієї швидкості.

§ 3. Інтеграли по комплексному змінному

1. Поняття інтеграла по комплексному змінному. Перейдемо тепер до означення поняття інтеграла в комплексній області. Нехай $w = f(z)$ є довільна неперервна функція комплексного змінного z, визначена в якійсь області G площини змінного z, і C — довільна гладка лінія, що лежить у цій області, з початком у точці z_0 і кінцем у точці Z (рис. 70). Розіб'ємо дугу z_0Z лінії C на довільне число n частинних дуг за допомогою точок $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = Z$, розміщених послідовно в додатному напрямі лінії C. Кожній частинній дузі зведемо у відповідність число $f(z_k)\cdot\Delta z_k$, одержане від множення значення даної функції в лівому кінці цієї дуги на відповідний цій дузі приріст Δz_k змінного z: $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. Складемо далі суму всіх таких добутків, поширивши її на всі частинні дуги:

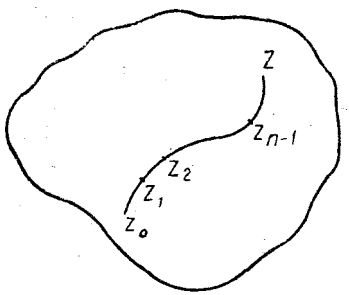

Рис. 70

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f(z_k)\cdot\Delta z_k. \tag{27}$$

Примушуючи довжини всіх частинних дуг прямувати до нуля [що рівносильно вимозі $(z_{k+1} - z_k) \to 0$], доведемо, що вираз (27) прямує до певної скінченної границі, яка не залежить від того закону, за яким всі частинні дуги прямують до нуля. Для цього, запровадивши позначення:

$$z_k = x_k + y_k i, \quad f(z_k) = u(x_k, y_k) + v(x_k, y_k)\cdot i = u_k + v_k i,$$
$$\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k,$$

напишемо вираз (27) у вигляді:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f(z_k)\,\Delta z_k = \sum_{k=0}^{k=n-1} (u_k + v_k i)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n-1} (u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=0}^{k=n-1} (v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k). \tag{28}$$

Примушуючи всі $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ прямувати до нуля, ми бачимо, що обидві суми правої частини останньої рівності (28) прямують відповідно до границь: $\int\limits_C u\,dx - v\,dy$ і $i\int\limits_C v\,dx + u\,dy$ (розд. IV, § 1, п. 1); отже, ліва частина рівності (28) прямує до певної скінченної границі, коли всі Δz_k (або довжини всіх частинних дуг) за довільним законом прямують до нуля[1]). Цю границю ми назвемо інтегралом від $f(z)dz$ вздовж лінії C і позначимо через $\int\limits_C f(z)dz$. Отже маємо:

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C u\,dx - v\,dy + i\int\limits_C v\,dx + u\,dy. \tag{29}$$

Ця формула дає вираз інтеграла по комплексному змінному через два дійсні криволінійні інтеграли. Формулу (29) легко запам'ятати, якщо записати в такому вигляді:

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C (u + vi)(dx + i\,dy). \tag{29'}$$

Щодо фактичного обчислення інтеграла по комплексному змінному, то, припускаючи рівняння лінії C у вигляді $z = z(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, маємо на підставі формули (7) (розд. IV, § 1, п. 1):

$$\int f(z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt, \tag{30}$$

або, відділюючи дійсну і уявну частини, можна (30) зобразити так:

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta R(t)\,dt + i\int\limits_\alpha^\beta I(t)\,dt, \tag{30'}$$

де $R(t)$ і $I(t)$ є відповідно дійсна частина і коефіцієнт при уявній частині виразу $f[z(t)]\cdot z'(t)$. На підставі формули (30′) питання щодо обчислення інтеграла по комплексному змінному зводиться до обчислення звичайних визначених інтегралів.

Досі ми припускали, що путь інтегрування C є гладка лінія. Якщо ми маємо довільну кусково-гладку лінію Г, що складається з гладких ліній $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то за означенням покладаємо:

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \int\limits_{C_1} f(z)\,dz + \int\limits_{C_2} f(z)\,dz + \ldots + \int\limits_{C_n} f(z)\,dz. \tag{31}$$

Очевидно, формула (30′), що виражає інтеграл по комплексному змінному за допомогою звичайних визначених інтегралів, залишається в силі і для інтеграла, взятого вздовж лінії Г.

[1]) Як це виходить із зауваження на стор. 129, для доведення досить припустити, що дуга C має довжину, а функція $f(z)$ неперервна вздовж цієї дуги. *(Ред.)*.

Зауваження. Означення інтеграла по комплексному змінному, очевидно, залишається в силі, якщо дана функція $f(z)$ неперервна лише вздовж лінії Г.

Приклад. Нехай Г — довільна кусково-гладка лінія, що сполучає дві точки z_0 і Z. Тоді інтеграл:

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1}(Z^{n+1} - z_0^{n+1}),$$

якщо n є ціле число, відмінне від -1. (При від'ємному n лінія Г не повинна проходить через точку $z=0$). Справді, нехай $z = z(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ є параметричне зображення лінії Г; тоді маємо:

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \int_{\alpha}^{\beta} z^n \cdot z'(t)\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{n+1} \frac{d}{dt}[z(t)]_0^{n+1}\, dt = \frac{1}{n+1}(Z^{n+1} - z_0^{n+1}).$$

Таким чином, значення інтеграла від функції $z^n (n \neq -1)$ не залежить від путі інтегрування. Зокрема, якщо Г є замкнутий контур, то $Z = z_0$ і

$$\int_{\Gamma} z^n dz = 0.$$

2. Основні властивості інтеграла по комплексному змінному. Відзначимо тепер ряд найпростіших властивостей інтеграла по комплексному змінному, які безпосередньо виходять з його означення:

$$1)\ \int_{\Gamma^-} f(z)\, dz = -\int_{\Gamma^+} f(z)\, dz,$$

де Γ^+ і Γ^- означають одну і ту ж путь, що її проходять відповідно в додатному і від'ємному напрямах;

$$2)\ \int_{\Gamma} af(z)\, dz = a\int_{\Gamma} f(z)\, dz \qquad (a \text{ — стале});$$

$$3)\ \int_{\Gamma} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz + \ldots + \int_{\Gamma_n} f(z)\, dz,$$

якщо путь інтегрування Г описує рухома точка, яка проходить послідовно частини $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ цієї путі;

$$4)\ \int_{\Gamma} [f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)]\, dz =$$

$$= \int_{\Gamma} f_1(z)\, dz + \int_{\Gamma} f_2(z)\, dz + \ldots + \int_{\Gamma} f_n(z)\, dz.$$

Виходячи з означення інтеграла як границі суми, можна швидко довести всі ці чотири властивості, аналогічно відповідним властивостям звичайних інтегралів.

5) Якщо вздовж лінії Г має місце нерівність: $|f(z)| \leqslant M$, де M є стале число, то, позначаючи через l довжину лінії Г, маємо:

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\, dz\right| \leqslant Ml.$$

Дійсно:

$$\left|\sum_{k=0}^{k=n-1} f(z_k)\,\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{k=n-1} \left|f(z_k)\right|\left|\Delta z_k\right| \leqslant M \sum_{k=0}^{k=n-1} \left|\Delta z_k\right| \leqslant Ml,$$

тому що $\sum_{k=0}^{k=n-1} \left|\Delta z_k\right|$ означає довжину ламаної, вписаної в Г.

Переходячи до границі, з останньої нерівності одержимо:

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant Ml.$$

6) Властивість 5) є окремий випадок нерівності:

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{\Gamma} |f(z)|\,|dz| = \int_{\Gamma} |f(z)|\,ds.$$

Це випливає з нерівності:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\,\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)|\,|\Delta z_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)|\,\Delta s_k$$

переходом до границі.

3. Інтегрування рівномірно збіжного ряду. Властивість 4) попереднього пункту показує, що інтеграл від суми скінченного числа доданків дорівнює сумі інтегралів від цих доданків. З інтегрального числення відомо, що, взагалі кажучи, не можна інтегрувати почленно нескінченний ряд функцій, навіть якщо він збігається до неперервної функції. Однак інтеграл суми рівномірно збіжного ряду неперервних функцій може бути визначений через почленне інтегрування.

Як відомо (розд. II, § 2, п. 2), сума рівномірно збіжного на лінії Г ряду неперервних функцій:

$$s(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots \tag{32}$$

є функція, неперервна на Г. З умови рівномірної збіжності ряду (32) вздовж лінії Г виходить, що при якому завгодно $\varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ існує число $N = N(\varepsilon)$ таке, що сума n перших членів ряду (32): $s_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z)$ відрізняється від суми ряду $s(z)$ за модулем менш, ніж на ε, вздовж Г, як тільки $n \geqslant N = N(\varepsilon)$ (розд. II, § 2, п. 1).

Отже, якщо покладемо

$$s(z) = s_n(z) + r_n(z), \tag{33}$$

то вздовж Г маємо:

$$|r_n(z)| < \varepsilon. \tag{34}$$

Позначаючи через l довжину лінії Г, одержуємо, в наслідок (34), на підставі властивості 5) (п. 2):

$$\left|\int_{\Gamma}[s(z)-s_n(z)]\,dz\right|=\left|\int_{\Gamma}r_n(z)\,dz\right|<\varepsilon l,$$

або

$$\left|\int_{\Gamma}s(z)\,dz-\int_{\Gamma}u_1(z)\,dz-\int_{\Gamma}u_2(z)\,dz-\ldots-\int_{\Gamma}u_n(z)\,dz\right|<\varepsilon l,$$

тобто

$$\int_{\Gamma}s(z)\,dz=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{\Gamma}u_1(z)\,dz+\int_{\Gamma}u_2(z)\,dz+\ldots+\int_{\Gamma}u_n(z)dz\right\}. \qquad (35)$$

Рівність (35) інакше може бути записана в такому вигляді:

$$\int_{\Gamma}s(z)\,dz=\int_{\Gamma}u_1(z)\,dz+\int_{\Gamma}u_2(z)\,dz+\ldots+\int_{\Gamma}u_n(z)\,dz+\ldots \qquad (36)$$

Доведене твердження може бути ще сформульовано так: *якщо вздовж путі інтегрування послідовність неперервних функцій $s_n(z)$ збігається рівномірно до функції $s(z)$, то маємо:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma}s_n(z)\,dz=\int_{\Gamma}\lim_{n\to\infty}s_n(z)\,dz=\int_{\Gamma}s(z)\,dz. \qquad (35')$$

Примітка. Це твердження може бути розширене так. Нехай рівномірно для всіх точок z, що належать путі інтегрування Г, маємо: $\lim\limits_{t\to\tau}f(z,t)=f(z)$, де $f(z,t)$ і $f(z)$ є функції, неперервні вздовж Г. Інакше кажучи, для довільного як завгодно малого $\varepsilon(\varepsilon>0)$ існує число $\delta=\delta(\varepsilon)$ таке, що $|f(z,t)-f(z)|<\varepsilon$ при умові $|t-\tau|<\delta$, де z довільна точка на Г.

Діючи аналогічно попередньому доведенню, одержимо:

$$\lim_{t\to\tau}\int_{\Gamma}f(z,t)dz=\int_{\Gamma}f(z)\,dz.$$

4. Теорема Коші. З означення інтеграла від неперервної функції $f(z)$ виходить, що його значення залежить, взагалі кажучи, не тільки від підінтегральної функції, а й від путі інтегрування Г. Інакше кажучи, сполучаючи точки z_0 і Z двома різними лініями Г і Г′, що належать однозв'язній області G, і обчислюючи $\int f(z)\,dz$ вздовж кожної з цих ліній, ми одержимо, взагалі кажучи, різні числа. Природно виникає питання: яким умовам повинна задовольняти функція $f(z)$ для того, щоб значення її інтеграла не залежало від путі інтегрування, а визначалося лише положеннями початкової і кінцевої точок цієї путі? Легко показати, діючи так само, як і у випадку дійсних криволінійних інтегралів (розд. IV, § 1, п. 4), що ця задача про умови незалежності інтеграла від путі інтегрування рівносильна задачі знайдення умов, при яких даний інтеграл, взятий по якому завгодно замкнутому контурові, дорівнює нулеві. Розв'язання цієї задачі ми можемо поставити в залежність від відпо-

відної задачі для дійсних криволінійних інтегралів (розд. IV, § 1, п. 7) в наслідок того, що інтеграл по комплексному змінному виражається через два дійсних криволінійних інтеграли (розд. IV, § 3, п. 1). Отже, припустимо, що функція $f(z)=u(x, y)+v(x,y)i$, аналітична в однозв'язній області G, має в кожній точці цієї області неперервну похідну. Звідси виходить, що функції u і v неперервні в області G разом з їх частинними похідними, які задовольняють рівняння (розд. II, § 4, п. 4):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad \text{(C.-R.)}$$

Позначаючи через Г довільний замкнутий контур, що лежить в області G, і помічаючи, що в наслідок розд. IV, формули (29):

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz=\int_{\Gamma} u\,dx-v\,dy+i\int_{\Gamma} v\,dx+u\,dy, \qquad (37)$$

ми маємо на підставі теореми п. 7 (розд. IV, § 1):

$$\int_{\Gamma} u\,dx-v\,dy=0, \qquad (38)$$

тому що

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

і

$$\int_{\Gamma} v\,dx+u\,dy=0, \qquad (38')$$

тому що

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

В наслідок рівностей (38) і (38′) формула (37) набирає вигляду:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz=0. \qquad (39)$$

Отже, ми довели, що *коли функція $f(z)$, однозначна в однозв'язній області G, має в кожній точці цієї області неперервну похідну, то інтеграл від цієї функції, взятий вздовж якого завгодно замкнутого контура, що належить області G, дорівнює нулеві.* Це твердження є основним у теорії аналітичних функцій і називається теоремою Коші. У викладеному доведенні теореми Коші істотним є припущення неперервності похідної функції $f(z)$. Однак це обмеження не є необхідним для справедливості цієї теореми, і в дальшому розділі ми викладемо друге доведення теореми Коші, припускаючи лише існування в області G скінченної похідної функції $f(z)$. Таким чином ми установимо твердження Коші для якої завгодно функції $f(z)$, аналітичної в області G.

Вправи до розділу IV

1. Обчислити $\int\limits_{0}^{2+i} R(z)\,dz$, якщо путею інтегрування служить прямолінійний відрізок $z=(2+i)t$, $0\leqslant t\leqslant 1$; обчислити той же інтеграл, прийнявши за путь інтегрування ламану, перша ланка якої є прямолінійний відрізок (0,2), а друга ланка — відрізок $(2,\ 2+i)$.

Відп. $2+i$; $2(1+i)$.

2. Обчислити інтеграли $\int\limits_{z_0}^{z} dz$, $\int\limits_{z_0}^{z} z\,dz$ для довільної путі інтегрування процесом підсумовування.

Відп. $z-z_0$; $\frac{z^2-z_0^2}{2}$.

3. Обчислити $\int (z-z_0)^m\,dz$, якщо путею інтегрування служить коло з центром у точці z_0 радіуса R або еліпс з центром у точці z_0 і осями, паралельними осям координат (m — ціле).

Відп. 0, якщо $m\geqslant 0$ або $m<-1$; $2\pi i$ при $m=-1$.

4. Обчислити $\int\limits_{-1}^{+1} |z|\,dz$, коли путями інтегрування служать: a) прямолінійний відрізок, b) верхня половина кола радіуса одиниця, c) нижня половина цього кола.

Відп. a) 1; b) 2; c) 2.

5. Обчислити $\int (z-z_0)^m\,dz$ (m — ціле), якщо путею інтегрування служить периметр квадрата з центром у точці z_0 і сторонами, паралельними осям координат.

Відп. 0, якщо $m\neq -1$; $2\pi i$ при $m=-1$.

6. Функція $f(z)$ неперервна при $|z-z_0|>r_0$. Позначимо через $M(r)$ максимум $|f(z)|$ на колі $|z-z_0|=r>r_0$ і припустимо, що $rM(r)\to 0$.

Довести, що $\int\limits_{k_r} f(z)dz\to 0$ при $r\to\infty$, якщо k_r, є коло $|z-z_0|=r$.

7. Функція $f(z)$ неперервна при $0<|z-z_0|<R$. Позначимо через $M(r)$ максимум $|f(z)|$ на колі $|z-z_0|=r<R$ і припустимо, що $rM(r)\to 0$. Довести, що $\int\limits_{k_r} f(z)dz\to 0$, коли $r\to 0$, якщо k_r є коло $|z-z_0|=r<R$.

8. Позначимо через L радіус одиничного круга. Для яких амплітуд цього радіуса буде збіжним інтеграл

$$\int\limits_{L} e^{-\frac{1}{z}}\,dz?$$

Відп. Абсолютно збігається, якщо $-\frac{\pi}{2}<\arg z<+\frac{\pi}{2}$, розбігається при $\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}$; збігається, якщо $\arg z=\pm\frac{\pi}{2}$.

9. Плоский потік визначається характеристичною функцією $w=f(z)$. Знайти траєкторії потоку і визначити напрям течії в таких випадках:

$$\text{a) } w=z;\ \text{b) } w=\frac{1}{z};\ \text{c) } w=z+\frac{1}{z}.$$

Відп. a) $y=\text{const}$, зліва направо; b) $x^2+\left(y+\frac{1}{2c}\right)^2=\frac{1}{4c^2}$, течія вліво; c) $y(x^2+y^2)-y=c(x^2+y^2)$, течія направо.

10. Визначити швидкість потоку у випадках попередньої задачі 9.

Відп. a) $p = 1$; $q = 0$; b) $p = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$; $q = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$;

$$\text{c) } p = 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad q = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

11. Характеристична функція потоку $w = \ln z$.

Визначити траєкторії потоку, їх напрям і швидкість руху рідини. Чим для потоку є точка $z = 0$?

Відп. Вважаючи $z = re^{i\theta}$, рівняння траєкторій буде: $\theta = \text{const}$; рух направлений від точки $z = 0$, яка є джерелом. Швидкість за величиною дорівнює $\frac{1}{r}$ і направлена від точки $z = 0$. Точка $z = 0$ є джерело потоку.

12. Чому дорівнює кількість рідини, що витікає за одиницю часу через замкнутий контур, що оточує точку $z = 0$, в попередній задачі?

Відп. $2\pi\rho$, де ρ є густість рідини.

13. Характеристична функція потоку $w = \frac{1}{2\pi i} \ln z$.

Знайти траєкторії потоку, їх напрям і швидкість руху рідини. Чим є точка $z = 0$?

Відп. Вважаючи $z = re^{i\theta}$, рівняння траєкторій буде: $r = \text{const}$. Рух направлений проти годинникової стрілки. Величина швидкості дорівнює $\frac{1}{2\pi r}$. Точка $z = 0$ є вихор.

14. Чому дорівнює циркуляція потоку вздовж замкнутого контура, що оточує точку $z = 0$, в попередній задачі?

Відп. 1.

Розділ V

Теорема Коші. Інтеграл Коші

§ 1. Теорема Коші

1. Основна лема. Нехай $f(z)$ є неперервна функція, визначена в якійсь області G площини комплексного змінного z, і Γ — довільна кусково-гладка лінія, що лежить в цій області. Для кожного як завгодно малого ε ($\varepsilon > 0$) існує ламана лінія P, що вписана в Γ і цілком лежить в області G, така, що

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)\,dz - \int_{P} f(z)\,dz \right| < \varepsilon, \qquad (1)$$

тобто значення інтеграла $\int_{\Gamma} f(z)\,dz$ можна апроксимювати з яким завгодно степенем точності через значення того ж інтеграла, взятого вздовж ламаної лінії P, що вписана в Γ і лежить в області G.

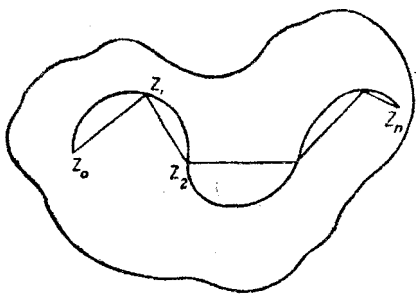

Рис. 71

Для доведення розглянемо замкнуту область $\bar{D}$, частину області G, що містить всередині лінію Γ. Тому що за умовою функція $f(z)$ неперервна в кожній точці області $\bar{D}$, то вона рівномірно неперервна в цій області (розд. II, § 1, п. 4). Отже, для кожного як завгодно малого ε ($\varepsilon > 0$) існує число $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon, \qquad (2)$$

якщо $|z' - z''| < \delta$, при чому z' і z'' є які завгодно дві точки області $\bar{D}$.

Розіб'ємо лінію Γ на n дуг $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$, довжина кожної з яких була б менша δ, і впишемо в лінію Γ ламану лінію P, ланки якої $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}$ стягають ці дуги. Позначимо вершини ламаної лінії P через $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ (рис. 71). Тому що довжина кожної дуги s_k менша δ, то віддаль між якими завгодно двома точками однієї й тієї ж дуги і тим більш менша δ. Те ж саме буде для наших ланок l_k. Порівняємо тепер значення $\int_{\Gamma} f(z)\,dz$ із значенням того самого інтеграла вздовж ламаної

лінії P. Для цього розглянемо суму, що є наближеним значенням $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$:

$$S = f(z_0)\cdot\Delta z_0 + f(z_1)\cdot\Delta z_1 + \ldots + f(z_{n-1})\cdot\Delta z_{n-1}. \qquad (3)$$

Помітивши, що $\Delta z_k = \int\limits_{s_k} dz$, зобразимо вираз (3) у вигляді:

$$S = \int\limits_{s_0} f(z_0)\,dz + \int\limits_{s_1} f(z_1)\,dz + \ldots + \int\limits_{s_{n-1}} f(z_{n-1})\,dz. \qquad (3')$$

З другого боку, інтеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ можна зобразити як суму інтегралів, взятих по дугах s_k:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{s_0} f(z)\,dz + \int\limits_{s_1} f(z)\,dz + \ldots + \int\limits_{s_{n-1}} f(z)\,dz. \qquad (4)$$

Проводячи почленне віднімання рівностей (4) і (3′), одержимо:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz - S = \int\limits_{s_0} (f(z) - f(z_0))\,dz + \int\limits_{s_1} (f(z) - f(z_1))\,dz + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{s_{n-1}} (f(z) - f(z_{n-1}))\,dz.$$

Помічаючи, що на кожній дузі s_k маємо $|f(z) - f(z_k)| < \varepsilon$, одержуємо:

$$\left|\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz - S\right| < \varepsilon s_0 + \varepsilon s_1 + \ldots + \varepsilon s_{n-1} = \varepsilon l, \qquad (5)$$

де l є довжина всієї лінії Г.

Діючи аналогічно, оцінимо модуль різниці $\int\limits_{P} f(z)\,dz - S$. Помітивши, що $\Delta z_k = \int\limits_{l_k} dz$, зобразимо вираз (3) у вигляді:

$$S = \int\limits_{l_0} f(z_0)\,dz + \int\limits_{l_1} f(z_1)\,dz + \ldots + \int\limits_{l_{n-1}} f(z_{n-1})\,dz. \qquad (3'')$$

З другого боку, інтеграл $\int\limits_{P} f(z)\,dz$ можна зобразити як суму інтегралів, взятих по ланках l_k:

$$\int\limits_{P} f(z)\,dz = \int\limits_{l_0} f(z)\,dz + \int\limits_{l_1} f(z)\,dz + \ldots + \int\limits_{l_{n-1}} f(z)\,dz. \qquad (4')$$

Віднімаючи почленно з рівності (4′) рівність (3″), одержимо:

$$\int_P f(z)\,dz - S = \int_{l_0} (f(z) - f(z_0))\,dz +$$

$$+ \int_{l_1} (f(z) - f(z_1))\,dz + \ldots + \int_{l_{n-1}} (f(z) - f(z_{n-1}))\,dz.$$

Тому що в кожній ланці l_k маємо: $|f(z) - f(z_k)| < \varepsilon$, то знаходимо:

$$\left|\int_P f(z)\,dz - S\right| < \varepsilon l_0 + \varepsilon l_1 + \ldots + \varepsilon l_{n-1} = \varepsilon (l_0 + l_1 + \ldots + l_{n-1}) < \varepsilon l. \quad (6)$$

З нерівностей (5) і (6) одержуємо:

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz - \int_P f(z)\,dz\right| \leqslant \left|\int_\Gamma f(z)\,dz - S\right| + \left|S -\right.$$

$$\left. - \int_P f(z)\,dz\right| < \varepsilon l + \varepsilon l = 2\varepsilon l.$$

Отже, завжди можливо вписати в лінію Г ламану лінію P так, що різниця значень $\int f(z)dz$ вздовж Г і вздовж P буде за модулем менша від довільно малого додатного числа.

2. Зведення доведення теореми Коші до найпростішого випадку. Теорема Коші може бути сформульована так: *якщо $f(z)$ є функція, аналітична в деякій однозв'язній області G, то $\int f(z)\,dz$, взятий вздовж якого завгодно замкнутого контура Г, що лежить в G, дорівнює нулеві.*

Якщо ми припустимо, що твердження Коші доведене у випадку довільної замкнутої ламаної лінії P, що належить області G, то ця теорема буде вірна для якої завгодно замкнутої кусково-гладкої лінії Г. Дійсно, припускаючи ε ($\varepsilon > 0$) як завгодно малим числом, впишемо в замкнутий контур Г на підставі леми п. 1 замкнуту ламану лінію P так, щоб мати:

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz - \int_P f(z)\,dz\right| < \varepsilon.$$

Тому що за припущенням маємо: $\int_P f(z)\,dz = 0$, то з останньої нерівності виходить:

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| < \varepsilon, \text{ тобто } \int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Отже, перше спрощення доведення теореми Коші полягає в тому, що ми зводимо його на випадок, коли контуром інтегрування є замкнута ламана лінія.

Покажемо тепер, що доведення цього випадку зводиться до випадку, коли лінією інтегрування служить периметр трикутника. Справді, розбиваючи даний многокутник з периметром P діагоналями на трикутники (рис. 72), зобразимо $\int\limits_P f(z)\,dz$ як суму інтегралів, взятих по периметрах трикутників, на які розбито даний многокутник:

$$\int\limits_P f(z)\,dz = \int\limits_{ABCA} + \int\limits_{ACDA} + \int\limits_{ADEA}, \tag{7}$$

тому що інтегрування по кожній діагоналі виконується два рази в супротивних напрямах, а тому знищується. Таким чином, якщо ми припустимо, що твердження Коші доведене для того випадку, коли контуром інтегрування служить периметр довільного трикутника області G, то воно, в наслідок рівності (7), буде тим самим доведене для замкнутої ламаної лінії P, а значить і для лінії Г.

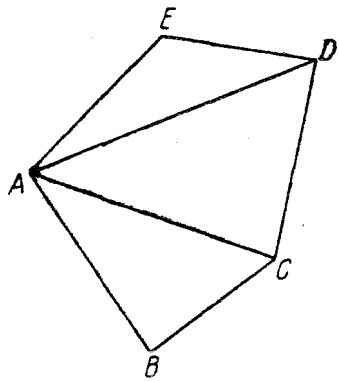

Рис. 72

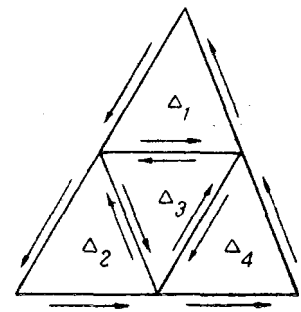

Рис. 73

3. Доведення теореми Коші. На підставі попереднього пункту доведення теореми Коші зводиться до доведення такого твердження: якщо $f(z)$ є функція, аналітична в однозв'язній області G, то інтеграл $\int\limits_\Delta f(z)\,dz$, взятий вздовж периметра $\triangle$ довільного трикутника, що належить області G, дорівнює нулеві.

Покладемо $\left|\int\limits_\Delta f(z)\,dz\right| = M$ і доведемо, що $M = 0$.

Поділивши сторони даного трикутника пополам, сполучивши попарно одержані точки ділення, ми розіб'ємо даний трикутник на чотири конгруентні трикутники з периметрами $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ (рис. 73). Очевидно, маємо:

$$\int\limits_\Delta f(z)\,dz = \int\limits_{\Delta_1} + \int\limits_{\Delta_2} + \int\limits_{\Delta_3} + \int\limits_{\Delta_4}, \tag{8}$$

тому що інтегрування по кожному відрізкові, що сполучає точки ділення, виконується два рази в супротивних напрямах і тому знищується. Тому що $\left|\int\limits_{\triangle}\right| = M$, то з рівності (8) виходить, що знайдеться хоч один периметр $\triangle_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$), модуль інтеграла по якому буде не менший, ніж $\frac{M}{4}$. Нехай, наприклад, це буде периметр $\triangle_1$:

$$\left|\int\limits_{\triangle_1} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{M}{4}. \tag{9}$$

З цим трикутником периметра $\triangle_1$ зробимо так само, як з початковим, розбивши його на чотири конгруентні трикутники. Отже, знов знайдеться такий трикутник з периметром $\triangle^{(2)}$, що належить до трикутника з периметром $\triangle_1$, що маємо:

$$\left|\int\limits_{\triangle^{(2)}} f(z)dz\right| \geqslant \frac{M}{4^2}. \tag{10}$$

Очевидно, цей процес можна продовжувати до нескінченності. Таким чином, ми одержимо послідовність трикутників з периметрами: $\triangle = \triangle^{(0)}$, $\triangle_1 = \triangle^{(1)}$, $\triangle^{(2)}, \ldots, \triangle^{(n)}, \ldots$, з яких кожний містить в собі наступний, і таких, що мають місце нерівності:

$$\left|\int\limits_{\triangle^{(n)}} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{M}{4^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Позначаючи довжину периметра $\triangle$ через U і помічаючи, що довжини периметрів $\triangle^{(1)}, \triangle^{(2)}, \ldots, \triangle^{(n)}, \ldots$ є відповідно $\frac{U}{2}$, $\frac{U}{2^2}, \ldots, \frac{U}{2^n}, \ldots$, ми оцінимо величину модуля $\int\limits_{\triangle^{(n)}} f(z)\,dz$. Тому що ми маємо послідовність трикутників, з яких кожний містить в собі всі наступні і довжини периметрів яких прямують до нуля при необмеженому зростанні n, то в наслідок основного принципу теорії границь (розд. I, § 3, п. 1) існує точка z_0, що належить всім трикутникам зазначеної послідовності. Ця точка лежить в області G, де функція $f(z)$ є аналітична, тобто в точці z_0 функція $f(z)$ має скінченну похідну. Таким чином при довільному як завгодно малому ε ($\varepsilon > 0$) існує число $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що має місце нерівність:

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon, \tag{12}$$

якщо

$$|z - z_0| < \delta. \tag{13}$$

Нерівність (12), будучи помножена на $|z - z_0|$, запишеться у вигляді

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \varepsilon\,|z - z_0|. \tag{12'}$$

Нерівність (12′) виконується при умові (13), тобто для якої завгодно точки z, що лежить всередині круга з центром у точці z_0 радіуса δ. Починаючи з достатньо великого n, периметр $\triangle^{(n)}$ лежить всередині цього круга, і, значить, ми можемо скористуватися при оцінці інтеграла $\int\limits_{\triangle^{(n)}} f(z)\,dz$ нерівністю (12′).

Зазначимо, що

$$\int\limits_{\triangle^{(n)}} f(z)\,dz = \int\limits_{\triangle^{(n)}} [f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)]\,dz, \tag{14}$$

тому що $\int\limits_{\triangle^{(n)}} dz = 0$ і $\int\limits_{\triangle^{(n)}} z\,dz = 0$ (розд. IV, § 3, п. 1). З рівності (14) одержуємо в наслідок нерівності (12′):

$$\left|\int\limits_{\triangle^{(n)}} f(z)\,dz\right| < \int\limits_{\triangle^{(n)}} \varepsilon\,|z - z_0|\,|dz|. \tag{15}$$

Тому що $|z - z_0|$ є віддаль якої завгодно точки z периметра $\triangle^{(n)}$ трикутника від точки z_0, що лежить на цьому трикутнику, то маємо:

$$|z - z_0| < \frac{U}{2^n}.$$

Отже, з нерівності (15) одержимо:

$$\left|\int\limits_{\triangle^{(n)}} f(z)\,dz\right| < \varepsilon\,\frac{U}{2^n}\cdot\frac{U}{2^n} = \varepsilon\,\frac{U^2}{4^n}. \tag{16}$$

Порівнюючи нерівності (11) і (16), знаходимо:

$$\frac{M}{4^n} < \varepsilon\,\frac{U^2}{4^n}, \text{ або } M < \varepsilon U^2,$$

звідки виходить: $M = 0$, тому що ε — число як завгодно мале.

З а у в а ж е н н я. При доведенні теореми Коші ми скористувалися тим, що інтеграли $\int dz$ і $\int z\,dz$, взяті вздовж якого завгодно замкнутого контура, дорівнюють нулеві. Цей факт можна виявити безпосередньо, виходячи з означення інтеграла. Справді, за означенням маємо:

$$\int dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} \Delta z_k = 0,$$

тому що $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta z_k = 0$, якщо $z_n = z_0$.

$$\int z\,dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} z_k \Delta z_k = \lim \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} \Delta z_k,$$

звідки виходить:

$$2\int z\,dz = \lim\sum_{k=0}^{n-1}(z_k + z_{k+1})\,\Delta z_k = \lim\sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}^2 - z_k^2) = 0,$$

тому що $\sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}^2 - z_k^2) = 0$, якщо $z_n = z_0$.

4. Поняття невизначеного інтеграла в комплексній області. З доведеної теореми Коші, як було показано в розд. IV, § 3, п. 4, випливає таке твердження:

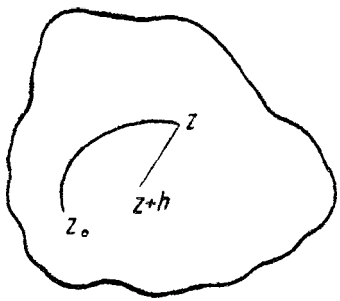

Рис. 74

Якщо функція $f(z)$ є аналітична в однозв'язній області G, то значення інтеграла $\int_\Gamma f(z)\,dz$, взятого вздовж довільної кусково-гладкої лінії Γ, що належить області G, не залежить від лінії Γ, а визначається лише положеннями початкової і кінцевої точок цієї лінії. Іншими словами, значення інтеграла через $\int_\Gamma f(z)\,dz$ не зміниться, якщо ми будемо довільно деформувати лінію Γ, не виходячи за межі області G, залишаючи її початок і кінець нерухомими.

Розглянемо вираз:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta, \tag{17}$$

де за путь інтегрування можна взяти довільну кусково-гладку лінію Γ, що сполучає точки z_0 і z і лежить в даній однозв'язній області G. В наслідок зазначеного вище твердження значення функції $F(z)$ не залежатиме від путі інтегрування і, значить, $F(z)$ є однозначна функція, визначена в області G. Покажемо, що в кожній точці z області G функція $F(z)$ має похідну, рівну $f(z)$. Дійсно, позначаючи через $z+h$ яку завгодно точку області G, що лежить в довільно малому околі точки z, розглянемо різницю:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z}^{z+h} f(\zeta)\,dz, \tag{18}$$

при чому за путь інтегрування в останньому інтегралі можна взяти прямолінійний відрізок, що сполучає точки z і $z+h$ (рис. 74).

Поділивши рівність (18) на h, знаходимо:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{18'}$$

Помітивши, що маємо:

$$f(z)=f(z)\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}d\zeta=\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}f(z)\,d\zeta, \tag{19}$$

віднімемо з рівності (18′) рівність (19); тоді ми одержимо таке:

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}(f(\zeta)-f(z))\,d\zeta. \tag{20}$$

В наслідок неперервності функції $f(z)$ в точці z, для кожного як завгодно малого ε ($\varepsilon>0$) існує число $\delta=\delta(\varepsilon)$ таке, що маємо: $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$, якщо $|\zeta-z|<\delta$. Отже, якщо взяти $|h|<\delta$, то модуль підінтегральної функції в інтегралі (20) буде менше ε. Таким чином з рівності (20) знаходимо:

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\varepsilon\cdot\frac{|h|}{|h|}=\varepsilon,$$

при $|h|<\delta$, тобто

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z),$$

або

$$F'(z)=f(z). \tag{21}$$

Отже, інтеграл від функції $f(z)$, аналітичної в однозв'язній області G, розгляданий як функція своєї верхньої границі, є функція, аналітична в тій же області, похідна якої дорівнює підінтегральній функції.

Зауваження. Цей доказ оснований лише на двох властивостях функції $f(z)$:

1) $f(z)$ є неперервна функція в області G.

2) $\int f(z)\,dz$, взятий вздовж якого завгодно замкнутого контура, що лежить в G, дорівнює нулеві,

При цих умовах $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\,d\zeta$ є функція, аналітична в області G, при чому $F'(z)=f(z)$. Цим зауваженням ми далі скористуємося,

Назвемо *невизначеним інтегралом* або *примітивною функцією* від $f(z)$ всяку функцію $\Phi(z)$, що задовольняє всюди в області G умову:

$$\Phi'(z)=f(z). \tag{22}$$

Відповідно до викладеного $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\,d\zeta$ є примітивною

функцією для функції $f(z)$. Покажемо, що яка завгодно примітивна функція $\Phi(z)$ матиме вигляд:

$$\Phi(z) = F(z) + C = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta + C, \tag{23}$$

де C є довільне стале.

Дійсно, з рівностей (22) і (21), способом їх віднімання, одержуємо:

$$(\Phi(z) - F(z))' = \psi'(z) = 0, \tag{24}$$

де через $\psi(z)$ позначена різниця $\Phi(z) - F(z)$.

Вважаючи $\psi(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ і помічаючи, що $\psi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} i$ (розд. II, § 4, п. 4), одержуємо в наслідок рівності (24):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

в області G. Отже, функції u і v є сталі в області G, а тому маємо:

$$\psi(z) = u + vi = C \quad \text{або} \quad \Phi(z) - F(z) = C,$$

звідки

$$\Phi(z) = F(z) + C. \tag{23}$$

Таким чином, розуміючи під $\Phi(z)$ одну з примітивних функцій для функції $f(z)$, перепишемо рівність (23) у вигляді:

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta + C = \Phi(z). \tag{23}$$

Вважаючи тут $z = z_0$, одержимо: $C = \Phi(z_0)$. Замінюючи в рівності (23) стале C знайденим значенням, одержимо:

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0). \tag{25}$$

Формула (25) виражає визначений інтеграл через невизначений. Отже, обмежуючись функціями, аналітичними в однозв'язній області G, ми бачимо, що подібно звичайним інтегралам інтегрування по комплексному змінному можна розглядати з двох поглядів: 1) як процес підсумовування, 2) як дію, обернену диференціюванню.

5. Поширення теореми Коші на випадок складних контурів. Нехай Γ є довільна замкнута кусково-гладка лінія і $f(z)$ — функція, аналітична всередині Γ, а також у кожній точці лінії Γ. В цьому випадку маємо:

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 0. \tag{26}$$

Дійсно, біля кожної точки, що лежить всередині Г або на Г, можна описати як навколо центра круг, всередині якого дана функція $f(z)$ є аналітична. В наслідок леми Гейне-Бореля (розд. II, § 1, п. 4) існує скінченне число таких кругів, що містять всередині себе всі точки замкнутої області з границею Г. Сукупність точок, що лежать всередині цих кругів, являє собою однозв'язну область G, що містить в собі лінію Г. В області G функція $f(z)$ є аналітична, а тому в наслідок теореми Коші маємо:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0. \qquad (26)$$

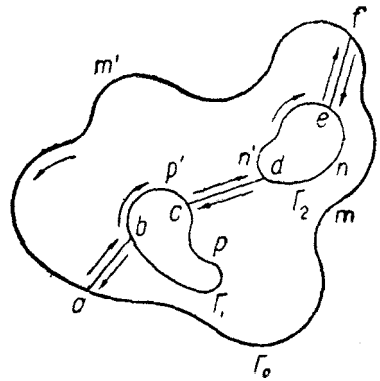

Рис. 75

Розглянемо тепер $n+1$ замкнутих кусково-гладких ліній $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ таких, що кожна з ліній $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ лежить поза останніми і всі вони розміщені всередині Γ_0. Множина точок площини, що лежать одночасно всередині Γ_0 і поза лініями $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, буде являти собою $n+1$-зв'язну область G, границя якої складається з ліній $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$. В цьому випадку ми скажемо, що границя області G являє собою складний контур $\Gamma = \Gamma_0^+ + \Gamma_1^- + \ldots + \Gamma_n^-$, що складається з лінії Γ_0, яка проходиться в додатному напрямі, і решти ліній $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, що проходяться у від'ємному напрямі. Інакше кажучи, якщо точка рухається по складному контурові Г, то точки області G лишаються з лівого боку (рис. 75). Припускаючи функцію $f(z)$ аналітичною в замкнутій області G, ми маємо:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0, \qquad (27)$$

де покладено:

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma_0^+} + \int_{\Gamma_1^-} + \ldots + \int_{\Gamma_n^-}$$

В цьому полягає узагальнення теореми Коші на випадок складного контура.

Для доведення сполучимо лінії $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ в циклічному порядку з допомогою допоміжних ліній (на рис. 75: ab, cd, ef) і розглянемо дві замкнуті лінії: $\gamma = amfendcpba$ і $\gamma' = abp'cdn'efm'a$. Тому що функція $f(z)$ за умовою буде аналітичною як всередині, так і на кожній з цих ліній γ і γ', то за доведеним маємо:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0, \quad \int_{\gamma'} f(z)\,dz = 0.$$

Додаючи одну до одної останні дві рівності, остаточно одержимо:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0,$$

тому що інтегрування по допоміжних лініях (ab, cd, ef) виконується два рази в супротивних напрямах, а тому знищується.

Доведену рівність (27) можна записати у вигляді:

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\Gamma_n} f(z)\,dz, \qquad (27')$$

де інтегрування виконується в додатному напрямі ліній Γ_0, Γ_1, ..., Γ_n. Справді, відзначимо, що в наслідок рівності (27) маємо:

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_1^-} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\Gamma_n^-} f(z)\,dz = 0, \qquad (27'')$$

перенесемо всі члени рівності (27″), крім першого члена, в праву частину і змінимо в цих членах напрям інтегрування, тоді одержимо формулу (27′).

Зокрема, якщо замкнута лінія Γ_0 містить всередині себе замкнуту лінію Γ_1 і функція $f(z)$ буде аналітичною як між цими лініями Γ_0 і Γ_1, так і на самих лініях, то значення інтеграла $\int f(z)\,dz$ вздовж якої завгодно з цих ліній буде тим же самим числом.

6. Логарифмічна функція. Якщо нульова точка лежить поза замкнутим контуром, то $\int \frac{dz}{z}$, взятий вздовж цього контура, дорівнює нулеві, тому що функція $\frac{1}{z}$ є аналітична всюди в площині комплексного змінного z, крім $z=0$. Якщо ж нульова точка лежить всередині замкнутого контура, то, на підставі попереднього (п. 5), $\int \frac{dz}{z}$, взятий вздовж цього контура, має визначене, стале значення, що не залежить від форми контура. Щоб обчислити це значення, досить прийняти за контур інтегрування коло C з центром у нульовій точці довільного радіуса R. В цьому випадку маємо:

$$z = Re^{i\varphi}, \quad dz = Rie^{i\varphi}d\varphi \quad \text{і} \quad \frac{dz}{z} = i\,d\varphi.$$

Отже, одержуємо:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i. \qquad (28)$$

Одержане число $2\pi i$ зображає значення інтеграла $\int \frac{dz}{z}$ вздовж якого завгодно замкнутого контура, що оточує нульову точку.

Розглянемо тепер функцію:

$$w = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{29}$$

де інтегрування може виконуватися по якій завгодно лінії, що сполучає точку 1 з точкою z (рис. 76)[1]. Якщо z є дійсне додатне число x і путею інтегрування служить відрізок $(1, x)$ дійсної осі, то $w = \ln x$. Природно, вважаючи z довільним комплексним числом, взяти $w = \ln z$. Таким чином ми означаємо логарифмічну функцію в площині комплексного змінного z.

Вивчимо її властивості. Насамперед зауважимо, що $\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ буде многозначною функцією, що має в кожній точці z нескінченну множину різних значень відповідно різним путям інтегрування, що сполучають точки 1 і z. Так, позначаючи через $(\ln z)_0$ значення інтеграла $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, взятого вздовж путі, яка не оточує нульової точки (рис. 76), ми бачимо, що значення того ж інтеграла, взятого вздовж путі, яка оточує один раз в додатному напрямі нульову точку, буде $(\ln z)_0 + 2\pi i$, тому що маємо (рис. 77):

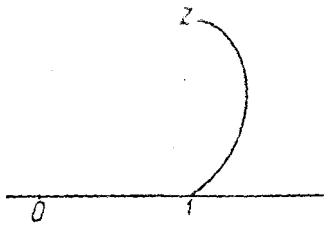

Рис. 76

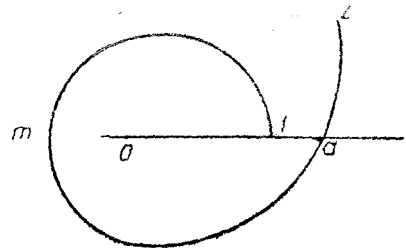

Рис. 77

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{1ma1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{1az} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i + (\ln z)_0.$$

Якщо путь інтегрування робить n оборотів в додатному або від'ємному напрямі навколо нульової точки, то, очевидно, до значення $(\ln z)_0$ додається (або віднімається) число $2\pi i n$. Таким чином при всякому $z \neq 0$ маємо:

$$w = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z = (\ln z)_0 + 2\pi i k, \tag{29}$$

[1]) За винятком ліній, що проходять через початок. (*Ред.*)

де k означає яке завгодно ціле число, тобто всі значення $\ln z$ відрізняються одно від одного на кратне $2\pi i$.

Якщо z — число дійсне додатне, то одно з цих значень буде дійсним $(\ln z)_0$, всі інші — уявними. Це дійсне значення $\ln z$ і розглядається в елементарній алгебрі і дійсному аналізі. Якщо ж z — число від'ємне або уявне, то всі значення $\ln z$ будуть уявними.

Таким чином функція $w = \ln z$, визначена в усій площині комплексного змінного z, крім $z = 0$, є нескінченнозначна. Щоб мати змогу розглядати цю функцію як однозначну очевидно треба вибрати таку область площини, в якій не можна провести замкнутої лінії, що оточує нульову точку. Так, якщо ми розріжемо площину вздовж від'ємної дійсної осі, то який завгодно замкнутий контур, що лежить в цій „розрізаній площині", залишатиме поза собою нульову точку. В цій „розрізаній площині" $w = \ln z$ можна розглядати як однозначну функцію комплексного змінного z.

Доведемо тепер, що функція $w = \ln z$ є оберненою відносно показникової функції:

$$e^w = z. \tag{30}$$

Тому що показникова функція e^w у всій площині змінного w відмінна від нуля (розд. II, § 3, п. 8), то значення $z = 0$, ми залишаємо без розгляду. Нехай z дане число, відмінне від нуля; $z = \rho e^{\varphi i} (-\pi < \varphi \leqslant +\pi)$. З рівняння (30) ми одержуємо, беручи $w = u + vi$: $e^u \cdot e^{vi} = \rho e^{\varphi i}$, і, значить, повинні мати:

$$e^u = \rho, \quad v = \varphi + 2\pi k, \tag{31}$$

де k — яке завгодно ціле число.

Коли u, зростаючи, пробігає всі дійсні значення, то $\rho = e^u$ зростає, приймаючи різні можливі додатні значення. Таким чином рівняння $e^u = \rho$ має єдине дійсне розв'язання: $u = \ln \rho$.

Отже, якщо $z = \rho e^{\varphi i} (-\pi < \varphi \leqslant \pi)$, то загальний розв'язок (30) буде: $w = \ln \rho + \varphi i + 2\pi i k$, де k — яке завгодно ціле число. Якщо z змінюється в „розрізаній площині" ($k = 0$), то, очевидно, функція w буде однозначна. Отже, існує функція $w = \ln \rho + \varphi i$, однозначна в „розрізаній площині", що задовольняє рівняння (30). Диференціюючи тотожність $e^w = z$ відносно z, одержимо $e^w \frac{dw}{dz} = 1$, звідки $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$

Таким чином в „розрізаній площині" w повинна бути примітивною функцією для функції $\frac{1}{z}$, що обертається в нуль при $z = 1$. Звідси на підставі п. 4 можна написати: $w = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, де інтегрування виконується по якій завгодно путі, що сполучає точку 1 і z, що лежить в „розрізаній площині".

Якщо ми примусимо змінне z змінятися в усій площині, то, очевидно, загальне розв'язання w рівняння (30) буде збігатися

з функцією $\ln z = \int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, де інтегрування виконується по якій завгодно путі між точками 1 і z. Отже, ми довели, що логарифмічна функція, визначена нами за допомогою інтеграла, збігається з оберненням показникової функції.

Під кінець відзначимо, що обчислення інтеграла $\int\limits_\Gamma \frac{dz}{z-z_0}$, взятого вздовж замкнутого контура Γ, що містить всередині себе точку z_0, зводиться за допомогою підставлення $z = z_0 + \zeta$ до обчислення $\int\limits_{\Gamma'} \frac{d\zeta}{\zeta}$, де замкнутий контур Γ' містить всередині себе нульову точку. Отже, значення $\int\limits_\Gamma \frac{dz}{z-z_0}$ дорівнює $2\pi i$. Очевидно, цей інтеграл дорівнює нулеві, якщо точка z_0 лежить поза замкнутим контуром інтегрування, тому що підінтегральна функція $\frac{1}{z-z_0}$ є аналітичною всюди в площині комплексного змінного z, крім точки $z = z_0$.

7. **Лема.** Щоб надати теоремі Коші загальнішої форми, ми доведемо в цьому пункті допоміжне твердження щодо неперервної функції з обмеженою зміною [1]).

Нехай $f(x)$ є неперервна функція з обмеженою зміною в інтервалі $a \leqslant x \leqslant b$, а T — її повна варіація. Позначимо через $k(y)$ число, яке показує, як часто значення y приймає функція $f(x)$ в інтервалі $a \leqslant x \leqslant b$, тобто $k(y)$ є число коренів рівняння $f(x) = y$, розміщених в інтервалі $a \leqslant x \leqslant b$. Очевидно, $k(y)$ може дорівнювати нескінченності. *Тоді має місце така формула:*

$$T = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(y)\, dy,$$

де інтеграл беруть в розумінні Лебега.

При доведенні, не зменшуючи загальності, можемо вважати $a = 0$, $b = 1$. Поділимо інтервал $0 \leqslant x \leqslant 1$ на 2^n рівних інтервалів:

$$\frac{r-1}{2^n} \leqslant x < \frac{r}{2^n} \quad (r = 1, 2, \ldots, 2^n),$$

і позначимо через $k_n(y)$ число, яке показує, у скількох з цих інтервалів функція $f(x)$ приймає значення y.

Очевидно,

$$k_{n+1}(y) \geqslant k_n(y),$$

тобто при роздрібненні розбивання число інтервалів, в яких функція приймає дане значення y, не може спадати. Покажемо, що

$$\lim_{n \to \infty} k_n(y) = k(y).$$

Справді, якщо $k(y)$ дорівнює нулеві або одиниці, то $k_n(y) = k(y)$ для кожного n. У випадку $1 < k(y) < \infty$ нехай $x_1, x_2, \ldots, x_{k(y)}$ — розв'язки рівняння $f(x) = y$, розміщені в інтервалі $0 \leqslant x < 1$, і δ — найменше з чисел $x_r - x_{r-1}$ $[r = 2, 3, \ldots, k(y)]$. Тоді, очевидно, $k_n(y) = k(y)$ для кожного n, для якого

[1]) Щодо функцій з обмеженою зміною див., наприклад, Александров і Колмогоров, „Введение в теорию функций действительного переменного".

$\frac{1}{2^n} < \delta$ і, значить, при всіх достатньо великих n. Нарешті, у випадку $k(y) = \infty$ позначимо через m довільне ціле число > 1. Тоді існують числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$: $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_m < 1$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_m) = y$. Нехай δ — найменше з чисел $x_r - x_{r-1}$ $(r = 2, 3, \ldots, m)$. Очевидно, що $k_m(y) \geqslant m$ для кожного m, для якого $\frac{1}{2^m} < \delta$, і, значить, починаючи з достатньо великого m, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} k_n(y) = \infty$. Отже, доведено, що завжди

$$\lim_{n \to \infty} k_n(y) = k(y).$$

Позначимо тепер через $k_{n,r}(y)$ функцію, рівну одиниці, якщо $f(x)$ приймає значення y в інтервалі $\frac{r-1}{2^n} \leqslant x < \frac{r}{2^n}$, і рівну нулеві — в супротивному випадку. Очевидно, можемо написати:

$$k_n(y) = \sum_{r=1}^{2^n} k_{n,r}(y). \tag{1}$$

Позначимо через $M_{n,r}$ і $m_{n,r}$ верхню і нижню границі функції $f(x)$ в інтервалі $\frac{r-1}{2^n} \leqslant x < \frac{r}{2^n}$; тоді буде:

$$k_{n,r}(y) = \begin{cases} 0 & (y > M_{n,r}), \\ 1 & (M_{n,r} > y > m_{n,r}), \\ 0 & (y < m_{n,r}), \end{cases}$$

і через це $\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_{n,r}(y)\,dy = M_{n,r} - m_{n,r}$,

а значить, в наслідок (I)

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_n(y)dy = \sum_{r=1}^{2^n} (M_{n,r} - m_{n,r}).$$

З другого боку, за означенням

$$T = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{2^n} (M_{n,r} - m_{n,r}).$$

Порівнюючи дві останні рівності, одержимо:

$$T = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} k(y)\,dy,$$

що й потрібно, тому що $k_n(y)$ — зростаюча послідовність функцій, що має своєю граничною функцією $k(y)$.

З доведеної леми випливають два геометричні висновки:

1) Якщо C — довільна спрямлювана лінія Жордана, то множина чисел c, для яких пряма $x = c$ має нескінченно багато точок, спільних з кривою C, є множина міри нуль за Лебегом.

Справді, нехай $x = f(t)$, $y = g(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ — рівняння спрямлюваної лінії Жордана C, де f і g — неперервні функції з обмеженою зміною. Число $k(c)$, яке показує, як часто функція $f(t)$ в інтервалі $a \leqslant t \leqslant b$ приймає значення c, дорівнює в цьому випадку числу спільних точок прямої $x = c$ з кривою C. За доведеною в цьому пункті лемою функція $k(c)$ є такою, що підсумовується, і, значить, множина чисел c, для яких $k(c) = \infty$, має міру нуль.

2) Кожному додатному числу δ відповідає число α таке, що на кожній прямій

$$x = \alpha + m\delta \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

може лежати лише скінченне число точок кривої C.

Для доведення нам досить показати, що множина чисел α, які не мають потрібної властивості, являє собою не всі числа. Ця множина чисел α, що не мають потрібної властивості, є міри нуль, тому що вона є сполучення счисленного числа множин, які виходять з нуль-множини основної леми за допомогою зсувів $c' = c - m\delta$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

8. Узагальнення теореми Коші. Користуючись останнім результатом, можливо надати теоремі Коші такої форми:

Якщо $f(z)$ є функція, аналітична в області D, внутрішньої до жорданової спрямлюваної кривої C, і, крім того, $f(z)$ неперервна в замкнутій області $\overline{D}$, то

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Нехай ε — довільно мале додатне число. За умовою $f(z)$ — функція рівномірно неперервна на $\overline{D}$. Отже, існує число δ $(0 < \delta < 1)$ таке, що виконується нерівність: $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ для якої завгодно пари точок z_1, z_2 області $\overline{D}$, яка задовольняє умові $|z_1 - z_2| < 2\delta$. Згідно наслідкові 2) леми п. 7 добираємо число α і відповідно β, так що на кожній прямій $x = \alpha + m\delta$ і $y = \beta + m\delta$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ може лежати лише скінченне число точок, спільних з кривою C. Прямі $x = \alpha + m\delta$, $y = \beta + m\delta$ поділюють D, внутрішню область до C, на скінченне число областей, з яких кожна обмежена жордановою спрямлюваною кривою. Позначимо ці криві $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Очевидно, маємо:

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{r} \int_{C_n^-} f(z)\,dz,$$

де всі путі інтегрування проходяться в додатних напрямах. З кривих $C_1, C_2, \ldots, C_r$ нехай перші q, і тільки вони, містять точки C. Решта будуть тоді квадрати, розміщені всередині C, і для них $\int_{C_n^-} f(z)\,dz = 0$ в наслідок теореми Коші (п. 2).

Отже,

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{q} \int_{C_n^-} f(z)\,dz. \tag{II}$$

Позначаючи через l і l_n довжини кривих C і C_n, помітимо, що $\sum_{n=1}^{q} l_n - l$ не перебільшує суми периметрів тих квадратів сітки, сторони яких містять точки C. Число цих квадратів не перебільшує $4\left(\frac{l}{\delta} + 1\right)$; отже,

$$\sum_{n=1}^{q} l_n - l \leqslant 16\delta\left(\frac{l}{\delta} + 1\right), \text{ або } \sum_{n=1}^{q} l_n < l + 16l + 16\delta < 17l + 16, \text{ тому що } \delta < 1.$$

Вертаючись тепер до рівності (II), оцінимо модуль інтеграла $\int_{C_n} f(z)\,dz$:

$$\int_{C_n} f(z)\,dz = \int_{C_n} [f(z) - f(z_0)]\,dz,$$

де z_0 — стала точка, вибрана на C_n. Тому що діаметр лінії C_n не перебільшує $\delta\sqrt{2} < 2\delta$, то поки z перебуває на C_n, маємо:

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

і, значить,

$$\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{C_n} |f(z) - f(z_0)|\,|dz| < \varepsilon l_n.$$

З рівності (II) після цього одержуємо

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqslant \sum_{n=1}^{q}\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right| < \varepsilon \sum_{n=1}^{q} l_n < \varepsilon\,(17l + 16).$$

Тому що ε — як завгодно мале додатне число, а $17l + 16$ — цілком певне стале, то права частина — довільно мале додатне число. Ліва ж частина останньої нерівності є певне стале число, не від'ємне. Звідси це число може бути лише нулем, тобто

$$\left|\int f(z)\,dz\right| = 0 \quad \text{або} \quad \int f(z)\,dz = 0,$$

що й потрібно.

§ 2. Інтеграл Коші

1. Формула Коші. Нехай G є однозв'язна область, обмежена довільною кусково-гладкою лінією Γ, і $f(z)$ — функція, аналітична в замкнутій області $\overline{G}$. Це значить, що функція $f(z)$ має визначену скінченну похідну в кожній точці якоїсь області G', що містить $\overline{G}$. Формула Коші, до виводу якої ми тепер перейдемо, виражає значення функції $f(z)$ у всякій точці, внутрішній до лінії Γ, через значення цієї функції на контурі Γ. Звідси випливає, що значення аналітичної функції тісно пов'язані між собою, тому що її значення вздовж замкнутого контура Γ цілком визначають її значення всередині Γ. Ця формула Коші має вигляд:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \tag{32}$$

де z — яка завгодно точка всередині Γ, і інтегрування виконується по контурові Γ в додатному напрямі.

Для доведення, позначивши через z довільну точку області G, розглянемо функцію

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}. \tag{33}$$

Ця функція $\varphi(\zeta)$ є аналітична в усіх точках замкнутої області $\overline{G}$, крім точки $\zeta = z$. Описуючи навколо точки z, як центра, коло γ довільно малого радіуса ρ, яке цілком лежить в області G, ми бачимо, що $\varphi(\zeta)$ буде аналітичною функцією в усіх точках, які лежать між контурами Γ і γ, включаючи і самі контури (рис. 78). Отже, на підставі теореми Коші (розд. V, § 1, п. 5), маємо

$$\int_{\Gamma} \varphi(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma} \varphi(\zeta)\,d\zeta. \tag{34}$$

Рівність (34) показує, що значення $\int\limits_{\gamma} \varphi(\zeta)\,d\zeta$ не залежить від радіуса ρ допоміжного кола γ, будучи сталим числом, рівним значенню $\int\limits_{\Gamma} \varphi(\zeta)\,d\zeta$. Щоб знайти це стале значення $\int\limits_{\gamma} \varphi(\zeta)\,d\zeta$, відзначимо, що функція $\varphi(\zeta)$ прямує до певної скінченної границі, коли точка ζ прямує до точки z. Справді, з рівності (33) виходить:

$$\lim_{\zeta \to z} \varphi(\zeta) = \lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z).$$

Отже, якщо прийняти $f'(z)$ за значення функції $\varphi(\zeta)$ у точці $\zeta = z$, то $\varphi(\zeta)$ стає неперервною функцією всюди в замкнутій області $\overline{G}$, і ми можемо вважати: $|\varphi(\zeta)| < M$, де M — стале, яка б не була точка ζ області $\overline{G}$. Користуючись останньою нерівністю, одержуємо:

$$\left| \int\limits_{\gamma} \varphi(\zeta)\,d\zeta \right| < M \cdot 2\pi\rho,$$

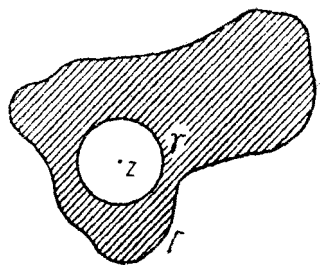

Рис. 78

звідки виходить, що $\int\limits_{\gamma} \varphi(\zeta)\,d\zeta = 0$, тому що ρ можна прийняти як завгодно малим, а значення нашого інтеграла не залежить від ρ. Звертаючись до рівності (34), перепишемо її так:

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi(\zeta)\,d\zeta = 0. \tag{34'}$$

Замінюючи в останній рівності $\varphi(\zeta)$ за формулою (33), одержимо:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0 \quad \text{або} \quad \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{35}$$

Тому що в наслідок § 1, п. 6, маємо: $\int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$, то формула (35) набирає вигляду:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \cdot 2\pi i, \quad \text{або} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

що й потрібно.

2. Поширення формули Коші на випадок складних контурів. У попередньому пункті ми припускали область G однозв'язною. Легко показати, що встановлена в попередньому пункті формула Коші може бути поширена на випадок многозв'язної області G. Отже, розглянемо многозв'язну область G, границею якої є складний контур Γ, що складається з скінченного числа кусково-глад-

ких замкнутих ліній (§ 1, п. 5). Припускаючи $f(z)$ аналітичною функцією в замкнутій області $\overline{G}$, встановимо формулу Коші:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}, \qquad (36$$

де z — яка завгодно точка області G, а інтегрування виконується вздовж складного контура Γ в додатному напрямі (рис. 79). Для доведення обмежимо точку z замкнутим контуром γ (наприклад, колом з центром у точці z) настільки малим, щоб всі точки цього контура γ разом з його внутрішніми точками належали області G (рис. 79). Розглянемо складний контур $\Gamma'=\Gamma+\gamma^{-}$, одержаний від приєднання до початкового контура Γ лінії γ, що проходиться у від'ємному напрямі. Область, обмежену контуром Γ', позначимо через G'. Очевидно, функція $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ буде аналітичною в замкнутій області $\overline{G'}$, а тому, на підставі теореми Коші (п. 5), маємо:

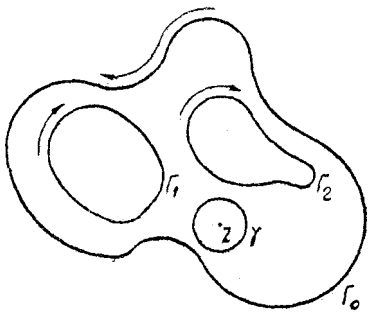

Рис. 79

$$\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=0, \quad \text{або} \quad \int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}+\int_{\gamma^{-}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=0,$$

звідки знаходимо:

$$\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}, \qquad (37)$$

де інтегрування виконується по контурах Γ і γ в додатному напрямі. Тому що функція $f(z)$ є аналітична в усіх точках, внутрішніх до контуру γ, включаючи точки й самого контура, то на підставі попереднього пункту маємо:

$$\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=2\pi i f(z).$$

Заводячи останню формулу в рівність (37), одержимо остаточно:

$$\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=2\pi i f(z) \quad \text{або} \quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (36)$$

Вираз

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$$

(де $f(z)$ є функція, аналітична в замкнутій області $\overline{G}$, границею якої служить контур Γ), називається *інтегралом Коші*. За доведеним інтеграл Коші зображає дану функцію $f(z)$ у всякій точці z, внутрішній до контуру Γ, тобто такій, що лежить

в області G. Очевидно, в усякій точці z, що лежить поза замкнутою областю $\overline{G}$, інтеграл Коші дорівнює нулеві. Справді, функція $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ є аналітична в усіх точках замкнутої області $\overline{G}$, якщо точка z лежить поза цією областю $\overline{G}$. Отже, на підставі теореми Коші (п. 5), маємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = 0.$$

3. Інтеграл типу Коші. Нехай L є довільна кусково-гладка лінія, замкнута або незамкнута, і $\varphi(z)$ — визначена вздовж L неперервна функція. Вираз

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \tag{38}$$

має певне значення для кожної точки z, що не лежить на L, і, значить, визначає однозначну функцію $F(z)$ у всіх точках z, що не належать L. Якщо L є замкнута лінія, і функція $\varphi(z)$ — аналітична всюди, всередині L і на L, то, як відомо, вираз (38) дорівнює $\varphi(z)$, якщо точка z лежить всередині L, і дорівнює нулеві, якщо точка z лежить поза L. В цьому випадку вираз (38) ми назвали інтегралом Коші. Природно назвати вираз (38) при загальних зазначених вище припущеннях щодо функції $\varphi(z)$ інтегралом типу Коші. При утворенні інтеграла типу Коші треба, значить, a priori задати функцію $\varphi(z)$ лише на контурі інтегрування L, припускаючи, що вона є неперервною функцією вздовж цього контура для того, щоб вираз (38) мав зміст.

Теорема I. *Функція $F(z)$, визначена інтегралом типу Коші (38), є аналітична в усякій однозв'язній області G, що не містить точок лінії L, і для її похідної має місце формула:*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \tag{39}$$

Доведення. Нехай z є довільна точка області G. Теорему буде доведено, якщо ми покажемо, що функція $F(z)$ має в цій точці похідну, яка визначається за формулою (39). Позначимо через $z+h$ яку завгодно точку області G і розглянемо відношення:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h}. \tag{40}$$

Примушуючи h прямувати до нуля при z сталому, ми покажемо, що відношення (40) прямує до скінченної границі, що визначається формулою (39). Для цього перетворимо відношення (40) таким чином:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z - h} - \frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}. \tag{41}$$

Примушуючи h прямувати до нуля і переходячи до границі під знаком останнього інтеграла, ми одержали б із рівності (41):

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2}. \tag{39}$$

Залишається довести, що виконаний нами формально перехід до границі дійсно можливий. Для доведення складемо різницю між нашим виразом $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}$ і його припусканою границею $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2}$ і покажемо, що ця різниця прямує до нуля разом з h. Дійсно, ця різниця має вигляд:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}. \tag{42}$$

Оцінимо модуль різниці (42). Очевидно, маємо:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\right|<\frac{|h|}{2\pi}\int_L \frac{M\,|d\zeta|}{|\zeta-z-h|\,|\zeta-z|^2}, \tag{43}$$

де припущено, що $|\varphi(\zeta)|<M$, тому що $\varphi(\zeta)$ за умовою є неперервна вздовж L функція. Позначаючи через $2d(d>0)$ віддаль від лінії L до точки z, тобто мінімум різних можливих віддалей між двома точками, з яких одна належить L, а друга є точка z, маємо $|\zeta-z|>d$, $|\zeta-z-h|>d$, якщо $|h|$ достатньо мале, яка б не була точка ζ, що належить L. Помітивши це, бачимо, що права частина нерівності (43) менша, ніж

$$\frac{|h|\,Ml}{2\pi d^3}, \tag{44}$$

де через l позначена довжина лінії L. Вираз (44) прямує до нуля разом з h; отже, і різниця (42) прямує до нуля разом з h.

Таким чином, різниця між відношенням (40) і інтегралом (39) прямує до нуля разом з h, що і доводить нашу теорему.

Формула (39) показує, що для одержання похідної функції $F(z)$ треба виконати формальне диференціювання по параметру z в інтегралі типу Коші (38), за допомогою якого визначається ця функція $F(z)$.

Аналогічно доводиться, що це диференціювання можна повторити другий раз і взагалі як завгодно велике число разів.

Теорема II. *Функція $F(z)$, що визначається інтегралом типу Коші (38), має в кожній точці z, що лежить поза L, похідні всіх порядків, для яких мають місце формули:*

$$F''(z)=\frac{2!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^3}, \tag{45}$$

і взагалі

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}. \tag{46}$$

Щоб довести формулу (45), скористуємось формулою (39); тоді одержимо:

$$\frac{F'(z+h)-F'(z)}{h}-\frac{2!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^3}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\zeta)\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\zeta-z-h)^2}-\frac{1}{(\zeta-z)^2}\right)-\frac{2}{(\zeta-z)^3}\right]d\zeta. \qquad (47)$$

Питання зводиться до того, щоб довести, що інтеграл, який стоїть у правій частині останньої рівності, прямує до нуля разом з h. Квадратна скобка під цим інтегралом, рівна

$$h\,\frac{3(\zeta-z)-2h}{(\zeta-z)^3\cdot(\zeta-z-h)^2},$$

має модуль менший, ніж $|h|\,M_1$, де M_1 не залежить від ζ, тому що

$$\left|\frac{3(\zeta-z)-2h}{(\zeta-z)^3(\zeta-z-h)^2}\right|<M_1$$

при достатньо малих значеннях h, яка б не була точка ζ на L. Таким чином, модуль інтеграла, що стоїть в другій частині рівності (47), менший, ніж $\frac{|h|\,l}{2\pi}\,MM_1$, де M і l мають ті ж самі значення, що в теоремі I, і, значить, прямує до нуля разом з h. Застосовуючи метод повної індукції, аналогічно доведемо справедливість формули (46) для якого завгодно натурального числа n. Читачеві рекомендується виконати самостійно відповідні обчислення.

4. Існування похідних всіх порядків для функції аналітичної в області. За допомогою результатів попереднього пункту ми можемо довести важливу властивість аналітичних функцій. Досі ми називали однозначну функцію комплексного змінного z аналітичною в області, якщо вона має в кожній точці цієї області скінченну похідну. У випадку функції дійсного змінного з факту існування скінченної похідної не випливає неперервність цієї похідної. У випадку ж функції комплексного змінного має місце виключно важливе твердження: ***якщо однозначна функція $f(z)$ комплексного змінного z має всюди в області G першу похідну, то вона має в цій області і похідні всіх вищих порядків.***

Зауваження. Очевидно, ця теорема стверджує не тільки існування похідних якого завгодно порядку для функції, аналітичної в області G, але і неперервність цих похідних.

Доведення. Нехай z є довільна точка області G і C — правильний замкнутий контур, що оточує точку z і лежить разом з усіма своїми внутрішніми точками в області G. Прикладаючи формулу Коші (п. 1), маємо:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}.$$

З другого боку, на підставі попереднього пункту функція $f(z)$, що зображається інтегралом Коші, диференційовна в точці z довільне число разів. Отже, функція $f(z)$ має похідну всіх порядків всюди в області G, тому що точка z була взята довільно в області G.

Поряд з основною формулою Коші (п. 2) має місце — у випадку можливості застосування цієї формули — така рівність:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Отже, ми бачимо, що вимога диференційовності функцій комплексного змінного значно сильніша, ніж відповідна вимога для функції дійсного змінного: з існування скінченної похідної першого порядку в кожній точці області випливає існування, а значить, і неперервність похідних всіх порядків у тій же області.

Зокрема, звідси виходить, що похідна функції, аналітичної в області G, є функція аналітична в тій же області.

5. Теорема Морера. На початку цього розділу (§ 1, п. 1—3) ми довели основне твердження теорії аналітичних функцій, в наслідок якого для всякої функції $f(z)$, аналітичної в однозв'язній області G, має місце рівність $\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 0$, де Γ є довільний кусково-гладкий замкнутий контур, який лежить в області G. Як показав італійський математик Морера (Morera), це основне твердження оборотне:

Якщо функція $f(z)$, неперервна в однозв'язній області G, для всякого кусково-гладкого замкнутого контура Γ, що лежить в цій області, задовольняє рівність $\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 0$, то $f(z)$ є аналітична функція в області G.

Дійсно, ми бачили (§ 1, п. 4, зауваження), що при умовах цієї теореми вираз $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$ не залежить від путі, яка сполучає точки z_0 і z області G, і визначає функцію $F(z)$, аналітичну в області G, при чому маємо: $F'(z) = f(z)$. Тому що, на підставі попереднього пункту, $F'(z)$ як похідна функції, аналітичної в області G, є функція аналітична в G, то $f(z) = F'(z)$ є функція, аналітична в області G.

Примітка. Для справедливості цієї теореми немає потреби припускати, що $\int f(z)\, dz$ дорівнює нулеві, будучи взятий по якому завгодно кусково-гладкому замкнутому контурові Γ. Досить припустити, що $\int f(z)\, dz = 0$ вздовж периметра довільного трикутника, що лежить в області G.

Справді, діючи, як в § 1, п. 2, ми покажемо, що інтеграл $\int f(z)\, dz$ дорівнює нулеві, будучи взятий вздовж периметра якого завгодно многокутника в області G, тому що всякий многокутник можна розбити на трикутники. Далі, знаючи, що $\int f(z)\, dz = 0$ вздовж периметра якого завгодно многокутника, ми доведемо, прикладаючи основну лему (§ 1, п. 1), що цей інтеграл буде залишатися нулем, коли за путь інтегрування візьмемо довільну замкнуту кусково-гладку лінію Γ.

6. Три різні погляди в побудові теорії аналітичних функцій. При побудові теорії аналітичних функцій можна виходити з трьох різних, еквівалентних між собою, означень аналітичної функції в області G. Так, поперше, ми можемо назвати функцією, аналітичною в області G, однозначну функцію комплексного змінного, диференційовну в цій області. Це означення, що основане на диференціальних властивостях функції і належить засновникові теорії аналітичних функцій Коші, ми прийняли за вихідне означення при складанні даного підручника. Виходячи з цього означення, ми довели основне в усій теорії твердження Коші, в наслідок якого для аналітичної функції в однозв'язній області G (в зазначеному розумінні) інтеграл по якому завгодно замкнутому контурові Г, що належить області G, дорівнює нулеві. Звідси ми мали можливість переконатися в існуванні для аналітичної функції похідних усіх порядків.

З другого боку, ми бачили (розд. II, § 4, п. 4), що умови, потрібні і достатні для того, щоб функція $f(z)=u+vi$ була аналітичною в області G, полягають в існуванні рівнянь Коші-Рімана:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C.-R.)}$$

де частинні похідні функції u і v можливо припускати неперервними функціями в кожній точці області G. Ця путь приводить до одночасного розгляду двох спряжених гармонічних функцій u і v в області G, зв'язаних рівняннями (C.-R.), і означення аналітичної функції у вигляді $u+vi$. Над побудуванням теорії аналітичних функцій, де вихідним пунктом є пара спряжених гармонічних функцій, працював Ріман.

Нарешті, можливо намагатися одержати всі основні властивості аналітичних функцій, назвавши функцією, аналітичною в однозв'язній області G, всяку неперервну функцію $f(z)$ комплексного змінного, для якої інтеграл $\int f(z)\,dz$, взятий вздовж якого завгодно замкнутого контура цієї області (достатньо, наприклад, брати лише периметри трикутників), дорівнює нулеві (п. 5). Над розглядом властивостей аналітичних функцій з цього третього погляду вперше працював Осгуд (Osgood). Попередній виклад переконує нас в рівноправності зазначених трьох поглядів при побудуванні теорії аналітичних функцій, тому що всі три згадані вище означення рівносильні між собою.

7. Про граничні значення інтеграла типу Коші. Нехай C є довільна гладка замкнута лінія, і функція $\varphi(z)$ — аналітична на лінії C, тобто в кожній точці, що лежить на цій лінії; інтеграл типу Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \qquad (48)$$

являє собою функцію $F(z)$, аналітичну всюди всередині контура C, і функцію $F_1(z)$, аналітичну всюди поза C.

Ми доведемо, що функція

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} \tag{48'}$$

$\left(\text{або } F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}\right)$ прямує до певної скінченної границі, коли точка z наближається, залишаючись всередині C (або поза C), до довільної точки z_0 контура C. Ці граничні значення інтеграла типу Коші (48′) утворюють, значить, функцію $\varphi_i(z_0)$, визначену в усіх точках z_0 контура C (відповідно функцію $\varphi_e(z_0)$, якщо точка z наближається до точки z_0, залишаючись поза C), що, як ми покажемо, буде аналітична в усіх точках z_0 і тісно зв'язана з граничною функцією $\varphi(z_0)$. В інтегралі типу Коші

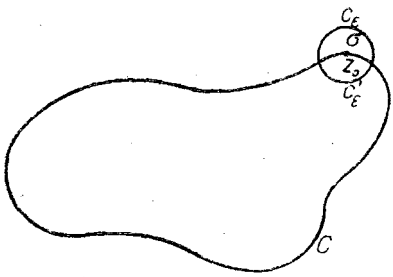

Рис. 80

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$$

під z ми розуміємо точку, що лежить всередині контура C. Природно, виникає питання, чи можна розглядати значення інтеграла типу Коші на контурі C, тобто який зміст має вираз:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z_0}. \tag{49}$$

При звичайному розумінні процесу інтегрування формула (49) позбавлена змісту, тому що функція $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}$ не інтегровна, взагалі кажучи, вздовж C, коли точка z_0 перебуває на лінії C. Через це ми повинні насамперед визначити зміст виразу (49). Для цього опишемо з точки z_0, як з центра, коло як завгодно малого радіуса ε і позначимо через σ найменшу дугу лінії C, що відрізається цим колом та містить точку z_0 (рис. 80). Викидаючи з лінії C дугу σ, позначимо частину лінії C, що залишилася, через C_ε. Вираз

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z_0} \tag{50}$$

має зміст при якому завгодно $\varepsilon>0$, тому що функція $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}$ є неперервна вздовж C_ε. Примушуючи ε прямувати до нуля, покажемо, що вираз (50) прямує до певної скінченної границі, яку ми приймемо за значення інтеграла (49).

Дійсно, замкнемо лінію C_ε за допомогою дуги c_ε побудованого кола, яка лежить поза C (рис. 80). Таким чином ми одержимо кусково-гладкий замкнутий контур $\Gamma_\varepsilon = C_\varepsilon + c_\varepsilon$, для якого точка z_0 буде внутрішньою. Розглянемо тепер інтеграл типу Коші:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

де z — точка всередині контура C.

Тому що функція $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$ є аналітична на контурах C і $\Gamma_\varepsilon = C_\varepsilon + c_\varepsilon$, а також між ними, то за теоремою Коші маємо:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $z \to z_0$, одержимо:

$$\varphi_i(z_0) = \lim_{z \to z_0} F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0}. \tag{51}$$

Ця формула показує, що граничні значення $\varphi_i(z_0)$ інтеграла типу Коші існують в кожній точці контура C і утворюють функцію, аналітичну на контурі C.

Щоб знайти залежність цієї функції $\varphi_i(z_0)$ від граничної функції $\varphi(z_0)$, ми повинні у формулі (51) перейти до границі, примушуючи ε прямувати до нуля. Спочатку обчислимо ту границю, до якої прямує при цьому інтеграл $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0}$.

Вважаючи в останньому інтегралі

$$\zeta - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$$

вздовж дуги c_ε кола, маємо: $d\zeta = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$. Крім того, поклавши

$$\varphi(\zeta) = \varphi(z_0) + \eta,$$

ми бачимо, що на c_ε модуль η прямує до нуля разом з ε. Отже одержуємо:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_\varepsilon} \frac{\varphi(z_0) + \eta}{\varepsilon e^{i\theta}}\, i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = \frac{\varphi(z_0)}{2\pi} \int\limits_{c_\varepsilon} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{c_\varepsilon} \eta d\theta.$$

Тому що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{c_\varepsilon} d\theta = \pi, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{c_\varepsilon} \eta d\theta = 0,$$

то знайдемо:

$$\lim_{\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2} \varphi(z_0). \tag{52}$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$, з рівності (51) ми вбачаємо, що вираз $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0}$ прямує при цьому до певної скінченної границі, яку ми умовилися позначати через $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0}$ і називати значенням інтеграла типу Коші у точці z_0 контура C. Таким чином ми бачимо, що інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0}$ має цілком визначений зміст, і формула (51) після переходу до границі при $\varepsilon \to 0$ стає такою:

$$\varphi_i(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2}\varphi(z_0). \qquad \text{(I)}$$

Формула (I) дає вираз граничних значень $\varphi_i(z_0)$ інтеграла типу Коші з середини контура C через значення самого інтеграла на контурі і дану граничну функцію $\varphi(z_0)$.

Щоб одержати аналогічну формулу для $\varphi_e(z_0)$, розглянемо контур $\Gamma'_\varepsilon = C_\varepsilon + c'_\varepsilon$, одержаний після замикання лінії C_ε за допомогою дуги c'_ε маленького кола, яка лежить всередині C і проходиться у від'ємному напрямі (рис. 80).

Тому що функція $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$, де точка z поза C є аналітична на контурах C і Γ'_ε, а також між ними, то за теоремою Коші маємо

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c'_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $z \to z_0$, одержимо:

$$\varphi_e(z_0) = \lim_{z \to z_0} F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c'_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0}. \qquad (53)$$

З останньої рівності ми вбачаємо, що граничні значення $\varphi_e(z_0)$ подібно $\varphi_i(z_0)$ утворюють на контурі аналітичну функцію.

Помічаючи, що за формулою Коші буде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c'_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} = \varphi(z_0),$$

одержимо звідси з переходом до границі при $\varepsilon \to 0$, в наслідок (52), такий результат:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c'_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2}\varphi(z_0).$$

Отже, примушуючи ε прямувати до нуля, з рівності (53) ми одержимо:

$$\varphi_e(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} - \frac{1}{2}\varphi(z_0). \qquad \text{(II)}$$

Формула (II) виражає зовнішні граничні значення $\varphi_e(z_0)$ інтеграла типу Коші через граничну функцію $\varphi(z_0)$ і значення інтеграла на контурі.

Додаючи доведені формули (I) і (II) і ділячи одержану рівність пополам, знаходимо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{\varphi_i(z_0) + \varphi_e(z_0)}{2}, \qquad \text{(I')}$$

тобто значення інтеграла типу Коші в якій завгодно точці контура інтегрування дорівнює середньо-арифметичному його граничних значень. Віднімаючи від формули (I) формулу (II), ми одержимо:

$$\varphi(z_0) = \varphi_i(z_0) - \varphi_e(z_0), \qquad \text{(II')}$$

тобто значення граничної функції в якій завгодно точці контура дорівнює різниці граничних значень в цій точці інтеграла типу Коші.

Ці формули (I') і (II') еквівалентні попереднім формулам (I) і (II). Зокрема, якщо функція $\varphi(z)$ буде аналітична всюди всередині контура інтегрування C, так само як і на C, то інтеграл типу Коші стає інтегралом Коші; його граничні значення $\varphi_i(z_0)$ і $\varphi_e(z_0)$ в цьому випадку будуть відповідно $\varphi(z_0)$ і 0 [порівн. формулу (II')], і значення самого інтеграла Коші в точці z_0 контура інтегрування C за формулою (I') буде дорівнювати $\frac{1}{2}\varphi(z_0)$.

Приклад. Нехай контуром інтегрування C служить коло з центром у нульовій точці радіуса одиниця, а $\varphi(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$. В цьому випадку інтеграл типу Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\int\limits_C \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\int\limits_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} = 0,$$

якщо точка z лежить всередині кола C; якщо ж точка z лежить поза C, то розгляданий інтеграл типу Коші дорівнює $-\frac{1}{z}$. Отже, для даного випадку маємо:

$$\varphi_i(z_0) = 0, \quad \varphi_e(z_0) = -\frac{1}{z_0}.$$

Звідси за формулою (I') одержуємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z_0)} = -\frac{1}{2z_0}.$$

Примітка. Ми дослідили граничні значення інтеграла типу Коші, припускаючи граничну функцію $\varphi(\zeta)$ аналітичною в усіх точках замкнутого контура інтегрування C, тоді як інтеграл типу Коші має зміст у випадку, коли $\varphi(\zeta)$ є довільна неперервна функція вздовж контура інтегрування L (замкнутого або незамкнутого), і навіть розривна, при умові її інтегровності вздовж L. Природно поставити питання про те, як поводить себе інтеграл типу Коші при цих загальних умовах, коли точка z наближається по нормалі до точки z_0 контура інтегрування. Для дослідження нашої проблеми в такому загальному поставленні треба притягти найбільш складні і тонкі методи сучасної теорії функції дійсного змінного, і ми через це позбавлені змоги викласти зазначене питання з вичерпливою повнотою на сторінках цього підручника. Однак, зауважимо, що навіть у випадку неперервної граничної функції граничні значення інтеграла типу Коші $\varphi_i(z_0)$ і $\varphi_e(z_0)$ не будуть, взагалі кажучи, існувати в усіх без винятку точках z_0 контура інтегрування. Множина таких виняткових точок контура інтегрування, де не існують функції $\varphi_i(z_0)$ або $\varphi_e(z_0)$, є, за термінологією теорії множин, так звана „нуль-множина", тобто ця множина виняткових точок z_0 може бути покрита за допомогою скінченної або нескінченної послідовності відкритих дуг, які не перекриваються і сума довжин яких як завгодно мала. Можна довести, що формули (I) і (II) залишаються в силі для самого найзагальнішого інтеграла типу Коші, якщо нехтувати „нуль-множинами". Крім того, можна виявити в цьому випадку, що граничне значення $\varphi_i(z_0)$ [або $\varphi_e(z_0)$] залишається тим же самим, якщо ми будемо наближати точку z до точки z_0 по якій завгодно путі, не дотичній в точці z_0 до контура інтегрування. Вичерпливе розв'язання цих питань читач може знайти в нашій книзі „Интеграл Cauchy" (Наукові записки Саратовського університету, 1918).

8. Інтеграл Пуассона. Нехай $f(z)$ є функція аналітична всередині і на границі круга K радіуса R (за центр круга ми приймемо, наприклад, початок координат). Для довільної точки $z = re^{i\varphi}$, яка лежить всередині K, ми маємо за формулою Коші:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi})\frac{Re^{i\psi}}{Re^{i\psi} - re^{i\varphi}}\,d\psi. \tag{54}$$

Розглянемо точку z^*, симетричну відносно K з точкою z, тобто $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}} = \frac{R^2}{r}e^{i\varphi}$. Тому що точка z^* лежить поза K, то функція $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}$ буде аналітичною всередині і на границі круга K, а тому за теоремою Коші одержимо:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z^*} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi})\frac{re^{i\psi}}{re^{i\psi} - Re^{i\varphi}}\,d\psi. \tag{55}$$

Віднімаючи з (54) рівність (55), знаходимо:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi})\left[\frac{Re^{i\psi}}{Re^{i\psi} - re^{i\varphi}} - \frac{re^{i\psi}}{re^{i\psi} - Re^{i\varphi}}\right]d\psi,$$

що після елементарних перетворень набере вигляду:

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi})\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2R\cdot r\cos(\psi - \varphi) + r^2}\,d\psi. \tag{56}$$

Порівнюючи дійсні частини зліва і справа останньої рівності, одержимо формулу:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2R \cdot r \cos(\psi - \varphi) + r^2} d\psi, \qquad (57)$$

яка носить назву *інтегральної формули Пуассона.* Тому що кожна гармонічна функція u може бути розглядана як дійсна частина аналітичної функції, то за допомогою цієї формули виражається значення якої завгодно гармонічної функції всередині круга через її граничні значення.

Зауважимо ще, що ми одержимо з формули (57) частинні похідні функції u відносно r і φ (або x і y) для внутрішньої точки круга, якщо продиференціюємо вираз, що стоїть під знаком інтеграла.

Формула (57) Пуассона набирає особливо простого вигляду при $r = 0$; тоді буде:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \psi) d\psi, \qquad (57')$$

тобто *значення гармонічної функції в центрі круга дорівнює середньоарифметичному її значенню на колі цього круга.*

Користуючись формулою Пуассона, можна довести таке твердження про збіжність послідовності аналітичних функцій, яким нам доведеться далі скористуватися: *якщо послідовність функцій $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$, аналітичних в області G, в точці $z = 0$ цієї області збігається до нуля, а дійсні частини u_n цих функцій збігаються рівномірно до нуля в усій області G, то функції $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ збігаються рівномірно до нуля в усякій замкнутій області, яка належить G.*

Справді, нехай $\overline{G}^*$—довільна замкнута область, яка належить G. Позначимо через R число таке, що замкнутий круг радіуса R з центром в якій завгодно точці $\overline{G}^*$ цілком лежить в області G. Довільну точку P в області $\overline{G}^*$ приймемо за центр круга радіуса R; прикладаючи формулу (57), диференціюємо її по r і вважаємо потім $r = 0$; тоді одержуємо:

$$\frac{\partial u_n(0, \varphi)}{\partial r} = \frac{1}{R\pi} \int_0^{2\pi} u_n(R, \psi) \cos(\psi - \varphi) d\psi.$$

Позначимо через M_n верхню межу $|u_n|$ в області G, тобто $|u_n| \leqslant M_n$. В наслідок рівномірної збіжності до нуля в області G функцій u_n ми робимо висновок, що $M_n \to 0$, коли n необмежено зростає. З другого боку, порівнюючи останню формулу з рівністю $\frac{\partial u_n}{\partial r} = \frac{\partial u_n}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial u_n}{\partial y} \sin\varphi$, ми бачимо, що:

$$\frac{\partial u_n(P)}{\partial x} = \frac{1}{R\pi} \int_0^{2\pi} u_n(R, \psi) \cos\psi \, d\psi$$

$$\frac{\partial u_n(P)}{\partial y} = \frac{1}{R\pi}\int_0^{2\pi} u_n(R, \psi)\sin\psi\, d\psi.$$

Отже, в кожній точці P області $\overline{G}^*$ маємо:

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| \leqslant \frac{2M_n}{R} \quad \text{і} \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right| \leqslant \frac{2M_n}{R}.$$

Тому що $f_n'(z) = \frac{\partial u_n}{\partial x} - i\frac{\partial u_n}{\partial y}$, то

$$|f_n'(z)| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{R} M_n.$$

З очевидної формули: $f_n(z) = \int_0^z f_n'(\zeta)d\zeta + f_n(0)$ виводимо нерівність:

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{R} M_n |z| + |f_n(0)| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{R} M_n\rho + |f_n(0)|$$

де ρ означає максимум $|z|$ для області $\overline{G}^*$. Тому що $M_n \to 0$ $f_n(0) \to 0$, то остання нерівність доводить рівномірну збіжність до нуля функцій $f_n(z)$ в області $\overline{G}^*$.

Вправи до розділу V

1. Довести формулу $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$ при довільному цілому додатному n, якщо взято:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

2. Обчислити інтеграли $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ і $\int_0^\infty \sin x^2 dx$, виходячи від функції e^{-z^2}, приймаючи за путь інтегрування границю кругового сектора радіуса R з кутом $\frac{\pi}{4}$.

Відп. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3. Вважаючи $a^z = e^{z \ln a}$, дослідити цю функцію. Що означає i^i?

4. Дослідити функції $\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$ і $\arcsin z = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$.

5. Виразити $\operatorname{arctg} z$ через логарифмічну функцію.

Відп. $\frac{1}{2i}\ln\frac{i-z}{i+z}$.

6. За допомогою інтеграла Коші обчислити три інтеграли $\int\limits_C \frac{dz}{1+z^2}$, якщо C означає кола: a) $|z-i|=1$; b) $|z+i|=1$; c) $|z|=2$, що проходяться в додатних напрямах.

Відп. a) π; b) $-\pi$; c) 0.

7. Які значення може мати $\int\limits_0^1 \frac{dz}{1+z^2}$, якщо за путь інтегрування приймати які завгодно путі, вздовж яких підінтегральна функція неперервна?

Відп. $\frac{\pi}{4}+k\pi$, де k — ціле число.

Розділ VI

Ряди аналітичних функцій. Розкладання аналітичних функцій в степеневий ряд

§ 1. Рівномірно збіжні ряди аналітичних функцій

1. Перша теорема Вейєрштрасса. Нехай ми маємо нескінченний ряд

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots, \tag{1}$$

всі члени якого є функції, аналітичні в якійсь області G. Припустимо, що ряд (1) збігається в кожній точці z області G, і позначимо його суму через $f(z)$. При яких умовах сума збіжного ряду аналітичних функцій буде сама функцією аналітичною? Такою умовою є умова рівномірної збіжності ряду (1) в області G або принаймні в усякій замкнутій області $\overline{G}'$, що цілком лежить в області G. Це встановлюється теоремою Вейєрштрасса, що складається з двох частин.

Отже, припустимо, що ряд (1) збігається рівномірно в усякій замкнутій області $\overline{G}'$, яка цілком лежить в області G, і доведемо, поперше, що *ряд* (1) *зображає функцію* $f(z)$ *аналітичну в області* G; подруге, що *після диференціювання довільне число разів ряду* (1) *виходить новий ряд, який буде також рівномірно збіжним у всякій замкнутій області* $\overline{G}'$, *внутрішній до* G, *і буде зображати відповідну похідну функції* $f(z)$ або, коротше: *ряд* (1) *можна почленно диференціювати скільки завгодно разів.*

Зауваження. Такої простої теореми ми не маємо в дійсній області, тому що відомо, що рівномірно збіжний ряд функцій дійсного змінного, взагалі кажучи, не можна почленно диференціювати.

Для доведення першої частини теореми зазначимо, що в наслідок рівномірної збіжності ряду (1) його сума $f(z)$ є неперервна функція в усякій замкнутій області $\overline{G}'$, внутрішній до області G, а значить і всюди в області G (розд. II, § 2, п. 2). Нам досить показати, що в усякій точці z_0 області G функція $f(z)$ має скінченну похідну. Обмежимо точку z_0 правильним контуром C так, щоб усі його внутрішні точки разом з точками самого контура належали області G (рис. 81). Даний ряд (1) зокрема буде збігатися, за умовою, рівномірно на контурі C. Позначаючи через ζ довільну точку контура C, а через z яку

завгодно точку всередині C, поділимо всі члени ряду (1) на $\zeta - z$. Одержаний ряд

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} + \ldots + \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} + \tag{2}$$

буде рівномірно збіжний для всіх точок ζ, що належать C [1]). Такий ряд можна почленно інтегрувати вздовж лінії C (розд. IV, § 3, п. 3). Інтегруючи вздовж C і поділюючи всі члени одержаного в результаті ряду на $2\pi i$, одержимо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_1(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_2(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \ldots \tag{3}$$

Тому що функції $f_n(z)$ за умовою є аналітичні всюди всередині C, включаючи точки самого контура C, то, користуючись формулою Коші, перепишемо ряд (3) у вигляді:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots \tag{3'}$$

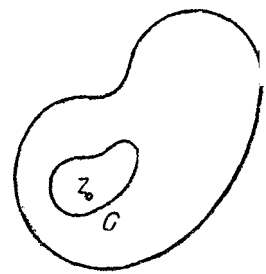

Рис. 81

У правій частині ряду (3′) стоїть даний ряд (1), сума якого дорівнює $f(z)$; отже маємо:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\,. \tag{3''}$$

Тому що функція $f(z)$, для точок z, внутрішніх до контура C, зображається інтегралом типу Коші (3″), то в усіх цих точках z вона має скінченну похідну (розд. V, § 2, п. 3). Зокрема, функція $f(z)$ повинна мати скінченну похідну в точці $z = z_0$. Пригадавши, що під z_0 ми розуміємо яку завгодно точку області G, ми робимо висновок звідси, що $f(z)$ є функція, аналітична в області G, чим і доводиться перша частина теореми Вейєрштрасса.

До того самого висновку можна прийти інакше, скориставшись теоремою Морера (розд. IV, § 2, п. 5). Справді, поперше, ми бачили, що $f(z)$ є функція, неперервна в області G, подруге, в наслідок рівномірної збіжності ряду (1) на контурі C його можна проінтегрувати почленно вздовж лінії C:

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta = \int_C f_1(\zeta)\,d\zeta + \int_C f_2(\zeta)\,d\zeta + \ldots + \int_C f_n(\zeta)\,d\zeta + \ldots, \tag{4}$$

де під C досить розуміти який завгодно правильний замкнутий контур, що належить якомусь околові точки z_0. Тому що функції $f_n(z)$ є аналітичні всюди всередині C, включаючи точки самого контура C, то за основною теоремою Коші маємо.

$$\int_C f_n(\zeta)\,d\zeta = 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots),$$

[1]) z — стале. (*Ред.*).

а значить з рівності (4) одержуємо:

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Отже, сума ряду (1) є неперервна функція в області G, для якої маємо $\int_C f(\zeta)\,d\zeta = 0$; інтеграл береться вздовж довільного замкнутого контура C, що належить якомусь околові точки z_0. В наслідок теореми Морера (розд. V, § 2, п. 5) функція $f(z)$ повинна бути аналітичною і в зазначеному околі точки z_0. Пригадавши знов, що під z_0 ми розуміємо яку завгодно точку G, ми робимо висновок звідси про справедливість нашого положення.

Перейдемо тепер до доведення другої частини теореми. Як і перед цим, обмежимо довільну точку z_0 області G правильним контуром C, всі внутрішні точки якого, включаючи й точки самого контура C, лежать в області G. Позначаючи через ζ довільну точку контура C, а через z—яку завгодно точку всередині C, поділимо даний ряд (1) на $(\zeta - z)^2$; одержимо ряд, рівномірно збіжний на контурі C:

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} = \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta-z)^2} + \frac{f_2(\zeta)}{(\zeta-z)^2} + \ldots + \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2} + \ldots \tag{5}$$

Проінтегрувавши ряд (5) почленно вздовж лінії C і розділивши всі члени одержаного ряду на $2\pi i$, знайдемо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_1(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_2(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2} + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2} + \ldots \tag{6}$$

Застосовуючи формулу Коші, перепишемо ряд (6) так:

$$f'(z) = f_1'(z) + f_2'(z) + \ldots + f_n'(z) + \ldots, \tag{6'}$$

тобто ми бачимо, що ряд, складений з похідних членів даного ряду (1), збігається до похідної від суми даного ряду (1) в усякій точці z, що лежить всередині C, зокрема при $z = z_0$. Пригадавши, що z_0 є яка завгодно точка області G, ми переконуємося в можливості почленного диференціювання ряду (1) в кожній точці області G. Залишається показати, що ряд (6'), складений з похідних членів даного ряду (1), збігається рівномірно в усякій замкнутій області $\overline{G}'$, що цілком лежить в області G.

Дійсно, нехай z є яка завгодно точка області $\overline{G}'$. Проведемо контур Γ так, щоб замкнута область, границею якої він є, цілком належала області G і в свою чергу містила всередині себе всі точки області $\overline{G}'$. Коли точка ζ описує контур Γ, а точка z лишається в замкнутій області $\overline{G}'$, віддаль між ними

$|\zeta - z|$ лишається весь час більшою якогось додатного числа d. Помітивши це, розглянемо всі члени ряду (6′), починаючи з $(n+1)$-го:

$$f'_{n+1}(z) + f'_{n+2}(z) + \ldots = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f_{n+1}(\zeta) + f_{n+2}(\zeta) + \cdots}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \qquad (7)$$

Тому що даний ряд (1) збігається рівномірно на контурі Г, то при довільному як завгодно малому $\varepsilon > 0$ маємо:

$$|f_{n+1}(\zeta) + f_{n+2}(\zeta) + \ldots| < \varepsilon, \quad \text{якщо } n \geqslant N = N(\varepsilon).$$

Отже, на підставі рівності (7) одержуємо:

$$|f'_{n+1}(z) + f'_{n+2}(z) + \ldots| < \frac{\varepsilon l}{2\pi d^2},$$

де через l позначена довжина всього контура Г. Остання нерівність показує, що остача ряду похідних (6′), починаючи з досить великого номера, буде за модулем менша довільного як завгодно малого числа, незалежно від точки z, що належить області $\overline{G}'$. Інакше кажучи, ми довели, що ряд (6′) рівномірно збігається в області $\overline{G}'$.

Помітивши, що похідна аналітичної функції є функція аналітична (розд. V, § 2, п. 4), ми бачимо, що ряд (6′) є ряд функцій аналітичних в області G, що рівномірно збігається в усякій замкнутій області $\overline{G}'$, цілком внутрішній до G. Прикладаючи до цього ряду послідовно доведене положення, ми одержуємо:

$$f''(z) = f''_1(z) + f''_2(z) + \ldots + f''_n(z) + \ldots, \qquad (8)$$

і взагалі

$$f^{(p)}(z) = f_1^{(p)}(z) + f_2^{(p)}(z) + \ldots + f_n^{(p)}(z) + \ldots, \qquad (8')$$

при чому всі одержувані ряди є рівномірно збіжні в усякій замкнутій області $\overline{G}'$, цілком внутрішній до області G.

З а у в а ж е н н я. Якщо даний ряд (1) збігається рівномірно в області G, то в наслідок доведеного похідний ряд (6′) буде рівномірно збіжним у всякій замкнутій області $\overline{G}'$, цілком внутрішній до G. Помилково було б зробити висновок, що похідний ряд (6′) рівномірно збігається в області G. Справді, ряд $\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2^2} + \ldots + \frac{z^n}{n^2} + \ldots$ збігається рівномірно в крузі $|z| \leqslant 1$. Його похідний ряд

$$1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{n} + \ldots,$$

рівномірно збіжний, як доведено, при $|z| \leqslant r$, $r < 1$, не буде рівномірно збігатися в крузі $|z| < 1$.

В наслідок доведеної теореми Вейєрштрасса рівномірно збіжні ряди аналітичних функцій мають особливо важливе значення, тому що їх суми є функціями аналітичними. Звідси дуже важливого значення набуває проблема про відшукання критеріїв більш або менш широких, достатніх для рівномірної збіжності ряду аналітичних функцій. Цикл питань, що сюди належать, має

таке поставлення: припускаючи ряд (1) збіжним на нескінченній множині точок E в області G, яка має принаймні одну граничну точку всередині G, знайти умови, які треба накласти на послідовність функцій

$$s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) \tag{9}$$

для того, щоб ряд (1) був рівномірно збіжним у всякій замкнутій області, цілком внутрішній до G. Такими умовами будуть, наприклад: 1) рівномірна обмеженість послідовності функцій (9) в усякій замкнутій області, цілком внутрішній до G [1]); 2) випускання двох різних сталих значень всіма функціями послідовності (9) в області G [2]); 3) можливість взаємно однозначного обернення кожної функції послідовності (9) [3]) і ін.

З другого боку, зазначимо, що умова рівномірної збіжності ряду (1) є лише достатньою для того, щоб сума ряду була функцією аналітичною; ця умова далеко не є необхідною, тобто функція, аналітична в області G, може бути зображена у вигляді суми ряду функцій, аналітичних в G, збіжного в цій області, але збіжного не всюди рівномірно. Природно означити поняття збіжності ряду (1) „в особливому розумінні", так, щоб це поняття було необхідною і достатньою умовою для аналітичності в області G суми ряду (1). Ця задача частково розв'язана за останній час. В зв'язку з цим дуже цінною є проблема про відшукання структурних властивостей функції $f(z)$, яка є сумою довільного збіжного ряду (1) аналітичних функцій. Ця дуже трудна проблема в повному вигляді ще не розв'язана до цього часу.

§ 2. Ряд Тейлора

1. Застосування теореми Вейерштрасса до степеневих рядів. Всякий степеневий ряд

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots, \tag{10}$$

радіус збіжності якого $R > 0$, як відомо, зображає функцію $f(z)$ неперервну всередині круга збіжності (розд. II, § 3, п. 6). За теоремою Вейерштрасса ми, далі, робимо висновок, що *сума $f(z)$ степеневого ряду* (10) *є функція, аналітична всередині його круга збіжності* $|z-a| < R$. Справді, з одного боку, ми знаємо, що ряд (10) збігається рівномірно в усякому крузі $|z-a| \leqslant r\ (r < R)$, цілком внутрішньому до круга збіжності (розд. II, § 3, п. 6); з другого боку, всі члени цього ряду є функції, аналітичні в усій площині комплексного змінного z. Отже, на підставі теореми Вейерштрасса (§ 1) сума ряду (10) $f(z)$ повинна бути функцією, аналітичною всередині круга збіжності. Прикладаючи другу частину теореми, ми бачимо, що степеневий ряд (10) можна почленно диференціювати скільки завгодно разів. У результаті ми одержуємо степеневі ряди:

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \ldots + nc_n(z-a)^{n-1} + \ldots, \tag{11}$$

$$f''(z) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(z-a) + \ldots + (n-1)\,nc_n(z-a)^{n-2} + \ldots, \tag{12}$$

і взагалі

$$f^{(p)}(z) = 1\cdot 2\cdot 3\ldots pc_p + 2\cdot 3\ldots p(p+1)\,c_{p+1}(z-a) + \ldots, \tag{13}$$

[1]) Див., наприклад, Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie.
[2]) Див., наприклад, G. Julia, Leçons sur les fonctions uniformes.
[3]) I. Priwaloff, Comptes Rendus, 1924, січень.

радіуси збіжності яких R, тобто круги їх збіжності будуть збігатися з кругом збіжності даного ряду (10). Справді, радіус збіжності похідного ряду (11) не може, очевидно, бути менше R, але він в той же час не може бути більшим R, тому що в супротивному випадку радіус збіжності первісного ряду (10), одержуваного почленним інтегруванням похідного ряду (11), був би також більший R. Таким чином, радіус збіжності похідного ряду дорівнює R. Зокрема, вважаючи в рядах (10), (11), (12) і (13) $z=a$, одержимо:

$$c_0=f(a),\ c_1=f'(a),\ c_2=\frac{f''(a)}{2!},\ \ldots,\ c_p=\frac{f^{(p)}(a)}{p!}. \tag{14}$$

Формули (14) називаються формулами Тейлора, а степеневий ряд (10), коефіцієнти якого c_p визначені за цими формулами, називається рядом Тейлора. Таким чином, ми бачимо, що всякий степеневий ряд з додатним радіусом збіжності є ряд Тейлора.

Крім формул (14) для коефіцієнтів c_p степеневого ряду (10) можна дати інші вирази. Позначаючи через C довільне коло з центром у точці $z=a$, яке лежить усередині круга збіжності ряду (10), і прикладаючи формулу Коші, знайдемо:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \tag{15}$$

звідки диференціюванням по параметру z одержимо:

$$f^{(p)}(z)=\frac{p!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{p+1}} \tag{16}$$

(розд. V, § 2, п. 3).

У формулах (15) і (16) z означає яку завгодно точку, що лежить усередині C; вважаючи в цих формулах зокрема $z=a$, знайдемо:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a}, \tag{15'}$$

$$f^{(p)}(a)=\frac{p!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{p+1}}. \tag{16'}$$

Звідси для коефіцієнтів c_p степеневого ряду ми одержуємо на підставі формул (14) такі інтегральні формули:

$$c_p=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{p+1}} \qquad (p=0,\ 1,\ 2,\ldots). \tag{17}$$

2. Розкладання аналітичної функції в степеневий ряд. В попередньому пункті ми бачили, що сума всякого степеневого ряду (10) з додатним радіусом збіжності є функція аналітична всередині його круга збіжності. Доведемо тепер обернене

твердження: *функція, аналітична всередині якогось круга, розкладається в степеневий ряд.*

Нехай $f(z)$ є функція, аналітична всередині якогось кола K з центром у точці a, радіуса R. Позначимо через z довільну точку всередині кола K і опишемо з точки a, як центра, коло C радіуса ρ, $\rho < R$ так, щоб точка z була всередині цього кола (рис. 82).

Тому що за умовою функція $f(z)$ є аналітична всередині кола C, включаючи точки самого кола, то її значення в точці z можна зобразити за формулою Коші:

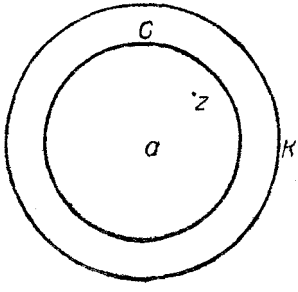

Рис. 82

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}. \qquad (18)$$

Наше завдання полягає в тому, щоб інтеграл (18) виразити у вигляді суми степеневого ряду відносно $z - a$.

Для цього перетворимо вираз $\frac{1}{\zeta - z}$ так:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z - a}{\zeta - a}\right)}. \qquad (19)$$

Яка б не була точка ζ на колі C, модуль дробу $u = \frac{z - a}{\zeta - a}$ буде дорівнювати сталому додатному числу $q (q < 1)$, тому що маємо:

$$|u| = \frac{|z - a|}{|\zeta - a|} = \frac{|z - a|}{\rho} = q < 1.$$

Отже, вираз $\frac{1}{1 - u}$ можна розглядати як суму нескінченно спадаючої геометричної прогресії:

$$\frac{1}{1 - u} = 1 + u + u^2 + \ldots + u^n + \ldots,$$

звідки, замінюючи u його значенням $\frac{z - a}{\zeta - a}$, одержуємо:

$$\frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} = 1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^2 + \ldots \qquad (20)$$

Підставляючи вираз (20) у формулу (19), знаходимо:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z - a}{(\zeta - a)^2} + \frac{(z - a)^2}{(\zeta - a)^3} + \ldots \qquad (21)$$

Ряд (20), а значить, і ряд (21) збігається рівномірно при сталому z, яка б не була точка ζ на колі C, тому що модулі його членів представляють нескінченно спадаючу геометричну прогресію, знаменник якої q не залежить від ζ (розд. II, § 2, п. 3).

Помножаючи ряд (21) на $f(\zeta)$, ми, не порушуючи його рівномірної збіжності, одержимо:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} + \frac{(z-a)f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} + \frac{(z-a)^2 f(\zeta)}{(\zeta - a)^3} + \dots \tag{22}$$

Інтегруючи почленно ряд (22) вздовж кола C, що ми маємо право зробити в наслідок його рівномірної збіжності (розд. IV, § 3, п. 3), і поділюючи всі члени ряду, одержаного після інтегрування, на $2\pi i$, знаходимо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} + (z-a)\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^2} +$$

$$+ (z-a)^2 \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^3} + \dots$$

або, користуючись формулою (18), перепишемо останній ряд так:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots, \tag{23}$$

де взято:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{24}$$

Коефіцієнти c_n ряду (23), що визначаються за формулою (24), не залежать від z, тому що за путь інтегрування C в інтегралі (24) ми можемо взяти який завгодно замкнутий контур, що обмежує точку a, яка лежить всередині кола K, не змінюючи при цьому значень c_n. Коефіцієнти c_n ряду (23) на підставі попереднього пункту можуть бути виражені також формулами Тейлора:

$$c_0 = f(a),$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{24'}$$

Отже, ми довели, що в усякій точці z всередині кола K функція $f(z)$ зображається у вигляді суми ряду (23), степеневого відносно $z - a$.

Ми називали функцію $f(z)$ аналітичною в точці a, якщо ця функція є аналітична в якомусь околі цієї точки, тобто якщо існує круг з центром у точці a як завгодно малого радіуса, всередині якого $f(z)$ є аналітична функція. Коротше, ми будемо називати таку точку *а правильною точкою* даної функції, а всяку неправильну точку функції $f(z)$ будемо називати її *особливою* точкою. Наприклад, для функції $\frac{1}{1-z}$ всяка точка z, $z \neq 1$, буде правильною; точка ж $z = 1$ буде особливою.

В попередньому пункті ми бачили, що степеневий ряд усередині свого круга збіжності зображає аналітичну функцію $f(z)$, тобто всі точки, що лежать всередині цього круга, є правиль-

ними точками для функції $f(z)$, зображуваної цим рядом. Щождо кола круга збіжності, то на ній буде принаймні одна особлива точка функції $f(z)$. Справді, припустивши супротивне, ми повинні припускати, що всі точки кола круга збіжності степеневого ряду є правильні точки для його суми $f(z)$. В цьому випадку кожна точка кола круга збіжності є центром якогось круга k, всередині якого функція $f(z)$ буде аналітичною. За лемою Гейне-Бореля (розд. II, § 1, п. 4) можна вибрати скінченне число цих кругів k так, щоб кожна точка кола круга збіжності містилася всередині принаймні одного з цих кругів. Позначаючи через ρ радіус найменшого з цих кругів, ми бачимо, що функція $f(z)$ буде аналітичною всередині круга, концентричного з кругом збіжності, радіуса $R+\rho$. На підставі результатів цього пункту ряд Тейлора функції $f(z)$ повинен збігатися всередині цього круга радіуса $R+\rho$, тобто радіус збіжності даного ряду принаймні дорівнює $R+\rho$, що неможливе, тому що за умовою він дорівнює R.

Отже, *якщо точка a є правильна точка функції $f(z)$, то ця функція розкладається в ряд, степеневий відносно $z-a$ в околі цієї точки, при чому коло круга збіжності ряду має центр у точці a і проходить через найближчу до точки a особливу точку функції $f(z)$*. Це твердження встановлює тісний зв'язок між радіусом збіжності степеневого ряду, з одного боку, і природою функції, зображуваної цим рядом, з другого боку; воно показує, що теорія степеневих рядів набуває повної ясності лише в комплексній області. Так, наприклад, залишаючись в області дійсних чисел, не можна зрозуміти, чому ряд

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots$$

перестає збігатися при значеннях $x\leqslant -1$ і $x\geqslant +1$, тоді як функція $\frac{1}{1+x^2}$ визначена для всіх дійсних значень незалежного змінного x, при чому значення $x=\pm 1$ не є для неї винятковими. Картина цього явища, однак, цілком з'ясовується з погляду комплексного змінного. Дійсно, функція $\frac{1}{1+z^2}$ має особливі точки при $z=\pm i$, а тому радіус збіжності розгляданого ряду дорівнює одиниці.

Приклад. Як було раніш показано (розд. V, § 2, п. 6), функція $\ln z=\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ є аналітична в усякій однозв'язній області, що не містить нульової точки, зокрема, наприклад, всюди справа від уявної осі. Отже, $\ln z$ можна розкласти в степеневий ряд в околі, наприклад $z=1$, при чому радіус збіжності цього ряду буде дорівнювати одиниці. Помітивши, що маємо:

$$f(z)=\ln z,\ f'(z)=\frac{1}{z},\ f''(z)=-\frac{1}{z^2},\ \ldots,\ f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{z^n},$$

одержуємо звідси при $z=1$:

$$c_0=f(1)=0,\ c_1=f'(1)=1,\ c_2=\frac{f''(1)}{2!}=-\frac{1}{2},\ \ldots,\ c_n=\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

і, значить, знаходимо:

$$\ln z = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n + \ldots$$

3. Поняття голоморфної функції і його еквівалентність з поняттям аналітичної функції. Умовимося говорити, що функція $f(z)$ є *голоморфна* в точці a, якщо вона в якомусь околі цієї точки розкладається в степеневий ряд відносно $z-a$. На підставі попереднього ця властивість голоморфності функції в точці a еквівалентна властивості її аналітичності в тій же точці. Дійсно, якщо функція $f(z)$ є голоморфна в точці a, то за означенням існує круг k з центром у точці a якогось радіуса ρ, всередині якого $f(z)$ розкладається в степеневий ряд відносно $z-a$. На підставі п. 1 функція $f(z)$, як сума степеневого ряду, повинна бути аналітичною всередині цього круга k, а значить, і в точці a.

Навпаки, якщо $f(z)$ є функція, аналітична в точці a, то існує круг k з центром у цій точці якогось радіуса ρ, всередині якого $f(z)$ буде аналітичною функцією. В наслідок п. 2 $f(z)$, як функція, аналітична всередині цього круга k, може бути зображена у вигляді суми ряду, степеневого відносно $z-a$, що збігається всередині k. Отже, $f(z)$ буде функцією, голоморфною в точці a.

Функцію, голоморфну в кожній точці області G, ми будемо коротко називати *голоморфною в цій області.*

Сказати, що функція $f(z)$ є голоморфна в якійсь області G, очевидно, рівносильно твердженню, що ця функція є аналітична в тій самій області G.

Таким чином, виходячи з означення функції, аналітичної в області, як однозначної функції, що має в кожній точці цієї області скінченну похідну, ми показали, що така функція буде голоморфною в тій же області, тобто в якомусь околі кожної точки цієї області функція розкладається в степеневий ряд.

У випадку функцій дійсного змінного розкладання в степеневий ряд не завжди можливе, навіть якщо функція має похідні всіх порядків; для функцій комплексного змінного можливість такого розкладання випливає з існування лише першої похідної всюди в розгляданій області.

4. Властивість єдиності аналітичних функцій. З теореми Коші і одержаного з її допомогою розкладу аналітичної функції в степеневий ряд ми можемо одержати дуже важливі наслідки, які нам дадуть змогу з'ясувати суть аналітичних функцій. Означення довільної функції комплексного змінного є настільки загальним, що з поведінки такої функції в якійсь частині області G площини комплексного змінного нічого не можна сказати про її поведінку в інших частинах області G. Так, наприклад, нехай $f(z)$ визначена в усій площині комплексного змінного z, при чому $f(z)=i$ при $|z|\leqslant 1$. Звідси ми нічого не можемо сказати відносно значень функції $f(z)$ при $|z|>1$, тому що для цих значень z ми можемо визначити довільно функцію $f(z)$. Трохи інакше стоїть справа в тому разі, коли функція $f(z)$ повинна

бути неперервною; тоді в останньому прикладі значення функцій $f(z)$ в точках, нескінченно близьких до кола $|z|=1$, повинні з свого боку нескінченно мало відрізнятися від i. В цьому випадку значення функції з'єднані між собою за допомогою якогось, хоча ще надто загального, закону. Ця внутрішня властивість з'єднує між собою функціональні значення так, що, знаючи значення функції в одній частині z-площини, можливо зробити більш або менш точний висновок про поведінку функції в інших частинах площини; очевидно, ця властивість буде тим сильніша, чим більш спеціальний клас функцій ми будемо розглядати. Наприклад, обмежуючись розглядом цілих раціональних функцій 4-го степеня:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \tag{25}$$

(a_k, x, y дійсні), ми знаємо, що така функція цілком визначається за допомогою небагатьох завдань. Так, якщо ми знаємо значення функції y для п'яти значень незалежного змінного x, то наша функція (25) цілком, тобто однозначно, визначена, при чому п'ять значень незалежного змінного x ми можемо брати як завгодно близько одно від одного. Таким чином, знаючи поведінку функції y на як завгодно малому інтервалі, ми можемо судити про поведінку її при всіх значеннях незалежного змінного x. Клас цілих раціональних функцій 4-го степеня має, значить, дуже сильну внутрішню властивість, за допомогою якої з'єднуються між собою різні значення такої функції.

Особливо визначним є той факт, що клас функцій, виділений нами з сукупності загальних функцій комплексного змінного за допомогою лише однієї вимоги їх диференційовності в області, названих нами функціями, аналітичними в цій області, має таку сильну внутрішню властивість, яка дає змогу, знаючи поведінку такої функції в як завгодно малій частинній області, зробити певний висновок про її поведінку в усій основній області. Або, точніше, функція, аналітична в області, буде цілком, тобто однозначно, визначена в цій області, якщо відомі значення цієї функції на як завгодно малій дузі лінії. В цьому відношенні вже формула Коші нам показувала, що ми можемо визначити всі значення аналітичної функції всередині замкнутого контура C, якщо відомі її значення на цьому контурі. На підставі теореми про розклад аналітичної функції в степеневий ряд (п. 2) ми зможемо виявити зазначену властивість єдиності аналітичних функцій у загальному вигляді. Цю властивість, в наслідок її величезного значення для побудови всієї теорії аналітичних функцій, поряд з інтегралом Коші треба розглядати як основну в цій теорії.

Цю властивість ми формулюємо в загальному вигляді так: *якщо дві функції $f(z)$ і $\varphi(z)$, голоморфні в якійсь області G, мають рівні значення на нескінченній множині точок E в цій області, при чому множина E має принаймні одну граничну*

точку, що лежить усередині G, то ці функції рівні між собою всюди в області G.

Ми доведемо спочатку це твердження для випадку, коли область G є круг, центр якого a є граничною точкою множини E. Отже, нехай

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots,$$
$$\varphi(z)=c'_0+c'_1(z-a)+c'_2(z-a)^2+\ldots$$

є розклади даних функцій, які збігаються в усякій точці z круга G. Щоб довести рівність функцій $f(z)$ і $\varphi(z)$ всюди всередині круга G, досить показати, що коефіцієнти c_n і c'_n рівні між собою при якому завгодно n, $n\geqslant 0$. За умовою, якщо точка z належить множині E, то маємо:

$$f(z)=\varphi(z). \tag{26}$$

Тому що точка a є гранична точка множини E, то можна вибрати послідовність точок z_k цієї множини, що збігається до точки a. З умови:

$$f(z_k)=\varphi(z_k), \tag{26'}$$

способом переходу до границі, в наслідок неперервності функцій $f(z)$ і $\varphi(z)$ у точці a, одержуємо $f(a)=\varphi(a)$, або $c_0=c'_0$.

Помітивши це, рівність (26) перепишемо у вигляді:

$$c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots=c'_1(z-a)+c'_2(z-a)^2+ \tag{26''}$$

де z означає яку завгодно точку множини E. Скорочуючи цю рівність (26″) на $z-a$, одержимо:

$$c_1+c_2(z-a)+\ldots=c'_1+c'_2(z-a)+ \tag{26'''}$$

Остання рівність має місце для всіх точок z множини E, зокрема при $z=z_k$. Переходячи до границі в припущенні, що $\lim z_k=a$, аналогічно попередньому одержимо: $c_1=c'_1$. Діючи так далі, знайдемо: $c_2=c'_2$, ..., і взагалі $c_n=c'_n$ при якому завгодно n.

Нехай тепер дві функції $f(z)$ і $\varphi(z)$, голоморфні в області G, мають рівні значення на нескінченній множині точок E цієї області, при чому множина E припускає граничну точку a, що лежить усередині G. Ми доведемо тотожність наших функцій всюди в області G, якщо покажемо, що вони мають рівні значення в довільній точці b області G. Для цього сполучимо точки a і b довільною неперервною лінією L, що лежить в області G (рис. 83). Позначимо через $d\,(d>0)$ віддаль лінії L до границі області G, тобто мінімум різних можливих віддалей між двома точками, в яких одна належить лінії L, а друга — границі області G. Очевидно, круг з центром в якій завгодно точці лінії L радіуса $\frac{d}{2}$ цілком лежить в області G. У наслідок розглянутого вище окремого випадку дані функції збігаються між

собою всюди всередині круга з центром у точці a радіуса $\frac{d}{2}$, тому що точка a є гранична точка множини E (рис. 83). Примушуючи центр круга радіуса $\frac{d}{2}$ неперервно рухатися по лінії L від точки a до точки b, ми бачимо, що наші функції повинні збігатися весь час між собою всередині круга, яке б не було положення цього рухомого круга. Отже, зокрема, маємо: $f(b)=\varphi(b)$, що й потрібно.

Отже, ми довели, що функція $f(z)$, голоморфна в області G, визначена єдиним чином, якщо відомі її значення на нескінченній послідовності точок z_k, яка має хоча б одну граничну точку всередині G. Але ж і досі залишається нерозв'язаним питання, як треба a priori вибирати значення $f(z_k)$ функції в точках заданої нескінченної послідовності для того, щоб вони були значеннями якоїсь функції $f(z)$, голоморфної в області G.

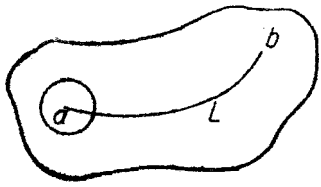

Рис. 83

Як наслідок доведеної теореми відзначимо, що дві функції $f(z)$ і $\varphi(z)$, голоморфні в області G, тотожно рівні між собою в цій області, якщо:

1) $f(z)=\varphi(z)$ всюди в довільно малому околі якоїсь точки області G.

2) $f(z)=\varphi(z)$ на довільно малій лінії, що цілком лежить в G.

Це є одна з визначних властивостей аналітичних функцій, яку не мають довільні неперервні функції комплексного змінного: у випадку довільної функції комплексного змінного, неперервної в області G, значення її в околі однієї точки області G ні в якому разі не визначають її значень у всіх точках цієї області.

5. Принцип максимального модуля. Формула (56) з розд. V, § 2, п. 8 набирає особливо простого вигляду при $z=0$.

Тоді буде:

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi})\,d\psi, \qquad (56')$$

тобто значення голоморфної функції в центрі круга дорівнює середньоарифметичному її значень на колі цього круга.

Користуючись формулою (56′), можна встановити дуже важливий принцип теорії аналітичних функцій, що називається ***принципом максимального модуля.*** За цим принципом модуль функції, голоморфної у відкритій області G, ні в якій точці цієї області не може досягати свого максимуму, за винятком випадку, коли функція є тотожне стале.

Справді, позначимо через M верхню границю модуля змінної функції $f(z)$, аналітичної в області G, і припустимо супротивне принципові, що в якійсь точці z_0 області G модуль функції $f(z)$ дорівнює своєму максимуму, тобто $|f(z_0)|=M$.

Застосуємо формулу (56′) до круга з центром у точці z_0, який належить разом із своєю периферією області G; тоді одержимо:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\psi})\,d\psi,$$

звідки випливає:

$$|f(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+Re^{i\psi})|\,d\psi. \tag{27}$$

Тому що

$$|f(z_0+Re^{i\psi})|\leqslant M, \quad \text{а} \quad |f(z_0)|=M,$$

то з рівності (27) вбачаємо, що $|f(z_0+Re^{i\psi})|=M$ при якому завгодно ψ. Дійсно, якщо при якомусь значенні $\psi=\psi_0$ ми мали б

$$|f(z_0+Re^{i\psi_0})|<M,$$

то в наслідок неперервності $|f(z)|$ нерівність $|f(z_0+Re^{i\psi})|<M$ здійснювалася б в якомусь достатньо малому проміжку

$$\psi_0-\varepsilon<\psi<\psi_0+\varepsilon,$$

поза цим же проміжком весь час

$$|f(z_0+Re^{i\psi})|\leqslant M.$$

При таких самих умовах права частина нерівності (27) була б меншою, ніж M, тоді як ліва частина рівна M, чого бути не може.

Отже, ми показали, що $|f(z)|=M$ на всякому достатньо малому колі з центром у точці z_0, або, що те ж саме, в достатньо малому околі точки z_0. Звідси ж легко вивести, що $f(z)$ є стале число.

Справді, функція $\ln f(z)$ має сталу дійсну частину, тому що дійсна частина логарифма дорівнює логарифмові модуля. В наслідок умов Коші-Рімана (розд. II, § 4, п. 4) голоморфна функція $\ln f(z)$ з сталою дійсною частиною є стале число, а значить, і $f(z)$ є стале число. Таким чином, ми довели, що в якомусь околі точки z_0 функція $f(z)$ є стале число; в наслідок теореми єдиності (п. 4) в цьому випадку функція $f(z)$ дорівнює тотожно сталому всюди в області G, що неможливе.

З доведеного принципу випливає: якщо $f(z)$ є функція, голоморфна в області G і неперервна в замкнутій області $\overline{G}$, то, при умові, що $f(z)$ не є стале число, її модуль необхідно набуває максимальне значення на границі області G. Справді, функція $|f(z)|$, будучи неперервною в замкнутій області $\overline{G}$, в наслідок відомої теореми класичного аналізу, приймає своє максимальне значення M в якійсь точці z_0 цієї області. В наслідок доведеного точка z_0 не може лежати в області G, отже вона розміщена на границі області G.

6. Нулі аналітичної функції. Ми називаємо нулем функції $f(z)$, голоморфної в області G, всяку точку z_0 цієї області, в якій має місце рівність: $f(z_0)=0$.

Множина всіх нулів нашої функції $f(z)$, що лежать в області G, може бути скінченною або нескінченною. Проте ніяка точка області G не може бути граничною точкою множини нулів функції $f(z)$, якщо $f(z)$ не є тотожний нуль (п. 4). Отже, всі граничні точки множини нулів функції $f(z)$ повинні бути на границі області G. Звідси зокрема випливає, що навколо всякого нуля функції $f(z)$ можна описати, як з центру, коло достатньо малого радіуса так, що всередині цього кола немає інших нулів, крім центра.

Легко бачити далі, що множину всіх нулів функції $f(z)$ $(f(z) \not\equiv 0)$, що лежать в області G, де дана функція є голоморфною, можна розглядати у вигляді послідовності точок, тобто всі нулі можна перенумерувати за допомогою натуральних чисел.

Дійсно, позначимо через $\overline{G}'_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ систему замкнутих областей, які цілком лежать в області G і таких, що кожна з них міститься в наступній, при чому максимальна віддаль границі області $\overline{G}'_n$ до границі області G нехай дорівнює $\frac{1}{n}$, тобто $\frac{1}{n}$ є максимум віддалей між границею області $\overline{G}'_n$ і точками границі області G. В кожній замкнутій області $\overline{G}'_n$ є лише скінченне число нулів функції $f(z)$, тому що в супротивному випадку існувала б гранична точка цих нулів, яка лежить в області G, що є неможливе. Помітивши це, розглянемо спочатку всі нулі функції $f(z)$, які лежать в області $\overline{G}'_1$; позначимо їх через $z_1, z_2, \ldots, z_{k_1}$, потім розглянемо ті нулі, які лежать в $\overline{G}'_2$ і поза $\overline{G}'_1$; позначимо їх через $z_{k_1+1}, z_{k_1+2}, \ldots, z_{k_2}$ і т. д В результаті ми одержимо послідовність точок $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, що вичерпує всі різні нулі функції $f(z)$, які лежать в області G, тому що кожний нуль міститься на певній додатній віддалі від границі області G і, значить, належить області $\overline{G}'_n$, починаючи з якогось n. Всі зазначені вище висновки про розміщення нулів аналітичної функції залишаються в силі для множини тих точок області G, в яких функція $f(z)$, голоморфна в G, набирає сталого значення c, тому що точки, в яких маємо: $f(z) = c$, є нулі функції $f(z) - c$.

7. Порядок нуля. Якщо функція $f(z)$ $(f(z) \not\equiv 0)$, голоморфна в області G, дорівнює нулеві в точці a цієї області, то розклад її для якогось околу точки a має вигляд:

$$f(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \tag{28}$$

тому що $c_0 = f(a) = 0$.

Очевидно, всі коефіцієнти c_n розкладу (28) не можуть дорівнювати нулеві, тому що в цьому випадку функція $f(z)$, яка дорівнює нулеві, всюди в якомусь околі точки a була б за теоремою єдиності (п. 4) тотожним нулем в області G. Отже, серед

коефіцієнтів $c_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ є відмінні від нуля; позначимо через $m (m \geqslant 1)$ найменший номер таких коефіцієнтів.

Тоді маємо:

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0, \qquad c_m \neq 0$$

значить, розклад (28) набирає вигляду:

$$f(z) = c_m (z - a)^m + c_{m-1} (z - a)^{m-1} + \tag{28'}$$

де $c_m \neq 0$.

В цьому випадку ми скажемо, що точка a є нуль порядку m для функції $f(z)$. Якщо $m = 1$, то нуль називають *простим*, при $m > 1$ — кратним.

8. Нерівності Коші для коефіцієнтів степеневого ряду. *Якщо степеневий ряд*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \tag{29}$$

збігається в крузі $|z| < R$ і зображає в ньому функцію $f(z)$, модуль якої весь час менший M, то мають місце нерівності:

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{R^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{30}$$

Ці нерівності (30) ми одержуємо негайно, як тільки скористуємося інтегральними формулами для коефіцієнтів степеневого ряду (розд. VI, § 2, п. 1):

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

де інтегрування виконується по довільному колу $|\zeta| = \rho$, $(\rho < R)$. Оцінюючи $|c_n|$, знаходимо:

$$|c_n| < \frac{M}{\rho^n}.$$

Тому що остання нерівність має місце для всіх ρ, $\rho < R$, то способом переходу до границі при ρ, що прямує до R, знаходимо остаточно:

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{R^n} \tag{31}$$

9. Теорема Ліувілля. Ця теорема полягає ось у чому: *якщо функція $f(z)$, голоморфна в усій площині, залишається рівномірно обмеженою, то вона є тотожне стале.*

Дійсно, в розгляданому випадку розклад

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \tag{32}$$

має місце в усякій точці z площини. Користуючись нерівностями Коші (п. 8), маємо:

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{R^n} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

де M є стале число, а R можна вважати як завгодно великим. Отже, маємо $c_n = 0$, якщо $n \geqslant 1$, і, значить, в наслідок (32) буде: $f(z) = c_0$.

10. Друга теорема Вейерштрасса. Нехай дано ряд

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \tag{33}$$

всі члени якого є функції, голоморфні в області G і неперервні в замкнутій області $\bar{G}$. При цих умовах ми доведемо, *що коли ряд (33) збігається рівномірно на границі області G, то він збігається також рівномірно в усій замкнутій області $\bar{G}$.*

Дійсно, позначаючи через ζ довільну точку границі області G, за умовою маємо:

$$|f_{N+1}(\zeta) + f_{N+2}(\zeta) + \ldots + f_{N+p}(\zeta)| < \varepsilon \tag{34}$$

при довільному як завгодно малому $\varepsilon > 0$, якщо $N = N(\varepsilon)$ і $p \geqslant 1$. Тому що функція $[f_{N+1}(z) + f_{N+2}(z) + \ldots + f_{N+p}(z)]$ є голоморфна в області G і неперервна в замкнутій області $\bar{G}$, то нерівність (34) повинна мати місце також у всіх точках z області G (п. 5). Таким чином нерівність (34) залишається в силі, якщо під ζ розуміти яку завгодно точку замкнутої області $\bar{G}$, звідки виходить рівномірна збіжність ряду (33) в усій області $\bar{G}$ (розд. I, § 3, п. 7)

Вправи до розділу VI

1. Розкласти головне значення $\sqrt[m]{z}$ в степеневий ряд в околі $z = 1$; окремо при $m = 2$.

Відп. $1 + \frac{1}{m}(z-1) + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\frac{(z-1)^2}{2!} + \ldots;$

$$1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}(z-1)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}(z-1)^3 - \ldots$$

2. Довести, що модуль голоморфної функції $f(z)$ не може мати в точці z_0 мінімуму, нерівного нулеві; $R[f(z)]$ і $I[f(z)]$ — ні максимуму, ні мінімуму.

3. Розкласти головні значення функцій $\operatorname{arctg} z$ і $\arcsin z$ в степеневі ряди в околі нульової точки.

Відп. $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots;\quad z + \frac{1}{2 \cdot 3}z^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! \cdot 5}z^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3! \cdot 7}z^7 +$

4. Визначити область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}$.

Відп. При $|z| < 1$ абсолютно збігається; при $|z| \geqslant 1$ розбігається.

5. Визначити, в якій частині своєї області збіжності ряд задачі 4 збігається рівномірно.

Відп. При $|z| \leqslant 1 - \delta \quad (\delta > 0)$.

6. Якщо ряд $\sum |f_n(z)|$ рівномірно збігається в області G і $f_n(z)$ — аналітичні функції в G, то $\sum |f_n'(z)|$ збігається рівномірно в кожній замкнутій області, що належить G.

7. Обчислити перші чотири коефіцієнти степеневого ряду для функцій:

$$\text{a) } e^{\frac{1}{1-z}};\quad \text{b) } \sin\frac{1}{1-z};\quad \text{c) } \ln(1 + e^z).$$

Відп. a) $e^{\frac{1}{1-z}} = e\left[1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{13}{6}z^3 + \frac{73}{24}z^4 + \quad\right]$

b) $\sin\frac{1}{1-z} = \sigma + vz + \left(v - \frac{1}{2}\sigma\right)z^2 + \left(\frac{5}{6}v - \sigma\right)z^3 +$

де $\sigma = \sin 1$, $v = \cos 1$;

c) $\ln(1 + e^z) = \ln 2 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{192} +$

8. Утворити повні степеневі ряди для функцій:

$$\text{a) } \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2; \quad \text{b) } \sin^2 z \quad \text{і} \quad \cos^2 z.$$

Відп. a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)z^n$

b) $\sin^2 z = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}}{(2n)!}z^{2n}$

$$\cos^2 z = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}z^{2n}$$

9. Якщо $f(z)$ в однозв'язній області G є аналітична функція (не рівна сталому числу), то який завгодно замкнутий контур C, що належить G, містить усередині себе тільки скінченне число коренів рівняння $f(z) = a$.

10. Чи існує функція, аналітична в нульовій точці, яка в точках $z = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ приймає значення: a) 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...; b) 0, $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{6}$, ...; c) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, ...; d) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ...

Відп. a) ні; b) ні; c) ні; d) так, $\frac{1}{1+z}$.

11. В точці z_0 аналітична функція $f(z)$ має нуль порядку α. Яку поведінку має в точці z_0 функція $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$? Яку поведінку в точці z_0 має функція $\Phi(z) = \int_{z_1}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$, якщо z_1 лежить в околі z_0, в якому $f(z)$ — аналітична функція і путь інтеграції розміщений в цьому околі?

Відп. $F(z)$ має нуль порядку $\alpha + 1$; $\Phi(z)$ приймає $\alpha + 1$ раз $c = \int_{z_1}^{z_0} f(\zeta)\,d\zeta$.

Розділ VII

Ізольовані особливі точки однозначної функції

§ 1. Ряд Лорана

1. Розклад аналітичної функції в ряд Лорана. Нехай $f(z)$ є функція, голоморфна всередині кругового кільця, границя якого складається з двох кіл K і k з спільним центром у точці a. Позначимо радіуси цих кіл відповідно через R і r (рис. 84). Ми утворимо ряд, розміщений по додатних і від'ємних степенях $z-a$, який збігається до функції $f(z)$ в кожній точці z, яка лежить усередині кільця, тобто при умові: $r<|z-a|=\rho<R$. Для цього виберемо два радіуси r' і R' так, щоб: $r<r'<\rho<R'<R$, і позначимо через c і C кола цих радіусів з центром у точці a (рис. 84).

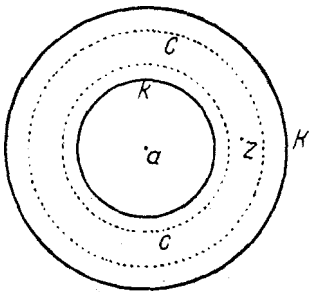

Рис. 84

За умовою функція $f(z)$ буде голоморфна в кільці між цими колами, включаючи й самі кола c і C. Прикладаючи фурмулу Коші (розд. V, § 2, п. 2), одержуємо:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}, \tag{1}$$

де путі інтегрування C і c проходяться обидві в додатному напрямі.

Помічаючи, що в першому інтегралі формули (1) означає точку кола C, маємо:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}. \tag{2}$$

Одержаний ряд (2) збігається рівномірно для всіх точок ζ на колі C, тому що маємо:

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{\rho}{R'}<1$$

(див. розд. VI, § 2, п. 2).

В другому інтегралі формули (1) означає точку кола c; помітивши, що маємо:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{\zeta - a}{z - a}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z-a)^{n+1}}, \tag{3}$$

одержуємо ряд (3), що рівномірно збігається для всіх точок на колі c, тому що

$$\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| = \frac{r'}{\rho} < 1.$$

Підставляючи розклади (2) і (3) в інтеграли формули (1) і виконуючи почленне інтегрування, що можна зробити в наслідок рівномірної збіжності відносно ζ, одержимо:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)(\zeta - a)^n}{(z-a)^{n+1}} d\zeta. \tag{4}$$

Вважаючи для скорочення:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{6}$$

перепишемо рівність (4) у вигляді:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}. \tag{4'}$$

Формули (5) і (6) для c_n і b_n можна об'єднати у вигляді однієї формули:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, -1, -2, \ldots), \tag{7}$$

де контур інтегрування γ є довільне коло з центром у точці a, яке лежить усередині даного кільця.

Справді, тому що підінтегральні функції формул (5) і (6) є голоморфні всюди всередині даного кільця, то, не змінюючи значень c_n і b_n, ми можемо прийняти в них за путь інтегрування яке завгодно коло γ з центром у точці a, яке лежить усередині цього кільця; з другого боку, маємо:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{-n+1}} = c_{-n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Звідси, зокрема, випливає, що коефіцієнти c_n, визначувані формулою (7), не залежать від точки z, тому що під γ ми маємо

право розуміти яке завгодно коло з центром у точці a, яке лежить усередині даного кільця.

Розклад (4′) на підставі заведених позначень ми можемо записати так:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} \qquad (4'')$$

або

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n. \qquad (4''')$$

Таким чином ми одержали зображення функції $f(z)$, справедливе для всіх точок z, які лежать усередині даного кільця, за допомогою ряду (4″), що складається з двох частин: перша його частина, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, є ряд, розміщений по висхідних степенях $z-a$ (степеневий ряд відносно $z-a$); друга частина $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n$, являє собою ряд, розміщений по спадних від'ємних степенях $z-a$ $\left(\text{степеневий ряд відносно } \frac{1}{z-a}\right)$. *Обидва ці ряди збігаються в кожній точці z, яка лежить усередині даного кільця.* Ряд (4″) носить назву ряду Лорана.

2. Правильна і головна частини ряду Лорана. Розглянемо окремо ті два ряди, з яких складається ряд Лорана (4″). Перший ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ є звичайний степеневий ряд, який, значить, збігається для всіх точок z, що лежать усередині кола K, і зображає функцію $f_1(z)$, голоморфну всюди всередині кола K. Цей перший ряд, що входить у розклад Лорана (4″), називається *правильною* частиною ряду Лорана. Другий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ можна також розглядати як звичайний степеневий ряд, якщо вважати:

$$c_{-n}=b_n, \quad \frac{1}{z-a}=z' \qquad (8)$$

В нових позначеннях цей ряд набере вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z'^n \qquad (9)$$

Ряд (9) буде збіжним, очевидно, при $\frac{1}{R}<|z'|<\frac{1}{r}$, тому що початковий ряд збігається, якщо $r<|z-a|<R$.

Отже, ряд (9), будучи степеневим відносно z', збігається для всіх точок z', для яких маємо $|z'|<\frac{1}{r}$, і зображає функцію змінного z', голоморфну при $|z'|<\frac{1}{r}$.

Вертаючись за допомогою (8) до старого змінного z, ми бачимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ збігається при всіх z, для яких має місце нерівність $|z-a|>r$, тобто в усіх точках z, що лежать поза колом k, і зображає функцію $f_2(z)$, голоморфну всюди поза k. Цей другий ряд, що входить у розклад (4″), називається *головною* частиною ряду Лорана. Отже, дана функція $f(z)$ — зображається у вигляді суми:

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z),$$

де $f_1(z)$ є функція, голоморфна всередині кола K, а $f_2(z)$ є функція, голоморфна поза колом k. Всередині кільця, розміщеного між колами K і k, обидві функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ є голоморфні.

3. Єдиність розкладу Лорана. Подібно розкладові Тейлора, знайдений розклад (4″) Лорана є єдино можливий для даної функції $f(z)$.

Дійсно, припустимо, що в усіх точках z, внутрішніх до якогось кільця, одночасно мають місце два розклади:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n(z-a)^n \qquad 10$$

Помножаючи обидва розклади (10) на $(z-a)^{-k-1}$ і інтегруючи вздовж довільного кола з центром у точці a, що лежить усередині кільця, на якому обидва ряди рівномірно збігаються, одержимо:

$$2\pi i c_k=2\pi i c'_k \quad \text{або} \quad c_k=c'_k \quad (k=0,\ \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Із викладеного в п. 1 і 2 випливає, що точна область збіжності ряду Лорана (4‴) є кругове кільце з центром у точці a, всередині якого функція $f(z)$ голоморфна і на кожному колі K і k якого є принаймні по одній особливій точці цієї функції. Зокрема, якщо всередині K функція $f(z)$ не має особливих точок, то її розклад Лорана обертається в ряд Тейлора.

Приклад. Неважко одержати розклад:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \quad \text{якщо } 1<|z|<2,$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}, \quad \text{якщо } 2<|z|<+\infty.$$

Тут ми маємо два різні розклади Лорана для однієї і тієї ж функції; але ж, це зовсім не суперечить теоремі про єдиність розкладу, тому що зазначені розклади мають місце для різних кругових кілець.

§ 2. Класифікація особливих точок однозначної функції

1. Три типи ізольованих особливих точок. Особливої уваги заслуговує випадок, коли всередині кола K його центр a є єдина особлива точка функції $f(z)$. Розклад Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \tag{11}$$

в цьому випадку збігається в усякій точці z, яка лежить усередині кола K, крім точки $z=a$, і зображає функцію $f(z)$, голоморфну всюди всередині кола K, крім її центра. Точка a називається в цьому випадку *ізольованою особливою точкою* функції $f(z)$, зображуваною всюди в околі такої точки (крім $z=a$) розкладом вигляду (11). В основу класифікації ізольованих особливих точок однозначної функції $f(z)$ ми покладемо характер її розкладу в околі таких точок. Можливі три випадки:

1. Розклад Лорана (11) містить нескінченну множину від'ємних степенів $z-a$. В цьому випадку точка a називається *істотно особливою точкою* функції $f(z)$.

2. Розклад (11) містить лише скінченне число від'ємних степенів $z-a$. В цьому випадку точку a назвемо *полюсом* функції $f(z)$.

3. Розклад (11) зовсім не містить від'ємних степенів $z-a$. В цьому випадку a називається усуваною особливою точкою функції $f(z)$.

Розподіливши ізольовані особливі точки однозначної функції на три типи, з'ясуємо тепер характер поведінки функції в околі особливої точки кожного з зазначених типів (під околом ізольованої особливої точки a ми розуміємо сукупність всіх точок z, що задовольняють умові: $0<|z-a|<R$, де R вибрано таким малим, щоб функція $f(z)$ була голоморфною в усіх точках z).

2. Усувана особлива точка. Почнемо з розгляду особливої точки третього типу. В цьому випадку розклад (11) обертається в звичайний степеневий ряд і, значить, збігається всюди в околі точки a, включаючи й саму точку a; його сума буде зображати функцію, голоморфну всюди в околі точки a, включаючи саму точку a. Дана функція $f(z)$ збігається з сумою нашого ряду, якщо $z \neq a$. Отже, ми зробимо дану функцію $f(z)$ голоморфною в точці a, якщо візьмемо:

$$f(a)=c_0$$

Отже, особлива точка третього типу зникає, якщо ми належним способом визначимо нашу функцію в цій точці. З попереднього випливає, що коли a є усувана особлива точка, то маємо: $\lim\limits_{z\to a} f(z)=c_0$; зокрема, існують додатні числа M і η такі, що маємо:

$$|f(z)| < M \quad \text{при} \quad 0<|z-a|<\eta. \tag{12}$$

Наявність нерівностей (12) ми коротко виразимо словами: *в достатньо малому околі усуваної особливої точки дана функція обмежена.* В дальшому ми побачимо, що, навпаки, *якщо функція обмежена в околі ізольованої особливої точки, то ця точка є усувана особлива точка.*

3. Полюс. Перейдемо тепер до аналізу особливої точки другого типу, названої полюсом. В цьому випадку розклад (11) містить скінченне число від'ємних степенів $z-a$. Позначаючи через m найвищий степінь дробу $\left(\frac{1}{z-a}\right)$ у розкладі Лорана (11), одержимо

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n+\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}, \qquad (11')$$

де $c_{-m}\neq 0$. Якщо $m=1$, то полюс a називають *простим*, при $m>1$ його називають *кратним*; число m називається *порядком полюса.* Помножаючи обидві частини розкладу (11′) на $(z-a)^m$, $z\neq a$, знаходимо:

$$(z-a)^m\cdot f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^{n+m}+c_{-1}(z-a)^{m-1}+$$
$$+c_{-2}(z-a)^{m-2}+\ldots+c_{-m}. \qquad (13)$$

В правій частині одержаної рівності (13) стоїть звичайний степеневий ряд, вільний член якого c_{-m} відмінний від нуля.

Отже, точка a для функції $(z-a)^m\cdot f(z)$ є усуваною особливою точкою, при чому маємо:

$$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=c_{-m}\neq 0. \qquad (14)$$

Зокрема, з рівності (14) виходить:

$$\lim_{z\to a}|z-a|^m|f(z)|=|c_{-m}| \qquad (15)$$

Позначаючи через q довільне додатне число, менше ніж $|c_{-m}|$, ми можемо знайти в наслідок (15) достатньо мале додатне число η, таке, що матимемо:

$$|z-a|^m|f(z)|>q, \quad \text{якщо } 0<|z-a|<\eta,$$

або

$$|f(z)|>\frac{q}{|z-a|^m} \qquad \text{при } 0<|z-a|<\eta. \qquad (16)$$

Останні нерівності (16) показують, що $f(z)$ прямує до нескінченності, коли точка z прямує до точки a, що символічно записують так:

$$\lim_{z\to a} f(z)=\infty. \qquad (15')$$

Коротше, можна сказати, що в достатньо малому околі полюса функція стає нескінченно великою.

4. Зв'язок між нулем і полюсом. Нехай функція $f(z)$ має в точці a нуль порядку m. Як відомо (розд. VI, § 2, п. 7), в якомусь околі такої точки a функція $f(z)$ може бути зображена у вигляді степеневого ряду:

$$f(z)=c_m(z-a)^m+c_{m+1}(z-a)^{m+1}+ \tag{17}$$

де $c_m \neq 0$, або

$$f(z)=(z-a)^m\cdot\varphi(z),$$

при цьому функція $\varphi(z)$ є голоморфна в точці a і не рівна нулеві. Обернена величина $\frac{1}{f(z)}$ зобразиться в наслідок (17) так:

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-a)^m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{\psi(z)}{(z-a)^m}, \tag{18}$$

при чому функція $\psi(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$ буде голоморфною в точці a та відмінною від нуля. Помітивши, що маємо:

$$\psi(z)=\psi(a)+\psi'(a)(z-a)+$$

одержуємо з (18) в околі точки a, $z \neq a$:

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{\psi(a)}{(z-a)^m}+\frac{\psi'(a)}{(z-a)^{m-1}}+$$

звідки випливає, що точка a є полюсом m-го порядку для функції $\frac{1}{f(z)}$.

Навпаки, припускаючи точку a полюсом порядку m для функції $f(z)$, ми мали б в околі такої точки ($z \neq a$):

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \tag{19}$$

де функція $\varphi(z)$ прямує до границі, відмінної від нуля, коли точка z прямує до точки a (п. 3) і, значить, може бути розглядана як функція, голоморфна в точці a і не рівна нулеві [вважаючи $\varphi(a)$ рівною зазначеній границі (п. 2)]. Склавши за допомогою рівності (19) вираз

$$\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\frac{1}{\varphi(z)}=(z-a)^m\cdot\psi(z) \tag{20}$$

і провівши такі самі обчислення, як і вище, знайдемо:

$$\frac{1}{f(z)}=\psi(a)(z-a)^m+\psi'(a)(z-a)^{m+1}+\ldots,$$

де $\psi(a) \neq 0$, звідки виходить, що точка a є нулем порядку m для функції $\frac{1}{f(z)}$, якщо візьмемо $\frac{1}{f(a)}=0$.

Отже, резюмуючи викладене, ми приходимо до висновку: *якщо точка a є нуль порядку m для функції $f(z)$ (або полюс порядку m), то та ж сама точка для функції $\frac{1}{f(z)}$ буде полюсом*

порядку m $\left(\text{відповідно нулем порядку } m \text{ при умові } \frac{1}{f(a)}=0\right)$

З викладеного випливає, що функція $f(z)$ має точку a істотно особливою точкою одночасно з функцією $\frac{1}{f(z)}$.

Приклад. Раціональна функція, зображувана нескорочуваним дробом

$$\frac{p_0z^n+p_1z^{n-1}+\ldots+p_n}{q_0z^m+q_1z^{m-1}+\ldots+q_m},$$

має полюсами нулі знаменника, при чому порядок кожного полюса дорівнює порядкові відповідного нуля.

5. Істотно особлива точка. Залишається дослідити поведінку функції $f(z)$ в околі істотно особливої точки. Ми бачили, що у випадку усуваної особливої точки a функція $f(z)$ прямує до певної скінченної границі c_0, коли точка z прямує до точки a (п. 2); у випадку полюса функція прямує також до певної границі рівної нескінченності (п. 3). Якщо ж a є істотно особлива точка, то тут має місце така теорема, що належить Вейерштрассові: *яке б не було стале число A, скінченне або нескінченне, існує послідовність точок* $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, *що збігається до істотно особливої точки a, така, що маємо*: $\lim\limits_{z_n\to a} f(z_n)=A$.

Коротше це можна сформулювати так: в як завгодно малому околі істотно особливої точки функція $f(z)$ приймає значення, як завгодно близькі до якого завгодно наперед заданого числа, скінченного або нескінченного.

Зауваження. Щоб дати геометричну характеристику теореми Вейерштрасса, будемо зображати точками площини w значення функції $w=f(z)$, які вона приймає в як завгодно малому околі $0<|z-a|<\delta$ істотно особливої точки a. Теорема Вейерштрасса твердить, що яка завгодно точка A площини w є граничною точкою для множини значень, які приймає функції $w=f(z)$ в як завгодно малому околі точки a.

Переходячи до доведення теореми Вейерштрасса, припустимо спочатку, що $A=\infty$. Покажемо, що існує послідовність точок z_n, $\lim z_n=a$ таких, що маємо: $\lim\limits_{z_n\to a} f(z_n)=\infty$. Позначаючи для скорочення через $P(z-a)$ правильну частину розкладу Лорана (11), що містить додатні степені $z-a$ і вільний член, а через $Q\left(\frac{1}{z-a}\right)$ його головну частину, яка містить від'ємні степені $z-a$, можемо переписати (11) у вигляді:

$$f(z)=P(z-a)+Q\left(\frac{1}{z-a}\right). \qquad (11'')$$

Щодо правильної частини $P(z-a)$, то при якому завгодно прямуванні точки z до точки a маємо:

$$\lim_{z\to a} P(z-a)=c_0. \qquad (21)$$

Вважаючи в головній частині $Q\left(\frac{1}{z-a}\right)$:

$$\frac{1}{z-a}=z', \tag{22}$$

матимемо:

$$Q\left(\frac{1}{z-a}\right)=Q(z')=c_{-1}z'+c_{-2}z'^2+\ldots+c_{-n}z'^n+ \tag{23}$$

Тому що ряд $Q\left(\frac{1}{z-a}\right)$ збігається всюди, крім точки $z=a$ (§ 1, п. 2), то ряд (23), очевидно, буде збіжним у всій площині комплексного змінного z'. Функція $Q(z')$ за теоремою Ліувілля (розд. VI, § 2, п. 9) не може бути обмеженою в усій площині комплексного змінного z', тобто яке б натуральне число N ми не взяли, знайдеться точка z'_N, $|z'_N|>N$, така, що матимемо: $|Q(z'_N)|>N$. Примушуючи N пробігати значення 1, 2, 3, $n,\ldots$, ми одержимо послідовність точок $z'_1, z'_2, z'_3, \ldots, z'_n$, яка прямує до нескінченності і для якої матимемо $\lim\limits_{z'_n\to\infty} Q(z'_n)=\infty$.

Вертаючись до попереднього змінного z, ми бачимо на підставі (22), що послідовність точок z'_n перетворюється в послідовність точок $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, що збігається до точки a, таку, що маємо:

$$\lim_{z_n\to a} Q\left(\frac{1}{z_n-a}\right)=\infty. \tag{24}$$

Примушуючи точку z прямувати до точки a, проходячи послідовність точок z_n, вбачаємо з рівності (11″) на підставі рівностей (21) і (24):

$$\lim_{z_n\to a} f(z_n)=\infty.$$

Нехай тепер A є довільне скінченне комплексне число. Може трапитися, що в довільному малому околі точки a існує точка z така, що маємо $f(z)=A$. В цьому випадку теорема Вейєрштрасса справедлива. Таким чином, ми можемо припустити, що в достатньо малому околі точки a функція $f(z)$ не дорівнює A. Якщо так, то функція $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-A}$ буде голоморфною в цьому околі точки a, крім точки $z=a$, яка для неї є істотно особлива точка [тому що $z=a$ істотно особлива точка для $f(z)$]. За доведеним існує послідовність точок z_n, що збігається до точки a, така, що маємо: $\lim\varphi(z_n)=\infty$, звідки випливає $\lim\limits_{z_n\to a} f(z_n)=A$, що й потрібно.

6. Поведінка функції в околі ізольованої особливої точки. Ми дослідили поведінку однозначної функції в околі ізольованої особливої точки кожного з трьох зазначених вище типів і бачили, що в достатньо малому околі усуваної особливої точки функція обмежена, в достатньо малому околі полюса вона стає

нескінченно великою і, нарешті, в як завгодно малому околі істотно особливої точки функція стає невизначеною. Резюмуючи це дослідження, ми бачимо, що і навпаки — ізольована особлива точка буде усуваною, полюсом або істотно особливою точкою, зважаючи на те, чи буде в околі такої точки дана функція обмеженою, нескінченно великою або невизначеною.

Приклади

1. Функція $e^{\frac{1}{z}}$ має при $z=0$ істотно особливу точку. Розклад Лорана в околі цієї точки буде:

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+$$

2. Функції $\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}$ і $\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}$ мають полюси відповідно при нулях $\cos z$ і $\sin z$. Легко показати, що це будуть полюси першого порядку. Напишемо, наприклад, розклад Лорана для функції $\operatorname{ctg} z$ в околі полюса $z=0$. Поділивши формально степеневі ряди для $\cos z$ і $\sin z$, одержимо, обмежуючись першими членами, вираз:

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}-\frac{1}{3}z-\frac{1}{45}z^3-$$

В наслідок єдиності такого розкладу одержаний ряд є ряд Лорана для функції $\operatorname{ctg} z$, справедливий в околі нульової точки: $0<|z|<\pi$. З цього розкладу вбачаємо, що $z=0$ є полюс першого порядку.

Ми залишаємо без розгляду випадки неізольованих особливих точок однозначної функції, а також випадки особливих точок, в околі яких дана функція не є однозначною (наприклад, $z=0$ для функції $\ln z$ і $\sqrt[n]{z}$). Найпростішим типом неізольованої особливої точки однозначної функції буде той випадок, коли точка a є граничною для полюсів, наприклад $z=0$ для функції $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$. Легко показати, що теорема Вейєрштрасса залишається в силі для такої особливої точки a. Справді, припускаючи, що функція $f(z)$ в достатньо малому околі точки a не дорівнює A, легко бачити, що функція $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-A}$ в точці $z=a$ має ізольовану істотно особливу точку, якщо ми візьмемо $\varphi(z)=0$ в усіх полюсах функції $f(z)$. Таким чином, питання зводиться до доведеної теореми Вейєрштрасса.

Примітка. Теорема Вейєрштрасса послужила початком дуже глибоких досліджень про поведінку однозначної функції в околі істотно особливої точки. Твердження Вейєрштрасса показує, що в як завгодно малому околі істотно особливої точки функція приймає значення як завгодно близькі до якого завгодно наперед заданого числа. Пікар (Picard) довів більш загальне і глибше твердження: *в як завгодно малому околі істотно особливої точки функція $f(z)$ приймає* (і при тому нескінченне число разів) *яке завгодно скінченне значення, за винятком, може бути, одного.* Доведення цього твердження буде викладене в розд. X.

§ 3. Поведінка аналітичної функції в нескінченності

1. Окіл нескінченно віддаленої точки. Досі, досліджуючи поведінку однозначної функції в околі ізольованої особливої точки, ми припускали, що ця точка лежить на скінченній віддалі в площині комплексного змінного. Околом ізольованої особливої точки a ми називали множину всіх точок z, відмінних від точки a, які лежать усередині круга з центром у точці a такого малого радіуса, щоб у всіх таких точках z функція була голоморфною. Опишемо з нульової точки, як з центра, коло радіуса R і припустимо, що при достатньо великому R дана функція $f(z)$ не має особливих точок поза кругом радіуса R. В цьому випадку ми скажемо, що нескінченно віддалена точка є ізольованою особливою точкою для даної функції. Множина всіх точок площини, які лежать поза цим кругом радіуса R (або радіуса більшого, ніж R), ми назвемо околом нескінченно віддаленої точки. Отже, припустимо, що дана функція $f(z)$ є голоморфна в околі нескінченно віддаленої точки, тобто при $|z|>R$. Вважаючи $z=\frac{1}{z'}$, ми бачимо, що функція

$$\varphi(z')=f\left(\frac{1}{z'}\right)=f(z) \tag{25}$$

визначена і голоморфна при $|z'|<\frac{1}{R}$, за винятком точки $z'=0$. Отже, околові нескінченно віддаленої точки площини z відповідає окіл нульової точки площини z', при чому у відповідних точках z і z' функції $f(z)$ і $\varphi(z')$ мають рівні значення.

Звідси природно умовитися називати нескінченно віддалену точку істотно особливою точкою функції $f(z)$, полюсом порядку m або усуваною особливою точкою залежно від того, чи буде нульова точка для функції $\varphi(z')$ істотно особливою точкою, полюсом порядку m або усуваною особливістю.

2. Розклад Лорана в околі нескінченно віддаленої точки. Щоб одержати розклад Лорана для функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки, напишемо відповідний розклад для функції $\varphi(z')$ в околі нульової точки:

$$\varphi(z')=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z'^n, \tag{26}$$

і, вважаючи $z'=\frac{1}{z}$, будемо мати на підставі (25):

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \tag{27}$$

де взято: $c_n=b_{-n}\,(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Зазначимо, що розклад (27) міститиме нескінченну множину додатних степенів z, скінченне число цих степенів або зовсім їх не буде містити залежно від того, чи розклад (26) буде містити нескінченну множину від'ємних степенів z', скінченне число

цих степенів чи зовсім їх не буде містити. Звідси, на підставі § 2, п. 1, ми робимо висновок, що нескінченно віддалена точка є для функції $f(z)$:

a) *істотно особливою точкою*, якщо розклад (27) містить нескінченну множину додатних степенів z;

b) *полюсом порядку* m, якщо в розклад (27) входить скінченне число додатних степенів z, при чому c_m є останній при них коефіцієнт, відмінний від нуля ($m \geqslant 1$);

c) *усуваною особливою точкою*, якщо в розкладі (27) зовсім немає додатних степенів z.

В цьому останньому випадку, беручи c_0 за значення функції $f(z)$ в нескінченно віддаленій точці, ми знищуємо цю особливість, тому що $\varphi(z')$ буде при цьому голоморфною функцією в нульовій точці. Через це у випадку c), якщо $f(\infty) = c_0$, кажуть, що $f(z)$ є голоморфна функція в нескінченно віддаленій точці.

Приклади

1. Функція $f(z) = \frac{1}{1-z}$ має в нескінченності усувану особливу точку, тому що при $|z| > 1$ маємо:

$$\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Прийнявши $f(\infty) = 0$, ми можемо сказати, що функція $f(z)$ має в нескінченності нуль першого порядку.

2. Ціла раціональна функція степеня m має нескінченно віддалену точку полюсом порядку m.

3. Функція e^z, $\sin z$, $\cos z$ мають у нескінченності істотно особливу точку.

3. Поведінка функції в околі нескінченно віддаленої точки. Тому що визначення характеру поведінки функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки зводиться за допомогою нових позначень до дослідження поведінки функції $\varphi(z')$ в околі нульової точки (п. 1), то всі висновки § 2 одразу ж переносяться на випадок нескінченно віддаленої точки.

Так, якщо функція $f(z)$ має в нескінченності полюс, то яке б не було велике додатне число C, існує окіл нескінченно віддаленої точки, для всіх точок якого маємо: $|f(z)| > C$, або коротше: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$ (порівн. § 2, п. 3).

Далі, теорема Вейєрштрасса для випадку нескінченно віддаленої істотно особливої точки виразиться так: яке б не було стале число A, скінченне або нескінченне, існує послідовність точок $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, що прямує до істотно особливої точки ∞, така, що маємо: $\lim\limits_{z_n \to \infty} f(z_n) = A$, або коротше: в довільному околі нескінченно віддаленої істотно особливої точки функція $f(z)$ приймає значення як завгодно близькі до якого завгодно наперед заданого числа (порівн. § 2, п. 4).

Нарешті, в достатньо малому околі усуваної нескінченно віддаленої особливої точки функції $f(z)$ ця функція є обмеже-

ною, тобто існують два сталі додатні числа R і M такі, що маємо: $|f(z)|<M$ при всіх z, $|z|>R$ (порівн. § 2, п. 2).

Тому що, з другого боку, три типи зазначених особливостей є єдино можливі для ізольованої особливої точки, то і навпаки — функція $f(z)$, для якої нескінченність є ізольована особлива точка, має тут:

a) *полюс*, якщо вона в достатньо малому околі цієї точки стає нескінченно великою;

b) *істотно особливу точку*, якщо $f(z)$ в як завгодно малому околі нескінченно віддаленої точки стає невизначеною;

c) *усувану особливу точку*, якщо в достатньо малому околі цієї точки функція $f(z)$ обмежена.

§ 4. Найпростіші класи аналітичних функцій

1. Цілі функції. На підставі характеру особливих точок можна означити різні класи функцій. Так, наприклад, відомо, що всяка ціла раціональна функція має єдину особливу точку в нескінченності, яка служить для неї полюсом.

Навпаки, якщо однозначна функція $f(z)$ має в нескінченності єдину особливу точку — полюс, то така функція є ціла раціональна. Справді, розклад Лорана функції $f(z)$ для околу нескінченно віддаленої точки містить лише скінченне число додатних степенів z (§ 3, п. 2). Позначимо через $A_pz^p+A_{p-1}z^{p-1}+\ldots+A_1z$ частину цього розкладу Лорана, що містить додатні степені z (головна частина функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки), і віднімемо її з даної функції. Одержана різниця

$$F(z)=f(z)-(A_pz^p+A_{p-1}z^{p-1}+\ldots+A_1z) \tag{28}$$

буде голоморфною функцією в усякій точці z, в нескінченності вона має усувану особливу точку, тому що її розклад Лорана в околі нескінченно віддаленої точки, в наслідок єдиності такого, не буде містити додатних степенів z. Ми можемо вважати функцію $F(z)$ голоморфною в усій „розширеній" площині комплексного змінного z, якщо візьмемо:

$$F(\infty)=\lim_{z\to\infty}F(z).$$

Така функція, будучи обмеженою рівномірно в усій площині за теоремою Ліувілля (розд. VI, § 2, п. 9), є тотожне стале c. Отже, маємо:

$$F(z)=f(z)-(A_pz^p+A_{p-1}z^{p-1}+\ldots+A_1z)=c,$$

звідки виходить:

$$f(z)=c+A_1z+A_2z^2+\ldots+A_pz^p,$$

тобто $f(z)$ є ціла раціональна функція.

Далі, функцію, зображувану нескінченним степеневим рядом з радіусом збіжності $R=\infty$, ми називаємо *цілою трансцендент-*

ною функцією. Очевидно, така функція має єдину особливу точку в нескінченності, яка є для неї істотно особливою точкою (§ 3, п. 2). Легко бачити, що і навпаки: всяка однозначна функція $f(z)$, що має єдину особливу точку в нескінченності як свою істотну особливість, є ціла трансцендентна функція. Справді, позначаючи через $A_1z+A_2z^2+\ldots+A_pz^p+\ldots$ головну частину функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки, утворимо різницю:

$$F(z)=f(z)-(A_1z+A_2z^2+\ldots). \tag{29}$$

Як і раніш, робимо висновок, що ця функція $F(z)$ повинна бути обмеженою рівномірно в усій площині, а тому за теоремою Ліувілля є стале число c. Отже, маємо: $F(z)=c$, звідки в наслідок рівності (29), виходить:

$$f(z)=c+A_1z+A_2z^2+$$

тобто $f(z)$ є ціла трансцендентна функція.

Поєднуючи викладене, ми можемо назвати цілою функцією всяку функцію, голоморфну в усій площині, за винятком нескінченно віддаленої точки, при чому ця функція буде трансцендентною, раціональною або сталим числом, зважаючи на те, чи буде нескінченно віддалена точка істотно особливою точкою, полюсом або усуваною особливістю.

2. Мероморфні функції. Більш загальним, ніж клас цілих функцій, буде клас так званих мероморфних функцій. *Мероморфною функцією* називають всяку однозначну функцію, яка не має у скінченній частині площини інших особливих точок, крім полюсів. Зокрема, всяка раціональна функція належить до цього класу.

Справді, *раціональна функція*

$$\frac{p_0z^n+p_1z^{n-1}+\ldots+p_n}{q_0z^m+q_1z^{m-1}+\ldots+q_m}$$

в усій „розширеній“ z-площині може мати лише полюси як свої особливі точки (при $n>m$ нескінченно віддалена точка є полюс порядку $n-m$, при $n\leqslant m$ нескінченно віддалена точка буде усуваною особливістю і, значить, може вважатися правильною точкою при належному визначенні функції в цій точці).

Покажемо, що існує обернене твердження: *якщо однозначна функція в „розширеній“ площині не має інших особливих точок, крім полюсів, то вона є функція раціональна.*

Доведення. Тому що функція $f(z)$ в нескінченності може мати лише полюс, то вона в якомусь околі нескінченно віддаленої точки $|z|>R$ є голоморфна функція. В області круга $|z|\leqslant R$ може існувати лише скінченне число полюсів цієї функції, тому що в супротивному випадку гранична точка полюсів була б особливою точкою, яка не належить до полюсів, що за умовою неможливе. Отже, всі можливі полюси функції $f(z)$ є в скінченному числі; позначимо їх через $z_1, z_2, \ldots, z_k$; крім того, нескін-

ченно віддалена точка також може бути полюсом. В околі кожного полюса ми розкладемо функцію $f(z)$ в ряд Лорана і позначимо його головну частину для точки z_λ через:

$$h_\lambda(z)=\frac{c_{-1}^{(\lambda)}}{z-z_\lambda}+\frac{c_{-2}^{(\lambda)}}{(z-z_\lambda)^2}+\ldots+\frac{c_{-\alpha\lambda}^{(\lambda)}}{(z-z_\lambda)^{\alpha_\lambda}} \qquad (\lambda=1,\ 2,\ldots,k),$$

а для точки ∞ через $g(z)=A_1z+A_2z^2+\ldots+A_pz^p$.

Віднімаючи раціональну функцію $R(z)=h_1(z)+h_2(z)+\ldots+$ $+h_k(z)+g(z)$ з даної функції $f(z)$, ми одержимо:

$$F(z)=f(z)-R(z). \tag{30}$$

Функція $F(z)$ буде мати своїми єдиними особливими точками точки $z_1, z_2, \ldots, z_k$ і нескінченно віддалену точку; кожна з цих точок є усуваною особливістю функції $F(z)$, тому що її розклад Лорана в околі якої завгодно з цих точок, в наслідок єдиності цього розкладу не буде містити головної частини. Отже, функцію $F(z)$ можна вважати голоморфною всюди в „розширеній" площині комплексного змінного z, якщо належним чином визначити її значення в усуваних особливих точках. Нарешті, за теоремою Ліувілля ми робимо висновок, що $F(z)$ тотожно дорівнює сталому числу c. Отже, маємо $F(z)=c$, звідки в наслідок рівності (30) виходить: $f(z)=R(z)+c$, тобто $f(z)$ є раціональна функція, що й потрібно.

3. Розклад раціональної функції на найпростіші дроби. Помітивши, що $h_\lambda(z)$ є найпростіший дріб (при тому єдиний), який відповідає полюсові z_λ раціональної функції $f(z)$, ми з п. 2, зверх того, робимо висновок: *всяка раціональна функція, після виділення її цілої частини, може бути розкладена на найпростіші дроби і при тому єдиним образом.*

4. Основний принцип алгебри. За допомогою теореми Ліувілля (розд. VI, § 2, п. 9) легко виявити справедливість фундаментального принципу вищої алгебри: *всяка ціла раціональна функція*

$$g(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n \qquad (n\geqslant 1)$$

має принаймні один нуль.

Справді, допускаючи супротивне цій теоремі, ми повинні припустити, що функція $g(z)$ не дорівнює нулеві ні в якій точці z-площини. В цьому випадку функція $f(z)=\frac{1}{g(z)}$ буде голоморфною в усій площині. Помітивши, що маємо:

$$f(z)=\frac{1}{z^n\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\ldots+\frac{a_n}{z^n}\right)}$$

ми звідси робимо висновок:

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0.$$

Отже, нескінченно віддалена точка буде нулем функції $f(z)$, якщо взяти $f(\infty)=0$. За теоремою Ліувілля така функція $f(z)$ повинна бути рівна тотожно сталому, а саме нулеві, тому що $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$. Одержана суперечність переконує нас у справедливості фундаментальної теореми алгебри.

§ 5. Застосування до гідродинаміки

1. Обтікання круглого циліндра потоком без циркуляції. Розглянемо рух у спокійній рідині круглого циліндра, який рухається справа наліво з сталою швидкістю a. Надаючи всій системі руху в зворотний бік із швидкістю a, ми одержуємо потік рідини, який має в нескінченності швидкість a і обтікає нерухомий циліндр.

Вміщуючи початок координат у центр поперечного перекрою циліндра, приймемо цей перекрій за площину xy, вибравши додатний напрям осі x збіжним з напрямом швидкості a. Характеристичну функцію (розд IV, § 2) потоку $w=f(z)$ ми припустимо однозначною в області $|z|>R$, зовнішній до перекрою циліндра.

За теоремою Лорана

$$w=u+vi=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n+\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}.$$

Очевидно, ми повинні задовольнити двом умовам: a) вектор швидкості рідини при $z=\infty$ направлений по осі x і дорівнює a; b) контур циліндра $|z|=R$ є частина траекторії потоку.

Ми знаємо, що швидкість $p+iq=\overline{\frac{dw}{dz}}$, тобто

$$p-iq=\sum_{n=1}^{\infty} na^n z^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty} nb_n z^{-n-1}.$$

Тому що нескінченно віддалена точка повинна бути правильною точкою цього розкладу, який в цій точці приймає значення a, то маємо $a_n=0$ при $n>1$, $a_1=a$.

Отже, умова a) приводить до такого вигляду характеристичної функції:

$$w=az+\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n},$$

де ми відкинули вільний член b_0, тому що його додавання до w не впливає на величини компонент швидкості p, q і на траекторію потоку.

Беручи $b_n=\rho_n e^{\alpha_n i}$, $z=re^{\theta i}$, одержимо:

$$u+vi=are^{\theta i}+\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n r^{-n} e^{(\alpha_n-n\theta)i}$$

звідки знаходимо:

$$\left.\begin{aligned} u &= ar\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n r^{-n}\cos(\alpha_n - n\theta), \\ v &= ar\sin\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n r^{-n}\sin(\alpha_n - n\theta). \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Друга умова b) нам дає, що v повинна зберігати стале значення при $r=R$, тобто

$$\left.\frac{\partial v}{\partial\theta}\right|_{r=R} = 0.$$

Диференціюючи другу з формул (31) по θ і підставляючи потім $r=R$, одержимо:

$$aR\cos\theta - \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n nR^{-n}\cos(\alpha_n - n\theta) = 0.$$

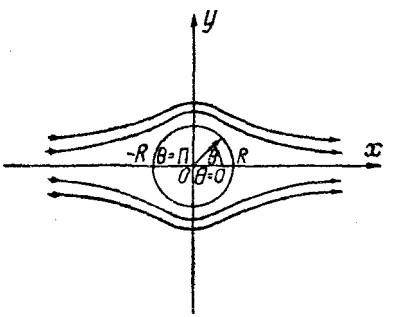

Рис. 85

Помітивши, що $\cos(\alpha_n - n\theta) = \cos\alpha_n\cos n\theta + \sin\alpha_n\sin n\theta$, прирівнюємо нулеві коефіцієнти при окремих $\cos n\theta$ і $\sin n\theta$ і, таким чином, одержуємо:

$$aR - \rho_1 R^{-1}\cos\alpha_1 = 0,$$
$$\rho_1 R^{-1}\sin\alpha_1 = 0,$$
$$n\rho_n R^{-n}\cos\alpha_n = n\rho_n R^{-n}\sin\alpha_n = 0$$
$$(n = 2, 3, \ldots),$$

звідки $\rho_n = 0\,(n = 2, 3, \ldots)$, $\rho_1 = +aR^2$, $\alpha_1 = 0$. Отже, остаточний вигляд характеристичної функції w буде:

$$w = az + \frac{aR^2}{z} = a\left(z + \frac{R^2}{z}\right).$$

Функції ж u і v виразяться формулами:

$$u = a\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta, \quad v = a\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta.$$

Траєкторії потоку мають рівняння:

$$v = C, \quad \text{або} \quad \left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta = C.$$

Тому що $r \geqslant R$, то при $C > 0$ маємо $\sin\theta > 0$, тобто траєкторії розміщені у верхній півплощині; від'ємним же значенням C відповідають траєкторії, які йдуть у нижній півплощині (рис. 85). Для $C = 0$ маємо лінію

$$\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta = 0,$$

яка розпадається на дві: $\sin\theta = 0$, $r = R$, тобто що відповідна траєкторія іде справа по додатній частині осі $x(\theta = 0)$ до зустрічі з циліндром у точці $r = R$, $\theta = 0$, потім по колу циліндра, переходячи в точці $r = R$, $\theta = \pi$ знов на вісь x, але на від'ємну її частину $(\theta = \pi)$.

Точки $(\pm R, 0)$ визначні тим, що в них швидкість обертається в нуль, тому що

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=\pm R} = a - \left.\frac{aR^2}{z^2}\right|_{z=\pm R} = 0.$$

Ці точки називаються критичними точками потоку. Траєкторія в критичних точках не має визначеної дотичної й розгалужується на дві: пряму і коло.

Для $C \neq 0$ траєкторіями течії будуть лінії третього порядку, і їх рівняння в декартових координатах має вигляд:

$$(x^2 + y^2 - R^2)y = C(x^2 + y^2).$$

Кожна з цих ліній симетрична відносно осі y і має асимптоту $y = C$.

Потенціальна функція потоку u є однозначною не тільки в усякій однозв'язній області, зайнятій потоком, що зумовлено відсутністю вихрів, але й у всій області $|z| > R$. Це показує, що циркуляція потоку (розд. IV, § 2) вздовж контура C, який оточує циліндр, є нуль, тому що

$$\int_C p\,dx + q\,dy = \int_C du = 0.$$

Через це розглянутий поток називають потоком без циркуляції.

2. Чисто циркулярний потік. Найпростіший приклад течії з циркуляцією навколо циліндра матимемо у випадку, коли характеристична функція w має вигляд:

$$w = \frac{I}{2\pi i}\ln z.$$

Беручи $z = re^{i\theta}$, визначимо функції u і v:

$$u + iv = \frac{I}{2\pi i}(\ln r + i\theta),$$

звідки

$$u = \frac{I}{2\pi}\theta, \quad v = -\frac{I}{2\pi}\ln r.$$

Таким чином, траєкторіями течії будуть $v = \text{const}$, або $r = \text{const}$, тобто концентричні кола.

Компоненти p і q швидкості визначаються за формулою:

$$p + iq = \overline{\frac{dw}{dz}} = -\frac{I}{2\pi i}\frac{1}{\bar{z}} = \frac{I}{2\pi r}e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$$

тобто величина швидкості, яка в усіх точках кола радіуса r дорівнює $\frac{I}{2\pi r}$, є зворотно пропорціональна r, а напрям течії — проти годинникової стрілки.

Циркуляція потоку вздовж контура C, який оточує циліндр, буде:

$$\int_C p\,dx + q\,dy = \int_C du = \frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = I.$$

Отже, характеристична функція w відповідає потокові рідини навколо циліндра, при чому частинки рідини течуть по колах проти годинникової стрілки, і швидкість течії обернено пропорціональна віддалі частинки від центра циліндра.

3. Загальний випадок. Складаючи обидва рухи, вивчені в п. 1 і 2, ми одержимо обтікання циліндра потоком рідини, який має в нескінченно віддаленій точці швидкість a, з циркуляцією I.

Характеристична функція в цьому загальному випадку буде:

$$w = \frac{I}{2\pi i}\ln z + a\left(z + \frac{R^2}{z}\right). \tag{32}$$

Траєкторії течії зображені на рис. 86. В цьому випадку критичні точки потоку будуть зміщені порівняно з випадком п. 1, коли не було циркуляції.

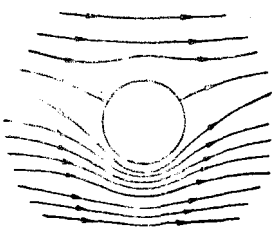

Рис. 86

Ці точки визначаються з умови:

$$p - iq = \frac{dw}{dz} = 0,$$

або

$$-\frac{Ii}{2\pi}\cdot\frac{1}{z} + a\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) = 0,$$

тобто

$$z^2 - \frac{Ii}{2\pi a}z - R^2 = 0.$$

З цього квадратного рівняння знаходимо дві точки z, визначані рівністю:

$$z = \frac{Ii}{4\pi a} \pm \sqrt{R^2 - \frac{I^2}{16\pi^2 a^2}}.$$

Вважаючи циркуляцію I не дуже великою, а саме, $I < 4\pi a \cdot R$, ми одержимо для z два комплексні значення, що відрізняються лише знаком дійсної частини і за модулем рівні R. Таким чином у цьому випадку (рис. 86) критичні точки лежать на самому циліндрі симетрично щодо осі y, і радіус-вектор до них утворює з додатним напрямом осі x кут θ, визначаний за формулою $\sin\theta = \frac{I}{4\pi a R}$.

З збільшенням I обидві критичні точки зближаються і при $I = 4\pi a R$ вони збігаються у точці $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ перетину осі y з кон-

туром циліндра (рис. 87). При дальшому збільшенні I, якщо $I > 4\pi aR$, ми одержуємо для z два чисто уявні значення, з яких одно за модулем менше R, друге ж — більше R. Отже, в цьому випадку ми маємо тільки одну критичну точку, що лежить на осі y (рис. 88).

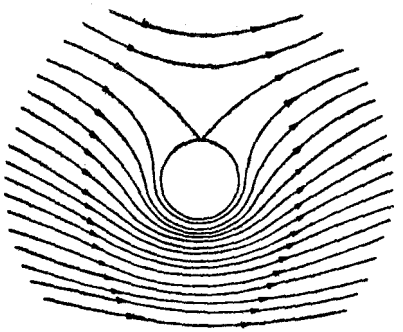

Рис. 87

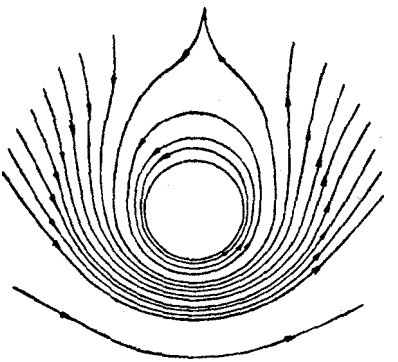

Рис. 88

Вправи до розділу VII

1. Розкласти в ряд Лорана функцію $e^{\frac{1}{1-z}}$ при $|z| > 1$.

Відп. $1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \frac{19}{5!z^5} + \ldots$

2. Розкласти в ряд Лорана функцію $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$ при $|z| > 3$.

Відп. $\frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{19}{z^4} + \ldots$

3. Визначити особливості при $z = \infty$ для функцій: $\frac{z^2+1}{e^z}$, $\cos z - \sin z$.

Відп. Істотно особливі.

4. Виявити справедливість теореми Вейєрштрасса для функції $e^{\frac{1}{z}}$, досліджуючи її значення на променях, що виходять з нульової точки в околі $z = 0$. Якою буде множина точок z, в яких $e^{\frac{1}{z}} = c$, $c \neq 0$?

Відп. Нескінченна множина, що має нуль граничною точкою.

5. Функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ мають у точці $z = a$ полюси відповідно m-го порядку і n-го порядку. Що можна сказати про характер точки $z = a$ для функцій: a) $f(z)\varphi(z)$, b) $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$, c) $f(z) + \varphi(z)$?

Відп. a) Полюс порядку $m + n$. b) Полюс порядку $m - n$, якщо $m > n$, якщо $m < n$, то нуль порядку $n - m$, при $m = n$ правильну точку. c) Полюс порядку, рівного найбільшому з чисел m, n; при $m = n$ полюс порядку $\leqslant m$ або правильну точку.

6. Відносно степеневого ряду $f(z) = \sum a_n z^n$ відомо, що зображувана ним функція $f(z)$ має на колі круга збіжності тільки одну особливу точку z_0 — полюс першого порядку. Показати, що в цьому випадку $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to z_0$ і, значить, $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to r$, де r — радіус збіжності.

7. Всередині замкнутого контура C_1 лежить другий замкнутий контур C_2. Функція $f(z)$ є аналітична в області G між контурами C_1 і C_2.

В цьому випадку можна покласти:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

де $f_1(z)$ — аналітична функція всередині C_1, а $f_2(z)$ є аналітична функція поза C_2, включаючи нескінченно віддалену точку. Функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ цим розкладом визначаються однозначно з точністю до аддитивного сталого.

8. Розкласти в ряд Лорана $\sqrt{(z-1)(z-2)}$ для $|z| > 2$.

Відп. $\pm\left[c_0 z - c_1 + \frac{c_2}{z} - \frac{c_3}{z^2} + \ldots\right]$,

де

$$c_n = \binom{\alpha}{n} + 2\binom{\alpha}{n-1}\binom{\alpha}{1} + 2^2\binom{\alpha}{n-2}\binom{\alpha}{2} + \ldots + 2^n\binom{\alpha}{n} \text{ і } \alpha = \frac{1}{2}.$$

9. Розкласти в ряд Лорана $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ при $0 < |a| < |z| < |b|$ і для $|z| > |b|$.

Відп. $\frac{1}{a-b}\left[\ldots + \frac{a^2}{z^3} + \frac{a}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{b} + \frac{z}{b^2} + \ldots\right]$ і

$$\frac{1}{b-a}\left[\frac{b-a}{z^2} + \frac{b^2-a^2}{z^3} + \frac{b^3-a^3}{z^4} + \ldots\right].$$

10. Розкласти в ряд Лорана $\ln\frac{1}{1-z}$ при $|z| > 1$.

Відп. Неможливо, тому що функція не однозначна при $|z| > 1$.

11. Які особливості мають функції:

a) $e^{\frac{1}{z}}$ при $z = 0$; b) $\sin\frac{1}{1-z}$ при $z = 1$; c) $\frac{1}{1-e^z}$ при $z = 2\pi i$?

Відп. a) Істотно особлива точка; b) те ж; c) полюс першого порядку.

12. Які особливості мають функції при $z = \infty$:

a) $\frac{z^2+4}{e^z}$; b) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$; c) $e^{-\frac{1}{z^2}}$; d) $\frac{1}{\cos z}$; e) $\sin\frac{1}{1-z}$?

Відп. a) Істотно особлива точка; b) полюс першого порядку; c) правильна точка; d) гранична точка полюсів; e) нуль першого порядку.

13. Яка істотна відміна між поведінкою дійсної функції

$$y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{для } x \neq 0, \\ 0 & \text{для } x = 0 \end{cases}$$

і функції комплексного змінного $w = e^{-\frac{1}{z^2}}$ в околі нульової точки?

Відп Функція y і всі її похідні при $x = 0$ дорівнюють нулеві. Крива $y = f(x)$ в нульовій точці має з віссю x кращий дотик, ніж яка завгодно парабола $y = x^n$. Функція w має в нульовій точці істотну особливість, тобто прямує до якого завгодно наперед заданого числа, коли $z = 0$.

14. Функція $f(z)$ аналітична в околі $|z| > R$ нескінченно віддаленої точки. При яких умовах $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ буде однозначною аналітичною функцією в області $|z| > R$, якщо z_0 і путь інтеграції лежать у цій області? Що можна сказати про поведінку $F(z)$ в нескінченно віддаленій точці з поведінки $f(z)$ у цій точці?

Відп. Коли $a_1 = 0$ в розкладі $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$.

Якщо ця умова виконана і $f(z)$ при $z = \infty$ має полюс порядку β, то $F(z)$ буде мати полюс порядку $\beta + 1$; зокрема, $F(z)$ матиме полюс першого порядку, якщо $f(z)$ при $z = \infty$ — правильна функція і $\neq 0$.

Якщо $f(z)$ при $z = \infty$ має нуль порядку α ($\alpha \geqslant 2$), то $F(z)$ має нуль порядку $\alpha - 1$.

Якщо $f(z)$ — при $z = \infty$ має істотно особливу точку, то $F(z)$ — те ж саме.

Вважаючи $a_1 \neq 0$, $F(z) - a_1 \ln z$ буде при $|z| > R$ однозначною аналітичною функцією.

Розділ VIII

Теорія лишків

§ 1. Загальна теорія лишків

1. Лишок функції відносно ізольованої особливої точки. Якщо функція $f(z)$ є голоморфна в якійсь точці a, то за теоремою Коші (розд. V, § 1, п. 3) маємо:

$$\int_C f(z)\,dz = 0, \tag{1}$$

де путею інтегрування C служить довільний гладкий замкнутий контур, що містить усередині себе точку a, і малий настільки, що функція $f(z)$ лишається голоморфною всюди всередині цього контура, включаючи точки самого контура. Якщо ж a буде ізольована особлива точка функції $f(z)$, і замкнутий контур C цілком лежить в околі цієї точки a, то значення нашого інтеграла $\int_C f(z)\,dz$ буде, взагалі кажучи, відмінним від нуля. Це значення, як виходить із теореми Коші (розд. V, § 1, п. 5), не залежить від форми контура C і легко може бути обчислене. Справді, в околі точки a $(0<|z-a|<r)$ функція $f(z)$ може бути розкладена в ряд Лорана (розд. VII, § 2, п. 1):

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \\ + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots, \tag{2}$$

який буде рівномірно збіжним на лінії C, тому що контур C лежить в околі точки a. Інтегруючи почленно ряд (2) вздовж лінії C, одержимо:

$$\int_C f(z)\,dz = c_{-1}\cdot 2\pi i, \tag{3}$$

тому що мають місце рівності:

$$\int_C (z-a)^m\,dz = 0 \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ldots) \quad \text{(розд. IV, § 3, п. 1)},$$

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \qquad \text{(розд. IV, § 1, п. 6)},$$

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots) \qquad \text{(розд. IV, § 3, п. 1).}$$

Значення інтеграла $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$ умовимося називати *лишком* (résidu) функції $f(z)$ відносно особливої точки a. За рівністю (3) лишок функції $f(z)$ відносно особливої точки a дорівнює c_{-1}, тобто коефіцієнтові при першому від'ємному степені розкладу Лорана (2). Звідси безпосередньо випливає, що лишок функції c_{-1} може бути відмінним від нуля тільки в тому випадку, коли a є полюс або істотно особлива точка (розд. VII, § 2, п. 1); для усуваної особливої точки лишок неодмінно дорівнює нулеві (розд. VII, § 2, п. 1).

2. Основна теорема про лишки. Нехай $f(z)$ є функція, голоморфна в усякій точці області G, крім скінченного числа особливих точок $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Позначимо через Г довільний кусково-гладкий замкнутий контур, який містить усередині себе точки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ і цілком лежить в області G. *При цих умовах* $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz$ *дорівнює сумі лишків функції* $f(z)$ *відносно* $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Це твердження становить собою основну теорему в теорії лишків.

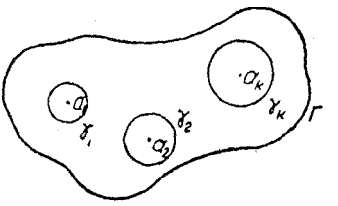

Рис. 89

Для її доведення опишемо з точок $a_1, a_2, \ldots, a_k$ як центрів кола $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ настільки малі, щоб вони попарно не перетинались і цілком лежали всередині Г (рис. 89). Тому що функція $f(z)$ буде голоморфною в кожній точці замкнутої області, обмеженої складним контуром

$$K = \Gamma + \gamma_1^- + \gamma_2^- + \ldots + \gamma_k^-,$$

то за теоремою Коші (розд. V, § 1, п. 5):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz, \qquad (4)$$

де інтегрування виконується по контурах Г, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ в додатному напрямі. Остання рівність доводить основну теорему про лишки, тому що в правій частині цієї рівності стоять лишки функції $f(z)$, які відповідають точкам $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Очевидно, доведене твердження становить собою узагальнення основної теореми Коші (розд. V, § 1, п. 3).

3. Обчислення лишку функції відносно полюса. В застосуваннях основної теореми про лишки ми повинні спочатку визначити лишки всіх особливих точок $a_1, a_2, \ldots, a_k$, які лежать усередині контура Г, після чого легко обчислюється на підставі

теореми про лишки значення інтеграла $\int_\Gamma f(z)\,dz$. Через це дуже важливо дати простіший спосіб обчислення лишків, який не вимагає в кожному окремому випадку розкладу Лорана. Такий спосіб можна дати, якщо точка a є полюсом функції. Нехай спочатку точка a є простий полюс функції $f(z)$. В цьому випадку головна частина розкладу Лорана містить лише один перший від'ємний степінь $(z-a)$:

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}. \qquad (5)$$

Помножуючи обидві частини розкладу (5) на $(z-a)$, одержуємо:

$$(z-a)f(z)=c_{-1}+c_0(z-a)+c_1(z-a)^2+\ldots \qquad (5')$$

Тому що права частина останньої рівності є звичайний степеневий ряд, то його сума буде неперервною функцією в точці a. Отже, переходячи в рівності (5′) до границі при z, що прямує до a, одержимо:

$$c_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z). \qquad (6)$$

Формула (6) дає змогу швидко визначити лишок функції відносно простого полюса.

Точка a є простий полюс функції $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, якщо $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ є голоморфні функції в точці a, при чому $\varphi(a)\neq 0$, $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$. За формулою (6) лишок функцій $f(z)$ відносно точки a визначається в цьому випадку так:

$$c_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)}{z-a}}=\lim_{z-a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}},$$

тому що за умовою маємо: $\psi(a)=0$. Помітивши, що

$$\lim_{z\to a}\varphi(z)=\varphi(a),$$

$$\lim_{z\to a}\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}=\psi'(a)\neq 0,$$

остаточно одержуємо:

$$c_{-1}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \qquad (7)$$

Так, наприклад, для визначення лишку функції $\frac{1}{\cos z}$ відносно її простого полюса $a=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ застосуємо формулу (7):

$$c_{-1}=-\frac{1}{\sin a}=-\frac{1}{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}.$$

Одержане значення c_{-1} рівне $+1$ або -1, зважаючи на те, чи буде n число непарне чи парне.

Таким чином, маємо:

$$c_{-1} = (-1)^{n-1}.$$

Формулу (6) можна узагальнити на випадок довільного полюса n-го порядку. В цьому випадку розклад Лорана буде:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \qquad (8)$$

Помноживши обидві частини цього розкладу (8) на $(z-a)^n$, одержимо:

$$(z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + \\ + c_0(z-a)^n + c_1(z-a)^{n+1} + \qquad (8')$$

Продиференціювавши рівність (8′) $n-1$ разів, ми одержимо в правій частині звичайний степеневий ряд, вільний член якого буде $c_{-1}\cdot(n-1)!$ Отже, маємо:

$$\lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}} = c_{-1}\cdot(n-1)!,$$

звідки знаходимо:

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}} \qquad (9)$$

Формула (9) дає змогу обчисляти лишок функції відносно полюса a порядку n; при $n=1$ вона обертається в формулу (6), якщо вважати умовно: $0!=1$.

4. Лишок функції відносно нескінченно віддаленої точки. Досі, розглядаючи лишок функції відносно особливої точки a, ми припускали, що точка a лежить на скінченній віддалі. Поняття лишку можна поширити на випадок нескінченно віддаленої точки.

Припустимо, що нескінченно віддалена точка є ізольованою особливістю функції $f(z)$, і позначимо через C довільний замкнутий контур, що лежить цілком в околі цієї точки; наприклад за C можна взяти коло достатньо великого радіуса. Як і перед цим, умовимося називати лишком функції $f(z)$ відносно нескінченно віддаленої точки значення інтеграла $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^-} f(z)\,dz$, з тією лише різницею, що інтегрування виконується тепер по контурові C у від'ємному напрямі, тому що контур C треба проходити за стрілкою годинника, аби нескінченно віддалена точка залишалась весь час з лівої сторони. В околі нескінченно віддаленої точки розклад Лорана для функції $f(z)$ буде (розд. VII, § 3, п. 2):

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots + c_1 z + c_1 z^2 + \ldots \qquad (10)$$

Тому що цей ряд (10) збігається рівномірно на контурі C, то ми можемо його інтегрувати почленно вздовж C^-; помічаючи при

цьому, що всі члени, крім другого, після інтегрування обернуться в нулі, знаходимо:

$$\int_{C^-} f(z)\,dz = c_{-1}\cdot\int_{C^-}\frac{dz}{z} = -c_{-1}\cdot 2\pi i,$$

звідки виходить:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\,dz = -c_{-1}, \tag{11}$$

тобто лишок функції відносно нескінченно віддаленої точки дорівнює коефіцієнтові при першому від'ємному степені розкладу Лорана, взятому з супротивним знаком.

У випадку усуваної особливої точки, яка лежить на скінченній віддалі, лишок завжди дорівнює нулеві. Цього може не бути у випадку нескінченно віддаленої точки. Так, наприклад, функція $\frac{1}{z}$ у нескінченності має усувану особливість, а відповідний лишок дорівнює —1. Користуючись поняттям лишку функції відносно нескінченно віддаленої точки, легко переконатися в справедливості теореми:

Якщо $f(z)$ є функція, голоморфна у всякій точці розширеної площини комплексного змінного z, крім скінченного числа особливих точок, то сума лишків відносно всіх її особливостей (включаючи і нескінченну віддалену точку) *завжди дорівнює нулеві.*

Справді опишемо з нульової точки, як центра, коло C такого великого радіуса, щоб усі особливі точки функції (крім нескінченно віддаленої точки) лежали всередині цього кола. За основною теоремою про лишки значення інтеграла $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$ дорівнює сумі лишків відносно всіх особливих точок функції $f(z)$, що лежать всередині C. З другого боку, лишок тієї ж функції відносно нескінченно віддаленої точки зобразиться через $\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\,dz$.

Отже, сума всіх лишків буде дорівнювати:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\,dz = 0.$$

5. Логарифмічний лишок. Нехай $f(z)$ є функція, голоморфна всюди всередині замкнутого кусково-гладкого контура Г, включаючи точки самого контура Г. Крім того, припустимо, що функція $f(z)$ не має нулів на Г; в цьому випадку всередині контура Г може міститися лише скінченне число нулів $a_1, a_2, \ldots, a_k$, порядки яких позначимо відповідно через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Кожний нуль порядку α (також і полюс) ми повинні розглядати як α-кратний нуль (відповідно полюс) і через це при підрахункові числа

нулів (також полюсів) треба кожний нуль вважати за α простих нулів (відповідно полюсів). Таким чином число N нулів функції $f(z)$, які лежать усередині контура Γ, буде:

$$N = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k.$$

Це число N визначається за формулою:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \tag{12}$$

Доведення. Підінтегральна функція формули (12) є голоморфною в усякій точці контура Γ, а також у кожній точці всередині Γ, крім точок $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Легко показати, що в точці a_λ вона має полюс першого порядку з лишком, рівним α_λ. Справді, в достатньо малому околі нуля α_λ функції $f(z)$ має місце розклад:

$$f(z) = (z - \alpha_\lambda)^{\alpha_\lambda} \cdot \varphi(z), \tag{13}$$

де $\varphi(z)$ є голоморфна функція, при чому $\varphi(a_\lambda) \neq 0$. Логарифмуючи, а потім диференціюючи формулу (13), знаходимо:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \ln f(z) = \frac{\alpha_\lambda}{z - a_\lambda} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\alpha_\lambda}{z - a_\lambda} + \psi(z), \tag{14}$$

де $\psi(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ буде голоморфною функцією в точці a_λ. Останнє співвідношення (14) показує, що точка a_λ є простим полюсом функції $\frac{f'(z)}{f(z)}$ з лишком, рівним α_λ. Користуючись основною теоремою про лишки (п. 2), знаходимо:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = N,$$

що й потрібно довести.

Якщо функція $f(z)$ має в точці b полюс порядку β, то функція $\frac{f'(z)}{f(z)}$ матиме точку b своїм простим полюсом з лишком, рівним $-\beta$. Дійсно, точка b є нулем того ж порядку β для функції $f_1(z) = \frac{1}{f(z)}$. Отже, в наслідок доведеного ця точка b буде простим полюсом з лишком, рівним β, для функції $\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = -\frac{f'(z)}{f(z)}$, звідки виходить, що функція $\frac{f'(z)}{f(z)}$ має в точці b простий полюс з лишком, рівним $-\beta$. Нехай всередині контура Γ, крім нулів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лежить ще скінченне число полюсів функції $f(z)$; позначимо їх через $b_1, b_2, \ldots, b_s$, а їх порядки відповідно через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$. В цьому випадку функція $\frac{f'(z)}{f(z)}$, будучи голоморфною на контурі Γ, всередині Γ має лише скінченне число особливих

точок $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_s$, які є всі простими полюсами з лишками, відповідно рівними: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, -\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_s$. Отже, за основною теоремою про лишки можна написати:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k)-(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_s). \qquad (15)$$

Тут $P=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_s$ є число полюсів функції $f(z)$ всередині контура Γ в тому ж розумінні, як $N=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$ є число її нулів усередині Γ. Отже, ми довели таке твердження: *якщо функція $f(z)$ голоморфна і відмінна від нуля на замкнутому контурі Γ, всередині цього контура залишається голоморфною функцією, за винятком скінченного числа полюсів, то має місце формула*:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P. \qquad (15')$$

Формула (12) є окремим випадком формули (15′), коли $P=0$.

Називаючи для краткості значення виразу $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ *логарифмічним лишком* функції $f(z)$ відносно контура Γ, ми можемо коротко сказати:

Логарифмічний лишок функції $f(z)$ відносно замкнутого контура Γ дорівнює числові нулів мінус число полюсів цієї функції, що лежать всередині Γ, при чому кожний нуль і кожний полюс враховується стільки разів, яка його кратність.

Під кінець зазначимо, що *коли $f(z)$ є функція, голоморфна всюди всередині замкнутого контура Γ, включаючи і точки самого контура Γ, яка не приймає якогось значення a на контурі Γ, то значення інтеграла*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz$$

зображатиме число точок z, що лежать усередині Γ, в яких маємо:

$$f(z)=a.$$

Дійсно, за формулою (12) цей інтеграл буде давати число нулів, що містяться всередині Γ, функції $f(z)-a$.

§ 2. Застосування теорії лишків

1. Основна теорема алгебри. Формула (15′) має численні застосування. Ми обмежимося лише одним застосуванням цієї формули, показавши, що *всяка ціла раціональна функція n-го степеня*

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n \quad (n\geqslant 1)$$

має n нулів, рахуючи кожний нуль стільки разів, який його порядок. Ми знаємо, що ціла раціональна функція степеня n має єдину особливу точку — полюс порядку n в нескінченності (розд. VII, § 4, п. 1), тобто маємо: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$. Отже, існує круг з центром у нульовій точці радіуса R такий, що в усіх точках, що задовольняють умові $|z|\geqslant R$ функція $f(z)$ за модулем більша одиниці; таким чином всі нулі нашої функції $f(z)$ лежать усередині цього круга $|z|<R$. На підставі формули (12) попереднього пункту число цих нулів даної функції буде:

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz, \tag{16}$$

де інтегрування виконується по колу C згаданого круга. Залишається показати, що $N=n$. Для цього ми зауважимо, що $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^-}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=-N$ зображає лишок функції $\frac{f'(z)}{f(z)}$ відносно нескінченно віддаленої точки, а, значить, N дорівнює цьому лишкові з супротивним знаком. Тому що

$$f(z)=z^n\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\ldots+\frac{a_n}{z^n}\right)=z^n\cdot\varphi(z),$$

всюди за винятком нескінченно віддаленої точки, то звідси одержуємо:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{d}{dz}\ln f(z)=\frac{n}{z}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{n}{z}+\psi(z), \tag{17}$$

де $\psi(z)$ — функція, що має в нескінченно віддаленій точці нуль не нижче другого порядку. З співвідношенням (17) виходить, що лишок функції $\frac{f'(z)}{f(z)}$ для нескінченно віддаленої точки є $-n$. Таким чином, маємо: $N=n$, що й потрібно.

2. Застосування теорії лишків до обчислення визначених інтегралів. Як ми бачили в попередньому пункті, теорія лишків може бути застосована до розв'язання питань теоретичного характеру. В цьому пункті ми спинимося на деяких застосуваннях цієї теорії практичного характеру, а саме покажемо, як можна обчислити за допомогою лишків визначені інтеграли.

Нехай $f(z)$ є функція, голоморфна всюди в верхній півплощині, включаючи дійсну вісь, за винятком скінченного числа особливих точок $a_1, a_2, \ldots, a_k$, що лежать зверху від дійсної осі. Крім того, припустимо, що нескінченно віддалена точка є нулем функції $f(z)$ порядку принаймні другого. В цих умовах має місце формула:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=2\pi i\cdot\sum \textit{rés.}^{1)} \quad \text{відносно } a_1, a_2, \ldots, a_k. \tag{18}$$

[1]) Читати: сума лишків.

Справді, розклад Лорана функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки буде:

$$f(z)=\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-3}}{z^3}+\ldots \tag{19}$$

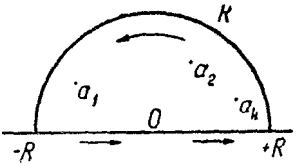

Рис. 90

Опишемо з нульової точки, як центра, півколо K, що лежить у верхній півплощині, радіуса R такого великого, щоб усі особливі точки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ містилися всередині півкруга, границя якого складається з півкола K і відрізка $(-R, +R)$ дійсної осі (рис. 90). В наслідок основної теореми про лишки (§ 1, п. 2) маємо:

$$\int_{-R}^{+R} f(x)\,dx+\int_K f(z)\,dz=2\pi i\sum \text{rés. відносно } a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_k. \tag{20}$$

Покажемо тепер, що $\int_K f(z)\,dz$ прямує до нуля, коли радіус R прямує до нескінченності. Справді, в усіх точках півкола K маємо на підставі (19):

$$|f(z)|\leqslant\frac{|c_{-2}|}{R^2}+\frac{|c_{-3}|}{R^3}+\ldots=\frac{|c_{-2}|}{R^2}+\frac{1}{R^2}\left[\frac{|c_{-3}|}{R}+\ldots\right]. \tag{21}$$

Вираз в дужках нерівності (21) може бути зроблений як завгодно малим, наприклад, меншим одиниці, починаючи з достатньо великого R. Отже, з нерівності (21) одержуємо:

$$|f(z)|<\frac{|c_{-2}|+1}{R^2} \tag{22}$$

всюди на півколі K, починаючи з достатньо великого R. Користуючись нерівністю (22), оцінимо величину модуля інтеграла $\int_K f(z)\,dz$:

$$\left|\int_K f(z)\,dz\right|<\frac{|c_{-2}|+1}{R^2}\cdot\pi R=\pi\frac{|c_{-2}|+1}{R},$$

тобто маємо: $\lim\limits_{R\to\infty}\int_K f(z)\,dz=0$.[1])

Помітивши це, з формули (20) переходом до границі R, прямує до нескінченності, одержимо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=2\pi i\cdot\sum \text{rés. відносно } a_1,\ a_2,\ldots,\ a_k,$$

що й доводить формулу (18).

[1]) Для виведення цієї рівності досить припустити, що $\lim\limits_{|z|\to\infty}|zf(z)|=0$ номірно відносно $\arg z$, $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$. (*Ред.*).

Приклади

1. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Підінтегральна функція $\frac{1}{1+z^2}$ є голоморфна всюди у верхній півплощині, крім точки $z=i$, де вона має простий полюс з лишком, рівним $\frac{1}{2i}$, тому що $(1+z^2)'=2z$, і, значить, шуканий лишок буде:

$$\frac{1}{(1+z^2)'_{z=i}}=\frac{1}{2i} \qquad (\S\ 1,\ п.\ 3).$$

В нескінченності наша функція має нуль другого порядку, якщо приймемо $\left(\frac{1}{1+z^2}\right)_\infty=0$.

Таким чином, шуканий інтеграл обчислюється за формулою (18):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\frac{1}{2i}=\pi.$$

2. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$, де $n \geqslant 1$. Підінтегральна функція $\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ задовольняє, очевидно, умовам, при наявності яких можна застосувати формулу (18), при чому має у верхній півплощині полюс $(n+1)$-го порядку в точці $z=i$.

Щоб знайти відповідний лишок, утворимо вираз:

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{(z-i)^{n+1}}{(z^2+1)^{n+1}}\right]=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(z+i)^{-n-1}=$$

$$=\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n!}\cdot\frac{1}{(z+i)^{2n+1}}.$$

Переходячи до границі в цьому виразі при z, що прямує до i, одержимо значення шуканого лишку (§ 1, п. 3)

$$\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n!}\cdot\frac{1}{(2i)^{2n+1}}=\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n} 2i}.$$

Отже за формулою (18) матимемо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=\pi\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

3. Іноді вдається так перетворити за допомогою простого підставлення шуканий інтеграл, що перетворений інтеграл обчислюється на підставі основної формули Коші або формули, одержаної з неї способом диференціювання.

Так, наприклад, щоб обчислити інтеграл $\int\limits_0^{2\pi} \cos^{2n}x\,dx$, зробимо підставлення: $e^{xi}=\zeta$, яке переводить відрізок дійсної осі $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ в коло C з центром у

нульовій точці радіуса одиниця площини ζ. Таким чином одержуємо співвідношення:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}\right)^{2n} dx = -\frac{i}{2^{2n}} \int_C \frac{(1+\zeta^2)^{2n} d\zeta}{\zeta^{2n+1}} \tag{23}$$

З основної формули Коші знаходимо:

$$\int_C \frac{(1+\zeta^2)^{2n} d\zeta}{\zeta^{2n+1}} = \frac{2\pi i}{(2n)!} \frac{d^{2n}(1+\zeta^2)^{2n}}{d\zeta^{2n}}\Bigg|_{\zeta=0}.$$

Помітивши, що $\frac{1}{(2n)!} \frac{d^{2n}(1+\zeta^2)^{2n}}{d\zeta^{2n}}\Bigg|_{\zeta=0}$ є коефіцієнт при ζ^{2n} в розкладі бінома $(1+\zeta^2)^{2n}$, знаходимо для нього значення:

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\ldots n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

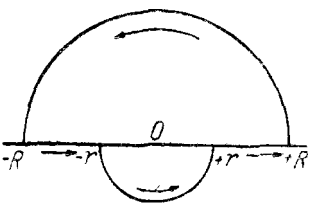

Рис. 91

Вносячи його в формулу (23), остаточно одержимо:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x\, dx = 2\pi \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = 2\pi \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}.$$

4. Під кінець обчислимо ще інтеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. З наших міркувань буде також виходити існування цього інтеграла. Ми будемо виходити з інтеграла $\int \frac{e^{zi}}{z} dz$, приймаючи за путь інтегрування замкнутий контур, показаний на рис. 91.

Тому що всередині контура інтегрування підінтегральна функція має єдину особливу точку при $z = 0$ з лишком, рівним одиниці, то за основною теоремою про лишки (§ 1, п. 2) маємо:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{xi}}{x} dx + \int_{\xrightarrow{-r,+r}} \frac{e^{zi}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{xi}}{x} dx + \int_{\xleftarrow[-R,+R]{}} \frac{e^{zi}}{z} dz = 2\pi i. \tag{24}$$

Відмітимо очевидну рівність:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{xi}}{x} dx = -\int_r^R \frac{e^{-xi}}{x} dx,$$

сполучимо перший і третій інтеграли рівності (24) в один:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{xi}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{xi}}{x} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx,$$

після чого рівність (24) набере вигляду:

$$2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\xrightarrow{-r,+r}} \frac{e^{zi}}{z} dz + \int_{\xleftarrow[-R,+R]{}} \frac{e^{zi}}{z} dz = 2\pi i. \tag{24'}$$

Щоб знайти інтеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, примусимо тепер r прямувати до нуля, а R — до нескінченності. Покажемо, що інтеграл $\int\limits_{\overleftarrow{-R,+R}} \frac{e^{zi}}{z} dz$ прямує при цьому до нуля.

Справді, розкладемо інтеграл

$$\int\limits_{\overleftarrow{-R,+R}} \frac{e^{zi}}{z} dz = i \int\limits_0^\pi e^{-R\sin\varphi + iR\cos\varphi} d\varphi \qquad (z = Re^{\varphi i})$$

на три частини: $\int\limits_0^\delta + \int\limits_\delta^{\pi-\delta} + \int\limits_{\pi-\delta}^\pi$, при чому $\delta\,(\delta > 0)$ виберемо таким малим, щоб обидва інтеграли $\int\limits_0^\delta$ і $\int\limits_{\pi-\delta}^\pi$ за модулем були менші, ніж $\frac{\varepsilon}{3}$, де $\varepsilon > 0$ — як завгодно мале число. Це можна зробити, тому що, наприклад, маємо:

$$\left| \int\limits_0^\delta d\varphi e^{-R\sin\varphi + iR\cos\varphi} \right| \leqslant \int\limits_0^\delta e^{-R\sin\varphi} d\varphi < \delta,$$

тому що $e^{-R\sin\varphi} \leqslant 1$, і, значить, досить взяти $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Після того, як ми фіксували стале δ, розглянемо інтеграл:

$$\int\limits_\delta^{\pi-\delta} d\varphi e^{-R\sin\varphi - iR\cos\varphi}.$$

Очевидно, маємо:

$$\left| \int\limits_\delta^{\pi-\delta} d\varphi e^{-R\sin\varphi + iR\cos\varphi} \right| \leqslant \int\limits_\delta^{\pi-\delta} d\varphi e^{-R\sin\varphi}.$$

Тому що при $\delta \leqslant \varphi \leqslant \pi - \delta$ буде: $\sin\varphi \geqslant \sin\delta$, то маємо:

$$e^{-R\sin\varphi} \leqslant e^{-R\sin\delta}.$$

Через це одержуємо:

$$\left| \int\limits_\delta^{\pi-\delta} d\varphi e^{-R\sin\varphi + iR\cos\varphi} \right| \leqslant (\pi - 2\delta)\, e^{-R\sin\delta},$$

що буде менше $\frac{\varepsilon}{3}$, починаючи з достатньо великого R.

Отже, ми показали:

$$\left| \int\limits_{\overleftarrow{-R,+R}} \frac{e^{zi}}{z} dz \right| < \varepsilon,$$

при достатньо великих значеннях R, тобто

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\overleftarrow{-R,+R}} \frac{e^{zi}}{z} dz = 0, \qquad (25)$$

Залишається знайти границю інтеграла

$$\int\limits_{-r,+r\uparrow} \frac{e^{zi}}{z}\,dz = i\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-r\sin\varphi + ir\cos\varphi}\,d\varphi$$

при r, яке прямує до нуля, що буде дорівнювати πi, тому що підінтегральна функція $e^{-r\sin\varphi+ir\cos\varphi}$ прямує при $r\to 0$ до одиниці, рівномірно відносно φ.

Таким чином, формула (24′) в границі, при $R\to\infty$, $r\to 0$, нам дає:

$$2i\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx + \pi i = 2\pi i,$$

або

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. Твердження Руше. Користуючись теорією лишків, можна довести дуже корисне твердження, відоме під назвою теореми Руше: *якщо дві функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$, аналітичні всередині і на контурі Γ, задовольняють на Γ умовам: $\varphi(z)\neq 0$ і $|\psi(z)|<|\varphi(z)|$, то всередині Γ функції $\varphi(z)$ і $\varphi(z)+\psi(z)$ мають однакове число нулів.*

Справді, за § 1, п. 5, число нулів, які лежать всередині Γ, функції $\varphi(z)+\psi(z)$ буде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi'+\psi'}{\varphi+\psi}\,dz,$$

тому що функція $\varphi(z)+\psi(z)$, аналітична всередині і на самому контурі, за умовою на контурі вона не має нулів. З другого боку, цей інтеграл можна зобразити так:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi'+\psi'}{\varphi+\psi}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{d}{dz}\ln(\varphi+\psi)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{d}{dz}\ln\varphi\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{d}{dz}\ln\left(1+\frac{\psi}{\varphi}\right)dz.$$

Вважаючи $w = 1+\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$, ми бачимо, що останній інтеграл дорівнює

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{dw}{w},$$

де інтегрування поширюється по контурові Γ_1, описуваному точкою $w = 1+\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$, коли z описує Γ.

В наслідок умови на Γ маємо:

$$\left|\frac{\psi}{\varphi}\right| < 1,$$

і тому контур Γ_1 *лежить цілком усередині* круга з центром у точці $w=1$ радіуса одиниця. Тому що цей круг не містить усередині себе початку координат, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{dw}{w}=0.$$

Отже, ми встановили рівність:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi'+\psi'}{\varphi+\psi}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi'}{\varphi}\,dz,$$

яка і є аналітичний вираз твердження Руше.

Вправи до розділу VIII

1. Якщо функція $f(z)$ в точці z_0 має нуль порядку α, а $\varphi(z)$ голоморфна в цій точці, то чому дорівнює лишок функції $\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ відносно точки $z=z_0$? Зокрема визначити лишок функції $z^n\frac{f'(z)}{f(z)}$.

Відп. $\alpha\varphi(z_0)$; αz_0^n.

2. Те ж запитання в припущенні, що $f(z)$ має при $z=z_0$ полюс порядку β. *Відп.* $-\beta\varphi(z_0)$.

3. Обчислити значення $\frac{1}{2\pi i}\int_C z^n\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$, якщо $f(z)$ буде голоморфною функцією всередині C і на C, при чому $f(z)\neq 0$ на C, всередині ж C вона має нулі $z_1, z_2, \ldots, z_k$, порядків $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Відп. $\alpha_1 z_1^n+\alpha_2 z_2^n\ldots+\alpha_k z_k^n$.

4. Обчислити за допомогою теорії *лишків інтеграли:*

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x(x^2+1)^2},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{1+x^4},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Відп. $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{3}{2e}\right)$; $4\pi\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\frac{\pi}{2e^3}(3e^2-1)$.

5. Обчислити лишки функцій:

a) $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ при $z=1$ і при $z=2$;

b) $\frac{z}{(z-z_1)^m(z-z_2)}$ при $z=z_1$ і при $z=z_2$ $(z_2\neq z_1)$;

c) $e^{\frac{1}{1-z}}$ при $z=1$; d) $\frac{1}{1-e^z}$ при $z=2k\pi i$.

Відп. a) $+1$ і -1; b) $-\frac{z_2}{(z_2-z_1)^m}$ і $\frac{z_2}{(z_2-z_1)^m}$; c) -1; d) -1.

6. Функції $f(z)$ і $g(z)$ голоморфні в точці z_0, при чому $f(z_0)\neq 0$, а $g(z)$ має при $z=z_0$ нуль другого порядку. Який лишок має $\frac{f(z)}{g(z)}$ в точці z_0?

Відп. $\frac{a_1b_2-a_0b_3}{b_2^2}$, де $a_\nu=\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(z_0)$ і $b_\nu=\frac{1}{\nu!}g^{(\nu)}(z_0)$ $(\nu=1, 2, 3)$.

7. Знаючи, що $\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, обчислити інтеграли Френеля:

$$\int\limits_0^\infty \cos(t^2)\,dt = \int\limits_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

виходячи з функції e^{-z^2} і інтегруючи її вздовж замкнутої путі C, яка іде від 0 по дійсній осі до $+R$, потім вздовж $|z| = R$, до точки $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ і звідси по прямій до точки 0.

8. Обчислити $\int\limits_C \operatorname{tg} \pi z\, dz$, де C є коло $|z| = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Відп. — 4ni.

Розділ IX

Нескінченні добутки і застосування їх до аналітичних функцій

§ 1. Нескінченні добутки

1. Збіжні і розбіжні нескінченні добутки. Поряд з нескінченними рядами нескінченні добутки є дуже цінним аналітичним апаратом для зображення функцій. Перед тим, як скористуватися з цього апарата для зображення голоморфних функцій комплексного змінного, ми повинні дати короткий нарис теорії нескінченних добутків.

Розглянемо добуток p_n довільного числа n числових множників, відмінних від нуля, які будемо позначати відповідно через $(1+u_1)$, $(1+u_2)$, ..., $(1+u_n)$, де $u_1, u_2, \ldots u_n$ є комплексні числа:

$$p_n=(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n). \tag{1}$$

Даючи n значення 1, 2, 3, ..., ми одержимо послідовність комплексних чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, відмінних від нуля, при чому можливі лише три випадки:

1) Послідовність чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ збігається до скінченного числа p, відмінного від нуля, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} p_n=p$, $p\neq 0$.

2) Послідовність чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ збігається до числа 0, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} p_n=0$.

3) Послідовність чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, розбіжна, тобто не прямує ні до якої скінченної границі.

У першому випадку нескінченний добуток

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots \tag{2}$$

називається *збіжним*, а число p приймають за значення цього добутку (2). В обох останніх випадках добуток (2) називають *розбіжним*.

Наприклад, нескінченний добуток

$$1\cdot\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdots\frac{n^2}{n^2-1}\cdots$$

збігається, бо в даному випадку маємо:

$$p_n = 1 \cdot \frac{2^2}{(2+1)(2-1)} \cdot \frac{3^2}{(3+1)(3-1)} \cdot \frac{4^2}{(4+1)(4-1)} \cdots \frac{(n-1)^2}{n(n-2)} \times$$
$$\times \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} = \frac{2n}{n+1},$$

і, значить, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 2$.

Нескінченні ж добутки

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4}$$

обидва розбігаються. В першому з них маємо:

$$p_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0 \text{ (випадок 2);}$$

в другому буде: $p_n = 1$, якщо n число парне, і $p_n = \frac{n+3}{2}$, якщо n непарне; отже, послідовність чисел p_n розбігається (випадок 3).

Дане поняття збіжності нескінченного добутку можна виразити за допомогою нерівностей. Справді, нехай добуток (2) збігається до числа p:

$$p = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots \tag{3}$$

В цьому випадку відношення $\frac{p}{p_n}$ прямує до одиниці при необмеженому зростанні n, тому що маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p}{p_n} = \frac{p}{\lim\limits_{n\to\infty} p_n} = \frac{p}{p} = 1 \quad (p \neq 0).$$

Очевидно, що, навпаки, якщо це відношення $\frac{p}{p_n}$ прямує до одиниці при необмеженому зростанні n, то добуток (2) збігається до числа p. Інакше кажучи, *нескінченний добуток (2) називається збіжним до числа p ($p \neq 0$), якщо при довільному як завгодно малому $\varepsilon > 0$ знайдеться число $N = N(\varepsilon)$ таке, що справджується нерівність*:

$$\left|\frac{p}{p_n} - 1\right| < \varepsilon \text{ при } n \geqslant N.$$

2. Основний критерій збіжності нескінченного добутку. Основною задачею в теорії нескінченних добутків є питання про те, як, знаючи елементи нескінченного добутку, тобто його множники, з'ясувати, чи збігається він чи розбігається. Ми обмежимося встановленням лише однієї загальної теореми, яка дає змогу звести дослідження збіжності нескінченного добутку до розгляду збіжності відповідного ряду.

Теорема. *Якщо ряд*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{4}$$

абсолютно збігається, то збігається й добуток

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_n) \ldots \tag{2}$$

Доведення. За умовою теореми ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{4'}$$

є збіжний. При доведенні теореми ми можемо припускати, що всі u_n за модулем менші одиниці, тому що із збіжності ряду (4′) випливає: $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$ і, значить, серед чисел u_n може бути лише скінченне число u_n, модулі яких не менші одиниці; відкидаючи ж скінченне число множників, ми не порушуємо збіжності або розбіжності добутку.

Ми доведемо спочатку нашу теорему, припускаючи, що всі числа u_n є дійсні; позначимо їх через a_n.

Отже, припускаючи, що ряд

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \tag{5}$$

збігається, доведемо збіжність добутку

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \ldots \tag{6}$$

Серед чисел a_n будуть, взагалі кажучи, як додатні, так і від'ємні. Перші з них позначимо через $b_1, b_2, \ldots$, а другі — через $-c_1, -c_2, \ldots$

Розглянемо окремо два добутки:

$$(1 + b_1)(1 + b_2) \ldots \tag{7}$$

і

$$(1 - c_1)(1 - c_2) \ldots \tag{8}$$

Якщо ми покажемо, що обидва ці добутки збігаються, то, очевидно, тим самим буде доведена збіжність добутку (6).

За умовою ряди $b_1 + b_2 + \ldots$ (7′) і $c_1 + c_2 + \ldots$ (8′) будуть збіжні. Помітивши, що маємо:

$$\ln(1 + b_n) < b_n \qquad (b_n < 1),$$

переконуємося у збіжності ряду

$$\ln(1 + b_1) + \ln(1 + b_2) + \ldots$$

звідки виходить, що вираз

$$\ln(1 + b_1) + \ln(1 + b_2) + \ldots + \ln(1 + b_n) = \\ = \ln(1 + b_1)(1 + b_2) \ldots (1 + b_n)$$

прямує до певної скінченної границі, коли n необмежено зростає. Отже, добуток

$$(1 + b_1)(1 + b_2) \ldots (1 + b_n)$$

прямує до певної скінченної границі, відмінної від нуля, коли n прямує до нескінченності, що і доводить збіжність добутку (7). Аналогічно доведемо збіжність добутку (8), показавши, що ряд з загальним членом $\ln(1-c_n)$ збігається. Дійсно, помітивши, що маємо

$$\ln(1-c_n) = -\frac{c_n}{1-\vartheta c_n} \qquad (0<\vartheta<1),$$

переконуємося в збіжності ряду з загальним членом $\frac{c_n}{1-\vartheta c_n}$, тому що ряд з загальним членом c_n за умовою збігається, а відношення $c_n : \frac{c_n}{1-\vartheta c_n} = 1-\vartheta c_n$, починаючи з достатньо великого n, лишається між $1-\varepsilon$ і 1, яке б не було $\varepsilon>0$.

Залишається поширити нашу теорему на той випадок, коли числа u_n є комплексні. Ми доведемо, що комплексне число $p_n=(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)$ при необмеженому зростанні n прямує до певної скінченної границі, відмінної від нуля, якщо виявимо, що $|p_n|$ прямує до скінченної границі, не рівної нулеві, і $\arg p_n$ прямує до певної скінченної границі. Інакше кажучи, треба довести, поперше, що добуток

$$|1+u_1||1+u_2|\ldots|1+u_n| \tag{9}$$

збігається і, подруге, що ряд

$$\arg(1+u_1)+\arg(1+u_2)+\ldots \tag{10}$$

збігається, тому що маємо:

$$|p_n| = |1+u_1||1+u_2|\ldots|1+u_n|$$

і

$$\arg p_n = \arg(1+u_1)+\arg(1+u_2)+\ldots+\arg(1+u_n).$$

Нескінченні добутки з загальними множниками $|1+u_n|$ і $|1+u_n|^2$ одночасно збігаються або розбігаються, а тому для збіжності добутку (9) досить виявити збіжність добутку:

$$|1+u_1|^2|1+u_2|^2\ldots|1+u_n|^2\ldots \tag{9}$$

Цей же останній збігається в наслідок уже доведеної першої частини нашої теореми, тому що маємо:

$$|1+u_n|^2 = |1+\alpha_n+\beta_n i|^2 = (1+\alpha_n)^2+\beta_n^2 = 1+(\alpha_n^2+\beta_n^2+2\alpha_n),$$

і ряд з загальним членом $|\alpha_n^2+\beta_n^2+2\alpha_n|$ за умовою збігається в наслідок нерівності.

$$|\alpha_n^2+\beta_n^2+2\alpha_n| \leqslant |u_n|^2+2|u_n|.$$

Нарешті, ряд (10) з загальним членом

$$\arg(1+u_n) = \arcsin\frac{\beta_n}{\sqrt{(1+\alpha_n)^2+\beta_n^2}}$$

збігається в наслідок збіжності ряду з загальним членом $|\beta_n|$ ($|\beta_n| \leqslant |u_n|$) і нерівності:

$$\left|\arcsin\frac{\beta_n}{\sqrt{(1+\alpha^n)^2+\beta_n^2}}\right|<\frac{\pi}{2}\frac{|\beta_n|}{\sqrt{(1+\alpha_n)^2+\beta_n^2}}<\frac{\pi}{2}|\beta^n|,$$

яка має місце, починаючи з досить великого n $\left(\text{тому що } \frac{x}{\sin x}\right.$ у першій чверті залишається менше $\left.\frac{\pi}{2}\right)$.

Припускаючи в нескінченному добутку

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots$$

всі u_n дійсними числами одного знаку, легко показати, що збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ буде умовою не тільки достатньою, а і необхідною для збіжності добутку. Справді, якщо числа u_n додатні і наш добуток збігається, то послідовність чисел $p_n=(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)$, зростаючи, повинна залишатися меншою якогось сталого додатного числа M. Розкриваючи дужки у виразі p_n, ми бачимо, що сума $u_1+u_2+\ldots+u_n$ і тим більше буде меншою M, яке б не було n, а це значить, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збіжний.

Якщо числа $u_n=-c_n$ від'ємні, то, припускаючи розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$, доведемо розбіжність добутку $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-c_n)$. Дійсно,

$$\ln p_n=\ln(1-c_1)+\ln(1-c_2)+\ldots+\ln(1-c_n)$$

прямує до від'ємної нескінченності, коли n необмежено зростає, тому що ряд з загальним членом $\ln(1-c_n)=-\frac{c_n}{1-\vartheta c_n}$ розбігається (ми вважаємо, що $c_n<1$, починаючи з якогось n; в супротивному випадку розбіжність добутку очевидна, тому що серед чисел p_n буде нескінченна множина як додатних чисел, так і від'ємних). Звідси виходить, що p_n прямує до нуля при необмеженому зростанні n, і, значить, наш добуток розбіжний.

3. Зображення голоморфної функції у вигляді нескінченного добутку. Нехай ми маємо нескінченний добуток

$$[1+u_1(z)][1+u_2(z)]\ldots[1+u_n(z)]\ldots, \tag{11}$$

при чому всі функції $u_n(z)$,[1] голоморфні в деякій області G. Припустимо, що при якому завгодно n матиме місце нерівність:

$$|u^n(z)|<a_n, \tag{12}$$

яка б не була точка z області G, і нехай числовий ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \tag{13}$$

збігається. В цьому випадку добуток (11) в наслідок попереднього пункту збігається у всякій точці z області G і зображає,

[1]) Всі множники добутку (11) відмінні від нуля для якої завгодно точки z області G.

значить, якусь функцію $f(z)$ комплексного змінного z, не рівну нулеві ні в якій точці G. Ми доведемо, що $f(z)$ *є функція, голоморфна в області* G.

Дійсно,

$$f_n(z) = [1 + u_1(z)][1 + u_2(z)] \ldots [1 + u_n(z)];$$

нам досить довести на підставі першої теореми Вейерштрасса (розд. VI, § 1, п. 1), що послідовність функцій $f_n(z)$, голоморфних в області G, збігається рівномірно в цій області до функції $f(z)$. Завівши позначення:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) = p_n,$$

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots = p$$

(останній добуток збігається за умовою в наслідок п. 2), оцінимо модуль різниці $f(z) - f_n(z)$:

$$|f(z) - f_n(z)| = |f_n(z)| \left| \frac{f(z)}{f_n(z)} - 1 \right| < p_n \left| \frac{f(z)}{f_n(z)} - 1 \right|, \tag{14}$$

тому що

$$|f_n(z)| \leqslant (1 + |u_1(z)|)(1 + |u_2(z)|) \ldots (1 + |u_n(z)|) <$$
$$< (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) = p_n.$$

С другого боку, справедлива нерівність:

$$\left| \frac{f(z)}{f_n(z)} - 1 \right| \leqslant \frac{p}{p_n} - 1, \tag{15}$$

при якому завгодно n, яка б не була точка z області G. Дійсно,

$$\frac{f_{n+k}(z)}{f_n(z)} - 1 = [1 + u_{n+1}(z)][1 + u_{n+2}(z)] \ldots [1 + u_{n+k}(z)] - 1 =$$
$$= u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \ldots + u_{n+k}(z) + u_{n+1}(z)\, u_{n+2}(z) + \ldots$$
$$\ldots + u_{n+1}(z)\, u_{n+2}(z) \ldots u_{n+k}(z),$$

звідки випливає:

$$\left| \frac{f_{n+k}(z)}{f_n(z)} - 1 \right| < a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} + a_{n+1} a_{n+2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{n+k} = \frac{p_{n+k}}{p_n} - 1.$$

Остання нерівність справедлива при якому завгодно k; переходячи до границі при $k \to \infty$, одержуємо нерівність (15).

В наслідок нерівності (15) нерівність (14) набере вигляду:

$$|f(z) - f_n(z)| < p_n \left(\frac{p}{p_n} - 1 \right) = p - p_n < \varepsilon, \text{ коли } n \geqslant N(\varepsilon), \tag{16}$$

яка б не була точка z області G. Остання нерівність доводить рівномірну збіжність в області G послідовності голоморфних функцій $f_n(z)$ до функції $f(z)$, що й потрібно.

§ 2. Застосування нескінченних добутків до теорії цілих функцій

1. Формула Вейерштрасса. Однією з фундаментальних задач алгебри є питання про розклад цілої раціональної функції на добуток лінійних множників. Розглядаючи довільну цілу функцію, природно поставити задачу про зображення цієї функції у вигляді добутку множників, завдяки якому стають очевидними всі нулі цієї функції. Частково це питання розглядав Коші, але тільки Вейерштрассові вдалося поширити основну теорему алгебри на які завгодно цілі функції.

Нехай є нескінченна послідовність комплексних чисел

$$a_1,\ a_2, \ldots a_n, \ldots, \tag{17}$$

розміщених у порядку зростання їх модулів і таких, що маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = 0. \tag{18}$$

Якщо кілька з чисел (17) мають однаковий модуль, то ми ці числа розміщуємо в довільному порядку. В наслідок самого означення поняття границі і умови (18) ясно, що при довільному як завгодно великому R є лише скінченне число величин a_n, модулі яких менші, ніж R. Помітивши це, ми доведемо, що *можна утворити цілу функцію $G(z)$, що має своїми нулями числа a_n і тільки ці числа.*

Якщо кілька з чисел a_n рівні між собою, то нуль буде кратним, порядку, рівного числу цих рівних між собою a_k. При доведенні зазначеної вище теореми ми будемо спочатку припускати, що серед чисел a_n немає рівних нулеві.

Розглянемо вираз

$$u_\nu = \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\frac{z}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\nu-1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\nu-1}}. \tag{19}$$

Припускаючи, що $|z| < |a_\nu|$, ми можемо покласти:

$$\ln u_\nu = \ln\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) + \frac{z}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\nu-1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\nu-1},$$

вважаючи $\ln\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right)$ однозначною голоморфною функцією всередині круга з центром у нульовій точці радіуса $|a_\nu|$ і рівною нулеві при $z = 0$. Отже, матимемо:

$$\ln u_\nu = -\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^\nu - \frac{1}{\nu+1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\nu+1} - \ldots, \tag{20}$$

звідки знаходимо:

$$u_\nu = e^{-\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^\nu - \frac{1}{\nu+1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\nu+1} - \ldots} \tag{19'}$$

Ми тепер покажемо, що нескінченний добуток

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_\nu \ldots \tag{21}$$

збігається у всякій точці $z (z \neq a_\nu)$ площини комплексного змінного і зображує цілу функцію $G(z)$ з нулями $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Для цього доведемо, що добуток (21) зображає функцію, голоморфну всередині круга C, з центром у нульовій точці радіуса $|a_\nu|$, яке б не було ν. Досить, очевидно, вважати

$$|a_{\nu-1}| < |a_\nu|.$$

Залишаючи без розгляду скінченне число множників

$$u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1},$$

що мають нулі всередині круга C_ν, ми маємо:

$$u_\nu \cdot u_{\nu+1} \cdot \ldots = e^{-\sum\limits_{n=\nu}^{\infty} \left[\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n + \frac{1}{n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n+1} + \ldots\right]}, \quad |z| < |a_\nu|. \tag{22}$$

Наше твердження буде доведене, якщо ми покажемо, що ряд

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \left[\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n + \frac{1}{n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n+1} + \ldots\right] \tag{23}$$

збігається при $|z| < |a_\nu|$ до голоморфної функції.

Кожний член ряду (23) є функція, голоморфна всередині круга C_ν. Його сума за першою теоремою Вейєрштрасса (розд. VI, § 1, п. 1) буде також голоморфною функцією всередині круга C_ν, якщо ряд (23) збігається рівномірно у всякому крузі $|z| \leqslant (1-\varepsilon)|a_\nu|$, де $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ — як завгодно мале число.

Дійсно, при $|z| \leqslant (1-\varepsilon)|a_\nu|$ маємо:

$$\left|\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n + \frac{1}{n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n+1} + \ldots\right| \leqslant \frac{1}{n}\left|\frac{z}{a_n}\right|^n + \frac{1}{n+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1} + \ldots <$$

$$< \frac{1}{n}(1-\varepsilon)^n + \frac{1}{n+1}(1-\varepsilon)^{n+1} + \ldots < \frac{(1-\varepsilon)^n}{n\varepsilon}$$

Тому що числовий ряд з загальним членом $\frac{(1-\varepsilon)^n}{n\varepsilon}$ збігається, то ряд (23) збігається рівномірно при $|z| \leqslant (1-\varepsilon)|a_\nu|$.

Таким чином ми переконались, що ряд (23) зображує функцію, голоморфну всередині круга C_ν. Отже, добуток (21) зображає функцію, також голоморфну всередині цього круга; ця функція обертається в нуль при $z = a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$ і не має інших нулів всередині цього круга. Пригадавши, нарешті, що ціле число ν можна взяти як завгодно великим, ми бачимо, що добуток (21) зображає функцію цілу, що має нулями дані числа a_n і не має інших нулів.

Множники u_ν називаються *первісними факторами*; первісний фактор u містить, крім лінійного множника $\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right)$, показни-

ковий фактор. Завдяки наявності цих додаткових показникових множників добуток (21) виявляється збіжним.

Досі ми припускали, що серед даних чисел (17) немає рівних нулеві. У випадку, коли $z=0$, повинно бути нулем порядку λ шуканої цілої функції, ми поставимо перед побудованим добутком (21) множник z^λ. Одержувана формула

$$G(z)=z^\lambda\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}} \tag{I}$$

називається *формулою Вейєрштрасса.*

При виведенні цієї формули ми припускали лише, що задана послідовність чисел (17) прямує до нескінченності при необмеженому зростанні номера n. В деяких окремих випадках виявляється, що можна вживати первісні фактори простішого вигляду.

Так, припустимо, що ряд з загальним членом $\left|\frac{1}{a_n}\right|^p$ (де p — якесь стале натуральне число) збігається. В цьому випадку можна взяти за u_ν вираз

$$u_\nu=\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)e^{\frac{z}{a_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p-1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{p-1}} \tag{19''}$$

Справді, згідно з попереднім аналізом питання зводиться до того, щоб довести рівномірну збіжність ряду

$$\sum_{n=\nu}^{\infty}\left[\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p+\frac{1}{p+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p+1}+\ldots\right] \tag{23'}$$

при $|z|\leqslant(1-\varepsilon)|a_\nu|$. Помітивши нерівність

$$\left|\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p+\frac{1}{p+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p+1}+\ldots\right|<\frac{1}{p}\,\frac{\left|\frac{z}{a_n}\right|^p}{1-\left|\frac{z}{a_n}\right|}<\frac{1}{p}\,\frac{(1-\varepsilon)^p|a_\nu|^p}{\varepsilon}\cdot\left|\frac{1}{a_n}\right|^p$$

ми переконуємося в справедливості сказаного, тому що числовий ряд

$$\frac{1}{p\varepsilon}(1-\varepsilon)^p|a_\nu|^p\sum_{n=\nu}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^p$$

за умовою збігається.

2. Зображення цілої функції у вигляді нескінченного добутку. В попередньому пункті ми задавали a priori послідовність чисел (17), що задовольняє умову (18), і показали, що існує ціла функція $G(z)$, зображувана формулою (I) Вейєрштрасса, для якої дані числа служать нулями. Навпаки, якщо ми маємо цілу функцію $G(z)$ з нескінченною множиною нулів, то ці нулі, як відомо (розд. VI, § 2, п. 6), не можуть мати ніякої граничної точки, тобто можуть бути розміщені в порядку зростання їх модулів у вигляді послідовності $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, що прямує до нескін-

ченності при необмеженому зростанні n. Побудувавши за формулою Вейєрштрасса (I) цілу функцію $G(z)$, що має ті ж самі нулі з тим же степенем кратності, ми бачимо, що відношення

$$\varphi(z) = \frac{G_1(z)}{G(z)} \tag{24}$$

зображає цілу функцію $\varphi(z)$ [приймаючи $\varphi(a_n) = \lim\limits_{z \to a_n} \varphi(z)$], що не обертається в нуль. В цих умовах вираз $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ буде також цілою функцією $H(z)$. Отже, ми маємо $\varphi(z) = e^{H(z)}$, де $H(z)$ означає якусь цілу функцію. Нарешті, з рівності (24) знаходимо:

$$G_1(z) = e^{H(z)} \cdot G(z), \tag{24}$$

або

$$G_1(z) = e^{H(z)} \cdot z^{\lambda} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}} \tag{I'}$$

Практично можуть траплятися значні труднощі при визначенні функції $H(z)$ за даною функцією $G_1(z)$. Так, наприклад, нехай $G_1(z) = \sin z$. Нулі $\sin z$ будуть: $z = n\pi$, де n — яке завгодно ціле число. Отже, за формулою (I'), ми можемо написати:

$$\sin z = e^{H(z)} \cdot z \prod{}' \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}},$$

де добуток поширюється на цілі значення n, додатні і від'ємні. Тут ми можемо взяти первісний фактор у спрощеному вигляді, тому що ряд

$$\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|^p = \sum \left|\frac{1}{n\pi}\right|^p$$

збігається при $p = 2$.

Останню формулу для $\sin z$ ми можемо, далі, спростити, групуючи по два первісні фактори, що відповідають значенням n, рівним за абсолютною величиною, але з супротивним знаком. Таке групування цілком можливе, тому що нулі $n\pi$, будучи розміщені в порядку зростання їх модулів, ідуть в такій послідовності:

$$\pi, \ -\pi, \ 2\pi, \ -2\pi, \ldots, \ n\pi, \ -n\pi,$$

Таким чином одержуємо:

$$\sin z = e^{H(z)} \cdot z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Щодо визначення цілої функції $H(z)$, то воно не може бути зроблене на підставі викладеної теорії. Можна було б довести, що в розгляданому випадку $H(z)$ є тотожний нуль.

3. Зображення мероморфної функції у вигляді відношення двох цілих функцій. Одним з визначних прикладань формули Вейєрштрасса (I) є зображення мероморфної функції $f(z)$ за допомогою цілих функцій.

Нехай $f(z)$ є однозначна функція в усій площині, що не має на скінченній віддалі інших особливостей, крім полюсів. Ми можемо утворити цілу функцію $G(z)$, що має своїми нулями полюси мероморфної функції $f(z)$ з тими ж степенями кратності. Добуток $G_1(z) = f(z) \cdot G(z)$ буде зображати цілу функцію $G_1(z)$, якщо прийняти для всякого полюса a функції $f(z)$:

$$G_1(a) = \lim_{z \to a} G_1(z).$$

Отже, матимемо:

$$f(z) = \frac{G_1(z)}{G(z)}$$

тобто *мероморфна функція $f(z)$ може бути зображена у вигляді відношення двох цілих функцій.*

Зазначимо, що функції $G(z)$ і $G_1(z)$, одержані в попередньому пункті, не мають спільних нулів, тому що при нулях функції $G(z)$ добуток $G_1(z) = f(z) \cdot G(z)$ має значення скінченні і відмінні від нуля.

Приклад. Мероморфні функції $\operatorname{tg} z$ і $\operatorname{ctg} z$ можуть бути зображені у вигляді відношень двох цілих функцій.

Наприклад, можна покласти:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

4. Задача Міттаг-Леффлера. Нехай дано особливі точки (полюси і істотно особливі ізольовані точки)

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots \qquad (\lim_{n \to \infty} a_n = \infty)$$

і відповідна кожній особливій точці a_n головна частина $G_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$ [$G_n(\zeta)$ є ціла функція від ζ] невідомої функції $f(z)$. Треба утворити однозначну у всій площині функцію $f(z)$, що має всі свої особливості в точках a_n і таку, щоб різниця

$$f(z) - G_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$$

була функцією, голоморфною в точці a_n. В цьому полягає проблема, поставлена і розв'язана Міттаг-Леффлером.

Не торкаючись розгляду цієї задачі в загальному вигляді, відзначимо лише її окремий випадок, безпосередньо зв'язаний з формулою Вейєрштрасса. Це буде той випадок, коли всі точки a_n є простими полюсами з лишками, що дорівнюють одиниці, тобто

$$G_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) = \frac{1}{z - a_n}.$$

Утворимо за формулою Вейєрштрасса цілу функцію $G(z)$, що має своїми нулями точки a_n:

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}}$$

Взявши логарифмічну похідну від $G(z)$, одержимо:

$$f(z)=\frac{d}{dz}\ln G(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}+\frac{z}{a_n^2}+\ldots+\frac{z^{n-2}}{a_n^{n-1}}\right]$$

Одержаний ряд раціональних функцій зображає мероморфну функцію $f(z)$ з простими полюсами в точках a_n і відповідними лишками, рівними $+1$.

§ 3. Узагальнення теореми єдиності аналітичних функцій

1. Можливі узагальнення теореми єдиності аналітичних функцій. При доведенні теореми єдиності (розд. VI, § 2, п. 4) ми припускали, що множина E точок області G, в яких дві функції $f(z)$ і $\varphi(z)$, голоморфні в G, мають рівні значення, припускає принаймні одну граничну точку, що лежить усередині G. Природно виникає питання, чи буде вірна ця основна теорема, якщо нескінченна множина E не має граничних точок усередині G? Легко бачити, що в такій формі це твердження, взагалі кажучи, невірне. Справді, функція $f(z)=\sin\frac{1}{1-z}$ є голоморфна всередині круга з центром у нульовій точці радіуса одиниця і рівна нулеві на нескінченній множині точок $z_k=1-\frac{1}{k\pi}$ ($k=1, 2, 3, \ldots$), що лежать усередині цього круга. Проте $\sin\frac{1}{1-z}$ не є тотожний нуль! Таким чином, якщо ми хочемо поширити теорему єдиності на цей випадок, коли множина точок E не має граничної точки всередині області G, то ми повинні обмежитися розглядом тієї або іншої сім'ї голоморфних функцій. Найбільш важливі сім'ї функцій, голоморфних в області G, такі:

1) сім'я функцій, з яких кожна є рівномірно обмежена в області G;

2) більш загальна сім'я функцій, які не приймають ніде в області G значень, що утворюють лінії, зокрема сім'я функцій, з яких кожна дає взаємно однозначне відображення області G.

Однак завжди можна побудувати дві функції, що належать до сім'ї 1), що мають рівні значення на нескінченній множині точок E області G. Отже, бажаючи поширити теорему єдиності, ми повинні, обмежуючись розглядом однієї з зазначених вище сімей функцій, накласти в той же час обмеження на розподіл точок множини E в області G. Так, у випадку, коли G є круг, таким обмеженням може бути вимога, щоб віддалі точок множини E до кола цього круга утворили розбіжний ряд.

За останні роки було доведено[1]), що *коли дві функції, які є голоморфні всередині круга* $|z|<1$ *і належать до однієї з згаданих вище сімей, мають рівні значення на множині точок* $E(z_k)$

[1]) Blaschke, Leipz. Berichte, 1915, стор. 194; Priwalow, Math. Ann., 1924, стор. 149.

таких, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)$ *їх віддалів до кола* $|z|=1$ *розбігається, то такі дві функції тотожно рівні між собою.*

В п. 3 цього параграфа ми доведемо справедливість цієї теореми для функцій сім'ї 1). В наведеному вище прикладі $\sin\frac{1}{1-z}$ вираз $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)$ обертається в $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}$ і є розбіжним рядом, проте, для цієї функції теорема єдиності невірна, тому що $\sin\frac{1}{1-z}$ не буде рівномірно обмеженою функцією всередині круга $|z|<1$ і взагалі не належить ні до однієї з трьох зазначених сімей.

2. Формула Якобі і Ієнсена. Для доведення теореми єдиності, формульованої в попередньому пункті, нам доведеться скористуватися однією визначною формулою, що належить Якобі і Ієнсенові. Виведення цієї формули буде основане на відомій (розд. VI, § 2, п. 5) властивості голоморфних функцій: *значення голоморфної функції в центрі круга дорівнює середньому арифметичному її граничних значень*, тобто

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho e^{\theta i})\,d\theta, \tag{25}$$

де $f(z)$ є функція, голоморфна в крузі $|z|\leqslant\rho$.

Покладаючи в формулі (25)

$$f(\rho e^{\theta i})=u(\rho,\theta)+iv(\rho,\theta),$$

одержимо:

$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\theta)\,d\theta, \tag{25'}$$

тобто зазначена властивість залишається в силі для функцій, що є дійсними частинами голоморфних функцій (що називаються гармонічними функціями).

Нехай $F(z)$ є функція, голоморфна в крузі $|z|\leqslant\rho$, нерівна нулеві на колі $|z|=\rho$. Позначимо нулі цієї функції[1]), що лежать всередині круга $|z|<\rho$, через $z_1, z_2, \ldots, z_n$ і припустимо, що $F(0)\neq 0$. При цих умовах має місце формула Якобі-Ієнсена:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|F(\rho e^{\theta i})|\,d\theta=\ln\left(|F(0)|\cdot\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\rho}{z_k}\right|\right). \tag{II}$$

Доведення. Очевидно, функція

$$\Phi(z)=\frac{F(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)} \tag{26}$$

[при чому $\Phi(z_k)=\lim_{z\to z_k}\Phi(z)$] є голоморфна в крузі $|z|\leqslant\rho$ і ніде не дорівнює нулеві. Отже, функція $f(z)=\ln\Phi(z)$ буде голо-

[1]) Кратний нуль виписується стільки разів, яка його кратність.

морфною всюди в крузі $|z| \leqslant \rho$. Прикладаючи формулу (25′) до дійсної частини функції $f(z)$, одержимо:

$$\ln|\Phi(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\Phi(\rho e^{\theta i})|\, d\theta. \tag{27}$$

Підставляючи в формулу (27), замість $\Phi(z)$, її значення (26), матимемо:

$$\ln\frac{|F(0)|}{|z_1||z_2|\ldots|z_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|F(\rho e^{\theta i})|\, d\theta - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\zeta - z_k|\, d\theta, \tag{27'}$$

де покладено $\zeta = \rho e^{\theta i}$. Залишається обчислити кожний з інтегралів:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\zeta - z_k|\, d\theta \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Для цього позначимо через $z_k' = \frac{\rho^2}{\bar{z}_k}$ точку, симетричну з точкою z_k відносно кола $|\zeta| = \rho$ (розд. I, § 2. п. 5). Коли точка ζ рухається по колу $|\zeta| = \rho$, відношення її віддалей від точок z_k, z_k' зберігає сталу величину. Справді, маємо:

$$\frac{|\zeta - z_k|}{|\zeta - z_k'|} = \frac{|\zeta - z_k|}{\left|\zeta - \frac{\rho^2}{\bar{z}_k}\right|} = |\bar{z}_k|\cdot\frac{|\zeta - z_k|}{|\zeta\bar{z}_k - \rho^2|} = |z_k|\cdot\frac{|\zeta - z_k|}{|\zeta\bar{z}_k - \rho^2|} = |z_k|\cdot\frac{|\zeta - z_k|}{\left|\frac{\rho^2}{\bar{\zeta}}\bar{z}_k - \rho^2\right|},$$

тому що $\zeta\bar{\zeta} = \rho^2$. Останній вираз, далі, перетвориться так:

$$\frac{|z_k|}{\rho^2}\,\frac{|\zeta - z_k|}{\left|\frac{\bar{z}_k}{\bar{\zeta}} - 1\right|} = \frac{|z_k|}{\rho}\,\frac{|\zeta - z_k|}{|\bar{z}_k - \bar{\zeta}|} = \frac{|z_k|}{\rho}.$$

Отже, ми одержали:

$$\frac{|\zeta - z_k|}{|\zeta - z_k'|} = \frac{|z_k|}{\rho} \tag{28}$$

що доводить наше твердження.

Прологарифмувавши останню рівність (28), одержимо:

$$\ln|\zeta - z_k| = \ln|\zeta - z_k'| + \ln\frac{|z_k|}{\rho}. \tag{28'}$$

В наслідок співвідношення (28′) можна написати:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\zeta - z_k|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\zeta - z_k'|\, d\theta + \ln\frac{|z_k|}{\rho}. \tag{29}$$

Інтеграл, що стоїть у правій частині рівності (29), негайно обчислюється, якщо помітимо, що функція $\ln(\zeta - z_k')$ є голо-

морфна у крузі $|\zeta| \leqslant \rho$, тому що точка z'_k лежить поза цим кругом. Прикладаючи формулу (25′), знаходимо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\zeta - z'_k|\, d\theta = \ln|0 - z'_k| = \ln\frac{\rho^2}{|z_k|}$$

і з рівності (29) одержимо значення шуканого інтеграла:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\zeta - z_k|\, d\theta = \ln\frac{\rho^2}{|z_k|} + \ln\frac{|z_k|}{\rho} = \ln\rho.$$

Вертаючись до співвідношення (27′), перепишемо його так:

$$\ln\frac{|F(0)|}{|z_1||z_2|\ldots|z_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|F(\rho e^{\theta i})|\, d\theta - n\ln\rho,$$

звідки остаточно одержуємо:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|F(\rho e^{\theta i})|\, d\theta = \ln\left(|F(0)|\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\rho}{z_k}\right|\right).$$

3. Доведення теореми єдиності. Нехай дві функції $f(z)$ і $\varphi(z)$, голоморфні всередині круга $|z| < 1$, будуть рівномірно обмежені в цьому крузі:

$$|f(z)| < M, \quad |\varphi(z)| < M, \quad \text{коли } |z| < 1.$$

Розглянемо множину точок E (z_k), $|z_k| < 1$, таких, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |z_k|) \tag{30}$$

їх віддалей до кола $|z| = 1$ розбігається. Припустимо, що у всіх точках множини E функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ мають рівні значення. При цих умовах ми доведемо, що функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ рівні тотожно одна одній.

Вважаючи $F(z) = f(z) - \varphi(z)$, ми одержуємо функцію $F(z)$, голоморфну всередині круга $|z| < 1$, рівномірно обмежену в цьому крузі: $|F(z)| < 2M$, якщо $|z| < 1$, рівну нулеві на множині точок E. Наша теорема буде доведена, якщо ми виявимо, що функція $F(z)$ є тотожний нуль.

Припускаючи протилежне, ми припустимо, що функція $F(z)$ не є тотожний нуль. Як відомо (розд. VI, § 2, п. 6), множину її нулів, що лежать усередині круга $|z| < 1$, можна перенумерувати за допомогою натуральних чисел, розмістивши їх у порядку зростання модулів. Ми можемо вважати, що послідовність точок $E(z_k)$ являє собою сукупність всіх нулів функції $F(z)$, тому що від додавання до множини E нових елементів ряд (30) залишається розбіжним.

Отже, $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ є різні можливі нулі функції $F(z)$, розміщені в порядку зростання їх модулів, при чому кожний кратний нуль записується в цій послідовності стільки разів, яка його кратність. Не зменшуючи загальності теореми, можна припускати $F(0) \neq 0$, тому що в супротивному випадку досить розглядати $\Phi(z) = \frac{F(z)}{z^\lambda}$, де λ — кратність кореня 0 [для $|z| < 1$ маємо:

$$|\Phi(z)| \leqslant 2M^{1)}, \ \Phi(z) = 0 \quad \text{при } z = z_1, z_2, \ldots \ i \ \Phi(0) \neq 0].$$

Розглянемо коло $|z| = \rho$ довільного радіуса ρ, $\rho < 1$, що не проходить ні через одну з точок $z_1, z_2, \ldots z_k, \ldots$ і позначимо через n число точок z_k, що лежать всередині цього кола. За формулою Якобі-Ієнсена (п. 2) маємо:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|F(\rho e^{\theta i})|\,d\theta = \ln\left(|F(0)|\prod_{k=1}^{n}\frac{\rho}{|z_k|}\right) \qquad (0 < \rho < 1). \qquad \text{(II)}$$

Тому що за умовою $|F(z)| < 2M$ при $|z| < 1$, то з формули (II) виходить нерівність:

$$|F(0)|\prod_{k=1}^{n}\frac{\rho}{|z_k|} < 2M$$

або, що те ж саме,

$$|F(0)| \cdot \frac{\rho^n}{|z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_n|} < 2M. \qquad (31)$$

Нерівність (31) справедлива при якому завгодно $\rho < 1$ і відповідному n. Покажемо, що ця нерівність лишається в силі, якщо n будемо вважати сталим, а ρ — як завгодно близьким до одиниці, тобто виявимо справедливість нерівності:

$$|F(0)| \cdot \frac{\rho'^n}{|z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_n|} < 2M, \qquad (31')$$

де $1 > \rho' \geqslant \rho$.

Дійсно, позначаючи через n' число нулів z_k, що лежать всередині кола $|z| = \rho'$, перепишемо (31) так:

$$|F(0)| \cdot \frac{\rho'^{n'}}{|z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_{n'}|} < 2M. \qquad (32)$$

З нерівності (32) випливає шукана нерівність (31'):

$$|F(0)|\frac{\rho'^n}{|z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_n|} = |F(0)|\frac{\rho'^{n'}}{|z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_{n'}|} \times$$
$$\times \frac{|z_{n+1}|\,|z_{n+2}| \ldots |z_{n'}|}{\rho'^{n'-n}} < 2M,$$

тому що маємо:

$$\frac{|z_{n+1}|\,|z_{n+2}| \ldots |z_{n'}|}{\rho'^{n'-n}} = \prod_{k=1}^{n'-n}\left|\frac{z_{n+k}}{\rho'}\right| < 1.$$

---

[1]) Розд. VI, § 2, п. 8.

Вважаючи n сталим, перейдемо в нерівності (31) до границі при ρ, що прямує до одиниці. Одержимо в результаті:

$$\frac{|F(0)|}{|z_1|\cdot|z_2|\ldots|z_n|} \leqslant 2M,$$

або

$$|z_1|\cdot|z_2|\ldots|z_n| \geqslant \frac{|F(0)|}{2M}. \tag{32a}$$

Остання нерівність справедлива при всякому n.

Отже, матимемо:

$$\prod_{k=1}^{\infty}|z_k| \geqslant \frac{|F(0)|}{2M} \geqslant 0,$$

тобто ми довели, що нескінченний добуток $\prod_{k=1}^{\infty}|z_k|$ збігається (тому що додатні числа $p_n = |z_1|\cdot|z_2|\ldots|z_n|$ спадають, залишаючись більш додатного сталого) (§ 1, п. 1).

Помітивши, що $|z_k| = 1-(1-|z_k|)$, ми в наслідок § 1, п. 2 (див. примітку) робимо висновок про збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)$. Одержана суперечність переконує нас у справедливості теореми.

4. Неможливість дальшого узагальнення теореми єдиності для обмежених функцій. В попередньому пункті ми довели теорему єдиності для обмежених функцій, накладаючи на множину точок $E(z_k)$ умову: ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)$ розбіжний. Виникає питання: чи буде вірна ця теорема для обмежених функцій в тих або інших випадках збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)$? На це питання ми відповімо негативно, показавши, що яка б не була послідовність точок $z_1, z_2, \ldots$, $(0 < |z_k| < 1)$, для якої ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)$ збігається, існує функція $f(z)$, не рівна тотожно нулеві, голоморфна і рівномірно обмежена всередині круга $|z| < 1$, рівна нулеві в кожній точці даної послідовності.

Така функція може бути визначена за допомогою формули:

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z_k - z}{1 - z\bar{z}_k}\right). \tag{33}$$

Дійсно, припускаючи числа $z_1, z_2, \ldots$, розміщеними в порядку зростання їх модулів, ми покажемо спочатку, що функція $f(z)$ є голоморфна при $|z| < |z_k|$, рівна нулеві всередині круга $|z| < |z^k|$ лише в точках $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$, при якому завгодно k (ми маємо право, очевидно, припустити $|z_{k-1}| < |z^k|$).

Для цього розглянемо добуток:

$$\prod_{n=k}^{\infty}\left(\frac{z_n - z}{1 - z\bar{z}_n}\bar{z}_n\right) \tag{34}$$

всі множники якого відмінні від нуля всюди всередині круга $|z| < |z_k|$.

Відзначивши нерівність:

$$\left|1 - \frac{z_n - z}{1 - z\bar{z}_n}\bar{z}_n\right| = \frac{1 - |z_n|^2}{|1 - z\bar{z}_n|} < \frac{2(1 - |z_n|)}{1 - |z_k|}$$

ми в наслідок збіжності числового ряду $\frac{2}{1 - |z_k|}\sum_{n=k}^{\infty}(1 - |z_n|)$ робимо висновок на підставі § 1, п. 3, що добуток (34) збігається до функції, голоморфної і відмінної від нуля при $|z| < |z_k|$. Отже, добуток (33) буде зображати функцію $f(z)$, голоморфну і рівну нулеві в точках $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$ всередині круга $|z| < |z_k|$. Тому що $|z_k| \to 1$ при необмеженому зростанні k, то $f(z)$ буде функцією, голоморфною всередині круга $|z| < 1$ і рівною нулеві лише в точках $z_1, z_2, \ldots$

Залишається довести, що $f(z)$ є функція, обмежена при $|z| < 1$. Для цього оцінимо модуль довільного множника добутку (33) при $|z| = 1$:

$$\left|\frac{z_k - z}{1 - z\bar{z}_k}\bar{z}_k\right| = \frac{|z - z_k|}{|1 - z\bar{z}_k|}|z_k| = \frac{|z - z_k|}{\left|\frac{1}{\bar{z}} - z_k\right|}|z_k| = \frac{|z - z_k|}{|z - z_k|}\cdot|z_k| = |z_k| < 1$$

Ця нерівність залишається в силі і при $|z| < 1$, тому що (розд. VI, § 2, п. 8) функція

$$\frac{z_k - z}{1 - z\bar{z}_k}\bar{z}_k$$

є голоморфна при $|z| \leqslant 1$. Отже, маємо $|f(z)| < 1$, якщо $|z| < 1$

Вправи до розділу IX

1. Довести збіжність і визначити значення добутків:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right), \quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$$

Відп. 2; $\frac{1}{3}$.

2. Розкласти в нескінченні добутки функції

$$e^z - 1, \quad \sin z - \sin z_0.$$

Відп. $z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right)$

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_0+2\pi n}\right)\left(1+\frac{z}{z_0-\pi(2n+1)}\right)e^{\frac{(4n+1)\pi z}{(z_0+2\pi n)[-z_0+\pi(2n+1)]}}$$

3. Довести, що має місце формула:

$$\frac{\sin iz}{e^{2z}-1}=e^{h(z)},$$

де $h(z)$ — ціла функція. Як треба добирати $h(z)$?

Відп. $h(z)=-\ln 2+\frac{\pi}{2}i-z$.

4. Визначити область абсолютної збіжності таких добутків:

a) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)$; b) $\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})$; c) $\prod_{n=0}^{\infty}(1+c_n z)$,

якщо $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$ збігається.

Відп. a) і b) $|z|<1$; c) вся площина.

5. Функції $f_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$, аналітичні в крузі $|z|<r$ і $\sum|f_n(z)|$, рівномірно збігається в кожному крузі $|z|\leqslant\rho<r$.

Довести, що $F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(z)]$ є голоморфна функція при $|z|<r$.

6. Показати, що $\frac{1}{1-z}=(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\ldots$ при $|z|<1$

7. Користуючись задачею 6, показати, що

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^3)(1-z^5)}\ldots=(1+z)(1+z^2)(1+z^3)\ldots \text{ при } |z|<1$$

Розділ X

Теорема Пікара

В розділі VII, § 2 п. 6 ми досліджували поведінку однозначної функції в околі істотно особливої точки, установивши твердження Вейєрштрасса. Ця теорема показує, що в як завгодно малому околі істотно особливої точки функція набуває значення, як завгодно близькі до якого завгодно наперед заданого числа. Як було там же згадано, Пікар довів загальніше і глибше твердження: *в як завгодно малому околі істотно особливої точки функція $f(z)$ приймає (і при тому нескінченне число разів) яке завгодно скінченне значення, за винятком, може бути, одного.* Ця визначна теорема буде встановлена в кінці цього розділу.

§ 1. Твердження Блоха

1. Теорема про обернення голоморфної функції. Розглянемо функцію $w=F(z)$, голоморфну при $|z|\leqslant R$, при чому $|F(z)|\leqslant M$. Нехай $F(0)=0$ і $|F'(0)|=a>0$. Тоді обернена функція буде однозначною, по модулю меншою R, в крузі $|w|<\Phi$, де радіус цього круга $\Phi=\Phi\ (M,\ Ra)$ залежить тільки від M і Ra.

Не зменшуючи загальності, ми можемо вважати $R=1$ і $F'(0)=1$. Дійсно, утворимо допоміжну функцію

$$\varphi(z)=\frac{F(Rz)}{RF'(0)}=z+\ldots$$

Ця функція $\varphi(z)$ буде голоморфною в крузі $|z|\leqslant 1$, при чому

$$|\varphi(z)|\leqslant\frac{M}{Ra}=N \text{ і } \varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=1.$$

Припустимо, що ми довели нашу теорему для функції $\varphi(z)$ і одержали для неї $\Phi(N,\ 1)=\Phi(N)$. Тоді, повертаючись до загального випадку і помічаючи, що

$$|F(Rz)|=R|F'(0)||\varphi(z)|=Ra|\varphi(z)|,$$

ми робимо висновок:

$$\Phi(M,\ Ra)=Ra\,\Phi(N)=Ra\,\Phi\left(\frac{M}{Ra}\right)$$

Для доведення розглянемо допоміжну величину

$$\Phi_\varphi(N)=r-\max_{|z|=r}|\varphi(z)-z|$$

припустимо, що r добрано таким малим, що $\Phi_\varphi(N)>0$. Тоді при $0<|z|\leqslant r$ з тотожності

$$\varphi(z)=z+[\varphi(z)-z]$$

одержуємо:

$$|\varphi(z)|\geqslant|z|-|\varphi(z)-z|=|z|\left(1-\frac{|\varphi(z)-z|}{|z|}\right) \tag{1}$$

На колі $|z|=r$, очевидно, виконується нерівність:

$$\frac{|\varphi(z)-z|}{|z|}\leqslant\frac{\max\limits_{|z|=r}|\varphi(z)-z|}{r} \tag{2}$$

Але тому що $\frac{|\varphi(z)-z|}{|z|}=\left|\frac{\varphi(z)-z}{z}\right|$ і функція $\frac{\varphi(z)-z}{z}$ є голоморфна при $|z|\leqslant r$, то нерівність (2) має місце і всередині круга $|z|=r$, тобто при $0<|z|\leqslant r$.

Скориставшись нерівністю (2), перепишемо (1) так:

$$|\varphi(z)|\geqslant|z|\left(1-\frac{\max|\varphi(z)-z|}{r}\right)>0 \tag{3}$$

при $0<|z|\leqslant r$, тому що $r-\max\limits_{|z|=r}|\varphi(z)-z|=\Phi_\varphi(N)>0$. Отже рівняння $\varphi(z)=0$ у крузі $|z|\leqslant r$ має єдиний простий корінь у нульовій точці.

Тому що на колі $|z|=r$ в наслідок (3) маємо:

$$|\varphi(z)|\geqslant r-\max_{|z|=r}|\varphi(z)-z|=\Phi_\varphi(N),$$

то, вважаючи $|w|<\Phi_\varphi(N)$, ми бачимо, що на цьому колі $\varphi(z)-w$ не може обернутися в нуль. Отже число коренів рівняння $\varphi(z)=w$ у крузі $|z|<r$ виражається через

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)-w}dz,$$

де інтегрування виконується вздовж кола $|z|=r$ в додатному напрямі, і, будучи, таким чином, неперервною функцією від w, воно повинно дорівнювати одиниці (розд. VIII, § 1, п. 5). Позначаючи цей корінь через $z(w)$, ми одержуємо однозначну функцію в крузі $|w|<\Phi_\varphi(N)$ за модулем меншу одиниці.

Отже, ми покищо довели, що обернена функція для $w=\varphi(z)$ буде однозначна і за модулем менша одиниці всередині круга, радіус якого $\Phi_\varphi(N)$ залежить не тільки від N, але і від виду самої функції φ. Залишається показати, що радіус цього круга можна взяти незалежним від виду функції. Для цього досить в наших міркуваннях прийняти $r=\frac{1}{4N}$. Дійсно, в цьому випадку маємо:

$$\Phi_\varphi(N)\geqslant r-\sum_{k=2}^{\infty}Nr^k=r-\frac{Nr^2}{1-r}=\frac{1}{4N}-\frac{1}{16N\left(1-\frac{1}{4N}\right)}$$

Тому що

$$1=\varphi'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\varphi(z)\,dz}{z^2}\text{, то } 1\leqslant\frac{N}{2\pi}\cdot 2\pi=N\text{, тобто } N\geqslant 1$$

Отже,

$$\Phi_\varphi(N)\geqslant\frac{1}{4N}-\frac{1}{16N\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{6N}>0$$

Таким чином всередині круга $|w|<\Phi(N)=\frac{1}{6N}$ обернена функція для $w=\varphi(z)$ явно буде однозначна і за модулем менша одиниці.

2. Доведення твердження Блоха. Твердження, встановлене в п. 1, геометрично може бути формульовано так. Розглянемо сім'ю функцій

$$w=F(z)=z+a_2z^2+\ldots, \tag{4}$$

голоморфних у крузі $|z|\leqslant R$ і таких, що $|F(z)|\leqslant M$. Яка б не була функція сім'ї (4), існує в площині w круг з центром на початку координат радіуса $\Phi(M, R)=\frac{R^2}{6M}$, який з допомогою функції $w=F(z)$ взаємно однозначно відображується на деяку область, що лежить всередині $|z|<R$.

Очевидно, радіус Φ цього круга зменшиться, якщо ми розширимо нашу сім'ю функцій способом збільшення M. Природно ждати, що для сім'ї функцій (4), модуль яких не обмежений ніяким сталим числом у крузі $|z|\leqslant R$, взагалі не може існувати в площині w круга з центром у початку координат постійного радіуса, який покривався б значеннями якої завгодно функції цієї сім'ї.

Дійсно, це легко виявити на прикладі. Нехай

$$w_\varepsilon=\varepsilon\left(e^{\frac{z}{\varepsilon}}-1\right)=z+$$

Тому що $e^{\frac{z}{\varepsilon}}$ не дорівнює нулеві ні при якому z і ε, $\varepsilon>0$, то w випускає значення $-\varepsilon$. Таким чином, який би малий круг постійного радіуса з центром на початку координат площини w ми не взяли, всередині його при достатньо малому ε знайдеться точка $-\varepsilon$, яка явно не буде значенням відповідної функції w_ε нашої сім'ї.

Проте, змінюючи залежно від функції сім'ї центр круга площини w і зберігаючи при цьому радіус його незмінним, ми можемо вибирати положення цього круга так, що він буде суцільно складатися з точок, які зображують значення функції даної сім'ї. Більш того, ми зараз доведемо твердження, доведене Блохом, яке узагальнює тількищо висловлене твердження, а саме:

Яка б не була функція сім'ї

$$w=F(z)=z+a_2z^2\ldots,$$

голоморфна при $|z|\leqslant R$, існує круг площини w з центром у якійсь точці, який взаємно однозначно відображається на деяку

область, що лежить усередині $|z|<R$. Радіус цього круга не залежить від функції, тобто є якесь стале (що залежить тільки від R).

Не зменшуючи загальності, ми можемо прийняти $R=1$. Справді, утворимо допоміжну функцію

$$\varphi(x)=\frac{F(Rx)}{R}=x+\ldots$$

Ця функція буде голоморфною в крузі $|x|\leqslant 1$. Припустимо, що ми довели нашу теорему для функції $\varphi(x)$ і одержали для неї круг у площині φ з центром у деякій точці абсолютно постійного радіуса B, який взаємно однозначно відображається на деяку область усередині $|x|<1$. Тоді, вертаючись до загального випадку і помічаючи, що $|F(Rx)|=R|\varphi(x)|$, ми робимо висновок: існує круг площини $w=F$ з центром у якійсь точці, що взаємно однозначно відображається на якусь область усередині $|z|<R$. Радіус цього круга дорівнює BR.

Для доведення запровадимо допоміжну величину

$$\Omega(\vartheta)=\vartheta\max_{|x|\leqslant 1-\vartheta}|\varphi'(x)| \qquad (0\leqslant\vartheta\leqslant 1).$$

$\Omega(\vartheta)$ як функція ϑ має властивості:

1) $\Omega(0)=0$; 2) $\Omega(1)=1$; 3) $\Omega(\vartheta)$ неперервна. Таким чином існує $\vartheta_0>0$ таке, що $\Omega(\vartheta_0)=1$, тоді як при $\vartheta<\vartheta_0$ маємо: $\Omega(\vartheta)<1$. Позначимо через ξ ($|\xi|=1-\vartheta_0$) точку, в якій $|\varphi'(x)|$ досягає максимуму для значень $|x|\leqslant 1-\vartheta_0$.

Тоді

$$|\varphi'(\xi)|=\frac{1}{\vartheta_0}$$

В крузі $|x-\xi|\leqslant\frac{\vartheta_0}{2}$ маємо: $|\varphi'(x)|\leqslant\frac{2}{\vartheta_0}$, тому що цей круг становить частину круга $|x|\leqslant 1-\frac{\vartheta_0}{2}$ і, за означенням $\Omega(\vartheta)$, одержуємо:

$$\max|\varphi'(x)|=\frac{\Omega\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)}{\frac{\vartheta_0}{2}}\leqslant\frac{1}{\frac{\vartheta_0}{2}}=\frac{2}{\vartheta_0},\ |x|\leqslant 1-\frac{\vartheta_0}{2}$$

Відмітимо тепер формулу:

$$w^*=\varphi(x)-\varphi(\xi)=\int_{\xi}^{x}\varphi'(t)\,dt.$$

Тому що в крузі $|x-\xi|\leqslant\frac{\vartheta_0}{2}$ весь час $|\varphi'(x)|\leqslant\frac{2}{\vartheta_0}$, то в цьому крузі буде: $|w^*|=|\varphi(x)-\varphi(\xi)|\leqslant\frac{2}{\vartheta_0}\cdot\frac{\vartheta_0}{2}=1$. Отже, функція $w^*=\varphi(x)-\varphi(\xi)$ є голоморфна в крузі $|x-\xi|\leqslant\frac{\vartheta_0}{2}$, при чому $|w^*|\leqslant 1$, $w^*(\xi)=0$ $|w^{*\prime}(\xi)|=|\varphi'(\xi)|=\frac{1}{\vartheta_0}$

Застосовуючи результат п. 1 до функції w, одержимо:

$$a = |w'(\xi)| = \frac{1}{\vartheta_0}$$

$$Ra = \frac{\vartheta_0}{2} \cdot \frac{1}{\vartheta_0} = \frac{1}{2}, \quad M = 1$$

Звідси виходить, у наслідок результата п. 1, що обернена функція для $w^* = \varphi(x) - \varphi(\xi)$ є однозначна всередині круга $|w^*| < \Phi\left(1, \frac{1}{2}\right) = B$.

Інакше кажучи, круг з центром у точці $\varphi(\xi)$ площини φ радіуса B взаємно однозначно відображається на якусь область, що лежить усередині круга $|x - \xi| < \frac{\vartheta_0}{2}$, тобто на область, внутрішню до круга $|x| < 1$.

Примітка. Очевидно, твердження Блоха залишається в силі, якщо розглядати функції, голоморфні лише всередині круга $|x| < 1$. В цьому випадку абсолютне стале B повинно бути замінене сталим B_1, вважаючи $B_1 < B$. Дійсно, досить застосувати результат Блоха до області $|x| \leq 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, в якій дані функції голоморфні. Радіус круга Блоха буде $B_1 = B(1 - \varepsilon)$, тобто яке завгодно стале, менше B.

§ 2. Теорема Ландау

1. Доведення теореми Ландау. Переходячи тепер до застосувань результату Блоха (§ 1, п. 2), розглянемо функцію $w = f(z)$, що є голоморфна всередині круга $|z| < 1$ і випускає два значення 0 і 1. Побудуємо допоміжну функцію

$$F(z) = \ln\left[\sqrt{\frac{\ln f(z)}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\ln f(z)}{2\pi i} - 1}\right] \tag{5}$$

Ця функція $F(z)$ буде голоморфною всередині круга $|z| < 1$, тому що дана функція $f(z)$ в цьому крузі не дорівнює нулеві і не дорівнює одиниці. Крім цього функція $F(z)$ випускає значення вигляду $\pm \ln[\sqrt{n} - \sqrt{n-1}] + 2m\pi i$ ($n \geqslant 1$ — ціле, m — яке завгодно ціле), які утворюють у площині F множину точок E.

Справді, розв'язуючи рівняння (5) відносно $f(z)$, знайдемо:

$$f(z) = -e^{\frac{\pi i}{2}\left(e^{2F(z)} + e^{-2F(z)}\right)} \tag{5'}$$

і, значить, беручи $F(z)$ рівним якому завгодно значенню множини E, ми мали б:

$$f(z) = -e^{\frac{\pi i}{2}\left[(\sqrt{n} \mp \sqrt{n-1})^2 + (\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1})^2\right]} = -e^{\frac{\pi i}{2}(4n-2)} = 1,$$

що неможливо.

Кожна точка площини F віддалена від множини точок E (тобто від найближчої точки цієї множини) на віддаль, меншу b, де b — якесь абсолютне стале, що безпосередньо випливає з рівностей:

$$-\ln(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\ln\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\ln(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})\to\infty$$

і

$$\ln(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-\ln(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})=\ln\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\to 0.$$

Припускаючи $F'(0)\neq 0$, розглянемо функцію

$$\frac{F(z)-F(0)}{F'(0)}=z+a_2z^2+$$

Для цієї функції існує, в наслідок результату Блоха (§ 1, п. 2), круг з центром у якійсь точці її площини сталого радіуса B_1, який суцільно покривається її значеннями. Отже, для функції $F(z)$ існуватиме круг з центром у якійсь точці площини F радіуса $B_1|F'(0)|$, що суцільно покривається значеннями $F(z)$. Тому що цей круг не може містити точок множини E, то повинна виконуватися нерівність:

$$B_1|F'(0)|<b, \text{ або } |F'(0)|<\frac{b}{B_1}.$$

Останню нерівність знайдено в припущенні, що $F'(0)\neq 0$, але якщо $F'(0)=0$, то ця нерівність явно справедлива.

Отже, маємо:

$$|F'(0)|<\frac{b}{B_1}=C_1, \tag{6}$$

де C_1 — абсолютне стале. Вертаючись до даної функції $f(z)$, визначеної формулою (5′), і користуючись установленою нерівністю (6), одержимо:

$$|f'(0)|<L[f(0)], \tag{7}$$

де L — символ певної операції, що не залежить від вигляду функції f. Остання нерівність безпосередньо приводить нас до теореми Ландау, яка може бути формульована так:

Якщо $f(z)=\alpha+\beta z+a_2z^2+\ldots(\beta\neq 0)$ є голоморфна функція всередині круга $|z|<R$, яка не приймає значень 0 і 1, *то має місце нерівність*

$$R<\Omega(\alpha,\beta),$$

де $\Omega(\alpha,\beta)$ залежить тільки від α і β.

Справді, вважаючи $\varphi(z)=f(Rz)$, одержуємо функцію $f(z)$, що є голоморфна при $|z|<1$ і випускає два значення: 0 і 1. Застосовуючи до цієї функції доведену нерівність (7), одержуємо $|\varphi'(0)|<L[\varphi(0)]$, або повертаючись до даної функції f, перепишемо останню нерівність так:

$$R|f'(0)|<L[f(0)], \text{ або } R|\beta|<L(\alpha),$$

звідки випливає:

$$R<\frac{L(\alpha)}{|\beta|}=\Omega(\alpha,\beta).$$

2. Мала теорема Пікара. Задовго до відкриття Ландау Пікар установив таку теорему для цілих функцій: *всяка ціла функція, не рівна тотожно сталому, приймає яке завгодно скінченне значення, крім, може бути, одного.*

Інакше кажучи, рівняння $f(z)=A$, де $f(z)$ є ціла функція, має корінь при всякому скінченному значенні комплексного числа A, крім, може бути, одного виключного значення. Прикладом цілої функції з виключним значенням може бути e^z, яка не дорівнює нулеві ні при якому z. Прикладом цілої функції, що не має виключного значення, може бути яка завгодно ціла раціональна функція або $\sin z$. Розглядане твердження Пікара є окремим випадком теореми Ландау, встановленої в п. 1. Справді, припускаючи, що ціла функція $f(z)$ випускає два різні скінченні значення a і b і не дорівнює тотожно сталому, ми швидко прийдемо до суперечності на підставі теореми Ландау.

Утворивши функцію $F(z)=\frac{f(z)-a}{b-a}$, ми бачимо, що вона голоморфна в усій площині, не приймає значень 0 і 1 і не дорівнює тотожно сталому. Отже, знайдеться така точка — приймемо її за початок координат, — в якій похідна $F'(0)=\beta$ не дорівнює нулеві. Нехай розклад нашої функції в степеневий ряд буде:

$$F(z)=\alpha+\beta z+a_2z^2+\ldots$$

Тому що функція $F(z)$ голоморфна і не приймає значень 0 і 1 всередині круга довільного радіуса R: $|z|<R$, то за теоремою Ландау маємо:

$$R<\Omega(\alpha,\beta).$$

Суперечливість цієї нерівності очевидна, тому що в лівій її частині стоїть довільно велике число R, а в правій — стале число $\Omega(\alpha,\beta)$.

§ 3. Нерівність Шотткі

1. Виведення нерівності Шотткі. Для встановлення так званої великої теореми Пікара, зміст якої був формульований на початку цього розділу, нам треба вивести одну нерівність, відому під назвою *нерівності Шотткі.* Виведення цієї нерівності ми виконаємо на підставі результата Блоха (§ 1, п. 2), користуючись методом, аналогічним застосованому в § 2 (п. 1) для доведення теореми Ландау.

Розглянемо функцію $f(z)$, що є голоморфна всередині круга $|z|<1$ і випускає значення 0 і 1. Переходячи до допоміжної функції $F(z)$, визначеної формулою (5) в § 2 (п. 1), розглянем вираз

$$\varphi(\zeta)=\frac{F[z+(1-r)\zeta]-F(z)}{(1-r)F'(z)}=\zeta+\ldots,$$

де $|z|=r$. Цей вираз буде голоморфною функцією в круга $|\zeta|<1$, при чому $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$. В наслідок результату Блоха (§ 1, п. 2) для цієї функції існує круг із центром

у якійсь точці площини φ абсолютного радіуса B_1, який суцільно покривається її значеннями. Отже, в площині F знайдеться круг із центром у якійсь точці радіуса $B_1(1-r)|F'(z)|$, що суцільно покривається значеннями функції $F[z+(1-r)\zeta]$ при $|\zeta|<1$, а тому і тим більш значеннями $F(\zeta)$ при $|\zeta|<1$. Тому що, з другого боку, функція $F(\zeta)$ при $|\zeta|<1$ випускає значення, зображувані точками множини E (див. § 2, п. 1), то має місце нерівність:

$$B_1(1-r)|F'(z)|<b,$$

де b — абсолютне стале, більше віддалі якої завгодно точки площини F до множини точок E.

Останню нерівність перепишемо у вигляді:

$$|F'(z)|<\frac{b}{B_1}\cdot\frac{1}{1-r}. \tag{8}$$

Цю нерівність виведено в припущенні $F'(z)\neq 0$, але у випадку $F'(z)=0$ вона очевидна. Отже, нерівність справедлива при всякому $z, |z|=r<1$.

Відзначимо очевидну тотожність:

$$F(z)=F(0)+\int_0^z F'(t)\,dt.$$

Тому що

$$|F'(t)|<\frac{b}{B_1}\cdot\frac{1}{1-|t|}\leqslant\frac{b}{B_1}\frac{1}{1-r} \text{ при } |t|\leqslant r=|z|,$$

то, вважаючи за путь інтегрування прямолійний відрізок довжини r, що сполучає точки 0 і z, одержимо з останньої тотожності нерівність:

$$|F(z)|<|F(0)|+\frac{b}{B_1}\frac{r}{1-r}.$$

Вертаючись до даної функції $f(z)$, пов'язаної з $f(z)$ формулою (5'), і користуючись останньою нерівністю, одержимо:

$$|f(z)|<L[F(0), r],$$

або, помічаючи, що $F(0)$ виражається через $f(0)$, остаточно знаходимо:

$$|f(z)|<\Omega[f(0), r], \tag{9}$$

де Ω залежить тільки від $f(0)$ і $r=|z|$.

В наслідок голоморфності функції $f(z)$ установлена нерівність (9), очевидно, залишається в силі при $|z|\leqslant r$. Нерівність (9), яка належить Шотткі, показує, що коли сім'я функцій, що є голоморфні і випускають два значення, 0 і 1 всередині круга $|z|<1$, має один і той же вільний член $f(0)$, то модуль якої завгодно функції цієї сім'ї в крузі $|z|<r$, $r<1$, залишається менше деякого сталого числа, що залежить тільки від r. До цього твердження можна звести загальний випадок, коли розглядана функ-

ція $f(z)$ буде голоморфною і такою, що випускає значення 0 і 1 всередині круга $|z|<R$.

Справді, покладаючи $\varphi(x)=f(Rx)=f(z)$, ми одержуємо функцію, що задовольняє умови доведеної нерівності (9), при чому $\varphi(0)=f(0)$. Отже, в наслідок нерівності (9) буде:

$$|\varphi(x)|<\Omega[f(0),r] \text{ при } |x|\leqslant r<1,$$

або

$$|f(z)|<\Omega[f(0),r] \text{ при } |z|\leqslant Rr.$$

Отже, якщо $f(z)$ є функція, що є голоморфна і випускає значення 0 і 1 всередині круга $|z|<R$, то в крузі $|z|\leqslant R\vartheta$, $\vartheta<1$, має місце нерівність:

$$|f(z)|<\Omega[f(0),\vartheta]. \tag{10}$$

Примітка: Із нерівності (10) випливає також оцінка знизу $|f(z)|$ в крузі $|z|\leqslant R\vartheta$. Справді, функція $\frac{1}{f(z)}$ задовольняє всі умови теореми Шотткі, а тому $\frac{1}{|f(z)|}<\Omega\left[\frac{1}{f(0)},\vartheta\right]$ при $|z|\leqslant R\vartheta$. Звідси виходить:

$$|f(z)|>\frac{1}{\Omega\left[\frac{1}{f(0)},\vartheta\right]}=\Omega_1[f(0),\vartheta]. \tag{10'}$$

Нерівність (10') справедлива в крузі $|z|\leqslant R\vartheta$.

2. Узагальнена нерівність Шотткі. При доведенні теореми Пікара нам доведеться користуватися нерівністю Шотткі в узагальненому вигляді. Як доведено в попередньому пункті, модуль функції $f(z)$, що є голоморфна і випускає два значення, 0 і 1 всередині круга $|z|<R$, на крузі $|z|\leqslant R\vartheta$, обмежений двома границями, які залежать тільки від значень функції в центрі круга і числа ϑ, що є відношенням радіусів зовнішнього і внутрішнього кругів. Припускаючи $\alpha\leqslant|f(0)|\leqslant\beta$, покажемо, що ці границі можна вважати залежними тільки від α, β і ϑ. В цьому і буде полягати потрібне нам узагальнення нерівності Шотткі.

Для цього, вертаючись до міркувань п. 1, зазначимо, що наше твердження буде виправдане, якщо ми покажемо справедливість нерівності:

$$|F(0)|<l(\alpha,\beta),$$

де F є допоміжна функція п. 1, а $l(\alpha,\beta)$ залежить тільки від α і β. Помітивши, що

$$F(0)=\ln\left[\sqrt{\frac{\ln f(0)}{2\pi i}}-\sqrt{\frac{\ln f(0)}{2\pi i}-1}\right],$$

швидко одержуємо:

$$|F(0)|\leqslant\left|\ln\left[\sqrt{\frac{|\ln f(0)|}{2\pi}+1}+\sqrt{\frac{|\ln|f(0)||}{2\pi}+2}\right]\right|.$$

Позначимо через $\ln^+\sigma$ число $\ln\sigma$, якщо $\sigma > 1$, і нуль, якщо $\sigma \leqslant 1$. Тоді, очевидно, справедлива рівність:

$$|\ln\sigma| = \ln^+\sigma + \ln^+\frac{1}{\sigma},$$

і нерівність

$$\ln^+\sigma \leqslant \ln^+\sigma', \quad \text{якщо} \quad \sigma \leqslant \sigma'.$$

Тому що

$$\alpha \leqslant |f(0)| \leqslant \beta, \text{ то } \frac{1}{\beta} \leqslant \frac{1}{|f(0)|} \leqslant \frac{1}{\alpha},$$

і, значить, можна написати:

$$|\ln|f(0)|| \leqslant \ln^+\beta + \ln^+\frac{1}{\alpha},$$

звідки стає очевидною нерівність:

$$|F(0)| < l(\alpha, \beta).$$

Знайшовши, що верхня межа для модуля функції $f(z)$ в крузі $|z| \leqslant R\vartheta$ залежить лише від α, β і ϑ, ми для визначення нижньої межі застосуємо одержану нерівність до функції $\frac{1}{f(z)}$, як це було зроблено в примітці до п. 1, помічаючи, що в даному випадку модуль значення в центрі розміщений між числами $\frac{1}{\beta}$ і $\frac{1}{\alpha}$. Отже, узагальнена нерівність Шотткі формулюється в такому вигляді: *якщо $f(z)$ є функцією голоморфною і такою, що випускає два значення 0 і 1 всередині круга $|z| \leqslant R$, при чому $\alpha \leqslant |f(0)| \leqslant \beta$, то в крузі $|z| \leqslant R\vartheta$ виконується нерівність:*

$$\Omega_1(\alpha, \beta, \vartheta) < |f(z)| < \Omega(\alpha, \beta, \vartheta). \tag{11}$$

§ 4. Загальна теорема Пікара

Користуючись твердженням Шотткі, ми можемо довести загальну теорему Пікара, формульовану на початку цього розділу. Таким чином, тепер треба довести, що *функція $f(z)$, голоморфна в якомусь околі істотно особливої точки, може випускати в ньому не більш як одно скінченне значення.* Припускаючи супротивне, ми приймемо, що $f(z)$ випускає два скінченні значення, за які можна вважати 0 і 1. Лінійним перетворенням незалежного змінного ми можемо досягти того, що істотно особлива точка буде нескінченно віддаленою точкою, а функція $f(z)$ буде голоморфною і відмінною від нуля і одиниці при $|z| \geqslant \frac{1}{2}$.

На підставі теореми Вейєрштрасса (розд. VII, § 2, п. 5), поглибленням якої і є доводжуване твердження, можливо задати нескінченну послідовність точок λ_n, що збігається до нескінченно віддаленої точки $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$, так, щоб мала місце нерівність:

$$\frac{1}{2} < |f(\lambda_n)| < 1,$$

яким би не було n.

Функції $f_n(z)=f(\lambda_n z)$ для великих значень n голоморфні в області $|z|\geqslant\frac{1}{2}$, при чому $\frac{1}{2}<|f_n(1)|<1$.

Прикладаючи теорему Шотткі (§ 3, п. 2) до круга з центром у точці $z=1$ радіуса $\frac{1}{2}$, ми бачимо, що ці функції в крузі з центром $z=1$ радіуса $\frac{1}{4}$ за модулем розміщені між двома абсолютними сталими. Виходячи з круга з центром $z=1$ радіуса $\frac{1}{4}$, можна побудувати ланцюг із скінченного числа кругів радіуса $\frac{1}{4}$ з центрами на колі $|z=1$ так, щоб центр кожного наступного круга лежав усередині попереднього круга, і так, щоб вони у своїй сукупності покривали коло $|z|=1$ (рис. 94). Послідовне багаторазове прикладання узагальненої теореми Шотткі до кругів радіуса $\frac{1}{2}$, концентричних до ланок ланцюга, нам показує, що в області, яка покривається кругами радіуса $\frac{1}{4}$, всі функції $f_n(z)$ за модулем розміщені між двома сталими числами. Зокрема, ці функції на колі $|z|=1$ обмежені за модулем. Це твердження рівносильне тому, що функція $f\ z)$ на всіх колах $|z|=\lambda_n|$ має модуль, менший сталого числа. Тому що функція, голоморфна в кільці, включаючи і його границю, досягає максимуму свого модуля на границі, то $|f(z)|$ в області $|z|\geqslant\frac{1}{2}$ менше цього ж сталого числа. Це є суперечністю з теоремою Вейєрштрасса, що і доводить справедливість загальної теореми Пікара.

Прикладаючи доведене до функції $f(\sigma z)$ $(\sigma<1)$, ми бачимо, що $f(z)$ в області $|z|\geqslant\frac{1}{2\sigma}$ приймає всі скінченні значення, за винятком, може бути, одного. Але тому, що функція $f(z)$ має ці властивості в кожній області $|z|\geqslant\frac{1}{2\sigma}$, то вона приймає всі скінченні значення крім виключного, нескінченне число разів.

Вправи до розділу X

1. Ціла функція, яка кожне значення приймає тільки один раз, є ціла лінійна функція.

2 Функція, обернена цілій функції, не може бути цілою функцією, крім випадку лінійної функції

3. Довести теорему Ліувілля, користуючись інтегральною формулою Коші.

4. Чи існують цілі трансцендентні функції, які на кожному промені, що виходить з нульової точки, за модулем прямують до $+\infty$?

Відп. Так, наприклад: e^z+z.

5. Показати справедливість теореми Пікара для функції e^z, тобто визначити корені рівняння $e^z=A$, $A\neq 0$.

6. Яке виключне значення має функція e^z+1?

7. Показати, що $\operatorname{ch} z$ і $\operatorname{sh} z$ приймають усі значення.

8. Перевірити теорему Пікара для функції $e^{\frac{1}{z}}$ поблизу $z=0$.

Розділ XI

Аналітичне продовження

§ 1. Принцип аналітичного продовження

1. Поняття аналітичного продовження. Основною властивістю аналітичних функцій є властивість їх єдиності, розглянута в розділі VI. Якщо дві аналітичні функції збігаються між собою в як завгодно малому околі точки або навіть на як завгодно малому куску лінії, то вони цілком тотожні одна одній (розд. VI, § 2, п 4). Інакше кажучи, функція, аналітична в області, цілком визначається в цій області за допомогою її значень на як завгодно малому куску лінії (або навіть на нескінченній множині точок області, що має принаймні одну граничну точку всередині області). Постараємося тепер докладніше проаналізувати цю основну властивість аналітичних функцій разом з висновками, що випливають з неї.

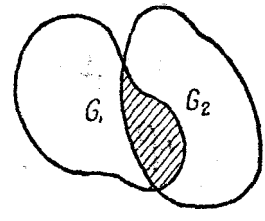

Рис. 92

Нехай нам дано дві функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$, з яких перша є голоморфна в області G_1, а друга — в області G_2 (рис. 92). Припустимо, крім того, що області G_1 і G_2 мають як загальну частину деяку область g, і нехай в області g функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ збігаються. Очевидно, в цьому випадку функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ взаємно визначаються цілком однозначним способом. Справді, в наслідок теореми єдиності не існує ніякої іншої функції, крім $f_2(z)$, яка була б голоморфною в області G_2 і мала б ті ж самі значення в області g. Таким чином, функція $f_2(z)$ цілком визначається через свої значення в області g, або, що те ж саме, через функцію $f_1(z)$; так само і функція $f_1(z)$ цілком визначається за допомогою $f_2(z)$ Отже, ми можемо сказати: якщо дві області G_1 і G_2 мають зазначене вище положення і функція $f_1(z)$ є голоморфна в G_1, то або не існує ніякої функції, що є голоморфна в G_2 і збігається з $f_1(z)$ в області g, або існує тільки одна така функція.

В цьому останньому випадку ми скажемо, що задана в області G_1 функція аналітично продовжується в області G_2. Функція $f_2(z)$ називається *аналітичним продовженням* функції $f_1(z)$ в область G_2 Очевидно, так само $f_1(z)$ є аналітичним продовженням функції $f_2(z)$ в область G_1. Взагалі кажучи, немає ніяких підстав розглядати функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ як різні функції. В наслідок повної однозначної визначеності одної через другу природно розглядати обидві функції як елементи одної й тої ж функції $F(z)$,

яка буде голоморфною в усій області G, що складається з областей G_1 і G_2: $G = G_1 + G_2$.

Пояснимо сказане на прикладі. Приймемо за G_1 круг з центром у нульовій точці радіуса одиниця: $|z| < 1$, а за G_2—круг із центром у точці i радіуса $\sqrt{2}$: $|z - i| < \sqrt{2}$ (рис. 93). Нехай в області G_1 дана функція:

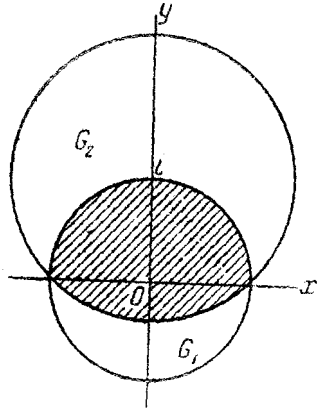

Рис. 93

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \qquad (1)$$

Треба побудувати функцію $f_2(z)$, голоморфну в області G_2, яка збігалася б з $f_1(z)$ в усіх точках області g. Ми знаємо, що коли така функція існує, то вона єдина. Цією функцією буде:

$$f_2(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n, \qquad (2)$$

тому що останній ряд збігається при $\left|\frac{z-i}{1-i}\right| < 1$ або, що те ж саме, при $|z - i| < \sqrt{2}$, і його сума дорівнює $\frac{1}{1-z}$.

Отже, маємо $f_2(z) = f_1(z)$ у всіх точках області g. Таким чином, $f_1(z)$ і $f_2(z)$ є аналітичні продовження одна одної, обидві вони є елементи однієї й тієї ж функції $F(z) = \frac{1}{1-z}$, голоморфної в повній області $G = G_1 + G_2$.

2. Поняття повної аналітичної функції в розумінні Вейєрштрасса. Нехай дано функцію $f_1(z)$, голоморфну в області G_1. Позначаючи через z_1 довільну точку області G_1, розкладемо дану функцію $f_1(z)$ в околі цієї точки в степеневий ряд:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} (z - z_1)^n. \qquad (3)$$

Зокрема, може трапитися, що радіус збіжності R_1 цього ряду дорівнює нескінченності, тобто ряд (3) збігається в кожній точці z площини комплексного змінного. В цьому випадку сума ряду (3) є функція, голоморфна в усій площині, і служить аналітичним продовженням даної функції $f_1(z)$ за область G_1. В наслідок єдиності продовження неможливо одержати ніякої іншої функції за допомогою продовження $f_1(z)$.

Пояснимо сказане прикладом. Нехай

$$g(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} - \frac{2}{3!} z^3 - \ldots - \frac{n-1}{n!} z^n - \ldots$$

Цей ряд збігається в усій площині. Покладемо, далі:

$$h(z) = 1 + z + z^2 + \ldots$$

Цей ряд має радіус збіжності $R = 1$. Визначимо функцію $f_1(z)$ з

крузі $\overset{\circ}{G}_1$ з центром у нульовій точці радіуса одиниця: $|z|<1$, поклавши:

$$f_1(z)=g(z)\cdot h(z). \tag{4}$$

За допомогою формули (4) функція $f_1(z)$ визначена тільки при $|z|<1$. Якщо ж ми розкладемо функцію $f_1(z)$ в околі нульової точки ($z_1=0$) у степеневий ряд, то одержимо способом перемноження рядів $g(z)$ і $h(z)$:

$$f_1(z)=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots, \tag{5}$$

тому що, очевидно, маємо:

$$1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\ldots-\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{n!} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

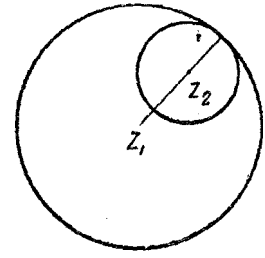

Рис. 94

Таким чином, ми одержали для даної функції розклад (5), справедливий в усій площині комплексного змінного.

Якщо радіус збіжності розкладу (3) не дорівнює нескінченності, то він є скінченне додатне число. Виберемо точку z_2 всередині круга збіжності ряду (3), відмінну від центра, і утворимо розклад для околу точки z_2:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)}(z-z_2)^n, \tag{6}$$

де покладено:

$$C_n^{(2)}=\frac{1}{n!}f_1^{(n)}(z_2).$$

Радіус збіжності R_2 цього розкладу принаймні дорівнює віддалі точки z_2 до кола первісного круга, тобто $R_2 \geqslant R_1-|z_2-z_1|$. Якщо $R_2=R_1-|z_2-z_1|$, то ряд (6) дає значення функції тільки в тих точках, в яких вона уже визначена за допомогою ряду (3) (рис. 94). В цьому випадку точка дотику кіл кругів збіжності рядів (3) і (6) буде особливою точкою функції, визначеної через $f_1(z)$. Якщо ж $R_2>R_1-|z_2-z_1|$, то новий круг збіжності виходить за первісний, і ми маємо тоді функцію $f_1(z)$ продовженою за старий круг збіжності в напрямі радіуса (z_1, z_2) (рис. 95). Отже, якщо взагалі можливе продовження в певному напрямі, то воно буде здійснене за допомогою цього степеневого ряду.

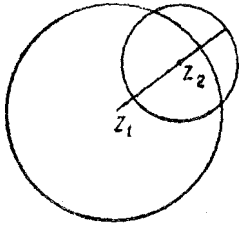

Рис. 95

Уявимо собі тепер, що ми продовжили перший елемент (3) функції по всіх можливих напрямах; так само нехай нові елементи в свою чергу продовжені по всіх можливих напрямах і т. д. Таким чином, ми одержуємо, виходячи з першого елементу (3), функцію, голоморфну, взагалі кажучи, в області, що дедалі все

збільшується. Проте може трапитися, що продовження першого степеневого ряду (3) неможливе ні в якому напрямі. В цьому випадку, значить, не існує ніякої функції, яка була б голоморфною в області більшій, ніж перший круг збіжності[1]). Ми скажемо тоді, що функція не продовжувана і коло круга збіжності є її природна границя.

Приклад:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}=z+z^2+z^6+\ldots+z^{n!}+\ldots \tag{7}$$

Радіус збіжності R ряду (7) дорівнює одиниці. Якби функція $f(z)$ була продовжувана за круг збіжності даного ряду (7), то деяка дуга його кола складалася б суцільно з правильних точок функції $f(z)$. На такій дузі є в нескінченній множині точки виду: $z_0=e^{2\pi i\frac{p}{q}}$, де p і q — цілі додатні числа. Якщо ми покажемо, що точка виду z_0 не може бути правильною точкою функції $f(z)$, то тим самим буде доведена неможливість продовження функції $f(z)$.

Покладемо: $z=\rho z_0$, де $0<\rho<1$.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{q-1} z^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty} \rho^{n!}, \tag{7'}$$

тому що при $n\geqslant q$ маємо: $z^{n!}=(\rho z_0)^{n!}=\rho^{n!}$.

Таким чином, вважаючи $M=2q+N$, де N — довільно велике ціле додатне число, маємо:

$$|f(z)|>\sum_{n=q}^{M} \rho^{n!}-\sum_{n=1}^{q-1} |z|^{n!}>(M-q+1)\,\rho^{M!}-(q-1). \tag{8}$$

Коли ρ прямує до одиниці, то права частина нерівності (8) прямує до значення $M-2q+2=N+2$. Отже, при належному доборі ρ_0 для всіх значень ρ ($\rho_0<\rho<1$) необхідно повинні мати: $|f(z)|>N$. Згадавши, що N означає довільне велике число, робимо висновок: при радіальному наближенні до точки z_0 модуль функції $f(z)$ прямує до нескінченності. Звідси випливає, що точка z_0 не може бути правильною точкою функції $f(z)$.

Другий крайній випадок, коли степеневий ряд продовжується в усіх напрямах за круг збіжності, не може мати місця. Дійсно, ми знаємо, що на колі круга збіжності є принаймні одна особлива точка (розд. VI, § 2, п. 2), яка ніколи не може попасти всередину нового круга збіжності, що, проте, повинно було б трапитися, коли б степеневий ряд дозволяв продовження в усіх напрямах.

Прикладаючи зазначений метод продовження, ми виділимо множину M точок площини, з яких кожна може бути вміщена всередину якогось круга збіжності; в достатньо малому околі кожної такої точки функція, отже, буде голоморфною.

Може трапитися, що при продовженні ми попадемо знов у перший круг за допомогою нового круга. Так, наприклад, на рис. 96 первісний круг збіжності є круг із центром у нульовій точці радіуса одиниця, при чому на його колі є єдина особлива точка $z=+1$. При послідовному продовженні цього початкового елементу п'ятий круг має з початковим спільну частину;

[1]) І збігалася б із сумою ряду (3) в цьому крузі. *(Ред.)*.

значення цього нового степеневого ряду в точках первісного круга збіжності, що належать зазначеній спільній частині, можуть збігатися з значеннями первісного степеневого ряду, а можуть і не збігатися. В першому випадку функція буде однозначною в області, через яку вона була продовжена, в другому — многозначною.

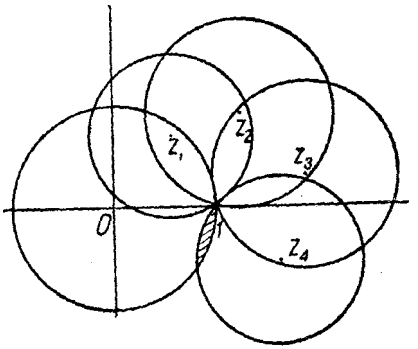

Рис. 96

Припускаючи для спрощення функцію весь час однозначною, ми можемо сказати, що множина W правильних точок такої функції має дві властивості:

1) яка б не була точка множини W, всі точки достатньо малого круга з центром у цій точці належать тій же множині, тобто, коротко кажучи, кожна точка множини W є *внутрішня* точка;

2) які завгодно дві точки множини W можна сполучити неперервною лінією, всі точки якої належать тій же множині, тобто, коротше, W є *зв'язана множина.*

Цю множину W всіх правильних точок функції називають її *областю існування.* Очевидно, кожній правильній точці відповідає певне значення функції.

За означенням ми розуміємо під *повною аналітичною функцією* в розумінні Вейерштрасса сукупність значень функції, що відповідають, як зазначено, всім правильним точкам.

3. Поширення функції дійсного змінного на комплексну область за принципом аналітичного продовження. Викладений в п. 1 принцип аналітичного продовження був оснований на тому факті, що аналітична функція єдиним чином визначається через її значення в як завгодно малій частинній області. Однак відомо, що для повного однозначного визначення аналітичної функції досить знати її значення на як завгодно малому куску лінії. Нехай є в площині комплексного змінного z кусок лінії L, і кожній його точці z відповідає значення функції $\varphi(z)$. Розглядаючи довільну область G, що містить L, ми можемо зустрітися лише з двома можливостями: або не існує ніякої функції $f(z)$, голоморфної в області G, яка збігалася б з $\varphi(z)$ на L, або існує тільки одна така функція. В останньому випадку ця функція однозначно визначається через свої значення на L. Ми можемо сказати тоді, що функція $\varphi(z)$, задана вздовж L, аналітично продовжується в область G. Зокрема, приймаючи за L кусок дійсної осі: $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ і позначаючи через $\varphi(x)$ відповідні його точкам значення функції (які можуть бути дійсними або уявними), ми можемо говорити про аналітичне продовження функції дійсного змінного x. Якщо таке продовження вдається, то кажуть, що функція $\varphi(x)$ продовжена в комплексну область. З по-

переднього виходить, що коли функція дійсного змінного x взагалі продовжується в комплексну область, то це можливо тільки єдиним чином.

§ 2. Приклади

1. Приклади однозначних функцій. Показникова функція e^x і тригонометричні функції $\sin x$ і $\cos x$ при дійсному x розкладаються в ряди:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Замінюючи в цих рядах формально x через комплексне змінне z, ми одержуємо степеневі ряди:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$f_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

що збігаються в усій площині (розд. II, § 3, п. 5). Ці ряди зображають функції, голоморфні в усякій точці z-площини (розд. VI, § 2, п. 1). Тому що функції $f_1(z)$, $f_2(z)$ і $f_3(z)$ при $z = x$ збігаються відповідно з e^x, $\sin x$ і $\cos x$, то вони є аналітичними продовженнями останніх функцій у комплексну область. Через це $f_1(z)$ називається показниковою функцією і позначається через e^z; $f_2(z)$ і $f_3(z)$ позначаються через $\sin z$ і $\cos z$. Таким чином чисто формальне визначення функцій e^z, $\sin z$, $\cos z$ стає цілком природним: воно буде єдино можливим, якщо ми вимагаємо диференційовність їх у площині комплексного змінного.

2. Приклади многозначних функцій. Викладений в § 1, п. 2 метод аналітичного продовження Вейєрштрасса, оснований на користуванні степеневими рядами, є загальним, і в цьому його величезне теоретичне значення. Проте в більшості конкретних випадків до цієї ж мети ми можемо прийти значно простіше за допомогою інших аналітичних апаратів.

Так, в розд. V, § 1, п. 6 ми означили $\ln z$ за допомогою інтеграла, поклавши: $\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, і бачили, що ця функція є голоморфною в усякій однозв'язній області, що не містить у собі нульової точки. Тому що при додатному x натуральний логарифм може бути визначений формулою: $\ln x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$, то ми бачимо, що $\ln z$ є аналітичне продовження $\ln x$ в комплексну область. Як ми знаємо (розд. V, § 1, п. 6), функція $\ln z$ нескінченнозначна, при чому всі її значення виходять з одного додаванням до нього числа, кратного $2\pi i$. Кожне з цих значень, утворюючи однозначну голоморфну функцію в усякій однозв'язній області, що не містить нульової точки, називається віткою многозначної функції. Так, наприклад, в околі точки $z = +1$ одна з цих віток розкладається в степеневий ряд:

$$\ln z = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \ldots$$

з радіусом збіжності, рівним одиниці. Можна було б, виходячи з цього степе-

невого ряду як елементу, що визначає функцію, одержати всі властивості логарифмічної функції, застосовуючи загальний метод § 1, п. 2; але такий шлях практично був би більш складним. Нульова точка, в околі якої $\ln z$ не є однозначною функцією, називається *критичною* точкою функції. Коли точка z описує замкнутий контур навколо нульової точки, вертаючись до первісного свого положення, то значення $\ln z$ не вертається до первісного значення, а змінюється на $2\pi i$ (розд. V, § 1, п. 6); очевидно, що $\ln z$ ніколи не вернеться до первісного значення, яке велике число разів ми не примушували б точку z описувати замкнутий контур в одному і тому ж напрямі навколо нульової точки. Через це нульова точка, як кажуть, є критична точка нескінченного порядку для функції $\ln z$.

Як другий приклад, розглянемо функцію $f(z) = \sqrt[n]{z}$. Ця функція є продовженням у комплексну область додатної дійсної функції дійсного змінного x $(x > 0)$: $\sqrt[n]{x}$. Справді, $f(z) = e^{\frac{1}{n}\ln z}$ є функція, голоморфна в кожній точці z, відмінній від нульової точки, многозначна в околі $z = 0$. Вибираючи довільну однозв'язну область G, яка не містить нульової точки, наприклад, всю площину, за винятком дійсної від'ємної осі $(x \leqslant 0)$, ми знаємо, що кожна вітка $\ln z$ буде в цій області однозначною функцією. Зокрема, взявши ту вітку $\ln z$, — позначимо її через $\operatorname{Ln} z$, — яка при $z = +1$ має значення нуль, а значить, для всіх x, $x > 0$, рівна дійсному значенню $\ln x$, ми одержуємо функцію, голоморфну в області G:

$$f_0(z) = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z},$$

яка є аналітичним продовженням функції $\sqrt[n]{x}$, тому що маємо $f_0(x) = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln} x} = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Через це функцію $f(z)$ ми позначаємо через $\sqrt[n]{z}$, при чому $f_0(z)$ буде одною з її віток. За цим означенням функція $\sqrt[n]{z}$ є n-значною. Справді, всі значення $\ln z$ містяться в формулі:

$$\ln z = \operatorname{Ln} z + 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

так що маємо:

$$f(z) = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} f_0(z). \tag{9}$$

Множник, що стоїть перед $f_0(z)$ у формулі (9), має тільки n різних значень, тому що для двох значень k, які відрізняються на кратне n, він має одне і те ж значення. Через це n віток функції $\sqrt[n]{z}$ виходять із основної вітки $f_0(z)$ способом множення на сталі множники. Щоб одержати всі n віток функції $f(z) = \sqrt[n]{z}$, досить дати k значення: $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Таким чином з формули (9) знаходимо:

$$f_k(z) = e^{\frac{2k\pi i}{n}} f_0(z) = e^{\frac{2k\pi i}{n}} e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Отже, ми бачимо, що додатна дійсна функція $\sqrt[n]{x}$ $(x > 0)$ продовжується в комплексну область, при чому одержувана функція $\sqrt[n]{z}$ є n-значною.

Нульова точка буде критичною точкою n-го порядку для цієї функції: при продовженні навколо нульової точки значення функції помножується на стале $e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

У всякій однозв'язній області, що не містить нульової точки, кожна вітка $\sqrt[n]{z}$ є голоморфною функцією.

Нарешті, в наслідок означення $\sqrt[n]{z}$, очевидно, маємо:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z.$$

Зауваження. Можна означити функцію z^m при якому завгодно сталому m, вважаючи: $z^m = e^{m \ln z}$. Читачеві рекомендується, діючи аналогічно до попереднього, дослідити властивості цієї функції.

Вправи до розділу XI

1. Продовжити аналітично в комплексну область функції дійсного змінного: $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$.

2. Показати, що степеневі ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n+2}}{(2^n+2)(2^n+1)}$$

не продовжуються за круг збіжності.

3. Чи буде дійсна функція $F(x) = \sqrt{x^2}$, визначена в області $-\infty < x < +\infty$, продовжувана в комплексну площину?

Відп. Ні.

4. Чи буде дійсна функція $f(x)$, визначена при $-1 < x < 1$ за допомогою рівностей:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ для } x \neq 0$$

і

$$f(x) = 0, \qquad \text{для } x = 0,$$

продовжувана в комплексну площину?

Відп. Ні.

5. Нехай функція $f(z)$ є аналітична в нульовій точці і задовольняє в околі цієї точки рівняння:

$$f(2z) = 2f(z) \cdot f'(z).$$

Показати, що $f(z)$ продовжувана на всю площину.

6. Які з функцій, визначених формулами:

$$\text{a) } \sqrt{e^z}; \text{ b) } \sqrt{\cos z}; \text{ c) } \sqrt{1 - \sin^2 z}; \text{ d) } \ln e^z; \text{ e) } \ln \sin z; \text{ f) } \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

будуть однозначні і які многозначні?

Відп. a) дві однозначні функції $e^{\frac{z}{2}}$ і $-e^{\frac{z}{2}}$,

b) двозначна функція з точками розгалуження $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$;

c) дві однозначні функції $+\cos z$ і $-\cos z$;

d) нескінченна множина однозначних функцій $z + 2k\pi i$;

e) одна нескінченнозначна функція з точками розгалуження $0, \pm\pi, \pm 2\pi \ldots$;

f) однозначна функція.

7. Якщо $f(z)$ неперервна в області G і диференційовна в кожній точці області G, крім точок прямолінійного відрізка, що належить G, то $f(z)$ — аналітична в усій області G.

8. Дві області G_1 і G_2 примикають одна до одної вздовж прямолінійного відрізка. Функція $f_1(z)$ — аналітична в області G_1, $f_2(z)$ — в G_2. Якщо f_1 і f_2 на відрізку приймають одні й ті ж граничні значення, то вони є аналітичними продовженнями одна одної.

Розділ XII

Загальні принципи теорії конформного відображення

В розд. III, § 1, п. 4 ми показали, що всяке лінійне перетворення має властивість відображати коло в коло. Тепер ми покажемо, що ця властивість характеризує лінійні перетворення. Справді, припустимо, що $w=f(z)$ є взаємно однозначне конформне відображення, яке переводить один круг в другий, і покажемо, що воно буде лінійним.

Насамперед нехай L є лінійне перетворення, яке переводить даний круг площини z в одиничний круг площини τ, а L_1 — лінійне перетворення, що переводить даний круг площини w в той же одиничний круг площини τ. Тоді перетворення $S=L_1wL^{-1}$ буде відображати одиничний круг площини τ в самого себе; довівши його лінійність, ми зробимо висновок звідси, що й перетворення

$$w=L_1^{-1}SL$$

буде також лінійним.

Отже, питання зводиться до вивчення характеру взаємно однозначного і конформного перетворення одиничного круга самого в себе.

§ 1. Умови, що визначають конформне відображення

1. Відображення одиничного круга самого в себе. Лінійне перетворення одиничного круга самого в себе, як відомо з розд. III, § 1, п. 9, матиме вигляд:

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \tag{1}$$

де $|\alpha|<1$ і θ — яке завгодно дійсне число. Воно містить три довільних дійсних параметри і, отже, однозначно визначається за трьома умовами.

Умовимося називати *елементом* сукупність точки і напряму, що з неї виходить. Якщо нам задано елемент, що складається з точки α і напряму θ, який виходить з цієї точки, то лінійне перетворення, яке переводить цей елемент в елемент, утворений з початку координат і напряму додатної дійсної осі, однозначно визначається формулою (1). Аналітично початкові дані можуть бути записані так:

$$w(\alpha)=0,\ \arg w'(\alpha)=\theta. \tag{2}$$

Щоб констатувати єдиність перетворення (1) серед усіх взаємно однозначних відображень одиничного круга самого в себе, що задовольняють початкові умови (2), досить показати, що взаємно однозначне і конформне відображення $w=f(z)$ одиничного круга самого в себе при початкових умовах

$$f(0)=0, \quad f'(0)>0 \tag{3}$$

є тотожне перетворення.

Справді, нехай $w=F(z)$ є взаємне однозначне і конформне відображення одиничного круга самого в себе, яке задовольняє умови (2), і доведемо, що воно необхідно буде лінійним перетворенням вигляду (1). Для цього, позначаючи через L лінійне перетворення (1), розглянемо допоміжне перетворення вигляду FL^{-1}, яке, очевидно, задовольняє умови (3) і переводить одиничний круг самого в себе. Довівши тотожність цього перетворення, ми звідси вбачаємо, що $F(z)=L(z)$, що і потрібно.

Отже, нам залишається показати, що взаємно однозначне і конформне відображення $w=f(z)$ одиничного круга самого в себе при умовах (3) є тотожне.

Ми доведемо справедливість такого, загальнішого твердження: ***якщо функція $f(z)$, що задовольняє умовам $f(0)=0$ и $f'(0)>0$, відображає взаємно однозначно і конформно область G, що лежить у скінченній частині площини і містить нульову точку, на саму себе, то $f(z)\equiv z$.***

При доведенні цього твердження ми можемо вважати $f'(0)\geqslant 1$, тому що у випадку $f'(0)<1$ ми могли б замість $f(z)$ розглядати її обернену функцію. Далі, помітимо, що разом з функцією $f(z)=f_1(z)$ також всі її ітерації $f_2(z)=f[f(z)]$, $f_3(z)=f[f_2(z)]$,... виконують відображення області G на саму себе, при чому весь час $f_n(0)=0$, $f_n'(0)>0$.

В околі нульової точки функція $f(z)$ має розклад:

$$f(z)=az+bz^{\nu}+\ldots,$$

де $\nu\geqslant 2$ і $a\geqslant 1$. Очевидно, розклад у степеневий ряд функції $f_n(z)$ матиме вигляд:

$$f_n(z)=a^n z+\ldots$$

Припустимо спочатку, що $a>1$. Це значить, що похідна $f_n'(0)=a^n$ при достатньо великому n може бути зроблена більшою якого завгодно наперед заданого числа A. Позначимо через M радіус круга з центром на початку координат, який містить цілком область G, тобто в області G буде $|f_n(z)|<M$; далі нехай ρ є радіус круга з центром у нульовій точці, який цілком разом з своєю границею лежить в області G; тоді маємо:

$$a^n=f_n'(0)\leqslant\frac{M}{\rho}.$$

Тому що ця нерівність повинна бути для кожного значення n і $a>1$, то вона неможлива. Отже, залишається припустити що $a=1$.

Тоді з розкладу

$$f(z) = z + bz^{\nu} + \ldots$$

виходить:

$$f_2(z) = z + 2bz^{\nu} + \ldots$$

і взагалі

$$f_n(z) = z + nbz^{\nu} + \ldots$$

Помітивши, що $n|b| \leqslant \frac{M}{\rho^{\nu}}$ і що в правій частині цієї нерівності стоїть число, яке не залежить від n, ми бачимо, що $b = 0$. Таким чином $f(z)$ не може бути відмінним від z, що і треба було довести.

2. Умови, що визначають єдиність конформного відображення. Нехай дана якась однозв'язна область G у площині комплексного змінного z. Запитується, чи існує функція $w = f(z)$, голоморфна в області G, яка відображала б взаємно однозначно область G на круг, даний у площині w?

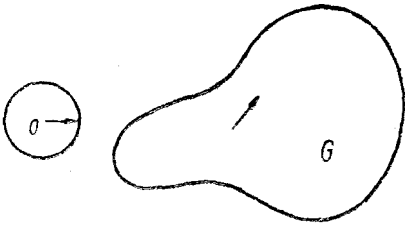

Рис. 97

Ця основна проблема теорії конформних відображень була поставлена Ріманом і в дальшому дістала повне розв'язання в позитивному розумінні.

Припускаючи існування однієї функції $w = f(z)$, ми легко помічаємо, що таких функцій буде нескінченна множина. Справді, як відомо, ми можемо перетворювати круг сам у себе нескінченною множиною лінійних функцій. Так, наприклад, якщо $w = f(z)$ є функція, яка відображає область G в круг $|w| < 1$, то тоді функція $w_1 = we^{i\theta}$ буде також відображати область G в круг $|w| < 1$ при якому завгодно θ. (Ми припускаємо, що даний круг має центр при $w = 0$ і радіус одиниця, що не становить посутніх обмежень, як це раніш зазначалось в п. 1).

Якщо нам задано два відповідні елементи: один в області G і другий всередині круга $|w| < 1$, то існує тільки одна функція $w = f(z)$, що дає взаємно однозначне конформне відображення області G на круг $|w| < 1$, при якому задані елементи переходять один в один (рис. 97).

Дійсно, якщо $w = f(z)$ переводить область G в круг $|w| < 1$, при чому заданий елемент області G переходить у відповідний елемент усередині круга, який виходить з нульової точки, то загальний вираз відображаючої функції за п. 1 буде: $w_1 = e^{i\theta} \cdot w$. Якщо $\theta \neq 0$, то напрям елементу круга за допомогою функції w_1 був би повернутий на кут θ; значить,

$$\theta = 0 \quad \text{і} \quad w_1 = w = f(z).$$

Все те, що було тут сказано про відображення однозв'язно області G на круг, можна повторити і для відображення об-

ласті G на якусь іншу однозв'язну область Δ (рис. 98). Справді, ми можемо взяти проміжною ланкою між цими відображеннями круг: відображаємо спочатку область G на круг, а потім уже круг на Δ.

§ 2. Основні принципи теорії конформних відображень

1. Принцип збереження області. Розглянуті в розд. III, § 3, п. 1 відображення за допомогою степеневої функції і радикала дають нам змогу завести поняття області в тій загальності, в якій це потрібно для теорії функцій комплексного змінного. Для теорії функцій є недостатнім розгляд поняття області в звичайному розумінні, як це було зроблено в розд. II, § 1, п. 2, якщо навіть ми розширимо це поняття способом приєднання нескінченно віддаленої точки. Вже аналіз відображень, здійснюваних за допомогою степеневих функцій, показує, що було б надто вузько розглядати тільки ті області, в яких кожна точка однозначно визначається своєю комплексною z-координатою. Замість цього ми повинні припускати, що одній z-координаті може відповідати кілька точок області, які тоді розрізняють при допомозі номерів, приєднаних до координати z: $z^{(1)}$, $z^{(2)}$,... Під областю ми повинні розуміти тоді знов множину з таких написаних з індексами точок, яка повинна задовольняти деяким умовам, якщо цю множину ми маємо право назвати областю. Ці умови, що накладаються на множину точок, відповідають заведеним в розд. II, § 1, п. 2 для *однолистих* областей: *умова окола і умова зв'язності*. Кожній точці a області повинні відповідати ціле додатне число m і при скінченному a функція $w=\sqrt[m]{z-a}$ $\left(\text{при } a=\infty \text{ функція } w=\sqrt[m]{\frac{1}{z}}\right)$ така, що вона однозначно визначена на якійсь частинній множині, яка містить точку a, при чому приймає один раз всяке значення з звичайного околу $w=0$. Цю множину точок називають *околом* точки a. Якщо $m=1$, то одержуємо однолистий (звичайний) окіл точки a; якщо ж $m>1$, то точку a називають m-листою точкою розгалуження області.

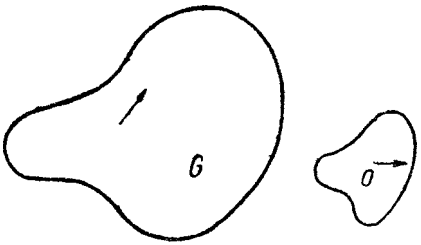

Рис. 98

Кожна точка області повинна мати такий окіл, і які завгодно два околи однієї й тієї ж точки повинні з свого боку давати в перетині окіл тієї ж самої точки. Ця додаткова вимога необхідна, тому що інакше могли б, наприклад, два листи області мати спільну єдину точку без розгалуження коло неї. Крім того таким чином визначений окіл повинен мати таку властивість: він повинен містити для кожної своєї точки з координатою z

достатньо малий окіл, який може бути відображений за допомогою $\sqrt[m]{z-a}$ на однолистий окіл точки $\sqrt[m]{b-a}$. З цієї останньої вимоги само собою випливає, що всім точкам околу точки a, за винятком, може бути, a, відповідає число $m=1$, тобто що всі ці точки мають однолисті околи. Справді, окіл точки з координатою b, яка належить околу точки a, за допомогою $\sqrt[m]{z-a}$ відображається на однолистий окіл точки $\sqrt[m]{b-a}$. Цей останній містить круг із центром $\sqrt[m]{b-a}$, який за допомогою оберненої функції $z=a+w^m$ відображається однолисто. Одержана в відображенні цього круга множина точок утворює окіл точки з координатою b, якщо круг з центром $\sqrt[m]{b-a}$ вибраний достатньо малий.

Дійсно, візьмемо спочатку довільний круг K з центром $\sqrt[m]{b-a}$ відображуваний за допомогою $a+w^n$ однолисто; за умовою існує окіл U точки з координатою b, яка за допомогою $\sqrt[m]{z-a}$ відображається на частину круга K. Цей окіл U є необхідно однолистий, тому що він повинен бути частиною однолистого відображення круга K. Через це всяка точка з афіксом $b\,(b \neq a)$ має однолистий окіл, і такій точці ми можемо звести у відповідність число $m=1$, як ми це вище стверджували. Таким чином ми одержали в загальному вигляді факт, відомий з розгляду степеневих відображень: точки розгалуження є ізольованими, а не граничними точками точок розгалуження.

Подібно тому, як при вивченні поведінки однозначної функції в околі нескінченно віддаленої точки ми заводили допоміжне змінне $t=\frac{1}{z}$, скористуємося й тепер заведеною допоміжною функцією $t=\sqrt[m]{z-a}$ або $t=\sqrt[m]{\frac{1}{z}}$, щоб визначити, що ми будемо розуміти під неперервною або аналітичною функцією у відповідній точці області. Якщо функція на області в якомусь околі точки $z=a$ однозначно визначена, то підставляємо в функцію замість z допоміжне змінне t. В результаті одержуємо функцію, однозначно визначену в звичайному околі $t=0$. Поведінка цієї перетвореної функції в однолистому околі точки $t=0$ характеризує поведінку даної функції в околі $z=a$ на області. Якщо функція як функція змінного t неперервна або аналітична, то ми назвемо також функцію на області (взагалі багатолистій) *неперервною* або *аналітичною*. Після цього стає також ясним, що ми повинні розуміти під неперервною кривою в області. Насамперед це є множина з точок області (поверхні). Щоб дослідити множину точок поверхні в околі однієї з її точок, відобразимо за допомогою допоміжного змінного t окіл цієї точки на

окіл точки $t=0$. Якщо при цьому множина точок поверхні переходить у неперервну криву площини допоміжного змінного t, то ми скажемо, що наша множина утворює неперервну криву в околі розгляданої точки області.

Тепер ми можемо дати точне означення області. *Областю* назвемо множину точок, що має дві властивості:

1) кожна точка має окіл у зазначеному вище загальному розумінні, що належить множині,

2) які завгодно дві точки можна сполучити за допомогою неперервної кривої, що складається з точок області.

Після роз'яснення поняття області в широкому розумінні цього слова ми можемо звернутися до доведення твердження про збереження області при відображенні за допомогою аналітичної функції $w=f(z)$.

Ми покажемо, що *коли $f(z)$ є однозначна аналітична функція в області, то вона цю область відображає на другу область, при чому поняття області треба розглядати в широкому розумінні.* В цьому полягає загальне формулювання принципу збереження області.

Насамперед ми доведемо найпростіший, проте основний випадок цього твердження про збереження області. Припустимо, що

$$w=f(z)=c_1z+c_2z^2+\ldots$$

в околі B нульової точки площини комплексного змінного z голоморфна і $c_1=f'(0)$ відмінне від нуля. Тоді існує круг з центром $w=0$, що цілком покривається значеннями, які приймає функція $f(z)$ у B, так що $f(z)$ в околі точки $z=0$ приймає всі значення з околу $w=0$; крім того, кожне своє значення функція $f(z)$ приймає тільки один раз, коли z змінюється в якійсь області з внутрішньою точкою $z=0$. Інакше кажучи, в цьому випадку існує взаємно однозначне відображення якогось околу точки $w=0$ площини комплексного змінного w на область площини z, що містить усередині себе точку $z=0$.

Доведення легко може бути проведене на підставі теореми Руше (розд. VIII, § 2, п. 3). Справді, можливо провести замкнутий круг K з центром у точці $z=0$, в якому функція $f(z)$ має єдиний нуль при $z=0$. Нехай на границі круга K маємо: $|f(z)|\geqslant m>0$. В наслідок неперервності функції $f(z)$ при $z=0$ і тому що $f(0)=0$, існує другий круг K_1 з центром в $z=0$, всередині якого $|f(z)|<m$. Нехай тепер α довільне число, модуль якого менший m; за теоремою Руше функції $f(z)-\alpha$ і $f(z)$ всередині великого круга K мають однакове число нулів, тому що на його границі $f(z)\neq 0$ і $|\alpha|<|f(z)|$. Але через те, що функція $f(z)$ обертається в нуль усередині K тільки один раз, а саме при $z=0$, то звідси виходить, що функція $f(z)$ всередині круга K приймає також кожне значення α ($|\alpha|<m$) лише один раз. Таким чином круг $|w|<m$ буде при відображенні круга K за допомогою функції $f(z)$ покриватися цілком і при тому тільки один раз.

Цьому кругові $|w|<m$ відповідає область площини z, що є частиною круга K і містить круг K_1.

Нехай тепер B є область (однолиста або многолиста) змінного z без точок розгалуження; припустимо далі, що функція $f(z)$ в цій області B однозначно визначена і похідна $f'(z)$ ні в якій її точці не зникає. Тоді ця область за допомогою функції $w=f(z)$ відображається на множину точок w, яка згідно з зазначеним вище містить разом з кожною з своїх точок її повний окіл. Тому що, крім того, які завгодно дві точки цієї множини можуть бути з'єднані за допомогою неперервної кривої, не виходячи за границі множини, бо кожна неперервна крива z-області переходить у неперервну криву w-множини, то відображена множина є область, яка теж вільна від точок розгалуження. Зверх того, при цьому кожна достатньо мала однолиста область z-площини переходить в однолисту область w-площини, тому що $f(z)$ не може приймати ніякого свого значення кілька разів всередині заведеного вище круга K_1. Отже, твердження про збереження області доведене при умові $f'(z)\neq 0$.

Зауваження. Якщо область B є однолиста в площині комплексного змінного z і функція $f(z)$ — аналітична в B, має похідну $f'(z)$, відмінну від нуля, то за доведеним у відображенні $w=f(z)$ ми одержимо область, взагалі кажучи, многолисту без точок розгалуження. Інакше кажучи, достатньо малий окіл якої завгодно точки області B буде відображатися за допомогою $w=f(z)$ на однолисту область площини w, а вся область B не буде, взагалі кажучи, мати однолистого відображення. Таким чином у цьому випадку ми матимемо взаємно однозначну відповідність „в малому" і, взагалі кажучи, порушення взаємно однозначності „у великому".

Наприклад, функція $w=z^2$ в області B: $1<|z|<2$, $0<\arg z<\frac{3}{2}\pi$ — аналітична з похідною, не рівною нулеві. Відображення ж області B за допомогою $w=z^2$ не буде однолистим.

Щоб повністю довести теорему про збереження області, залишається розглянути відображення околу точки, в якій похідна обертається в нуль.

Припустимо, що функція $f(z)$, $f(0)=0$ голоморфна в околі точки $z=0$ і її похідна $f'(z)$ має при $z=0$ n-кратний нуль. Тоді функція $w=f(z)$ відображає достатньо малу область, що містить точку $z=0$, на n разів розгалужений окіл точки $w=0$.

Справді, нехай

$$w=c_n z^n+\ldots \qquad (c_n\neq 0).$$

Вважаючи $w=t^n$, ми одержуємо:

$$t=z\sqrt[n]{c_n+c_{n+1}z+\ldots}$$

Кожна така функція $t(z)$ є голоморфна в околі $z=0$ з похідною при $z=0$, відмінною від нуля, і за доведеним відображає однолисту область, що містить $z=0$, на однолистий окіл точки $t=0$. Цей же останній за допомогою $w=t^n$ відображається на n-листий окіл точки $w=0$. Отже, однолиста область площини z,

що містить точку $z=0$, відобразиться за допомогою $w(z)$ на n-листий окіл точки $w=0$.

Якщо область містить нескінченно віддалену точку або точку розгалуження, то вивчення функції $f(z)$, однозначно визначеної в околі такої точки, ми зводимо за допомогою заведення допоміжного змінного до розглянутих тверджень.

Таким чином узагальнене поняття області, заведене на початку цього пункту, є доцільним, тому що тільки при такому загальному розумінні області ми можемо сказати: *однозначна аналітична функція області відображає завжди область свого визначення знов у область.*

Як безпосереднє прикладання принципу збереження області, розглянемо теорему про максимальний модуль (розд. VI, § 2, п. 6).

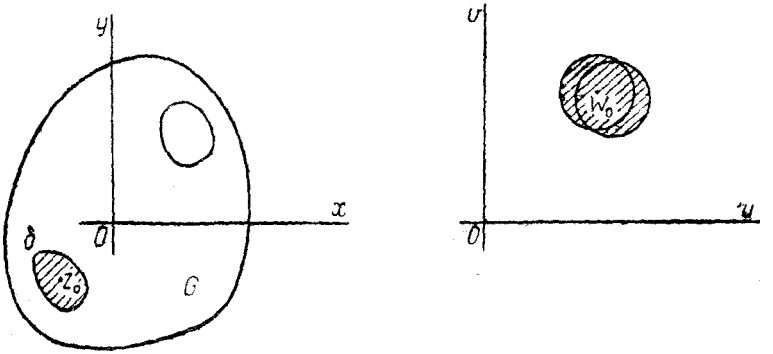

Рис. 99

Нехай $w=f(z)$ — функція, голоморфна в області G і не рівна тотожно сталому. Коли z описує достатньо малу область δ, що обмежує точку z_0 області G, $w=f(z)$ описує елемент поверхні Рімана Δ (однолистий або многолистий круг) з центром $w_0=f(z_0)$ з взаємно однозначною відповідністю обох областей (рис. 99). Отже, функція $|f(z)|$ не може досягати свого максимуму в точці z_0, тому що в Δ є точки, більш віддалені від початку координат, ніж $f(z_0)$. Отже, максимум модуля функції $f(z)$, голоморфної в області G, не може досягатися у внутрішній точці області.

Зауваження. Доведення не припускає, що точка z_0 перебуває на скінченній віддалі; z_0 може бути нескінченно віддаленою точкою при неодмінній умові, що вона — внутрішня точка області.

Ми припускали, що $f(z)$ не є стале. Отже, якщо модуль функції $f(z)$, голоморфної в області G, досягає максимуму у внутрішній точці, то функція є стале.

Нарешті відзначимо, що доведення залишається в силі, якщо функція $f(z)$ підлягає в області G більш загальним умовам:

1) $f(z)$ голоморфна в околі кожної точки області G,

2) $|f(z)|$ — однозначна функція в області G.

2. Принцип взаємно однозначної відповідності. Нехай замкнутий контур Γ є гладка або принаймні кусково-гладка

лінія; припустимо, що функція $w=f(z)$ буде голоморфною всюди всередині Г, включаючи точки самого контура Г. Припустимо, далі, що контур Г за допомогою цієї функції $w=f(z)$ відображається взаємно однозначно на якийсь замкнутий контур Г′. Інакше кажучи, різним точкам контура Г відповідають різні точки контура Г′. При цих умовах ми доведемо, що *область, обмежена контуром* Г, *відобразиться взаємно однозначно на область, обмежену контуром* Г′.

Доведення. Позначимо через G область, обмежену контуром Г. За умовою контурові Г відповідає контур Г′, який буде поділювати площину w на дві частини: внутрішню і зовнішню (це випливає з так званої теореми Жордана; ми не будемо тут доводити цього твердження, а пошлемося на нього, як на очевидний з геометричного боку факт). Множині всіх точок z області G відповідає множина G' точок w; інакше кажучи, G' є множина різних значень, які приймає функція $w=f(z)$, коли точка z змінюється в області G. У наслідок голоморфності функції $f(z)$ в замкнутій області G, ми робимо висновок, що G' є область, границею якої служить контур Г′, що відповідає контурові Г. Очевидно, область G' не може лежати поза Г′, тому що G' не містить нескінченно віддаленої точки, будучи множиною значень обмеженої функції. Лишається показати, що кожній точці області G' відповідає лише одна точка області G.

Нехай w_0 — будьяка точка області G' (всередині контура Г′). Розглянемо інтеграл Коші:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{dw}{w-w_0}=1. \tag{4}$$

Вважаючи $w=f(z)$, перетворимо рівність (4) до такого вигляду:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz=1. \tag{4'}$$

В лівій частині рівності (4′) стоїть логарифмічний лишок функції $f(z)-w_0$ відносно контура Г; як відомо (розд. VIII, § 1, п. 5), його значення дорівнює числу нулів функції $f(z)-w_0$, що містяться всередині Г. Таким чином рівність (4′) показує, що в області G є лише одна точка z, для якої $f(z)=w_0$. Інакше кажучи, ми довели, що кожній точці області G' відповідає єдина точка області G.

Доведена теорема лишається вірною і для необмежених областей, тому що за допомогою елементарних взаємно однозначних перетворень можна необмежену область замінити обмеженою областю.

3. Принцип симетрії Рімана-Шварца. Нехай дані дві області G_1 і G_2, що прилягають одна до одної вздовж спільного куска γ їх границь, при чому область G_2 цілком лежить поза областю G_1 (рис. 100). Припустимо, що $f(z)$ є функція, голоморфна в об-

ласті G_1. Якщо існує функція $F(z)$, голоморфна в області $G = G_1 + G_2 + \gamma$, складеній з областей G_1, G_2 і точок відкритої дуги γ, що збігається з даною функцією $f(z)$ у всіх точках області G_1, то кажуть, що функція $F(z)$ є *аналітичним продовженням* функції $f(z)$ через дугу γ. Відомо (розд. XI, § 1, п. 1), що коли таке продовження функції $f(z)$ можливе, то воно єдине.

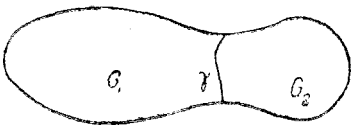

Рис. 100

Основне питання, яке тут виникає, полягає в тому, щоб по даній функції $f(z)$ дізнатися, чи можна її продовжувати через деякий кусок границі області G_1, і якщо так, то як здійснити це продовження. *Якщо розгляданий кусок γ границі області G_1 являє собою дугу якогось кола і якщо значення функції $f(z)$ в точках цієї дуги є дійсні числа, то наша функція може бути аналітично продовжена через дугу γ.* [Під значеннями функції $f(z)$ на дузі γ ми розуміємо неперервну послідовність граничних її значень із середини області G.] Доводячи це твердження, ми разом з тим дамо дуже простий процес побудування для продовження даної функції.

Припустимо спочатку, що дуга γ, через яку ми хочемо продовжити функцію $f(z)$, є частина AB прямої, паралельної дійсній осі (рис. 101).

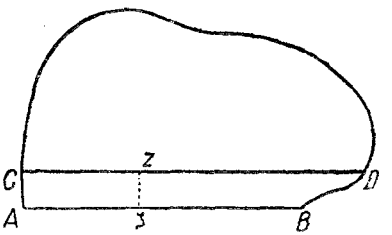

Рис. 101

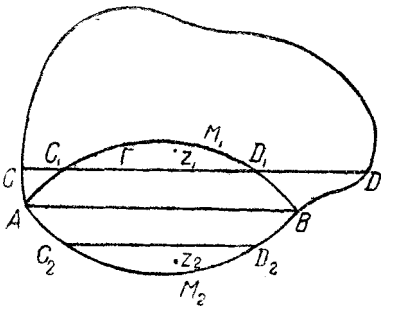

Рис. 102

Функція $f(z)$ визначена з одного боку від AB і в точках відрізка AB, де вона приймає дійсні значення. Вона неперервна на AB у такому розумінні: якщо CD є відрізок, паралельний AB, z — точка CD і ζ — її проекція на AB, то маємо: $|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$, де $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ — як завгодно мале число, при достатньо малій віддалі відрізка CD від AB.

Візьмемо дугу AM_1B, що лежить в області G_1, де $f(z)$ визначена, і їй симетричну щодо AB дугу AM_2B, що лежить поза G_1 (рис. 102). Визначимо функцію $\varphi(z)$ в області, обмеженій замкнутим контуром AM_2BA, таким чином: у всякій точці z_2 цієї області, симетричної відносно AB з точкою z_1, візьмемо:

$$\varphi(z_2) = \overline{f(z_1)}. \tag{5}$$

Ця функція $\varphi(z)$ буде голоморфною в області, обмеженій контуром AM_2BA. Справді, позначаючи через δ одночасні прирости і помічаючи, що δz_2 і δz_1 спряжені між собою (тому що AB паралельна дійсній осі), маємо:

$$\frac{\delta\varphi(z_2)}{\delta z_2}=\frac{\delta\,[\overline{f(z_1)}]}{\delta z_2}=\frac{\overline{\delta f(z_1)}}{\overline{\delta z_1}}=\overline{\left(\frac{\delta f(z_1)}{\delta z_1}\right)}. \tag{6}$$

Переходячи в рівності (6) до границі при δz_1 (а значить, і δz_2), що прямує до нуля, одержимо:

$$\lim_{\delta z_2\to 0}\frac{\delta\varphi(z_2)}{\delta z_2}=\overline{f'(z_1)},\quad \text{або}\quad \varphi'(z_2)=\overline{f'(z_1)}.$$

Таким чином, функція $\varphi(z)$ має скінченну похідну в кожній точці області, обмеженій контуром AM_2BA, і, значить, є функція, голоморфна в цій області.

Нехай тепер C_1D_1 і C_2D_2 — дві хорди, паралельні і симетричні відносно AB, віддаль між якими як завгодно мала. Позначаючи через z' яку завгодно точку області, обмеженої замкнутим контуром $C_1D_1M_1C_1$, маємо за формулою Коші:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi i f(z') &= \int\limits_{C_1D_1}\frac{f(z)\,dz}{z-z'}+\int\limits_{D_1M_1C_1}\frac{f(z)\,dz}{z-z'},\\ 0 &= \int\limits_{D_2C_2}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-z'}+\int\limits_{C_2M_2D_2}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-z'}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Примусимо кожну з хорд C_1D_1 і C_2D_2 прямувати до AB. Перший інтеграл першої рівності (7) прямує до значення $\int\limits_{AB}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z'}$. Справді, позначаючи через ζ проекцію на AB точки z, що лежить на C_1D_1, маємо:

$$\begin{aligned}\frac{f(z)}{z-z'}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z'} &= \frac{1}{z-z'}[f(z)-f(\zeta)]+f(\zeta)\left(\frac{1}{z-z'}-\frac{1}{\zeta-z'}\right)=\\ &= \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-z'}+\frac{f(\zeta)(\zeta-z)}{(z-z')(\zeta-z')}.\end{aligned} \tag{8}$$

Вважаючи z' сталою точкою, ми бачимо, що $|z-z'|$ і $|\zeta-z'|$ лишаються більші деякого додатного сталого числа; з другого боку, функція $f(z)$ є обмежена. Отже, модуль виразу (8) може бути зроблений як завгодно малим; те ж саме буде і для його інтеграла вздовж AB. Таким чином маємо:

$$\lim\int\limits_{C_1D_1}\frac{f(z)\,dz}{z-z'}=\int\limits_{AB}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z'}. \tag{9}$$

Так само покажемо, що буде:

$$\lim\int\limits_{D_2C_2}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-z'}=\int\limits_{BA}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z'}. \tag{9'}$$

Пригадавши ж, що $f(\zeta)$ має дійсні значення на AB, робимо висновок: $f(\zeta)=\varphi(\zeta)$ на AB. Отже, рівності (7) в границі наберуть вигляду:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi i f(z') &= \int\limits_{AB} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z'} + \int\limits_{BM_1A} \frac{f(z)\,dz}{z - z'} \\ 0 &= \int\limits_{BA} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z'} + \int\limits_{AM_2B} \frac{\varphi(z)\,dz}{z - z'} \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

Додаючи останні рівності, одержимо:

$$2\pi i f(z') = \int\limits_{BM_1A} \frac{f(z)\,dz}{z - z'} + \int\limits_{AM_2B} \frac{\varphi(z)\,dz}{z - z'}. \qquad (10)$$

Позначаючи через $F(z)$ функцію, визначену на всьому контурі $\Gamma = BM_1A + AM_2B$, рівну $f(z)$ на дузі AM_1B і рівну $\varphi(z)$ на AM_2B_1, перепишемо (10) у вигляді:

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{F(z)\,dz}{z - z'}. \qquad (10')$$

Очевидно, приймаючи за z' точку області, обмеженої контуром AM_2BA, ми одержали б:

$$\varphi(z') = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{F(z)\,dz}{z - z'}. \qquad (10''$$

Тому що функція, зображувана інтегралом типу Коші

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{F(z)\,dz}{z - z'},$$

є голоморфна всюди всередині Γ, то з рівності (10′) робимо висновок, що *ця функція є аналітичним продовженням через AB даної функції $f(z)$*. З другого боку, рівність (10″) показує, що *це аналітичне продовження ми одержуємо, приймаючи його значення в точках, симетричних відносно AB, спряженими між собою.*

Те ж положення може бути обгрунтоване інакше, якщо скористуватися замість інтеграла Коші теоремою Морера (розд. V, § 2, п. 5).

Дійсно, позначивши через $F(z)$ функцію, рівну $f(z)$ всередині контура ABM_1A, рівну $\varphi(z)$ всередині контура AM_2BA, і, нарешті, рівну їх спільному граничному значенню в якій завгодно точці відрізка AB, ми одержимо, очевидно, функцію, неперервну всередині контура AM_2BM_1A. За теоремою Морера для доведення голоморфізму цієї функції $F(z)$ досить виявити, що інтеграл від неї, взятий по якому завгодно замкнутому контурові, який належить області її неперервності, дорівнює нулеві.

Якщо взятий замкнутий контур Г цілком лежить зверху або знизу від відрізка AB, то $\int\limits_{\Gamma} F(z)\,dz = 0$ в наслідок теореми Коші, тому що функція $F(z)$ є голоморфна зверху і знизу від відрізка AB. Якщо ж контур Г перетинається з відрізком AB, то, позначивши через c, d, c_1, d_1 точки його перетину з прямими CD і C_1D_1 (рис. 102а), зобразимо $\int\limits_{\Gamma} F(z)\,dz$ у вигляді суми трьох інтегралів:

$$\int\limits_{\Gamma} F(z)\,dz = \int\limits_{cdm_1c} F(z)\,dz + \int\limits_{dcc_1d_1d} F(z)\,dz + \int\limits_{d_1c_1m_2d_1} F(z)\,dz. \qquad (11)$$

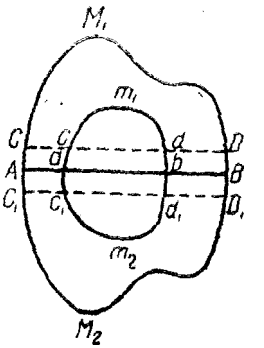

Рис. 102а

Перший і останній інтеграли правої частини формули (11) дорівнюють нулеві в наслідок теореми Коші і, значить, маємо:

$$\int\limits_{\Gamma} F(z)\,dz = \int\limits_{dc} F(z)\,dz + \int\limits_{cc_1} F(z)\,dz + \int\limits_{c_1d_1} F(z)\,dz + \int\limits_{d_1d} F(z)\,dz. \qquad (12)$$

Коли DC і C_1D_1 прямують до відрізка AB, то інтеграли $\int\limits_{dc} F(z)\,dz$ і $\int\limits_{c_1d_1} F(z)\,dz$ прямують відповідно до значень $\int\limits_{ba} F(z)\,dz$ і $\int\limits_{ab} F(z)\,dz$, де a і b — точки перетину з відрізком AB контура Г, а інтеграли $\int\limits_{cc_1} F(z)\,dz$ і $\int\limits_{d_1d} F(z)\,dz$ прямують до нуля.

Справді, позначаючи через ζ проекцію точки z на відрізку AB і вважаючи $|z-\zeta|$ достатньо малим, маємо: $|F(z)-F(\zeta)|<\varepsilon$, де ε $(\varepsilon>0)$ — як завгодно мале число. Отже, одержуємо:

$$\left|\int\limits_{dc} F(z)\,dz - \int\limits_{ba} F(\zeta)\,d\zeta\right| < \varepsilon\cdot\overline{ba},$$

$$\left|\int\limits_{c_1d_1} F(z)\,dz - \int\limits_{ab} F(\zeta)\,d\zeta\right| < \varepsilon\cdot\overline{ab},$$

звідки випливає:

$$\lim \int\limits_{dc} F(z)\,dz = \int\limits_{ba} F(\zeta)\,d\zeta \quad \text{і} \quad \lim \int\limits_{c_1d_1} F(z)\,dz = \int\limits_{ab} F(\zeta)\,d\zeta.$$

Щодо інтегралів $\int\limits_{cc_1} F(z)\,dz$ і $\int\limits_{d_1d} F(z)\,dz$, то вони прямують до нуля, тому що підінтегральна функція обмежена, а путі інтегрування нескінченно малі. Отже, з рівності (12) переходом до границі в припущенні, що DC і C_1D_1 прямують до відрізка AB, знаходимо:

$$\int_{\Gamma} F(z)\,dz = \int_{ba} F(\zeta)\,d\zeta + \int_{ab} F(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Таким чином, інтеграл $\int_{\Gamma} F(z)\,dz$ дорівнює нулеві, який би не був замкнутий контур Γ, що цілком лежить усередині контура AM_2BM_1A, де функція $F(z)$ є неперервна. За теоремою Морера (розд. V, § 2, п. 5) функція $F(z)$ буде аналітична всюди всередині контура AM_2BM_1A, що і треба було довести.

Якщо скористуватися узагальненням теореми Коші, даним в розд. V, § 1, п. 8, то останній аналіз стає зайвим. Справді,

$$\int_{\Gamma} F(z)\,dz = \int_{BM_1AB} F(z)\,dz + \int_{ABM_2A} F(z)\,dz.$$

Тому що функція $F(z)$, голоморфна всередині кожного контура BM_1AB і ABM_2A, лишається неперервною на них, то в наслідок узагальненої теореми Коші обидва інтеграли правої частини останньої рівності будуть нулі, звідки виходить:

$$\int_{\Gamma} F(z)\,dz = 0.$$

При доведенні ми істотно припускали, що прямолінійний відрізок AB розміщений паралельно дійсній осі. Лишається тепер звільнитися від цього обмеження. Нехай дуга γ, через яку ми хочемо продовжити функцію $f(z)$, є будьякий прямолінійний відрізок AB. Цей випадок швидко зводиться до попереднього, якщо виконаємо обертання: $z' = ze^{\theta i}$, за допомогою якого відрізок AB стає паралельним дійсній осі. Ясно, що значення аналітичного продовження функції $f(z)$ будуть спряжені в точках, симетричних відносно відрізка AB.

Нарешті, якщо γ є дуга якогось кола, то цей випадок зводиться на тількищо розглянутий, якщо виконаємо лінійне перетворення $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, за допомогою якого дуга γ перетворюється на прямолінійний відрізок AB. Відомо (розд. III, § 1, п. 7), що при такому перетворенні парі точок z, симетричних відносно дуги кола γ, буде відповідати пара точок, симетричних відносно прямолінійного відрізка AB. Отже, значення аналітичного продовження функції $f(z)$ в точках, симетричних відносно γ, будуть спряжені між собою.

Отже, ми можемо формулювати принцип симетрії в такому вигляді: *функція $f(z)$, голоморфна в області G, границя якої містить дугу кола γ* (або прямолінійний відрізок γ), *що приймає в усіх точках γ неперервні* (зсередини G_1) *дійсні значення, аналітично продовжується через γ. Значення цього аналітичного продовження функції $f(z)$ поза областю G_1 будуть спряжені з $f(z)$ в точках, симетричних відносно γ.*

Цей принцип має численні прикладання в теорії конформних відображень. Дійсно, нехай дано область G_1, границя якої містить

дугу кола γ (зокрема, прямолінійний відрізок γ), таку, що область G_2, симетрична з G_1, відносно γ, цілком лежить поза G_1. Якщо функція $w=f(z)$ дає конформне відображення області G_1 на верхню півплощину, то ми одержуємо згідно з принципом симетрії аналітичне продовження через γ функції $f(z)$, приписуючи йому взаємно спряжені значення в двох точках, що є взаємно симетричні відносно γ. Отже, функція $w=f(z)$, будучи продовжена через γ, дає конформне відображення області $G=G_1+$ $+G_2+\gamma$, що складається з областей G_1, G_2 і точок відкритої дуги γ, на площину w, з якої викинуті точки дійсної осі, за винятком тих точок, які лежать всередині відрізка, що є відображенням дуги γ. Легко бачити, як узагальнюється формулювання принципу Рімана—Шварца, якщо функція $w=f(z)$ дає конформне відображення на круг.

4. Узагальнення принципу симетрії. Будемо називати дугу кривої *аналітичною*, якщо її поточні координати x, y є функції параметра t в інтервалі $a<t<b$, які розкладаються в степеневі ряди в околі всякої точки (a, b). Назвемо аналітичну дугу *правильною*, якщо вона не має кратних точок. В цьому випадку x' і y' не обертаються в нуль одночасно.

Припустимо, що $f(z)$ є функція, голоморфна в області G, границя якої містить правильну аналітичну дугу γ; під значеннями функції $f(z)$ на дузі γ ми розуміємо неперервну послідовність граничних її значень всередині області G, які за умовою існують. В п. 3 ми бачили, що коли кусок γ границі області G являє собою дугу якогось кола і коли значення функції $f(z)$ в точках цієї дуги зображаються точками, що лежать на прямій або колі, то наша функція може бути аналітично продовжена через дугу γ, при чому був даний дуже простий закон цього продовження.

Задача цього пункту — дати узагальнення цього твердження, показавши, що *коли кусок γ границі області являє яку завгодно правильну аналітичну дугу і якщо значення функції $f(z)$ в точках цієї дуги зображаються точками, що лежать на прямій або колі, то наша функція може бути аналітично продовжена через дугу γ.*

Дійсно, виходячи з параметричних рівнянь дуги γ, визначимо $z=x+iy$ як голоморфну функцію змінного t вздовж відрізка (a_1, b_1) дійсної осі, внутрішнього до (a, b), і в такому вузькому його околі, щоб обернена функція t була голоморфна від z в околі відповідної дуги [це легко випливає з того факта, що $\frac{dz}{dt}$ не обертається в нуль на (a, b) і дуга не має кратних точок (див. п. 1)].

Функція $\varphi(t)=f[z(t)]$ голоморфна з одного боку відрізка (a_1, b_1) і приймає в точках цього відрізка ті ж самі значення, що і $f(z)$ у відповідних точках дуги γ_1; отже, значення функції $\varphi(t)$ на відрізку (a_1, b_1) дійсної осі зображаються точками прямої або кола Γ. В наслідок принципу симетрії Рімана—Шварца

(п. 3) ця функція $\varphi(t)$ може бути аналітично продовжена через відрізок (a_1, b_1), при чому значення її аналітичного продовження в точках, близьких до дійсної осі і симетричних відносно (a_1, b_1), будуть симетричними відносно Г.

У визначеному вище околі дуги γ_1 дві точки z назвемо *симетричними* відносно цієї дуги, якщо вони відповідають двом точкам t, симетричним відносно дійсної осі. Це означення стає цілком природним, якщо зазначити, що властивість симетрії двох точок відносно правильної аналітичної дуги γ інваріантна при всякому голоморфному перетворенні параметра $\theta = \lambda(t)$, $\lambda'(t) \neq 0$, що зберігає дійсну вісь і приводить до другого параметричного зображення правильної аналітичної дуги γ.

Помітивши це, розглянемо дві путі, симетричні відносно дуги γ_1, що виходять з однієї її точки, і їм відповідні путі в площині t. З можливості аналітичного продовження функції $\varphi(t)$ через відрізок (a_1, b_1) і відзначеної вище його властивості випливає, поперше, можливість аналітичного продовження функції $f(z)$ через дугу γ_1 і, подруге, така властивість цього продовження: *в двох точках, симетричних відносно дуги γ_1, аналітично продовжена функція $f(z)$ приймає значення, що є афіксами двох точок, симетричних відносно* Г.

Отже, при аналітичному продовженні функції $f(z)$ через дугу γ одержуємо для двох точок z, симетричних відносно дуги, дві відповідні точки $f(z)$, симетричні відносно Г.

5. Принцип Шварца аналітичного продовження. Як і в попередньому пункті припустимо, що $f(z)$ є функція, голоморфна в області G, границя якої містить правильну аналітичну дугу (відкриту) γ:

$$z = z(t), \qquad (a < t < b).$$

Під значеннями функції $f(z)$ на дузі γ ми розуміємо послідовність граничних її значень $F(t)$ зсередини області G, які за умовою існують.

Задача цього пункту — довести, що *коли граничні значення $F(t)$ функції $f(z)$ в точках дуги γ являють собою аналітичну функцію параметра t, то наша функція може бути аналітично продовжена через дугу γ*. В цьому полягає принцип Шварца аналітичного продовження функцій комплексного змінного в його загальній формі.

Доведемо спочатку це твердження в окремому випадку, коли дугою γ служить інтервал $\alpha < x < \beta$ дійсної осі. Тому що граничні значення $F(x)$ нашої функції являють собою функцію, аналітичну в околі кожної точки x_0 інтервала $\alpha < x < \beta$, то поблизу точки x_0 має місце розклад:

$$F(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

Вважаючи $z = x + iy$ і замінюючи в цьому розкладі дійсне змінне x через комплексне z, ми одержимо функцію $\Phi(z)$, голоморфну в околі точки x_0:

$$\Phi(z)=c_0+c_1(z-x_0)+c_2(z-x_0)^2+\ldots$$

Різниця $\Phi(z)-f(z)$ буде голоморфною в частині околу x_0, що належить області G; на діаметрі цього околу, розміщеному по дійсній осі, вона має граничні значення, рівні нулеві. Отже, в наслідок принципу симетрії Рімана—Шварца (п. 3) ця різниця $\Phi(z)-f(z)$ аналітично продовжується на весь зазначений окіл точки x_0 і, будучи функцією, голоморфною в цьому околі, рівною нулеві на відрізку, внутрішньому до нього, повинна бути тотожним нулем у всьому околі (розд. VI, § I, п. 4). Отже, в околі точки x_0 ми маємо: $f(z)\equiv\Phi(z)$, що доводить можливість аналітичного продовження функції $f(z)$ через інтервал $\alpha<x<\beta$ поблизу точки x_0. Помітивши ж, що x_0 є яка завгодно точка інтервала $\alpha<x<\beta$, ми робимо висновок про можливість аналітичного продовження функції $f(z)$ через інтервал $\alpha<x<\beta$.

Вертаючись тепер до загальних умов теореми Шварца, зобразимо граничні значення $F(t)$ функції $f(z)$ у вигляді:

$$F(t)=c_0+c_1(t-t_0)+c_2(t-t_0)^2+\ldots,$$

де t_0 — яка завгодно точка інтервала (a,b) і $t_0-\rho<t<t_0+\rho$, ρ — достатньо мале. Тому що $z'(t_0)\neq 0$, то можна вибрати ρ таким малим, щоб круг $|t-t_0|<\rho$ за допомогою функції $z(t)$ відображався взаємно однозначно на якусь область g з внутрішньою точкою $z_0=z(t_0)$; позначимо через γ_1 частину дуги γ, що належить g. Функція $\varphi(t)=f[z(t)]$ голоморфна з однієї сторони інтервала $(t_0-\rho, t_0+\rho)$ і приймає в точках цього інтервала ті ж значення, що і $f(z)$ у відповідних точках дуги γ_1; отже, значення функції $\varphi(z)$ в інтервалі $(t_0-\rho_1 t_0+\rho)$ дійсної осі зображають аналітичну функцію $F(t)$. За доведеним на початку цього пункту функція $\varphi(t)$ може бути аналітично продовжена в круг $|t-t_0|<\rho$ за допомогою функції $F(t)$. Помітивши, що $\varphi(t)=f(z)$ у відповідних точках, ми звідси робимо висновок, що функція $f(z)$ аналітично продовжується в область g, тобто через дугу γ_1. Тому що t_0 є яка завгодно точка інтервала $a<t<b$, а значить $z_0=z(t_0)$ — яка завгодно точка дуги γ, ми бачимо, що $f(z)$ може бути аналітично продовжена через дугу γ.

6. Принцип симетрії для гармонічної функції. Як відомо, функція $V(x,y)$ називається *гармонічною* в області, якщо вона однозначна в цій області, має неперервні похідні до другого порядку включно і задовольняє рівняння Лапласа:

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0.$$

Ми знаємо також (розд. II, § 4, п. 5), що коли відома функція V, гармонічна в однозв'язній області, то можна визначити з точністю до додаткового сталого, функцію $U+iV$ комплексного змінного $z=x+iy$, аналітичну в цій області; функція U буде також гармонічною.

Умовимося називати *аналітичним продовженням* гармонічної функції, визначеної в області G, гармонічну функцію, визначену в області G_1, що містить G, якщо ця функція збігається з даною функцією на області G[1]).

Розглянемо тепер функцію $V(x,y)$, гармонічну в околі правильної аналітичної дуги γ (відкритої) і рівну нулеві на цій дузі. Можна побудувати в цій області функцію $U+iV$, голоморфну відносно $z=x+iy$. Коли точка z описує дугу γ, ця функція $U+iV$ весь час має дійсні значення, тобто точка $U+iV$ лишається на дійсній осі. В наслідок п. 4 ми робимо висновок, що в точках, симетричних відносно дуги, значення функції $U+iV$ будуть симетричними відносно дійсної осі, а значить, значення функції V супротивні знаком.

Тепер природно формулювати такий принцип аналітичного продовження гармонічної функції:

Якщо V є функція, гармонічна в області G, границя якої містить правильну аналітичну дугу γ (відкриту), крім того, неперервна на множині $G+\gamma$ і рівна нулеві на γ, то її можна продовжити аналітично через γ, надаючи їй значення, супротивні знаком в точках, симетричних відносно γ.

Результати, встановлені в попередніх пунктах, недостатні, щоб довести це твердження, і потрібне спеціальне доведення. Можна звести доведення формульованого принципу до окремого випадку, коли дугою γ є інтервал дійсної осі. Для цього зробимо так. Нехай $z=z(t)$, $a<t<b$, є рівняння дуги γ і $(a_1\, b_1)$ — який завгодно відрізок, внутрішній до інтервала (a, b). Вважаючи t за комплексне змінне, ми бачимо, що існує функція $z(t)$, яка є голоморфна в околі відрізка (a_1, b_1), дійсної осі і дає взаємно однозначну відповідність між цим околом і околом дуги γ_1: коли t описує відрізок (a_1, b_1), точка z описує дугу γ_1. Утворивши функцію $U+iV$, голоморфну відносно z в частині окола дуги γ_1, що належить G, ми бачимо, що вона буде, як функція t, голоморфна з якоїсь сторони відрізка (a_1, b_1) дійсної осі. Отже, V є функція гармонічна від координат точки t з однієї сторони відрізка (a_1, b_1) дійсної осі і приймає значення нуль на цьому відрізкові. Якщо ми припустимо, що теорема вірна в цьому окремому випадку, то V аналітично продовжується через (a_1, b_1), коли ми їй надаємо значення, супротивні знаком у точках, симетричних відносно відрізка (a_1, b_1); таким чином V стає гармонічною функцією в усьому околі відрізка (a_1, b_1) і, значить, $U+iV$ — голоморфною відносно t в цьому околі. Вертаючись до змінного z, ми робимо висновок, що $U+iV$ буде голоморфною від-

[1]) Очевидно, якщо можна аналітично продовжити гармонічну функцію, то це можна зробити тільки єдиним способом. Справді, нехай дві функції V і V_1 гармонічні в якійсь області, збігаються на частинній області. Різниця $v=V-V_1$ буде гармонічною в даній області і рівною нулеві в якійсь її частині. Утворивши функцію комплексного змінного $z=x+iy$ вигляду $u+iv$, аналітичну в околі кожної точки даної області, ми робимо висновок, що вона дорівнює нулеві в частині даної області; звідси випливає, що $v\equiv 0$ і, значить, $V\equiv V_1$.

носно z в околі дуги γ_1 і, значить, V — гармонічною від координат точки z в цьому околі. Тому що дуга γ_1 є яка завгодно, внутрішня до γ, то ми показали можливість аналітичного продовження функції V через дугу γ.

Отже, нам досить встановити таке твердження:

якщо V є функція, гармонічна всередині півкруга з діаметром ab на дійсній осі, неперервна на цьому півкрузі, включаючи його границю, і рівна нулеві на діаметрі ab, то вона збігається з функцією, гармонічною всередині всього круга (рис. 103).

Визначимо функцію $u(x, y)$ у крузі C, включаючи його границю, за допомогою умов:

1) $u(x, y) = V(x, y)$ в першому півкрузі (наприклад, верхньому),

2) $u(x, y) = -V(x, -y)$ в другому півкрузі

і покажемо, що $u(x, y)$ є функція, гармонічна всередині круга C радіуса R.

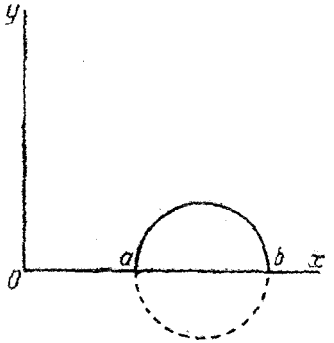

Рис. 103

Справді, поперше, очевидно, що $u(x, y)$ є функція, неперервна всередині круга C, тому що її значення на діаметрі, рівні нулеві, збігаються з граничними як із верхньої, так із нижньої половини круга, в інших же точках круга C вона збігається або з $V(x, y)$, або з $-V(x, -y)$. Подруге, легко виявити, що значення її в кожній точці, внутрішній до круга C, дорівнює середньоарифметичному її значень на колі якого завгодно достатньо малого радіуса з центром у цій точці. Дійсно, це буде для точок, що лежать вище діаметра, тому що в цій області $u(x, y) = V(x, y)$ і V є функція гармонічна (розд. V, § 2, п. 8): те ж саме очевидно для точок, які лежать знизу діаметра, тому що тут $u(x, y) = -V(x, -y)$, і, значить, u є функція гармонічна; нарешті, у точці (x_0, y_0), що лежить на діаметрі, u дорівнює нулеві, і легко показати, що

$$0 = u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho\cos\varphi,\ y_0 + \rho\sin\varphi)\,d\varphi,$$

тому що підінтегральна функція в інтервалі $(\pi, 2\pi)$ має значення, супротивні знаком з її значеннями в інтервалі $(0, \pi)$.

Отже, функція $u(x, y)$ буде неперервною всередині круга C і в кожній його точці задовольняє умові:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho\cos\varphi,\ y_0 + \rho\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Цього ж досить, щоб зробити висновок про те, що $u(x, y)$ є гармонічна функція всередині C[1]).

[1]) І. І. Привалов, Sur les fonctions harmoniques, Математический сборник, т. XXXII.

Можливо, нарешті, узагальнити доведену властивість про аналітичне продовження через правильну аналітичну дугу гармонічної функції V, замінюючи умову обернення в нуль на дузі тією умовою, що функція, визначена з однієї сторони від дуги, приймає на дузі, зберігаючи неперервність, значення, які утворюють аналітичну функцію параметра t, що входить у рівняння дуги.

Дійсно, позначаючи через γ_1 яку завгодно дугу, внутрішню до γ, і через (a_1, b_1) відрізок дійсної осі, який їй відповідає в наслідок рівняння $z = z(t)$ дуги γ, визначимо достатньо малі околи дуги γ_1 і відрізка (a_1, b_1), які взаємно однозначно відображаються за допомогою функції $z = z(t)$. Нехай $\varphi(t)$ — дана аналітична послідовність значень; очевидно, її ми можемо розглядати як голоморфну функцію від t в зазначеному околі відрізка (a_1, b_1), беручи цей окіл достатньо вузьким. Вважаючи $g(z) \equiv \varphi[t(z)]$, ми одержуємо функцію $g(z)$, голоморфну в околі дуги γ_1 і таку, що приймає на цій дузі γ_1 дійсні значення $\varphi(t)$, дані за умовою.

Якщо $g(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, то P, Q будуть гармонічні в околі дуги γ_1, при чому на дузі γ_1 функція P приймає значення $\varphi(t)$. Отже різниця $V(x, y) - P(x, y)$ є функція, гармонічна з однієї сторони від дуги γ_1, і обертається, зберігаючи неперервність, в нуль на цій дузі; за доведеним вона може бути продовжена через дугу γ_1, і, значить, той же самий висновок можна зробити відносно $V(x, y)$.

Доведений в п. 5 принцип Шварца аналітичного продовження функції комплексного змінного є окремим випадком тількищо встановленого твердження про продовження гармонічної функції. Більш того, ми можемо тепер сказати, що для аналітичного продовження функції комплексного змінного досить, щоб її дійсна або уявна частина приймала на дузі аналітичну послідовність значень. У цьому випадку дійсна або уявна частина функції буде функцією гармонічною, продовжуваною через дугу, і звідси робимо висновок, що й сама функція комплексного змінного має ті ж самі властивості.

7. Застосування принципу симетрії. При встановленні в § 1 умов, які визначають єдине конформне відображення, ми бачили, що основним для цього є таке твердження: *всяке взаємно однозначне конформне перетворення круга* $|z| < 1$ *самого в себе є лінійне.* Ця фундаментальна теорема була нами доведена в § 1, п. 1 за допомогою методу ітерацій і навіть у більш загальній формі.

Тепер ми дамо друге доведення цього твердження, скориставшись принципом симетрії. Спочатку зазначимо щодо функції $f(z)$ теореми, що її модуль $|f(z)|$ приймає значення одиниця на колі, тобто коли віддаль $1 - |z|$ точки z до кола прямує до нуля, то $|f(z)|$ прямує до одиниці.

Дійсно, припускаючи супротивне і помічаючи, що $|f(z)|$ всюди в крузі $|z| < 1$ менше одиниці, ми можемо знайти послідовність точок z_n ($|z_n| \to 1$) таку, що $|f(z_n)|$ не прямує до одиниці, залишаючись менше одиниці. В такому випадку існувала б для то-

чок $f(z_n)$ гранична точка λ всередині круга. Тоді можна було б вибрати з послідовності z_n послідовність z_n' таку, щоб $f(z_n')$ прямувало до λ. Зазначимо тепер, що точка λ відповідає якійсь точці ζ, внутрішній до круга, в наслідок взаємно однозначного перетворення $f(z)$, тобто $f(\zeta)=\lambda$. В наслідок неперервності, коли $f(z_n')$ прямує до λ, то z_n' повинна прямувати до ζ, $|\zeta|<1$. Одержана суперечність з граничною рівністю $|z_n'|\to 1$ переконує нас у справедливості висловленого положення.

Розглянемо яку завгодно дугу кола. Поблизу цієї дуги функція $\ln f(z)$ є голоморфна, при чому її дійсна частина $\ln|f(z)|$ приймає значення нуль на цій дузі. Отже, в наслідок п. 6 її можна аналітично продовжити через дугу. Інакше кажучи, $\ln f(z)$, а значить, і $f(z)$, є голоморфна функція на дузі. Звідси вбачаємо в наслідок довільності дуги, що $f(z)$ є функція, голоморфна в крузі $|z|\leqslant 1$; з другого боку, коли z описує коло $|z|=1$, то точка $f(z)$ лишається на тому ж колі. Прикладаючи принцип симетрії (п. 4), ми бачимо, що продовжена за круг функція $f(z)$ в точках, симетричних відносно одиничного кола, приймає значення, симетричні відносно того ж кола. Звідси безпосередньо випливає, що продовжена функція в розширеній площині комплексного змінного має тільки одну особливу точку — простий полюс — і один простий нуль. Отже $f(z)$ є функція раціональна (розд. VII, § 4, п. 2), яка має один простий полюс і один простий нуль, тобто лінійна функція.

§ 3. Загальні перетворення одиничного круга у внутрішню область

1. Аналітичний вираз голоморфної функції, яка перетворює круг $|z|<1$ у внутрішню область. Вивчимо аналітичне представлення функції $w=f(z)$, визначеної і голоморфної всередині одиничного круга і за модулем меншої від одиниці. Ми можемо припускати, що початок координат не є нуль функції, тому що в супротивному випадку ми поділили б функцію на відповідний степінь z. Розмістимо всі нулі функції в порядку неспадних модулів, при чому записуємо нуль k разів, якщо він має кратність k. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — одержана таким чином послідовність нулів, яку ми припускаємо покищо скінченною. Утворимо функцію

$$g(z)=\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i-z}{1-z\bar{a}_i}.$$

Тому що лінійні функції $\frac{a_i-z}{1-z\bar{a}_i}$ перетворюють одиничний круг сам у себе, то вони задовольняють умові: яке б не було мале додатне число ε, можна побудувати коло C_ε радіуса, достатньо близького до одиниці так, щоб на цьому колі мали:

$$\left|\frac{a_i-z}{1-z\bar{a}_i}\right|>1-\frac{\varepsilon}{n} \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, n).$$

Отже, на колі C_ε буде виконуватися нерівність:

$$|g(z)| > \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^n > 1 - \varepsilon.$$

З другого боку, маємо $|f(z)| < 1$, і, значить, нерівність:

$$\left|\frac{f}{g}\right| < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

задовольняється на колі C_ε, а значить, і всередині, тому що функція $\frac{f}{g}$ — голоморфна всередині одиничного круга і максимум її модуля в крузі з колом C_ε досягається на границі. Примушуючи ε прямувати до нуля, з останньої нерівності одержуємо для всякої точки $z\,(|z| < 1)$:

$$\left|\frac{f}{g}\right| \leqslant 1. \tag{13}$$

Рівність у формулі (13) можлива тільки в тому випадку, коли $\frac{f}{g}$ є тотожне стале, яке, маючи модуль, рівний одиниці, буде вигляду $e^{i\theta}$; цей висновок має місце тому, що модуль голоморфної функції не може досягати свого максимуму у внутрішній точці області, якщо функція не є стале.

Отже, відношення $\frac{f}{g}$ є функція, голоморфна всередині одиничного круга, яка не має нулів і за модулем не перевищує одиниці. Отже, ми можемо написати:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = e^{\gamma(z)}, \tag{14}$$

де $\gamma(z)$ буде функцією, голоморфною в одиничному крузі і такою, що задовольняє умову: $R[\gamma(z)] \leqslant 0$.

Заводячи у формулу (14) замість $g(z)$ її вираз у вигляді добутку, одержимо:

$$f(z) = e^{\gamma(z)} \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i - z}{1 - z\bar{a}_i}. \tag{14'}$$

Нарешті, якщо початок координат є нуль функції $f(z)$ кратності λ, то замість (14) матимемо загальнішу формулу:

$$f(z) = z^\lambda e^{\gamma(z)} \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i - z}{1 - z\bar{a}_i}. \tag{14''}$$

Розглянемо тепер випадок, коли функція $f(z)$ має нескінченну множину нулів, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, які ми розмістили в порядку неспадних модулів, повторюючи кожний нуль стільки разів, яка його кратність. З розд. IX, § 3, п. 3 ми знаємо, що коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} [1 - |a_n|]$ розбігається, то функція, що має нулями точки a_n і

обмежена всередині круга, є тотожний нуль. Через це треба припустити, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}[1-|a_n|]$ збігається.

Припускаючи це, в розд. IX, § 3, п. 4 ми показали, що функція

$$F(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-z}{1-z\bar{a}_k}\bar{a}_k \tag{15}$$

є голоморфна всередині одиничного круга, не рівна тотожному нулеві. Помітивши, що $\bar{a}_k=\frac{|a_k|^2}{a_k}$ і $\prod_{k=1}^{\infty}|a_k|$ збігається, перепишемо (15) у вигляді

$$F(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-z}{1-z\bar{a}_k}\frac{|a_k|}{a_k}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}|a_k|. \tag{15'}$$

Відкидаючи сталий множник $\prod_{k=1}^{\infty}|a_k|$ формули (15'), розглянемо функцію

$$g(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-z}{1-z\bar{a}_k}\frac{|a_k|}{a_k}, \tag{16}$$

яка буде голоморфною всередині одиничного круга, не рівною тотожному нулеві; нулі цієї функції $g(z)$ збігаються з нулями даної функції $f(z)$. Щоб порівняти $f(z)$ і $g(z)$, утворимо відношення $\frac{f}{g}$, яке буде зображати голоморфну функцію всередині одиничного круга, яка не має нулів, і покажемо, що це відношення за модулем не перевищує одиниці.

Дійсно, вважаючи $g_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k-z}{1-z\bar{a}_k}\frac{|a_k|}{a_k}$, ми покажемо, як на початку цього пункта, що для всякої точки $z(|z|<1)$ має місце нерівність:

$$\left|\frac{f}{g_n}\right|\leqslant 1. \tag{17}$$

З останньої нерівності (17) в границі при $n\to\infty$ одержимо:

$$\left|\frac{f}{g}\right|\leqslant 1, \tag{17'}$$

при чому знак рівності для точки $z(|z|<1)$ можливий тільки в тому випадку, коли $\frac{f}{g}$ є тотожне стале вигляду $e^{i\theta}$.

Отже відношення $\frac{f}{g}$ є функція, голоморфна всередині одиничного круга, яка не має нулів і за модулем не перевищує одиниці. Отже, ми можемо написати:

$$\frac{f(z)}{g(z)}=e^{\Gamma(z)}, \tag{18}$$

де $\Gamma(z)$ буде функцією, голоморфною всередині одиничного круга і такою, що задовольняє умову $R(\Gamma(z)) \leqslant 0$. Заводячи у формулу (18) замість $g(z)$ її вираз (16) у вигляді нескінченного добутку, одержимо:

$$f(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - z}{1 - z\bar{a}_k} \frac{|a_k|}{a_k}. \tag{19}$$

Нарешті, якщо початок координат є нуль функції $f(z)$ кратності λ, то замість (19) будемо мати загальнішу формулу:

$$f(z) = z^{\lambda} e^{\Gamma(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - z}{1 - z\bar{a}_k} \frac{|a_k|}{a_k}, \tag{20}$$

де $\Gamma(z)$ — функція, голоморфна при $|z| < 1$ і має дійсну частину, весь час від'ємну або весь час рівну нулеві.

Це аналітичне зображення функції, голоморфної всередині одиничного круга і за модулем меншої від одиниці, показує явно всі нулі цієї функції. Крім того, навпаки, якщо a_n є яка завгодно послідовність точок $|a_n| < 1$ така, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} [1 - |a_n|]$ або $\prod_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається, то вираз (20) зображає функцію, голоморфну всередині одиничного круга і за модулем меншу від одиниці.

Таким чином, ми дістали разом з тим умову, необхідну і достатню для того, щоб точки a_n були нулями функції голоморфної, не рівної тотожному нулеві і обмеженої в крузі $|z| < 1$, яка полягає ось у чому: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|)$ збігається або, що те ж саме, якщо відкинути нульову точку, $\prod_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається. А проте цей останній результат був встановлений раніш (розд. IX, § 3, п. 3, 4).

2. Лема Шварца. *Якщо функція $w = f(z)$, голоморфна в крузі $|z| < 1$, задовольняє умовам: $f(0) = 0$ і $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$, то ми маємо $|f(z)| \leqslant |z|$ всюди в крузі $|z| < 1$. Крім того, якщо рівність має місце хоча б в одній внутрішній точці, то вона має місце всюди, і тоді $f(z) = e^{\alpha i} \cdot z$.* Інакше кажучи, лема Шварца стверджує, що при відображенні за допомогою функції $w = f(z)$ всяка точка або наближається до початку координат, або наше відображення є обертання навколо початку координат.

Переходячи до доведення, зазначимо, що всюди всередині розгляданого круга $|z| < 1$, маємо:

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{21}$$

тому що за умовою $f(0) = 0$. Відношення $\frac{f(z)}{z}$ зображає функцію, голоморфну всередині згаданого круга, приймаючи

$$\frac{f(0)}{0} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z},$$

при чому має місце розклад:

$$\frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots \tag{22}$$

Візьмемо всередині нашого круга радіуса одиниця концентричний круг радіуса ρ ($\rho < 1$). Ми знаємо, що максимум модуля функції, голоморфної в замкнутій області, досягається на границі цієї області (розд. VI, § 2, п. 5). Через це для всіх точок z, які лежать у крузі $|z| \leqslant \rho$, буде справджуватися нерівність:

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{\rho}.$$

Примушуючи ρ прямувати до одиниці, вважаючи z сталим, ми бачимо, що в усякій точці z, яка лежить усередині круга $|z| < 1$, матимемо:

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant 1,$$

або

$$|f(z)| \leqslant |z|.$$

Отже, перша частина леми Шварца доведена.

Припустимо тепер, що є хоча б при одному a ($|a| < 1$) рівність: $|f(a)| = |a|$. Розглянемо функцію $\frac{f(z)}{z}$, голоморфну в околі точки a. У самій точці a за припущенням маємо: $\left|\frac{f(a)}{a}\right| = 1$. Через це, якщо $\frac{f(z)}{z}$ не є тотожне стале, то повинні знайтися точки z ($|z| < 1$), в яких $\left|\frac{f(z)}{z}\right| > 1$, що неможливо за доведеною першою частиною. Отже, маємо $\frac{f(z)}{z} = \text{const}$ всюди всередині круга $|z| < 1$. Через те, що при $z = a$ функція $\frac{f(z)}{z}$ має модуль, рівний одиниці, то $\left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1$ тотожно, тобто $\text{const} = e^{\alpha i}$.

Лема Шварца має велике число узагальнень. Залишаючись у припущеннях доведеного класичного формулювання леми, ми дамо спочатку два прості уточнення цього твердження.

Поперше, якщо початок координат є нуль кратності λ для функції $f(z)$, то можна розглядати функцію $\frac{f(z)}{z^\lambda}$, і звідси одержуємо аналогічно розглянутому випадку:

$$|f(z)| \leqslant |z|^\lambda, \tag{23}$$

при чому рівність можлива лише в тому випадку, якщо

$$f(z) = e^{\alpha i} \cdot z^\lambda.$$

Таким чином ми маємо в цьому окремому випадку обмеження краще, ніж у попередньому формулюванні.

Подруге, можна одержати обмеження ще більш тонке, використовуючи модулі всіх нулів функції. Дійсно, нехай a_i — нулі функції f, розміщені в порядку неспадних модулів, початок координат є нуль кратності λ. В п. 1 цього параграфа ми одержали формулу:

$$f(z) = z^{\lambda} e^{\Gamma(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - z\bar{a}_n} \frac{|a_n|}{a_n}. \tag{24}$$

Позначимо через $H(r)$ і $M(r)$ максимуми модулів функції $e^{\Gamma(z)}$ і $f(z)$ в крузі радіуса $r (r < 1)$, тобто при $|z| \leqslant r$, з формули (24) ми тоді знаходимо:

$$M(r) \leqslant r^{\lambda} H(r) \prod_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z - a_n}{1 - z\bar{a}_n} \right|, \tag{25}$$

де z — яка завгодно точка круга $|z| \leqslant r$. Знайдемо максимум загального члена добутку. Вираз $\frac{|z - a_n|}{\left|z - \frac{1}{\bar{a}_n}\right|}$ зображає відношення віддалей точки z до точок a_n і $\frac{1}{\bar{a}_n}$, симетричних відносно одиничного кола. Коли z описує коло радіуса r, це відношення досягає свого максимуму при проходженні точки z через точку A, яка є протилежним кінцем радіуса, який іде до a_n (рис. 104). Величина цього максимуму буде $\frac{r + r_n}{r + \frac{1}{r_n}}$, де $r_n = |a_n|$, що, очевидно, менше одиниці. Отже, маємо:

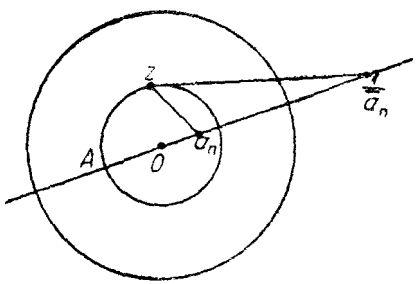

Рис. 104

$$\left| \frac{z - a_n}{1 - z\bar{a}_n} \right| \leqslant \frac{r + r_n}{1 + rr_n};$$

після цього формула (25) набере такого вигляду:

$$M(r) \leqslant r^{\lambda} H(r) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{r + r_n}{1 + rr_n}, \tag{26}$$

що й дає обмеження модуля функції в крузі $|z| \leqslant r$.

З формули (26) можна одержати оцінку менш тонку, але зручнішу, якщо відкинути множник $H(r)$, який не перевищує одиниці, і обмежитися n першими членами нескінченного добутку:

$$M(r) \leqslant r^{\lambda} \prod_{k=1}^{n} \frac{r+r_k}{1+rr_k}. \tag{27}$$

Зазначимо, що коли відкинути всі n множників добутку, то формула (27) перейде в формулу (23).

3. Застосування леми Шварца до оцінки похідної функції, що задовольняє умовам леми. Розглянемо максимум модуля функції $\frac{f(z)}{z}$ на колі $|z|=r$, припускаючи, що $\frac{f(z)}{z}$ не є стале. Позначимо цей максимум через $q(r)$, тоді $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant q(r) < 1$, тому що за лемою Шварца $\left|\frac{f(z)}{z}\right| < 1$. Функція $q(r)$ зростає разом з r, тому що, будучи неспадною функцією, вона могла б зберігати стале значення в наслідок принципу максимального модуля тільки в тому випадку, коли $\frac{f(z)}{z}$ є стале, що виключається.

Примушуючи r прямувати до нуля з нерівності $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant q(r) < 1$, одержуємо:

$$|f'(0)| < 1,$$

тому що $q(r)\,(q(r) < 1)$ спадає з спаданням r. Якщо, нарешті, $\frac{f(z)}{z}$ є стале a, то за лемою Шварца $|a| \leqslant 1$, і, очевидно, маємо в цьому випадку:

$$|f'(0)| = |a| \leqslant 1,$$

тобто $|f'(0)| \leqslant 1$, при чому знак рівності має місце тільки в тому випадку, якщо $a = e^{\alpha i}$, тобто $f(z) = e^{\alpha i} \cdot z$. Отже, при умовах леми Шварца завжди має місце нерівність:

$$|f'(0)| \leqslant 1, \tag{28}$$

при чому знак рівності буде лише в тому випадку, коли $f(z) = e^{\alpha i} \cdot z$.

Якщо початок координат є нуль функції $f(z)$ кратності λ, то, застосовуючи попередні міркування до функції $\frac{f(z)}{z^{\lambda}}$, ми одержимо:

$$\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right| \leqslant 1, \tag{29}$$

при чому знак рівності буде лише в тому випадку, коли $f(z) = e^{\alpha i} \cdot z^{\lambda}$.

Резюмуючи, ми можемо сказати, що для функції, яка задовольняє умовам леми Шварца, перший не нульовий коефіцієнт її розкладу в степеневий ряд за модулем не перевищує одиниці, при чому він за модулем дорівнює одиниці лише в тому випадку, коли цей розклад зводиться до свого першого члена.

Щоб знайти оцінку для $f'(z)$ в якій завгодно точці z_0 ($|z_0|<1$), ми виконаємо два лінійні перетворення площин z і $w=f(z)$, які зберігають одиничний круг і переводять точки z_0 і $w_0=f(z_0)$ відповідно в початок координат:

$$\zeta=\frac{z-z_0}{z\bar{z}_0-1}, \quad \omega=\frac{w-f(z_0)}{w\overline{f(z_0)}-1}.$$

Прикладаючи лему Шварца до функції $\omega=\varphi(\zeta)$, знаходимо:

$$|\varphi(\zeta)|\leqslant|\zeta|,$$

або

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)\overline{f(z_0)}-1}\right|\leqslant\left|\frac{z-z_0}{z\bar{z}_0-1}\right|,$$

звідки виходить:

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|\leqslant\left|\frac{f(z)\overline{f(z_0)}-1}{z\bar{z}_0-1}\right|. \tag{30}$$

Помітивши, що $|f(z)\overline{f(z_0)}|<1$ і, значить, $|f(z)\overline{f(z_0)}-1|<2$, знаходимо з нерівності (30):

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|<\frac{2}{|1-z\bar{z}_0|},$$

або, вважаючи $|z|=r$, $|z_0|=r_0$, одержуємо:

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|<\frac{2}{1-rr_0}. \tag{31}$$

Примушуючи z прямувати до z_0, знаходимо з (31):

$$|f'(z_0)|\leqslant\frac{2}{1-r_0^2}.$$

Але ж можна одержати кращу оцінку для $|f'(z_0)|$, якщо виходити з нерівності (30). Дійсно, помічаючи, що друга частина нерівності (30) при $z\to z_0$ прямує до значення

$$\frac{1-|f(z_0)|^2}{1-|z_0|^2}\leqslant\frac{1}{1-|z_0|^2},$$

ми знайдемо:

$$|f'(z_0)|\leqslant\frac{1}{1-|z_0|^2}. \tag{32}$$

Нерівності (31) і (32) були з успіхом використані Каратеодорі (Caratheodory) в проблемі конформного зображення.

4. Загальна форма леми Шварца. Лема Шварца у своїй первісній формі припускає, що функція обертається в нуль на початку координат. Щоб зрозуміти справжній зміст цього твердження, треба звільнитися від цієї умови.

Нехай $\varphi(u)$ — функція, голоморфна всередині круга C (або на півплощині) і її значення зображаються точками, які лежать

усередині круга Г (або півплощини). Для двох пар відповідних точок $[u_1, \varphi(u_1)]$ і $[u_2, \varphi(u_2)]$ неевклідова віддаль між u_1, u_2, відносно C не менша неевклідової віддалі між $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ відносно Г. Рівність має місце лише в випадку лінійного перетворення C в Г:

$$D_\Gamma[\varphi(u_1), \varphi(u_2)] \leqslant D_C[u_1, u_2]. \tag{33}$$

В цьому полягає загальне формулювання леми Шварца.

Для доведення виконаємо лінійні перетворення C і Г в одиничний круг c, які переводять u_1 і $\varphi(u_1)$ в початок координат. Нехай ці перетворення будуть $u = l(z)$, $w = l_1(\zeta)$; тоді функція $w = \varphi(u)$перетвориться на функцію $\zeta = f(z) = l_1^{-1}\varphi l(z)$, яка задовольняє умовам класичної леми Шварца. Тому що ангармонічне відношення є інваріантом лінійного перетворення і, значить, $D_c[0, f(z_2)] = D_\Gamma[\varphi(u_1), \varphi(u_2)]$ і $D_c[0, z_2] = D_c[u_1, u_2]$, то для встановлення загальної форми леми Шварца досить довести, що

$$D_c[0, f(z_2)] \leqslant D_c[0, z_2],$$

при чому рівність має місце тільки у випадку, коли $f(z)$ є обертання. Це ж останнє випливає з леми Шварца в її первісній формі $|f(z)| \leqslant |z|$ і з того факту, що неевклідова віддаль точки від початку координат $k \ln \frac{1+r}{1-r}$ є зростаюча функція її евклідової віддалі r. Через це з нерівності

$$|f(z)| \leqslant |z| \tag{34}$$

виходить:

$$k \ln \frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|} \leqslant k \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

або

$$D_c[0, f(z)] \leqslant D_c[0, z], \tag{35}$$

при чому знак рівності в (34) і (35) має місце одночасно, тобто тільки у випадку, коли $f(z)$ є обертання.

Якщо прийняти C і Г за одиничні круги, то доведену загальну форму леми Шварца можна формулювати геометрично таким чином:

Якщо $w = f(z)$ залишається всередині круга $|w| < 1$ при $|z| < 1$ і одночасно z міститься всередині неевклідового круга γ з центром z_0 і неевклідовим радіусом ρ, то w лишається всередині неевклідового круга γ' з центром $w_0 = f(z_0)$ того ж неевклідового радіуса ρ; якщо z прямує до точки z_1 на колі γ, то w прямує до точки $w_1 = f(z_1)$, при чому w_1 лежить на колі γ' тільки в тому випадку, коли $f(z)$ лінійно залежить від z; перетворення (z, w) є тоді неевклідове переміщення всередині одиничного круга.

Зазначимо, що, користуючись лемою Шварца, можна швидко одержати теорему § 2, п. 7. Дійсно, якщо (z, w) є взаємно однозначна конформна відповідність середини круга (або півплощини)

в самого себе, то в наслідок доведеного твердження для двох пар точок ми повинні мати:

$$D(w_1, w_2) \leqslant D(z_1, z_2)$$

і, якщо розглядати навпаки z як функцію w:

$$D(z_1, z_2) \leqslant D(w_1, w_2),$$

звідки випливає, що $D(w_1, w_2) = D(z_1, z_2)$, а це буде тільки в тому випадку, коли наше перетворення (z, w) є лінійне.

5. Існування подвійної точки перетворення. Розглянемо функцію $f(z)$, яка є голоморфною всередині круга $|z| < 1$ і яка перетворює його середину D на множину точок Δ, цілком внутрішню до D, тобто точки множини Δ разом з її граничними належать D. Доведемо, що ***існує подвійна точка z_0, і при тому єдина в D, і в цій точці маємо***: $|f'(z_0)| < 1$. Інакше кажучи, ми повинні довести, що існує в області D єдиний простий нуль функції $f(z) - z$ і що ця подвійна точка перетворення $[z, f(z)]$ є ***притягаюча*** (розд. III, § 1, п. 13).

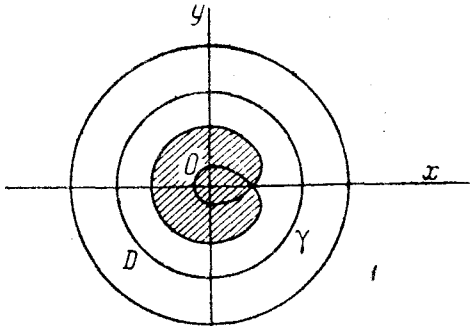

Рис. 105

Спочатку зазначимо таке: гіпотеза, поставлена a priori, про те, що множина Δ не тільки міститься в D, але цілком внутрішня до D, є істотно необхідною. Справді, наприклад, $w = rz$, де $0 < r < 1$, перетворює подібно круг, коло якого проходить через початок координат, у круг, середина якого належить первісному кругові, а границя на початку координат дотикається до кола первісного круга. Подвійними точками цього перетворення є тільки початок координат і нескінченно віддалена точка, обидві не лежать усередині круга. Таким чином, якщо границя множини Δ не лежить усередині D, то може і не існувати в D подвійних точок.

Переходячи до доведення нашого твердження, проведемо коло γ з центром на початку координат радіуса, меншого одиниці, і середина якого містить Δ (рис. 105). Таке коло γ завжди можна побудувати, тому що віддаль граничної точки Δ до кола Γ має додатний мінімум. Якщо існують нулі функції $f(z) - z$, то вони належать Δ, а значить лежать усередині γ.

Функції $f(z)$ і $-z$ голоморфні всередині і на колі γ, при чому $-z$ не обертається в нуль на γ.

Тому що на цьому колі $|f(z)| < |-z|$, то в наслідок твердження Руше (розд. VIII, § 2, п. 3) сума цих функцій $f(z) - z$

має всередині γ однакове число нулів з функцією $-z$. Помітивши, що $-z$ має один простий нуль, ми бачимо, що $f(z)-z$ також має єдиний простий нуль усередині γ. Цим доведена перша частина теореми про існування єдиної подвійної точки перетворення $(z, f(z))$ всередині області D.

Довівши існування в області D єдиної подвійної точки z_0 перетворення $(z, f(z))$, з'ясуємо тепер природу цієї подвійної точки.

Виконаємо лінійне перетворення $\zeta = l(z)$, яке переводить точку z_0 в початок координат і зберігає одиничний круг; при цьому перетворенні область Δ перейде в область Δ_1, яка цілком разом з своєю границею належить D. Нехай $z = L(\zeta)$ перетворення зворотне відносно $\zeta = l(z)$. Тоді функція $l\{f[L(\zeta)]\} = \varphi(\zeta)$ перетворює область D в множину Δ_1, при чому подвійною точкою цього перетворення є початок координат. Зазначимо, що $\varphi'(\zeta) = l'(w) f'(z) L'(\zeta)$, звідки, вважаючи $\zeta = 0$ і пригадавши, що при цьому $z = z_0$, $w = f(z_0) = z_0$, знаходимо:

$$\varphi'(0) = l'(z_0) f'(z_0) L'(0) = f'(z_0),$$

тому що $l'(z_0) L'(0) = 1$ як добуток похідних обернених функцій у відповідних точках. Таким чином замість оцінки $f'(z_0)$ нам досить оцінити $\varphi'(0)$.

Позначаючи через γ' коло з центром у початку координат, розміщене між γ і Γ, радіуса r' і прикладаючи формулу Коші, одержимо:

$$f'(z_0) = \varphi'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^2}.$$

Коли ζ описує коло γ', то $\varphi(\zeta)$ лишається на множині Δ_1, і, значить, $|\varphi(\zeta)| < r$ (Δ_1 лежить усередині круга радіуса r); з другого боку, $|\zeta| = r'$. Помітивши це, з останньої формули знаходимо:

$$|f'(z_0)| = |\varphi'(0)| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r}{r'^2} 2\pi r' = \frac{r}{r'} < 1,$$

що й потрібно.

§ 4. Єдиність аналітичних функцій

1. Однозначне визначення аналітичної функції за її граничними значеннями. Основною властивістю аналітичних функцій, як ми знаємо (розд. VI, § 2, п. 4), є властивість їх єдиності, в наслідок якої аналітична функція однозначно визначається по її значеннях у точках як завгодно малої дуги, що лежить усередині області її голоморфізму. Нехай тепер нам дано функцію $f(z)$, що є голоморфна в області G і приймає на якійсь дузі γ границі області G певні неперервні значення (зсередини G). Природно виникає питання: чи буде така функція єдина, чи ж існує друга функція $f(z)$, що є голоморфна в області G і приймає на γ ті ж неперервні значення?

Вважаючи $F(z)=f(z)-\varphi(z)$, ми матимемо функцію, що є голоморфна в області G і приймає рівномірно зсередини G значення нуль на γ, тобто ця функція $F(z)$, рівна нулеві на γ, буде неперервною (зсередини G) в усіх точках γ. Поставлене питання розв'язується в позитивному розумінні, якщо ми покажемо, що $F(z)$ є тотожний нуль. Ця задача негайно розв'язується на підставі принципу симетрії (§ 2, п. 2), якщо γ є дуга кола. Справді, в цьому випадку, за принципом симетрії функція $F(z)$ аналітично продовжується через дугу γ і, значить, будучи голоморфною в усіх точках, внутрішніх до γ, дорівнює в них нулеві. Така ж функція є тотожний нуль у наслідок основної теореми єдиності (розд. VI, § 2, п. 4).

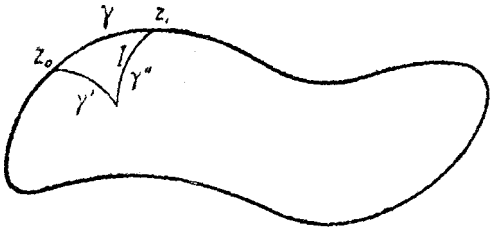

Рис. 106

Зазначене питання розв'язується позитивно і в загальному випадку, коли γ є дуга довільної неперервної лінії, як це далі видно з таких міркувань.

Візьмемо дві, покищо довільні, точки z_0 і z_1 всередині дуги γ. Вважаючи $z'-z_0=(z-z_0)e^{\alpha i}$, ми бачимо, що лінії γ і області G відповідають лінія γ' і область G', які ми одержуємо, якщо повернемо γ і G на кут α навколо точки z_0. Для області G' визначимо функцію

$$F_1(z)=F[z_0+(z-z_0)e^{-\alpha i}].$$

Аналогічно візьмемо:

$$z''-z_1=(z-z_1)e^{\beta i};$$

тоді лінії γ і області G відповідають γ'' і G''. В області G'' визначимо функцію $F_2(z)=F[z_1+(z-z_1)e^{-\beta i}]$. Вважаючи точки z_0 і z_1 достатньо близькими, можна вибрати кути α і β так, щоб області G, G', G'' мали спільну частину I, обмежену частинами ліній γ, γ', γ'' (рис. 106)[1]).

Розглянемо тепер добуток:

$$\Phi(z)=F(z)\cdot F_1(z)\cdot F_2(z). \tag{36}$$

Функція $\Phi(z)$ є голоморфна в області I, тому що $F(z)$ буде голоморфною в G, $F_1(z)$ — в G' і $F_2(z)$ — в G''. Крім того, цей добуток $\Phi(z)$, будучи неперервною функцією в замкнутій області $\overline{I}$, обертається в нуль на замкнутому контурі i області I. Тому що $|\Phi(z)|$ досягає свого максимуму на границі i (розд. VI, § 2, п. 5), то $\Phi(z)$ дорівнює тотожно нулеві в області I. Звідси виходить, що принаймні один із трьох множників добутку (36) дорівнює нулеві в області I, а значить, всі три множники цього добутку дорівнюють нулеві в області I. Таким чином, функція $F(z)$, рівна нулеві в області I, є тотожний нуль в області G.

[1]) α — додатний, а β — від'ємний тупі кути.

2. Узагальнення теореми єдиності. Теорема єдиності була встановлена (п. 1) в припущенні, що граничні значення функції $f(z)$ існують у всіх точках якоїсь дуги γ, при чому ці значення утворюють неперервну функцію зсередини області G. Природно виникає питання: чи залишається теорема єдиності в силі, якщо відмовитися від неперервності граничних значень функції, при чому розглядати ці значення в точках якоїсь a priori заданої множини? Точніше загальне поставлення проблеми єдиності аналітичних функцій може бути сформульоване так. Дана гладка лінія C і функція $F(z)$, голоморфна з однієї сторони від лінії C[1]. Під значенням функції $F(z)$ в точці z_0 лінії C умовимося розуміти границю, якщо така існує, до якої прямує $F(z)$, коли точка z наближається до точки z_0, ідучи по якій завгодно путі, не дотичній до лінії C. Припустимо тепер, що функція $F(z)$ дорівнює нулеві в усіх точках z_0 якоїсь множини E, яка лежить на C. Яким умовам повинна задовольняти множина E, щоб всяка така функція $F(z)$ була тотожним нулем?

Ми не будемо давати розв'язання цих питань, тому що воно досягається методами, які виходять за межі елементарного підручника, і вкажемо лише деякі найголовніші результати, тут одержані[2]. Можна побудувати приклад функції $f(z)$, голоморфної і обмеженої всередині круга $|z|<1$, не рівної тотожно нулеві, граничні значення якої рівні нулеві на множині точок E потужності континууму, і всюди щільної на колі $|z|=1$, при чому ця множина E може бути як першої, так і другої категорії. У всіх такого роду прикладах міра множини точок E неодмінно нуль. Якщо ж E є довільна множина точок лінії C додатної міри, то функція $F(z)$ є тотожний нуль. Інакше кажучи, теорема єдиності лишається в силі у випадку якої завгодно множини точок E додатної міри. Можна, з другого боку, побудувати приклад функції $f(z)$, що є голоморфна всередині круга $|z|<1$, не тотожно рівна нулеві і прямує до нуля для всякої точки z_0 якоїсь множини E, mes $E=2\pi$, кола, коли точка z наближається до точки z_0 по радіусу $(0, z_0)$. Таким чином, якщо під значенням функції в точці z_0 кола ми розумітимемо її граничне значення по радіусу, то теорема єдиності, взагалі кажучи, не вірна навіть у тому випадку, коли міра множини точок E дорівнює довжині кола. Однак, у всіх такого роду прикладах множина E „радіальних нулів" є першої категорії. Припускаючи ж множину E „радіальних нулів" функції $F(z)$ другої категорії на якійсь дузі σ кола і додатної міри в усякій частині цієї дуги, можна довести, що $F(z)$ дорівнює тотожно нулеві. Отже, для множини точок E зазначеної структури теорема єдиності залишається в силі і в тому випадку, коли під значенням функції в точці z_0 множини E ми розуміємо її границю по радіусу.

Зокрема функція $F(z)$, що голоморфна всередині круга $|z|<1$ і що прямує до нуля, коли z наближається по радіусу до якої завгодно точки z_0 як завгодно малої дуги σ кола $|z|=1$, рівна тотожно нулеві всередині круга.

§ 5. Конформні відображення на верхню півплощину областей, обмежених лініями другого порядку

1. Рівностороння гіпербола. Користуючись принципом симетрії, ми розглянемо відображення областей, обмежених лініями другого порядку на верхню півплощину.

Природно ждати, що для цього нам доведеться розглядати многочлен другого степеня.

Розглянемо спочатку функцію

$$w=z^2, \tag{37}$$

[1]) Під лінією C можна розуміти яку завгодно лінію Жордана, яка має скінченну довжину. Такі лінії називаються спрямляними.

[2]) І. І. Привалов, „Интеграл Cauchy" (Изв. Сар. ун-та, 1918); N. Lusin et I. Priwaloff, Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques, Annales de l'école Normale, 1925, стор. 143.

при чому цілком очевидно, що z, як функція w, є функція двозначна і що її точками розгалуження будуть 0 і ∞ (розд. III, § 3, п. 1). Заведемо дійсні змінні, поклавши:

$$z = x + yi$$
$$w = u + vi,$$

і, отже:

$$u = x^2 - y^2; \qquad v = 2xy. \qquad (37')$$

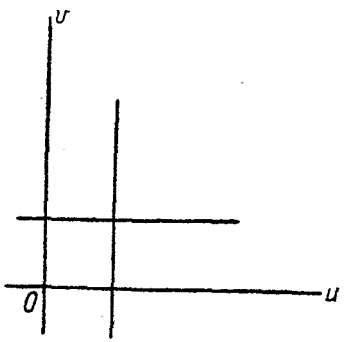

Рис. 107а

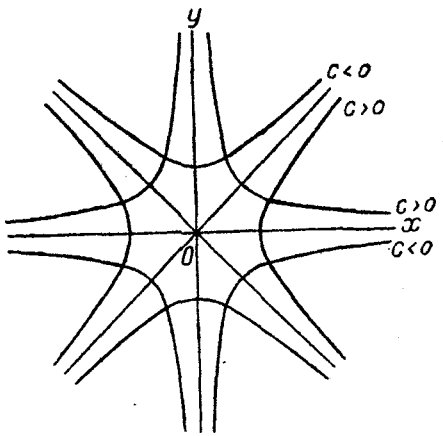

Рис. 107б

З співвідношень (37′) зразу ж випливає, що коли візьмемо пряму $u = c$ (рис. 107а), то на площині z (рис. 107б) цій прямій буде відповідати рівностороння гіпербола, рівняння якої є:

$$x^2 - y^2 = c.$$

Прямим $v = c$ будуть відповідати також гіперболи, які мають асимптотами осі координат і перетинаються з попередніми гіперболами під прямими кутами (бо при конформному відображенні кути зберігаються) (рис. 107б).

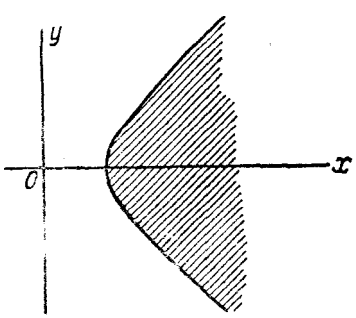

Рис. 108

Дві прямі $u = c$, що лежать у двох різних листах, перетворюються на дві вітки гіперболи, які мають спільною точкою ∞. Те ж саме можна сказати і відносно прямих $v = c$. Звідси вже неважко бачити, що ми можемо відобразити взаємно однозначно і конформно за допомогою функції $w = z^2$ середину однієї вітки рівносторонньої гіперболи на верхню півплощину. Справді, візьмемо середину правої вітки рівносторонньої гіперболи, що має віссю дійсну вісь Ox (рис. 108). Як ми вже бачили, цій вітці гіперболи відповідає пряма $u = c$. Запитується: яка півплощина,

що має границею $u = c$, буде відповідати розгляданій середині гіперболи? Очевидно, та, яка не містить початку координат, тому що його не містить розглядана середина гіперболи. Крім того, розглядані області не містять критичних точок, через це відображення буде взаємно однозначним і конформним. Якщо взяти середину лівої вітки гіперболи, то вона за допомогою функції $w = z^2$ відобразиться взаємно однозначно і конформно на ту ж саму півплощину, що й середина правої вітки. Нарешті, нашу півплощину за допомогою лінійної функції можна перетворити у верхню півплощину. Отже, ми можемо відобразити середину будьякої вітки рівносторонньої гіперболи на верхню півплощину.

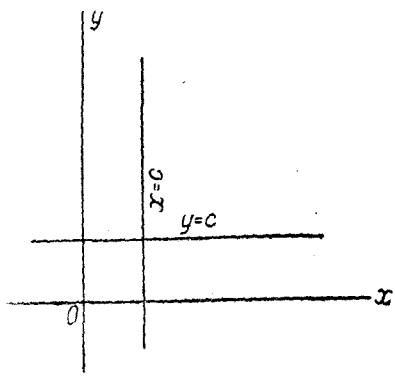

Рис. 109

Щодо відображення зовнішньої області гіперболи на верхню півплощину, то відзначимо покищо, що функція $w = z^2$ не дає змоги його виконати взаємно однозначно і конформно, бо в точці O консерватизм кутів порушується.

2. Парабола. В попередньому пункті ми дослідили, що буде відповідати в площині z координатним лініям площини w, тобто прямим $u = c$ і $v = c$. Задамося тепер протилежним питанням: саме, подивимось, що буде відповідати в площині w прямим $x = \text{const}$ і $y = \text{const}$.

Коли точка z рухається по прямій $x = c$ (рис. 109), тоді u і v будуть функціями одного тільки параметра y. З другого рівняння (37′) для цього випадку маємо

$$y = \frac{v}{2c}.$$

Підставляючи в перше рівняння (37′) цей вираз y, ми одержимо:

$$u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2},$$

або остаточно:

$$v^2 = 4c^2(c^2 - u).$$

Останнє рівняння являє собою рівняння параболи, при чому вісь Ou служить віссю симетрії параболи. Вершина цієї параболи міститься в точці $(c^2, 0)$; фокус же (який віддалений від вершини на $\frac{p}{2}$, якщо $y^2 = 2px$) міститься в початку координат (рис. 110). Якщо ж візьмемо пряму $y = c$, то її відображення в площині w буде теж параболою. Дійсно, виключивши з рівнянь (37′) x, одержимо:

$$x = \frac{v}{2c}; \qquad u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2,$$

або

$$v^2 = 4c^2(u + c^2).$$

Ця парабола має фокусом початок координат, а вершиною $(-c^2, 0)$ (рис. 110).

Треба зазначити, що кожна з цих двох парабол *подвійна*: одна на одному листі ріманової поверхні, друга — на другому. Візьмемо зовнішню частину параболи (рис. 111), що дається рівнянням:

$$v^2 = 4c^2(u + c^2).$$

Тому що зовнішня частина параболи не містить критичної точки, тобто нуля, то значить, наша функція $z = \sqrt{w}$ буде відображати

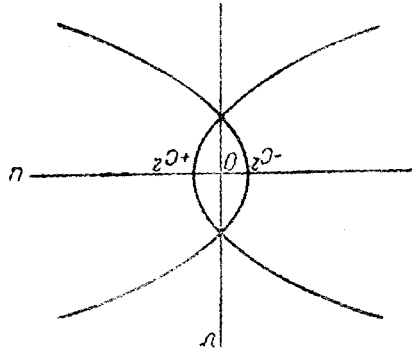

Рис. 110

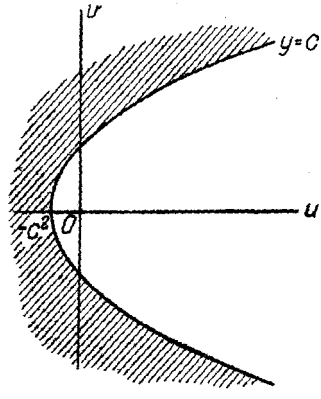

Рис. 111

взаємно однозначно і конформно зовнішню частину цієї параболи на верхню півплощину, обмежену прямою $y = c$.

Задамося задачею відобразити внутрішню частину параболи на верхню півплощину. Очевидно, що нам тут перешкоджатиме критична точка — початок координат. Розглянемо спочатку область, обмежену верхньою половиною параболи і дійсною віссю (рис. 112а).

Як ми бачили, вся розглядана парабола відповідає прямій $y = c$. Для верхньої дуги параболи ми маємо $v \geqslant 0$, отже $x = \frac{v}{2c} \geqslant 0 (c > 0)$; через це верхній дузі параболи відповідає півпряма $y = c$ від уявної осі до нескінченності (рис. 112б).

Поглянемо тепер, що буде відповідати прямолінійній границі розгляданої області (рис. 112а). Розглянемо спочатку, що буде відповідати дійсній додатній півосі Ou, тобто коли $v = 0$, а $u \geqslant 0$. З рівнянь (37′) легко зробити висновок, що в такому випадку $y = 0$, а $u = x^2$. Звідси ясно, що дійсній додатній півосі площини w буде відповідати дійсна і додатна піввісь площини z. Тепер поглянемо, що буде відповідати прямолінійному відрізкові від

вершини параболи до фокуса, тобто, коли $v=0$, а u змінюється від 0 до c^2. З формули (37) ми бачимо, що в такому випадку $x=0$, а y змінюється від 0 до c. Отже, розглядана область за допомогою формули $z=\sqrt{w}$ відображається на півсмугу шириною c взаємно однозначно і конформно (рис. 112б).

Розріжемо тепер розглядану область від вершини параболи A (рис. 113а) до її фокуса — початку координат — і застосуємо принцип симетрії. З нього виходить, що розрізаній [зазна-

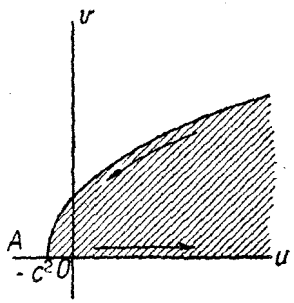

Рис. 112а

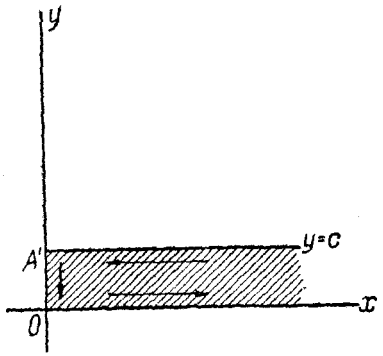

Рис. 112б

ченим способом середині параболи буде відповідати півсмуга шириною $2c$ (рис. 113б). Якщо ж розрізати дану область уздовж дійсної додатної осі Ou (рис. 114а) і застосувати принцип симетрії, продовжуючи функцію за уявну вісь, то знайдемо, що так розрізана середина параболи за допомогою функції $z=\sqrt{w}$ відобразиться на смугу, обмежену дійсною віссю Ox і прямою $y=c$ (рис. 114б). Треба зазначити, що в двох остан-

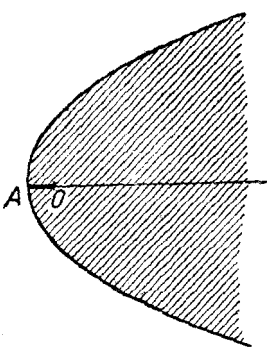

Рис. 113а

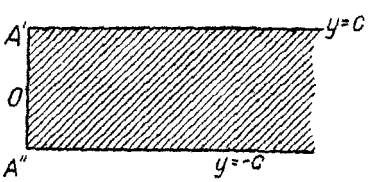

Рис. 113б

ніх випадках відображення буде взаємно однозначним і конформним, тому що критична точка O міститься на границі області (саме на розрізах).

Як відобразити взаємно однозначно і конформно середину параболи (нерозрізану) на верхню півплощину? Яка буде функція, що виконує це відображення? Для цього візьмемо знов область, обмежену верхньою половиною параболи і її віссю симетрії

(рис. 112а). Вона, як ми вже бачили, за допомогою функції $z=\sqrt{w}$ відображається взаємно однозначно і конформно на півсмугу (рис. 112б). Відобразимо цю півсмугу на півкруг за допомогою підставлення:

$$z'=-e^{-\frac{\pi z}{c}} \text{ (розд. III, § 3, п. 2).} \tag{38}$$

Перевіримо це. Дійсно, коли точка z рухається по прямій $y=c$, то підставлення (38) набирає вигляду:

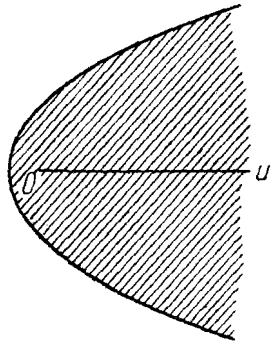

Рис. 114а

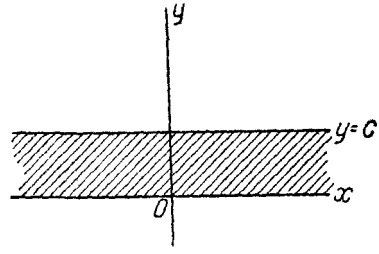

Рис. 114б

$$z'=-e^{-\frac{\pi}{c}(x+yi)}=-e^{-\frac{\pi}{c}(x+ci)}=-e^{-\frac{\pi x}{c}}\cdot e^{-\pi i}=e^{-\frac{\pi x}{c}}. \tag{38'}$$

Звідси видно, що коли x змінюється від ∞ до 0, то z' змінюється від 0 до 1. На відрізку OA' (рис. 112б) маємо $x=0$, y змінюється від 0 до c; отже $\frac{y}{c}$ буде змінюватися від 0 до 1. Підставлення (38) дає: $z'=-e^{-\pi i\frac{y}{c}}$. Звідси видно, що коли точка z рухається по $A'O$, то z' описує півколо радіуса одиниця (бо $|z'|=1$) від точки 1 до -1, при чому з консерватизму кутів виходить, що півколо буде у верхній півплощині змінного z'. Нарешті, коли точка z рухається по дійсній осі від 0 до ∞, то $y=0$, а x змінюється від 0 до ∞; $z'=-e^{-\frac{\pi}{c}x}$ буде змінюватися в такому випадку від -1 до 0 (рис. 115).

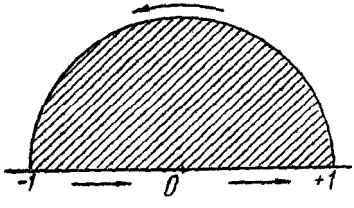

Рис. 115

Отже, ми можемо відобразити область, границею якої служить верхня половина параболи і вісь симетрії, на півкруг. Відобразимо одержаний півкруг на верхню півплощину. Для цього ми візьмемо таку функцію:

$$-\frac{z'+1}{z'-1}. \tag{39}$$

Ця лінійна функція, очевидно, переведе відрізок від -1 до $+1$ в дійсну додатну піввісь, а півколо — в уявну додатну піввісь

(розд. III, § 3, п. 1). Таким чином, розглядана лінійна функція (39) переводить півкруг на координатний кут (рис. 116).

Цілком ясно, що підставлення

$$\zeta = \left(\frac{z'+1}{z'-1}\right)^2$$

(розд. III, § 3, п. 1) відобразить наш півкруг на верхню півплощину (рис. 117).

Стежачи за всіма попередніми перетвореннями, ми помічаємо, що верхня дуга параболи відобразиться в площині ζ у вигляді півпрямої, яка лежить на дійсній додатній осі площини ζ і простягається від 1 до ∞ (рис. 117). Скористуємося тепер принципом симетрії. За цим принципом середина всієї параболи (без розрізу) відобразиться на площину ζ, розрізану по дійсній осі від 1 до ∞, при чому верхній берег розрізу відповідає верхній дузі параболи, нижній — нижній дузі. Залишається розрізану площину (рис. 118) перевести у верхню півплощину. Для цього, очевидно, можна скористуватися формулою $\sqrt{\zeta - 1}$ або ж такою формулою:

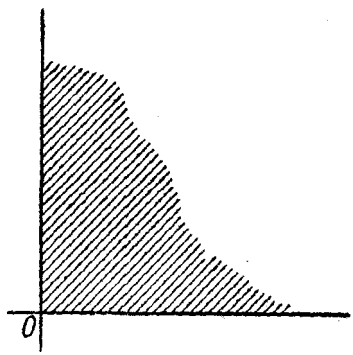

Рис. 116

$$W = -\frac{1}{\sqrt{\zeta - 1}}. \tag{40}$$

Помічаючи тепер, що вся парабола відобразиться взаємно однозначно на дійсну вісь площини W, ми робимо висновок, на підставі § 2, п. 1, що середина параболи за допомогою функції W

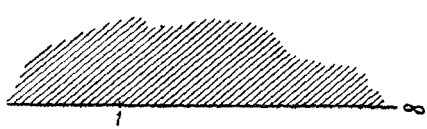

Рис. 117

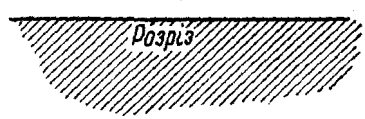

Рис. 118

відобразиться взаємно однозначно і конформно на верхню півплощину.

Отже, задача розв'язана; залишається написати функцію W в розкритому вигляді:

$$z = \sqrt{w}, \quad z' = -e^{\frac{-\pi\sqrt{w}}{c}},$$

$$\zeta = \left(\frac{1 - e^{-\frac{\pi\sqrt{w}}{c}}}{1 + e^{-\frac{\pi\sqrt{w}}{c}}}\right)^2 = \left(\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{w}}{2c}} - e^{-\frac{\pi\sqrt{w}}{2c}}}{e^{\frac{\pi\sqrt{w}}{2c}} + e^{-\frac{\pi\sqrt{w}}{2c}}}\right)^2.$$

Тому що $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$, $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$, то маємо:

$$\zeta = \operatorname{th}^2 \frac{\pi\sqrt{w}}{2c}.$$

Нарешті, одержуємо:

$$W = -\frac{1}{\sqrt{\zeta - 1}} = \frac{1}{-i\sqrt{1-\zeta}} = \frac{i}{\sqrt{1-\zeta}} = i \operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{w}}{2c}. \qquad (41)$$

Така функція, що відображає взаємно однозначно і конформно внутрішню частину параболи на верхню півплощину.

3. Гіпербола і еліпс. В цьому пункті ми розв'яжемо задачу про відображення на верхню півплощину областей, обмежених гіперболою і еліпсом. Для цього нам доведеться вивчити функцію:

$$w = z + \frac{1}{z}, \qquad (42)$$

і, навпаки,

$$z = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4}}{2}. \qquad (42')$$

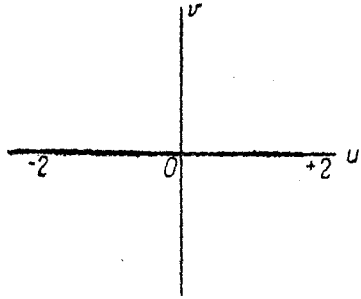

Рис. 119

Таким чином, співвідношення (42) дає відображення площини z на дволисту ріманову поверхню. Критичні точки легко одержати, взявши похідну від функції (42) і прирівнявши її нулеві: $1 - \frac{1}{z^2} = 0$, звідки $z = \pm 1$.

Отже, критичними точками будуть $w = 2$ і $w = -2$. Розрізавши листи змінного w по дійсній осі від -2 до 2 (рис. 119), ми для одержання ріманової поверхні зв'язуємо нижній берег першого листа з верхнім другого, а нижній другого — з верхнім першого.

Для того, щоб детальніше дослідити це відображення, ми заведемо дійсні змінні таким чином:

$$w = u + vi, \; z = \rho e^{\theta i}.$$

Беручи ж до уваги співвідношення (42), маємо:

$$u + vi = \rho e^{\theta i} + \frac{1}{\rho} e^{-\theta i} = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos\theta + i\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin\theta,$$

звідки виходить, що наше співвідношення (42) еквівалентне двом таким:

$$u = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos\theta, \quad v = \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin\theta. \qquad (43)$$

Будемо брати сім'ї координатних ліній площини z. Візьмемо одну сім'ю (кола): $\rho = c$.

Поглянемо, що буде відповідати цим колам. Для цього замінюємо ρ в рівняннях (43) через стале c. Тоді рівняння (43) являтимуть собою параметричні рівняння еліпса.

Виключаючи з них θ, знайдемо:

$$\frac{u^2}{\left(c+\frac{1}{c}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(c-\frac{1}{c}\right)^2}=1. \tag{44}$$

Центр цього еліпса буде міститися в початку координат. Велика піввісь його по довжині рівна $c+\frac{1}{c}$, а мала $c-\frac{1}{c}$ (припускаючи $c>1$). Фокуси матимуть координатами $(-2,0)$ і $(2,0)$ (рис. 120). Тому що координати фокусів не залежать від c, то ясно, що, змінюючи c, ми будемо одержувати конфокальні еліпси. Далі, легко бачити, що двом різним колам (в площині z) радіусів $\rho=c$ і $\rho=\frac{1}{c}$ (рис. 121а) (припускаючи $c\neq 1$) буде від-

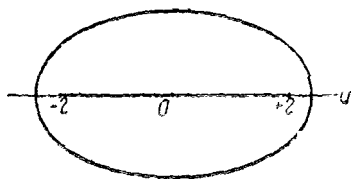

Рис. 120

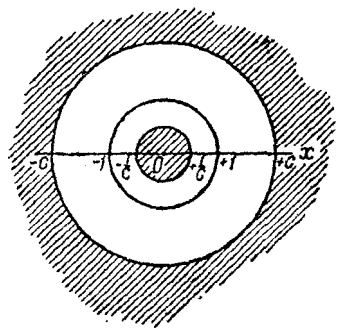

Рис. 121а

повідати один і той же еліпс (рис. 121б). Цей еліпс — подвійний: один лежить на одному листі ріманової поверхні, другий — на другому. Через це еліпсові, який лежить на одній площині або листі, відповідатиме коло, скажемо, радіуса c, а тому, що лежить на другому листі, — коло радіуса $\frac{1}{c}$. Але буде і виключний випадок, саме коли $c=1$, тобто коли радіус ρ кола (в площині z) дорівнює одиниці. Тоді, як показують рівняння (43), наше коло буде переходити у подвійний відрізок від -2 до $+2$ дійсної осі.

Звідси ми можемо прийти до такого висновку. Припустимо, що ми розглядаємо в площині w область, зовнішню до еліпса (рис. 121б). Ця область не містить критичних точок; через це за допомогою функції $z=\frac{w+\sqrt{w^2-4}}{2}$ вона відображається взаємно однозначно і конформно на область, обмежену колом $\rho=c$, що не містить точок -1 і $+1$.

Отже, зовнішня до еліпса область відобразиться на зовнішню область до кола радіуса c ($c>1$), якщо наш еліпс відповідає

цьому колу, і на круг радіуса $\frac{1}{c}$, якщо еліпс відповідає колу $\rho = \frac{1}{c}$ (рис. 121а).

Поглянемо тепер, що буде відповідати другій сім'ї координатних ліній площини z, тобто півпрямим $\theta = a$.

Виключаючи ρ з рівнянь (43), знайдемо:

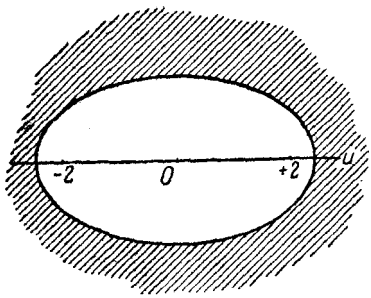

Рис. 121б

$$\frac{u^2}{4\cos^2 a} - \frac{v^2}{4\sin^2 a} = 1. \qquad (45)$$

Це є рівняння гіперболи з півосями $2|\cos a|$ і $2|\sin a|$, фокуси якої мають координати $(-2, 0)$ і $(2, 0)$. Таким чином, ми бачимо, що прямій, нахиленій до дійсної осі Ox під кутом a, відповідає гіпербола; точно так само прямій, яка утворює з віссю Ox кут $-a$, відповідає та ж сама гіпербола. Далі, прийнявши до уваги рівняння (43), легко зробити висновок, що півпрямій $\theta = a$ буде відповідати права вітка гіперболи ($u > 0$, якщо $a < \frac{\pi}{2}$), а півпрямій $\theta = \pi - a$ — ліва вітка гіперболи, яка лежить в тому ж листі, тому що, обертаючи півпряму від $\theta = a$ до $\theta = \pi - a$, ми не перейдемо через критичну точку. Аналогічно, півпрямі $\theta = \pi + a$ і $\theta = 2\pi - a$ (або, що те ж саме, $\theta = -a$) відповідно відобразяться на ліву і праву вітки гіперболи, що лежить на другому листі.

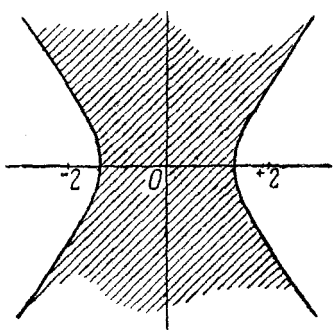

Рис. 122а

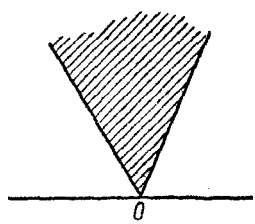

Рис. 122б

З цих міркувань зразу ж випливає, що за допомогою функцій $z = \frac{w + \sqrt{w^2 - 4}}{2}$ зовнішня область гіперболи (рис. 122а) відображається взаємно однозначно і конформно на якийсь кут (рис. 122б). Переводячи одержаний кут за допомогою лінійної функції і функції вигляду z^r, де r — дійсне число, на верхню півплощину, ми розв'язуємо задачу: перевести зовнішню область гіперболи на верхню півплощину.

Припустимо тепер, що ми хочемо відобразити взаємно однозначно і конформно внутрішню область правої вітки гіперболи на верхню півплощину (рис. 123).

Щоб виключити точку розгалуження, ми розглянемо спочатку відображення області, обмеженої верхньою частиною гіперболи і віссю симетрії. Всій нашій вітці гіперболи буде відповідати, як ми знаємо, півпряма, що виходить із початку координат площини z і нахилена до дійсної осі під кутом a. З рівнянь (43) неважко бачити, що верхній дузі нашої вітки гіперболи буде відповідати

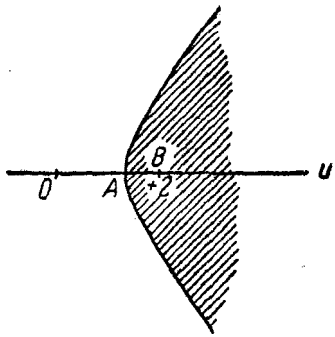

Рис. 123

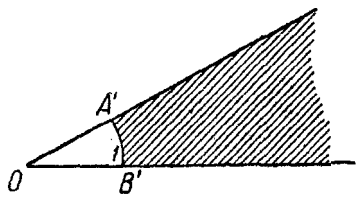

Рис. 124

та ж півпряма, але яка починається від точки A', що міститься від O на віддалі, рівній одиниці (рис. 124). Далі, з тих же рівнянь (43) видно, що коли точка w буде рухатися по дійсній осі (отже $v=0$), починаючи від точки A до точки B (рис. 123), то відповідна точка z буде описувати дугу кола радіуса одиниця, виходячи з точки A' і приходячи в точку B' (рис. 124). І, нарешті, коли точка w рухається по дійсній осі від точки B до ∞, то точка z рухається по дійсній осі від 1 до ∞. Таким чином, об-

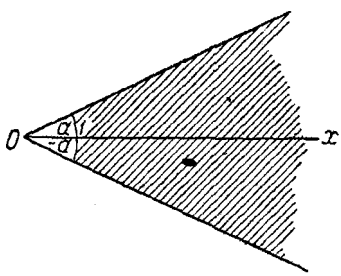

Рис. 125

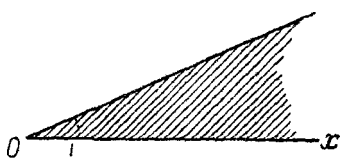

Рис. 126

ласті, обмеженій верхньою частиною гіперболи і віссю симетрії, буде відповідати зовнішня частина кругового сектора з кутом, рівним a (рис. 124).

Розріжемо середину нашої гіперболи по AB. Приклавши до цієї розрізаної середини гіперболи принцип симетрії, ми легко знайдемо, що розрізана по AB середина гіперболи відобразиться на зовнішню область кругового сектора радіуса одиниця і з кутом, рівним $2a$ (рис. 125). Якщо ж розрізати область, внутрішню до гіперболи, від B до ∞ і прикласти принцип симетрії, то прийдемо

до висновку, що розрізана таким чином середина гіперболи відобразиться на внутрішню частину кута величини a (рис. 126).

Але нашою задачею є відобразити взаємно однозначно і конформно всю внутрішню область гіперболи на найпростішу область — верхню півплощину (або круг). Для цього знов візьмемо область, границею якої служить верхня половина гіперболи і вісь симетрії. Ми бачили, що за допомогою вивчаної функції вона відображається взаємно однозначно і конформно на зовнішню частину кругового сектора з кутом a (рис. 124). Зробивши підставлення

$$z' = z^{\frac{\pi}{a}},$$

ми відобразимо нашу область в область, будова якої ясна з рис. 127.

Перетворимо цю область далі, вважаючи $z'' = z' + \frac{1}{z'}$. Ми бачили раніш, що за допомогою цієї функції коло радіуса одиниця переходить у відрізок дійсної осі від -2 до $+2$. Отже границя розгляданої області перейде в дійсну вісь площини z''. Крім того, ясно, що в нашій області функція $z' + \frac{1}{z'}$ голоморфна.

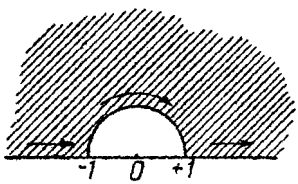

Рис. 127

Таким чином, в наслідок теореми § 2, п. 1 область (рис. 127) відобразиться взаємно однозначно і конформно на верхню півплощину, і значить, первісна область, обмежена верхньою половиною гіперболи і віссю симетрії, буде відображена на верхню півплощину. З другого боку, стежачи за всіма зробленими нами перетвореннями, ми помічаємо, що верхня дуга гіперболи відобразилась на площині z'' півпрямою, яка лежить на дійсній осі і простягається від -2 до $-\infty$.

Прикладемо тепер принцип симетрії. З нього виходить, що наша функція z'' відобразить взаємно однозначно і конформно всю внутрішню область гіперболи на площину z'', розрізану по дійсній осі від -2 до $-\infty$, при чому верхній берег розрізу буде відповідати верхній дузі гіперболи, нижній — нижній дузі.

Заводячи перетворення $z''' = z'' + 2$, ми перетворимо розрізану площину z'' у площину z''', розрізану по дійсній осі від 0 до $-\infty$. Далі, застосувавши підставлення $\sqrt{z'''}$, ми розрізану площину z''' переводимо в праву півплощину. Залишається цю півплощину перевести в верхню, повернувши її за допомогою множника $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ на прямий кут. Отже, функція

$$W = i\sqrt{z'''}$$

буде переводити взаємно однозначно і конформно внутрішню область гіперболи на верхню півплощину.

Напишемо тепер функцію W в розкритому вигляді:

$$W = i\sqrt{z'''} = i\sqrt{z''+2} = i\sqrt{z'+\frac{1}{z'}+2} =$$

$$= i\sqrt{z^{\frac{\pi}{a}}+\frac{1}{z^{\frac{\pi}{a}}}+2} = \sqrt{\left(\frac{w+\sqrt{w^2-4}}{2}\right)^{\frac{\pi}{a}}+\left(\frac{2}{w+\sqrt{w^2-4}}\right)^{\frac{\pi}{a}}+2},$$

або остаточно:

$$W = i\sqrt{\left(\frac{w+\sqrt{w^2-4}}{2}\right)^{\frac{\pi}{a}}+\left(\frac{w-\sqrt{w^2-4}}{2}\right)^{\frac{\pi}{a}}+2}. \qquad (46)$$

Така функція, що виконує взаємно однозначне і конформне відображення внутрішньої області правої вітки гіперболи на верхню півплощину.

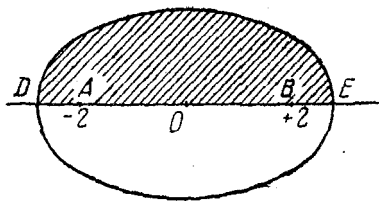

Рис. 128

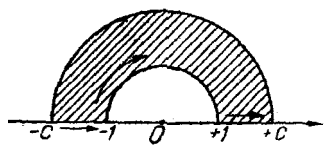

Рис. 129

4. Відображення середини еліпса на півплощину. Користуючись тим же самим методом, ми можемо відобразити середину еліпса на верхню півплощину.

Візьмемо еліпс, що визначається рівнянням:

$$\frac{u^2}{\left(c+\frac{1}{c}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(c-\frac{1}{c}\right)^2}=1.$$

Як ми вже бачили в попередньому пункті, цьому еліпсові буде відповідати коло радіуса c.

Беремо область, обмежену верхньою половиною еліпса і його віссю симетрії (рис. 128). Верхній дузі еліпса відповідає верхнє півколо на площині z (рис. 129). Дійсно, коли $z=\rho e^{\theta i}$ змінюється по цьому півколу, то з рівнянь (43) видно, що v буде більше нуля ($c>1$); коли точка w рухається по DA (рис. 128), то точка z рухається по дійсній осі від $-c$ до -1 (рис. 129). Коли точка w рухається по відрізкові від -2 до $+2$, то z рухається по півколу радіуса одиниця від -1 до $+1$. І, нарешті, коли w описує BE, то z рухається по дійсній осі від $+1$ до c. Коротше кажучи, розглядана область відображається на криволінійній чотирикутник, границею якого служать два кола радіусів 1 і c і два відрізки дійсної осі (рис. 129). Розрізавши середину роз-

гляданого еліпса по дійсній осі від -2 до $+2$ (рис. 130а), ми робимо висновок за принципом Шварца, що при допомозі нашої функції $z = z(w)$ так розрізана середина еліпса відобразиться

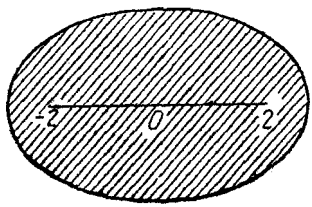

Рис. 130а

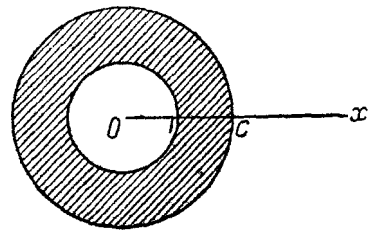

Рис. 130б

взаємно однозначно і конформно на область, обмежену двома концентричними колами радіусів 1 і c (рис. 130б).

Якщо ж розрізати еліпс по DA і BE (рис. 131а), то він відобразиться на криволінійний чотирикутник, обмежений колами

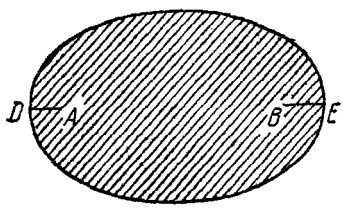

Рис. 131а

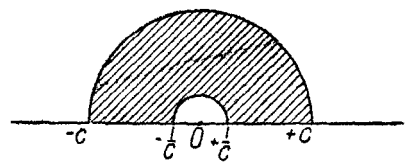

Рис. 131б

радіусів c і $\frac{1}{c}$ і двома відрізками дійсної осі (рис. 131б). Але нас цікавить відображення всієї середини еліпса.

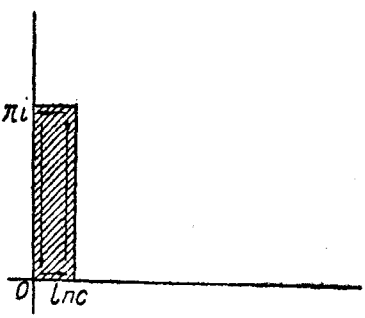

Рис. 132

Ми вже бачили, що верхня половина цієї середини еліпса відображається на криволінійний чотирикутник (рис. 129). Такий криволінійний чотирикутник ми в розд. III, § 3, п. 2 перетворили в прямолінійний прямокутник (рис. 132), вважаючи

$$z' = \ln z = \ln \rho + \theta i.$$

Отже, нам удалося відобразити верхню частину середини еліпса на прямокутник. Залишається цей прямокутник перевести на верхню півплощину. Цю задачу ми розв'яжемо в одному з дальших параграфів. Ми знайдемо функцію f, яка буде відображати взаємно однозначно і конформно прямокутник на верхню півплощину. Функція ж

$$f\left(\ln\frac{w+\sqrt{w^2-4}}{2}\right)$$

буде, очевидно, переводити взаємно однозначно і конформно верхню частину середини еліпса на верхню півплощину. Застосовуючи принцип симетрії, ми побачимо, що ця ж функція буде відображати взаємно однозначно і конформно середину всього еліпса на площину, розрізану вздовж якогось відрізка дійсної осі. Залишається потім лише перетворити цю розрізану площину у верхню півплощину, щоб мати взаємно однозначне і конформне відображення середини всього еліпса на верхню півплощину.

§ 6. Конформне відображення однозв'язних областей

Ми знаємо, що відображення області G площини z на площину w, що виконується за допомогою функції $w=f(z)$, аналітичної в G, буде конформним у всіх точках z, де похідна $f'(z)$ не дорівнює нулеві. Це відображення області G буде взаємно однозначним, якщо різним точкам z_1 і z_2 області G завжди відповідають дві різні точки w_1 і w_2 на площині w. В цьому останньому випадку кожній точці z однозв'язної області G відповідає певна точка w якоїсь однозв'язної області T площини w, і, навпаки, кожній точці T відповідає єдина точка в області G. Інакше кажучи, при взаємно однозначному відображенні області G на область T функція, обернена однозначній аналітичній функції $w=f(z)$, буде в свою чергу однозначною функцією в області T. Природно виникає питання: чи може у випадку взаємно однозначної відповідності похідна $f'(z)$ обертатися в нуль і, таким чином, порушуватися конформність відображення? На це питання можна відповісти негативно, показавши, що при взаємно однозначному відображенні області G похідна $f'(z)$ ніде в області G не дорівнює нулеві (§ 2, п. 3).

Дійсно, допускаючи супротивне, припустимо, що в якійсь точці області G — приймемо її за $z=0$ — похідна $f'(0)=0$. Не зменшуючи загальності, ми можемо вважати $f(0)=0$. Опишемо навколо точки $z=0$ круг достатньо малого радіуса r так, щоб у цьому крузі, включаючи його границю, функція $f(z)$ і її похідна $f'(z)$ були аналітичні, не рівні нулеві, крім як у центрі $z=0$. Позначимо через m мінімум модуля $f(z)$ на колі $|z|=r$ і розглянемо вираз:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\,dz, \tag{47}$$

де w_0 — довільне комплексне число, за модулем менше, ніж m.

При всякому w_0, $|w_0|<m$, знаменник $f(z)-w_0$ не обертається в нуль на колі $|z|=r$, і, значить, написаний інтеграл дорівнює числу N коренів рівняння $f(z)=w_0$, що лежать усередині кола $|z|=r$. Тому що цей інтеграл є неперервна функція від параметра w_0, то він, будучи цілим числом, зберігає не-

змінне значення N при всякому w_0, $|w_0|<m$. З другого боку коли $w_0=0$, значення виразу (47), яке дорівнює кратності нуля функції $f(z)$ при $z=0$, зображає число коренів рівняння $f(z)=0$, що лежать усередині кола $|z|=r$. Отже, тому що $f(0)=0$ і $f'(0)=0$, маємо: $N\geqslant 2$. Це показує, що рівняння $f(z)=w_0$ при всякому w_0, $|w_0|<m$ має принаймні два кореня всередині кола $|z|=r$. Очевидно, ці корені повинні бути різні для $w_0\neq 0$, тому що $f'(z)$ за умовою ніде в крузі $|z|\leqslant r$ не дорівнює нулеві, крім його центра $z=0$. Ми прийшли до суперечності з умовою взаємно однозначної відповідності областей G і T, припустивши, що в якійсь точці області G похідна $f'(z)$ обертається в нуль. Отже, у випадку взаємно однозначного відображення області G на об, ласть T похідна $f'(z)$ не може обертатися в нуль ніде в облст- G, а тому відображення буде конформним всюди. і

Отже, щоб здійснити взаємно однозначне і конформне відображення областей G і T, треба побудувати функцію $w=f()z$, аналітичну в G і таку, що $f(z_1)\neq f(z_2)$, якщо z_1 і z_2 — які завгодно дві точки області G.

Основна задача теорії конформних відображень полягає ось в чому: *дано дві однозв'язні області G і T відповідно в площинах z і w; знайти функцію $w=f(z)$, аналітичну в області G, яка здійснювала б взаємно однозначне* (а значить, і конформне) *відображення цих областей одної на одну.*

При розв'язанні цієї задачі, не зменшуючи її загальності, ми можемо приймати, що одна з даних областей, наприклад, T, є круг з центром у початку координат і радіусом, рівним одиниці, бо щоб здійснити взаємно однозначне і конформне відображення двох довільних однозв'язних областей однієї на одну, досить дістати взаємно однозначні і конформні відображення кожної з даних областей на такий круг.

Тоді має місце така теорема, відома під назвою твердження Рімана, яка належить до найважливіших результатів теорії функцій: *кожна однозв'язна область G, відмінна від повної площини або від площини з виключеною точкою, може бути за допомогою аналітичної функції відображена взаємно однозначно і конформно на середину одиничного круга і при тому так, що довільно заданим точці в G і напрямові в цій точці будуть відповідати нульова точка і напрям додатної дійсної осі.*

Додатково до цього твердження ми зазначимо, що при поставлених початкових умовах функція, що виконує шукане відображення, буде єдина, як це виходить з § 1, п. 2 цього розділу. Таким чином у твердженні Рімана ми маємо загальний геометричний принцип для утворення аналітичних функцій.

1. Спрощення поставлення теореми Рімана. Нехай T — одиничний круг площини w; відомо, що за допомогою лінійного перетворення можливо одиничний круг відобразити самого в себе так, щоб при цьому два задані лінійні елементи (тобто дві точки і напрями через кожну з них) переходили один в одного. Через це, якщо ми взагалі відобразимо область G на одиничний круг,

то завжди можна це відображення так нормувати, щоб заданий лінійний елемент в області G переходив у нульову точку одиничного круга і напрям додатної дійсної осі. Якщо ми тепер — а це не становить ніякого обмеження загальності — область G розмістимо в площині z так, що заданий лінійний елемент збігається з нульовою точкою і напрямом додатної дійсної осі площини z, то це для функції $w=f(z)$, яка відображає, рівносильне вимозі:

$$f(0)=0, \quad f'(0)>0.$$

Щоб підкреслити загальність теореми Рімана, покажемо, що область G, очевидно, не може бути конформно відображена на середину одиничного круга в двох випадках, а саме, коли G є повна площина або площина з виключеною точкою. Щоб довести неможливість такого відображення, розглянемо функцію $w=f(z)$, відносно якої ми припустимо, що вона дає взаємно однозначне і конформне відображення на середину одиничного круга цілої площини z або площини з виключеною точкою. Цю останню точку ми можемо вважати за нескінченно віддалену точку площини z, тому що цього завжди можна досягти за допомогою лінійного перетворення. Очевидно, функція $f(z)$ повинна бути цілою функцією; але, з другого боку, ця функція обмежена, тому що виконує відображення на одиничний круг площини w. Таким чином, за твердженням Ліувілля (розд. VI, § 2, п. 9) $f(z)$ є стале, що неможливо.

Отже, виключаючи ці два випадки, ми повинні будемо припустити, що відображувана область G має на границі принаймні дві різні точки (що відповідають числовим значенням $z=a$ і $z=b$), а значить, завдяки однозв'язності вона має зв'язну граничну множину, яка сполучає обидві ці точки.

За допомогою перетворення

$$z^*=\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$$

ми можемо область G конформно відобразити в область G^* площини z^*, при чому кусок площини z^* буде поза областю G^*. Справді, ми можемо розглядати область G як частину, розміщену в одному листі дволистої ріманової поверхні з двома точками розгалуження $z=a$ і $z=b$; ця ріманова поверхня, включаючи її точки розгалуження, переходить за допомогою описаного вище перетворення в повну площину.

Нехай c є точка площини z^*, яка лежить разом з своїм достатньо малим околом поза областю G^*. Тоді ми одержимо за допомогою лінійного перетворення $\zeta=\frac{1}{z^*-c}$ із області G^* нову область, яка буде цілком лежати всередині скінченного круга. Ясно, що паралельним перенесенням цього круга і перетворенням подібності ми нашу область, нарешті, переведемо в область, яка лежить усередині одиничного круга і містить початок координат усередині себе.

Через це при доведенні твердження Рімана ми, не зменшуючи його загальності, будемо припускати, що відображувана область G лежить всередині одиничного круга і містить нульову точку.

2. Допоміжна функція і її основні властивості. При доведенні теореми Рімана ми скористуємося простою допоміжною функцією, яка конформно відображає двічі покритий одиничний круг з точкою розгалуження поза його центром на простий одиничний круг.

Щоб визначити цю допоміжну функцію, уявимо собі одиничний круг площини t з розрізом, що йде від точки P, віддаль якої від нульової точки дорівнює μ $(\mu < 1)$, до границі цього круга; нехай два, що лежать один на одному, екземпляри такого круга звичайним способом сполучені один з одним вздовж розрізу (рис. 133). Припустимо, що функція

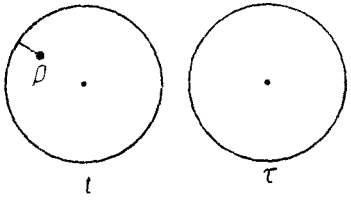

Рис. 133

$$\tau = \varphi(t) = \varphi_\mu(t)$$

конформно відображає цей двічі покритий круг площини t на одиничний круг площини τ так, що при цьому для одного листа виконуються умови:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) > 0.$$

Немає потреби давати для цієї функції явний аналітичний вираз. Зазначимо тільки, що ми можемо її побудувати, якщо спочатку за допомогою лінійного перетворення одиничний круг переведемо самого в себе так, щоб точка розгалуження P перейшла у початок координат, потім утворимо квадратний корінь з одержаної лінійної функції і, нарешті, за допомогою нового лінійного перетворення досягнемо заданої відповідності лінійних елементів у нульових точках. Обернена функція для функції $\tau = \varphi(t)$ — позначимо її через $t = \psi(\tau)$ — буде однозначною і голоморфною в одиничному крузі.

Тому що $\psi(0) = 0$, то, очевидно, $\frac{\psi(\tau)}{\tau}$ в крузі $|\tau| \leqslant 1$ є також голоморфна функція. Помітивши, що $\left|\frac{\psi(\tau)}{\tau}\right|$ на колі $|\tau| = 1$ має значення, яке дорівнює весь час одиниці, ми переконуємося за принципом максимуму модуля аналітичної функції (розд. VI, § 2, п. 5) у справедливості нерівності для внутрішніх точок τ, $|\tau| < 1$:

$$\left|\frac{\psi(\tau)}{\tau}\right| < 1,$$

де точно має місце знак $<$, тому що функція $\frac{\psi(\tau)}{\tau}$ не є стала. Той же висновок ми одержали б, скористувавшись лемою Шварца для функції $\psi(\tau)$.

Отже ми довели: між змінними t і τ завжди існує нерівність: $|\tau| > |t|$, якщо $|t| < 1$, або, точніше кажучи, для всіх значень t, для яких $|t| \leqslant \mu$, має місце нерівність: $|\tau| \geqslant q(\mu)|t|$, де $q(\mu)$

означає число, більше одиниці, яке залежить тільки від μ. Легко бачити, що $q(\mu)$ можна вважати неперервною функцією від μ, $\mu < 1$, яка зберігає значення більші, ніж одиниця.

В наслідок доведеної властивості функції $\tau = \psi(t)$ випливає: якщо в одиничному крузі площини t лежить область G, яка містить середину круга радіуса ρ, $\rho \leqslant \mu < 1$, то ця область за допомогою вітки функції $\tau = \varphi_\mu(t)$ відображається на область G^*, яка належить одиничному кругові площини τ, при чому G^* містить середину круга радіуса $\rho^* = q(\mu) \cdot \rho > \rho$. При цьому нульова точка і напрям додатної дійсної осі залишаються незмінними.

3. Основна лема. Для доведення теореми Рімана нам доведеться скористуватися таким допоміжним твердженням: *якщо послідовність функцій*

$$f_1(z),\ f_2(z), \ldots,\ f_n(z) \ldots,$$

аналітичних в області G, збігається рівномірно в кожній замкнутій області, яка належить G, до граничної функції $f(z)$, відмінної від сталого, і якщо кожна функція $f_n(z)$ відображає взаємно однозначно область G, то й гранична функція $f(z)$ відображає область G взаємно однозначно.

Для доведення припустимо супротивне, що існують дві різні точки z_1 і z_2 області G, в яких аналітична функція $f(z)$ дорівнює одному і тому ж самому числу w_0. Проведемо в області G замкнутий контур Γ, який містить усередині себе точки z_1 і z_2, так, що на цьому контурі $f(z)$ не рівна w_0; це можна зробити, бо за умовою $f(z)$ не є стале. Розглянемо вираз

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)\,dz}{f(z) - w_0} = \nu,$$

де ν є ціле число, не менше 2, $\nu \geqslant 2$. Тому що з рівномірної збіжності функцій $f_n(z)$ до функції $f(z)$ виходить рівномірна збіжність $f'_n(z)$ до $f'(z)$ (розд. VI, § 1, п. 1), то інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'_n(z)\,dz}{f_n(z) - w_0}$$

при необмежено зростаючому n прямує до границі ν. З другого боку, за умовою, кожне рівняння $f_n(z) = w_0$ в області G або немає коренів, або має один простий корінь [у випадку кратного кореня похідна $f'_n(z)$ повинна обертатися в нуль, що суперечить взаємній однозначності відображення $w = f_n(z)$]. Отже, останній інтеграл, який має значення 0 або 1, не може при необмеженому зростанні n прямувати до числа $\nu \geqslant 2$. Одержана суперечність переконує нас у справедливості леми.

4. Доведення твердження Рімана. При доведенні теореми Рімана, формульованої на початку цього параграфа, ми можемо згідно з п. 1 припускати, що відображувана область G лежить

у крузі $|z|<1$ і містить нульову точку. Шукану функцію $w=f(z)$ ми можемо підпорядкувати умовам:

$$f(0)=0,\ f'(0)>0.$$

Умовимося через $\rho(H)$ позначати радіус найбільшого круга з центром у нульовій точці, середина якого належить цілком області H.

Ми побудуємо послідовність функцій

$$f_1(z),\ f_2(z),\ldots,\ f_n(z),\ldots, \tag{48}$$

аналітичних в області G, що задовольняють умовам $f_n(0)=0$, $f'_n(0)>0$ і таких, що кожна функція $f_n(z)$ відображає взаємно однозначно і конформно область G на якусь область H_n, яка лежить усередині одиничного круга, при чому відповідний радіус $\rho(H_n)$ зростає разом з n і прямує до границі одиниця. Інакше кажучи, область G взаємно однозначно і конформно відображається за допомогою функції $f_n(z)$ на якусь область H_n, яка при достатньо великому n як завгодно близько підходить до одиничного круга.

За перший елемент послідовності (48) приймемо функцію $f_1(z)=\varphi_{\rho_0}(z)$ (п. 2), де $\rho_0=\rho(G)$, яка відобразить область G взаємно однозначно і конформно на якусь область H_1, що належить одиничному кругові, при чому $\rho_1=\rho(H_1)$ буде більше, ніж $\rho_0 q(\rho_0)$ (п. 2). Прикладаючи до області H_1 перетворення за допомогою функції $\varphi_{\rho_1}(z)$, ми одержимо область H_2 за радіусом $\rho_2>\rho_1 q(\rho_1)>\rho_1$, де $\rho_2=\rho(H_2)$. Очевидно, функція $f_2(z)=\varphi_{\rho_1}[\varphi_{\rho_0}(z)]$ буде давати взаємно однозначне і конформне відображення області G на область H_2. Продовжуючи цей процес ітерації функцій φ_{ρ_n} далі і позначаючи взагалі через ρ_n радіус області H_n, ми одержимо функцію $f_n(z)=\varphi_{\rho_{n-1}}[f_{n-1}(z)]$, яка буде взаємно однозначно і конформно відображати первісну область G на область H_n радіуса ρ_n, при чому $\rho_n>\rho_{n-1}q(\rho_{n-1})>\rho_{n-1}$. Залишається показати, що $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=1$.

Припустимо, навпаки, що $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\mu<1$. Виконуючи перехід до границі в нерівності: $\rho_n>\rho_{n-1}q(\rho_{n-1})$, одержимо $\mu\geqslant\mu q(\mu)$. Останнє неможливе, тому що $q(\mu)>1$ при $\mu<1$. Очевидно, побудовані функції $f_n(z)$ задовольняють умовам: $f_n(0)=0$, $f'_n(0)>0$, тому що функції φ_{ρ_n} цим умовам задовольняють.

Тепер покажемо, що послідовність функцій $f_n(z)$ при необмеженому зростанні n збігається до шуканої функції відображення $f(z)$. Для цього розглянемо відношення $\frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)}$. Ця функція є аналітична і відмінна від нуля в області G. Таким чином її модуль в якій завгодно точці z області G розміщений між мінімумом і максимумом її модуля на границі, звідки нерівність:

$$\rho_{n+p} < \left| \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} \right| < \frac{1}{\rho_n}, \tag{49}$$

яка виконується для точок z області G. Отже, рівномірно в області G буде:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} \right| = 1, \tag{50}$$

тому що $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1$.

Помітивши, що відношення $\frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)}$ при $z=0$ має дійсне додатне значення, розглянемо функцію

$$F_n(z) = \ln \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} = \ln \left| \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} \right| + i\psi.$$

В наслідок (50) дійсні частини функцій $F_n(z)$ збігаються рівномірно в усій області G до нуля, тоді як у нульовій точці буде:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(0) = \lim_{n\to\infty} \ln \left| \frac{f_{n+p}(0)}{f_n(0)} \right| = 0.$$

Прикладаючи до послідовності функцій $F_n(z)$ твердження з розд. V, § 2, п. 8, ми робимо висновок, що ця послідовність збігається до нуля рівномірно в кожній замкнутій області, яка належить G, тобто $\lim \frac{f_{n+p}(z)}{f_n(z)} = 1$, звідки випливає: $\lim\limits_{n\to\infty} [f_{n+p}(z) - f_n(z)] = 0$. Таким чином послідовність функцій $f_n(z)$ збігається рівномірно в кожній замкнутій області, що належить G, до граничної функції $f(z)$, яка буде за теоремою Вейєрштрасса (розд. VI, § 1, п. 1) аналітичною в області G. Тому що $f_n(0)=0$, $f_n'(0)>0$, то, очевидно, гранична функція $f(z)$ задовольняє умовам: $f(0)=0$, $f'(0) \geqslant 0$.

Примушуючи в нерівності (49) p необмежено зростати при n сталому, одержимо в границі:

$$1 \leqslant \left| \frac{f(z)}{f_n(z)} \right| \leqslant \frac{1}{\rho}.$$

Тому що $|f_n(z)|$ при достатньо великому n і в достатній близькості від границі області G довільно мало відрізняється від одиниці, а $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1$, то з останньої нерівності випливає: в достатній близькості від границі області G модуль функції $f(z)$ довільно мало відрізняється від одиниці. Отже, функція $f(z)$ не є стале, тому що $f(0)=0$. Таким чином за основною лемою п. 3 ця функція $f(z)$ відображає область G взаємно однозначно на якусь область T, звідки, зокрема, випливає, що $f'(0)$ строго більше нуля. Ця область T лежить цілком в одиничному крузі, тому з нерівностей $|f_n(z)| < 1$ виходить $|f(z)| \leqslant 1$. Пригадавши, нарешті, що в достатній близькості від границі області G модуль функції $f(z)$ як завгодно близький до одиниці, ми робимо висновок, що об-

ласть T є одиничний круг. Таким чином твердження Рімана доведене.

§ 7. Відповідність границь при конформному відображенні

При доведенні теореми Рімана про конформне відображення однозв'язної області G на середину одиничного круга ми залишали без розгляду граничні точки області G і точки одиничного кола. Нехай $w=f(z)$ є функція, що виконує взаємно однозначне і конформне відображення області G на середину одиничного круга $|w|<1$. Умовимося говорити, що точці P границі області G відповідає певна точка Q кола $|w|=1$, якщо при якому завгодно прямуванні точки z до граничної точки P відображена точка w буде завжди прямувати до точки Q кола. Якщо кожній граничній точці області G відповідає у зазначеному вище розумінні своя певна точка на колі $|w|=1$, то ми скажемо, що границя області G однозначно відображається на коло $|w|=1$. Нарешті, ми назвемо відповідність границі області G до кола $|w|=1$ взаємно однозначною, якщо не тільки кожній точці P границі області G відповідає одна точка Q на колі, але й, навпаки, кожній точці Q цього кола відповідає одна точка P на границі області G. Ця відповідність границь області G і круга називається, зверх того, неперервною, коли двом нескінченно близьким точкам на одній границі відповідають дві нескінченно близькі точки на другій.

Ми покажемо, що відображаюча функція $f(z)$ Рімана виконує разом з тим взаємно однозначне і неперервне відображення границь областей G і одиничного круга, якщо тільки на границю області G ми накладемо якесь обмеження дуже загального характеру. Ця умова, що накладається на границю області G, не може бути відкинута, тому що вона випливає з самого поставлення задачі. Справді, припустити, що при взаємно однозначному і конформному відображенні однозв'язної області G на коло одиничного круга їх границі відображаються взаємно однозначно і неперервно,— можна тільки в тому випадку, коли границя області G є взаємно однозначний і неперервний образ кола, тобто лінія в розумінні Жордана.

Отже, необхідною умовою для того, щоб при взаємно однозначному і конформному перетворенні області G на круг $|w|<1$ границя області G і коло $|w|=1$ відображались взаємно однозначно і неперервно, є факт приналежності границі області G до класу ліній Жордана.

Визначним є те, що ця умова і достатня, тобто справедлива така загальна теорема: нехай G є область площини z, обмежена лінією Жордана S; припустимо, що функція $w=f(z)$ відображає взаємно однозначно і конформно цю область на середину одиничного круга площини w з колом Σ. *Тоді за допомогою тієї ж функції $w=f(z)$ границі S і Σ перетворюються одна на одну*

взаємно однозначно і неперервно. В цьому параграфі ми дамо доведення цього загального твердження.

1. Поставлення задачі. Насамперед зазначимо, що з факту взаємно однозначної відповідності границь S і Σ випливає вже рівномірна неперервність функцій $f(z)$ в області G і її оберненої функції в крузі $|w|<1$, а значить, і взаємна неперервність відповідності цих границь.

Справді, припустивши, що функція $f(z)$ не є рівномірно неперервною в області G, ми установимо, що якійсь граничній точці P області G будуть відповідати принаймні дві різні точки Q'_1 і Q'_2 на колі $|w|=1$. Прикладаючи цей результат до оберненої функції, ми переконаємося в справедливості висловленого положення. Отже, припустимо, що $f(z)$ не є рівномірно неперервною функцією в області G. В цьому випадку в області G існує послідовність пар точок z'_n, z''_n $(n=1, 2, \ldots)$ таких, що $\lim\limits_{n\to\infty}|z'_n-z''_n|=0$, тоді як віддаль

$$|w'_n-w''_n|=|f(z'_n)-f(z''_n)|$$

між відповідними відображеними точками лишається весь час більшою від сталого додатного числа α. В наслідок твердження Больцано—Вейєрштрасса про граничну точку (розд. 1, § 2, п. 4) ми можемо (випускаючи належні пари точок) прийняти, що ці пари точок z'_n, z''_n мають єдину граничну точку P, тоді як їх точки відображення w'_n, w''_n мають дві граничні точки Q' і Q'', віддаль яких повинна бути не менша, ніж α. Ці граничні точки P і Q', Q'' повинні лежати відповідно на границях S і Σ, тому що функція $f(z)$ в достатньо малому околі всякої внутрішньої точки області G є рівномірно неперервна.

Отже, ми знаємо, що з взаємної однозначності відповідності границь S і Σ виходить і взаємна неперервність цієї відповідності, тому що функція $f(z)$ і їй обернена будуть рівномірно неперервні у відповідних областях. Навпаки, якщо функція $f(z)$ разом з своєю оберненою рівномірно неперервні відповідно в областях G і $|w|<1$, то, очевидно, відображення границь S і Σ буде взаємно однозначним і взаємно неперервним.

Таким чином геометричне поставлення задачі про взаємно однозначну і неперервну відповідність границь S і Σ, зроблене на початку цього параграфа, еквівалентне такому аналітичному поставленню: довести, що *функція $w=f(z)$ рівномірно неперервна в області G, а її обернена — в області $|w|<1$.*

2. Доведення твердження про відповідність границь. Щоб довести теорему, сформульовану на початку цього параграфа, ми згідно з п. 1 повинні переконатися в рівномірній неперервності функції $f(z)$ в області G і її оберненої всередині одиничного круга. Для цього, припустивши, що $f(z)$ не є рівномірно неперервна функція в області G, ми повинні будемо прийти до суперечності. Як виходить з п. 1, при такому припущенні на границі області G, лінії Жордана S, існує точка P, якій відпо-

відають на колі $|w|=1$ дві різні точки Q' і Q'', віддалені одна від одної на віддаль, не меншу α. Відзначимо на рис. 134 ці точки, а також точки z'_n, z''_n, що прямують до точки P, і їм відповідні точки w'_n і w''_n, що мають границями Q' і Q'' Віддаль між точками w'_n і w''_n весь час більша α.

Приймаючи точку P за полюс, заведемо полярні координати r і θ і з їх допомогою визначимо належну точці P послідовність одна в одну вкладених однозв'язних областей K_r, що лежать в G, таким чином: довільно вибрану сталу точку P_0 області G (наприклад точку $z=0$) сполучимо неперервною кривою L, що лежить в G, з точкою P. Очевидно, ця крива L, що іде від P_0 до P, буде перетинати коло радіуса r з центром у точці P, якщо тільки $r<P_0P$. Ідучи по кривій L в напрямі від P_0 до P, ми зустрінемо це коло, взагалі кажучи, кілька разів (може бути, нескінченне число разів), відзначимо останню точку зустрічі кривої L з колом радіуса r і, виходячи з цієї точки, відзначимо по обидві сторони від неї дугу кола до першої точки зустрічі цієї дуги з границею S області G. Позначимо через K_r частину області G, обмежену цією дугою радіуса r і тією частиною границі S, на якій лежить точка P (рис. 134). Очевидно, при зменшенні r область K_r стягається і при прямуванні r до нуля K_r прямує до точки P.

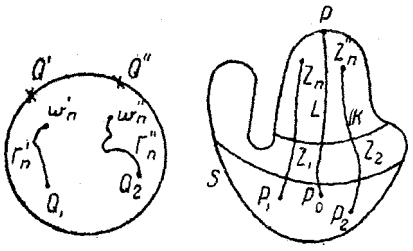

Рис. 134

Зазначимо, крім того, що яке б не було ε, $\varepsilon<P_0P$, точки z'_n і z''_n повинні бути, починаючи з достатньо великого n, внутрішніми точками області K (рис. 134). Нехай Q_1 і Q_2 — довільно вибрані сталі точки всередині одиничного круга T, а P_1 і P_2 — їм відповідні точки в області G. Сполучимо точку Q_1 з w'_n, Q_2 з w''_n за допомогою ліній Γ'_n і Γ''_n так, щоб обидві ці криві містилися на віддалі одна від одної не меншій, ніж α. Нехай R — таке число, що точки P_1 і P_2 лежать поза областю K_R; тоді відображення ліній Γ'_n і Γ''_n перетинають дугу кола, яка входить у границю області K_r, при кожному $r<R$, якщо n достатньо велике, бо вони сполучають точки P_1 і P_2 відповідно з z'_n і z''_n.

Таким чином, на дузі кола границі області K_r знайдуться дві точки z_1 і z_2 такі, що буде:

$$\alpha\leqslant|f(z_2)-f(z_1)|=\left|\int_{z_1}^{z_2}f'(z)\,dz\right|\leqslant\int|f'(z)|\,r\,d\theta, \qquad (51)$$

де інтеграл поширений на відповідну частину z_1z_2 дуги кола радіуса r.

В аналізі важливе значення має так звана нерівність Шварца, з якої ми повинні зараз скористуватися. Ця нерівність полягає

ось у чому: нехай g і h — дві дійсні функції, визначені в одномірній або многомірній області D, і $d\omega$ — елемент інтеграції D; тоді маємо:

$$\left(\int gh\,d\omega\right)^2 \leqslant \int g^2 d\omega \cdot \int h^2\,d\omega.$$

Ця нерівність негайно випливає з зауваження, що квадратний тричлен відносно дійсного параметра λ, а саме,

$$\int (\lambda g + h)^2\,d\omega = \lambda^2 \int g^2\,d\omega + 2\lambda \int gh\,d\omega + \int h^2\,d\omega$$

не може мати від'ємних значень.

Застосовуючи нерівність Шварца до інтеграла правої частини (51), взявши при цьому $g = |f'(z)|\,r$, $h = 1$, одержимо:

$$\alpha^2 \leqslant \left(\int |f'(z)|\,r\,d\theta\right)^2 \leqslant 2\pi \int |f'(z)|^2 r^2 d\theta,$$

або

$$\frac{\alpha^2}{r} \leqslant 2\pi \int |f'(z)|^2\,r\,d\theta.$$

Інтегруючи останню нерівність відносно r в границях від $r = \varepsilon$ до $r = R$, знайдемо:

$$\alpha^2 \ln\frac{R}{\varepsilon} \leqslant 2\pi \int\int |f'(z)|^2\,r\,dr\,d\theta < 2\pi \int\int_{K_R} |f'(z)|^2\,r\,dr\,d\theta,$$

де останній інтеграл поширений на всю область K_R і представляє площу тієї області, яка є відображенням K_R. Оскільки, очевидно, маємо:

$$\int\int |f'(z)|^2\,r\,dr\,d\theta < \pi,$$

тому що π є площа всього одиничного круга, то остаточно одержуємо:

$$\alpha^2 \ln\frac{R}{\varepsilon} < 2\pi^2.$$

Ця нерівність привела нас до суперечності, тому що при $\varepsilon \to 0$ ліва її частина необмежено зростає. Одержана суперечність і доводить рівномірну неперервність функції $f(z)$ в області G. Тому що аналогічний розгляд може бути проведений для оберненої функції, то й обернена функція буде рівномірно неперервною в області T.

Інакше кажучи, за п. 1 ми показали, що при взаємно однозначному і конформному відображенні області G, обмеженої лінією Жордана, на середину одиничного круга T границі S і Σ областей G і T відображаються взаємно однозначно і неперервно.

§ 8. Відображення на верхню півплощину прямокутника і довільного многокутника

1. Прямокутник. Для того, щоб відобразити прямокутник на верхню півплощину, нам треба розглянути еліптичний інтеграл вигляду:

$$\zeta = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{52}$$

де k — дійсне число, яке задовольняє умову $0 \leqslant k < 1$. З цієї формули інтеграла видно, наприклад, що коли $k=0$, то ми одержимо: $\zeta = \arcsin z$, або $z = \sin\zeta$. Будемо припускати, що верхня границя z еліптичного інтеграла є комплексне число, що лежить у верхній півплощині. Інакше кажучи, ми будемо інтегрувати по якійсь путі, що лежить у верхній півплощині комплексного змінного z і виходить з початку координат. Тоді наш інтеграл являтиме собою функцію комплексного змінного z, яку ми позначимо через $\zeta(z)$.

Легко бачити, далі, що підінтегральна функція має такі чотири особливі точки, які всі лежать на дійсній осі:

$$t = +1, \qquad t = -1,$$
$$t = \frac{1}{k}, \qquad t = -\frac{1}{k}.$$

Тому що z ми розглядаємо у верхній півплощині, то при всякій путі інтеграції ми не зустрінемо ні однієї особливої точки. Звідси виходить, що результат інтегрування не буде залежати від путі.

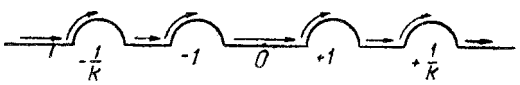

Рис. 135

Отже, $\zeta(z)$ є голоморфна функція z, коли z лежить у верхній півплощині. Крім того, ясно, що те ж саме буде і для дійсних значень z, крім зазначених особливих точок. Ці особливі точки, очевидно, є критичними точками підінтегральної функції.

Ми зараз побачимо, що коли z змінюється у верхній півплощині, то ζ буде змінюватися всередині якогось прямокутника. Для того щоб виявити це, природно примусити точку z описати дійсну вісь і дивитись при цьому, яку путь буде описувати ζ. При цьому перебігові точка z чотири рази перейде через особливі точки. Ми їх можемо виключити, описуючи навколо них півкола радіуса ρ і примушуючи z рухатися по путі, будова якої ясна з рис. 135. Зразу ж ми можемо помітити, що радіус ρ побудованих півкіл можна зменшувати до нуля ($\rho \to 0$), тому що підінтегральна функція при цьому стає нескінченно великою величиною порядку $\frac{1}{2}$.

Отже, припустимо, що точка z виходить з нуля і рухається вправо по дійсній осі. Коли z міститься в проміжку $0 \leqslant z < 1$, то підінтегральна функція весь час лишається додатним дійсним числом. Через це, коли z, залишаючись у зазначеному проміжку, зростає від нуля і прямує до одиниці, то ζ збільшується від нуля і прямує до значення

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Як ми вже зазначили, цей інтеграл має певне скінченне значення. Позначимо його через $\frac{\omega_1}{2}$. Отже,

$$\frac{\omega_1}{2}=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{53}$$

Далі, точка z пройде по півколу, описаному навколо одиниці. Поглянемо, що станеться з ζ. У підінтегральній функції під знаком радикала є такі множники:

$$1-t,\ 1+t,\ 1-kt,\ 1+kt.$$

Поглянемо, що станеться з аргументами цих факторів, коли точка z опише півколо навколо одиниці. Ясно, що аргументи

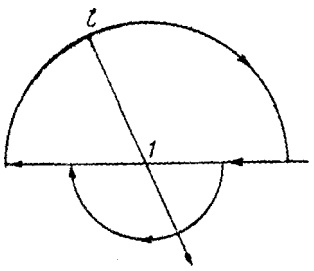

Рис. 136

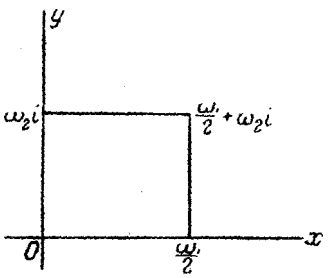

Рис. 137

трьох останніх множників у результаті такої операції не зміняться. Але аргумент першого множника зменшиться при цьому на π, що ясно з рис. 136, тому що $\arg(1-t)$ змінюється від 0 до $-\pi$. Звідси виходить, що аргумент радикала зменшиться на $\frac{\pi}{2}$, а аргумент усієї підінтегральної функції збільшиться на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 137). Через це функцію ζ після обходу півкола можна записати так:

$$\zeta=\frac{\omega_1}{2}+i\int_1^z \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}, \tag{54}$$

де z міститься у проміжку

$$1\leqslant z<\frac{1}{k}.$$

Коли z збільшується в тількищо зазначеному проміжку, то інтеграл формули (54) теж збільшується і при $z\to\frac{1}{k}$ прямує до визначеної границі, яку ми позначимо через ω_2, тобто візьмемо:

$$\omega_2 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \tag{55}$$

Звідси виходить, що коли $z \to \frac{1}{k}$, то $\zeta \to \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$.

Далі, коли точка z описує півколо навколо точки $\frac{1}{k}$, то подібно до попереднього робимо висновок, що точка ζ повинна повернутися на кут $\frac{\pi}{2}$ (рис. 137). Отже, після обходу змінним z нашого півкола функція z запишеться так:

$$\zeta = \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2 - \int_{\frac{1}{k}}^{z} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}. \tag{56}$$

Коли z змінюється від $\frac{1}{k}$ до ∞, то останній інтеграл весь час збільшується, а значить, дійсна частина функції ζ весь час спадає. В границі, коли $z = \infty$, останній інтеграл можна записати так:

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}.$$

Легко бачити, що цей інтеграл дорівнює $\frac{\omega_1}{2}$. Дійсно, зробимо підставлення $t = \frac{1}{k\tau}$, де τ — нове змінне. Тоді останній інтеграл набере вигляду:

$$\int_0^1 \frac{d\tau}{k\tau^2 \sqrt{\left(\frac{1}{k^2\tau^2}-1\right)\left(\frac{1}{\tau^2}-1\right)}}.$$

Підводячи в підінтегральній функції останнього інтеграла $k\tau^2$ під знак радикала, ми й переконуємося у справедливості доводжуваного твердження.

Таким чином, коли $z \to \infty$, то $\zeta \to \omega_2 i$ (рис. 137); при зміні z від $-\infty$ до $-\frac{1}{k}$ (рис. 135) точка ζ, очевидно, прийде з $i\omega_2$ в точку $-\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$. Коли z буде рухатися від $-\frac{1}{k}$ до -1, точка ζ опише прямолінійний відрізок від $-\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$ до $-\frac{\omega_1}{2}$, і, нарешті, коли z змінюється від -1 до 0, то функція ζ змінюється по дійсній осі від $-\frac{\omega_1}{2}$ до 0 (рис. 138).

Таким чином ми бачимо, що за допомогою еліптичного інтеграла ми можемо відобразити верхню півплощину на прямокут-

ник з сторонами, рівними ω_1 і ω_2. При цьому це відображення буде взаємно однозначне і конформне (в наслідок § 2, п. 1).

Якщо ж ми розглянемо обернену функцію $z = s(\zeta)$, то ця функція даватиме відображення середини прямокутника на верхню півплощину. Ця функція належить до класу так званих *еліптичних* функцій.

Примітка. В цьому пункті ми бачили, що за допомогою еліптичного інтеграла $\zeta = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ верхня півплощина взаємно однозначно і конформно відображається на прямокутник площини ζ, сторони якого паралельні осям координат і рівні ω_1 і ω_2, де взято:

$$\omega_1 = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$\omega_2 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

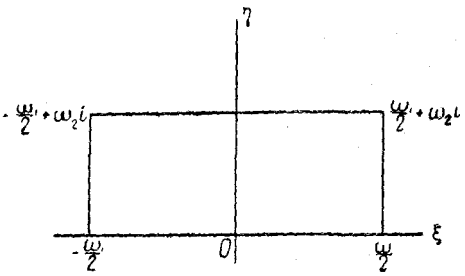

Рис. 138

Природно виникає питання: як відобразити на верхню півплощину a priori даний прямокутник? Легко бачити, що це відображення може бути виконане за допомогою функції вигляду: $A\zeta(z)+B$, де A і B — сталі. Дійсно, виберемо параметр k так, щоб $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ дорівнювало відношенню сторін даного прямокутника. Тоді функція $\zeta(z)$, що відповідає цьому значенню k, даватиме відображення верхньої півплощини на якийсь прямокутник, відношення сторін якого ω_1 і ω_2 дорівнює відношенню сторін даного прямокутника. Виконуючи перенесення і обертання, ми досягнемо того, що центри цих прямокутників зіллються, а сторони будуть паралельні. Але тому, що відношення сторін в обох прямокутниках однакові, то для їх повного суміщення досить виконати подібне перетворення відносно їх спільного центра. Останні ж елементарні перетворення (перенесення, обертання і подібна зміна) здійснюються способом належного вибору комплексних сталих A і B.

2. Еліптична функція. Щоб з'ясувати властивості заведеної нами еліптичної функції $s(\zeta)$, ми скористуємося принципом симетрії Шварца.

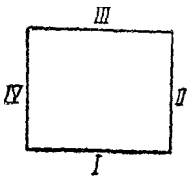

Рис. 139а

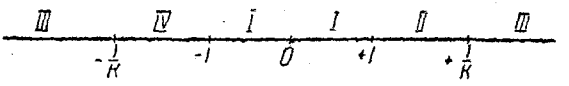

Рис. 139б

Позначимо сторони одержаного вище прямокутника через I, II, III і IV (рис. 139а). Кожній стороні цього прямокутника

відповідає якийсь відрізок на дійсній осі площини z. Позначимо їх відповідно тими ж самими римськими цифрами (рис. 139б).

Відобразимо наш прямокутник симетрично відносно сторони I. Середина нового (подвійного) прямокутника (рис. 140) відобразиться за допомогою продовження $s(\zeta)$ взаємно однозначно і конформно на площину z, розрізану по дійсній осі від 1 до ∞ і від ∞ до -1. Але можна відображати прямокутник відносно якої завгодно його сторони; ми знов одержимо відображення на всю площину z, але розрізану інакше. Продовжуючи будувати в площині ζ все нові й нові симетричні прямокутники, ми кінець-кінцем покриємо всю площину ζ сіткою таких прямокутників (рис. 141) і, значить, визначимо функцію $s(\zeta)$ у всій площині.

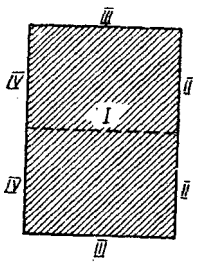

Рис. 140

Для того, щоб установити взаємно однозначну відповідність всієї площини ζ з змінним z, треба приготувати замість площини z нескінченнолисту ріманову поверхню. Ця ріманова поверхня матиме точками розгалуження $1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}, -1$, листи цієї поверхні будуть зв'язані так само, як відповідні їм прямокутники.

З попереднього легко помітити дуже важливу властивість функції $s(\zeta)$, саме, властивість двоякоперіодичності цієї функції. Візьмемо один із прямокутників площини ζ. Відобразимо його спочатку відносно сторони II, потім одержаний таким чином новий прямокутник відобразимо в свою чергу відносно сторони IV (рис. 141). Далі, візьмемо будьяку точку

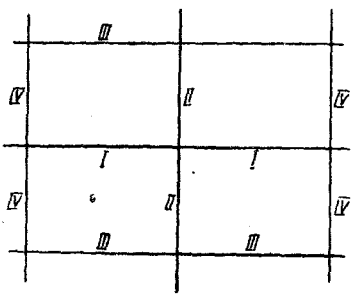

Рис. 141

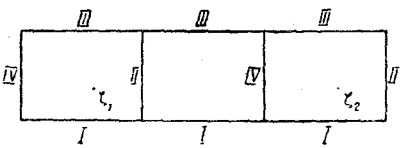

Рис. 142

ζ_1 всередині первісного прямокутника. Ця точка в результаті двократного відображення в первісному напрямі перейде в точку ζ_2. З рис. 142 ясно, що $\zeta_2 = \zeta_1 + 2\omega_1$, бо сторона I по довжині дорівнює ω_1.

Припустимо, крім того, що точці ζ_1 на площині z відповідає точка z_1, тобто $z_1 = s(\zeta_1)$. При розглянутому першому відображенні прямокутника точка z_1 перейде в симетричну відносно осі Ox точку z_1'. При другому відображенні точка z_1', переходячи в симетричне положення, очевидно, попаде в точку z_1.

Отже, ми встановили, що $s(\zeta + 2\omega_1) = s(\zeta)$. Якщо ж ми будемо відображати наш прямокутник по вертикальному напряму,

то аналогічно знайдемо, що $s(\zeta + 2\omega_2 i) = s$. Взагалі, як легко бачити, ми матимемо:

$$s(\zeta + 2k\omega_1 + 2h\omega_2 i) = s(\zeta),$$

де h і k — які завгодно цілі числа. Числа $2\omega_1$ і $2i\omega_2$ називаються періодами функції $s(\zeta)$, а сама функція $s(\zeta)$ називається *двоякоперіодичною*, або, що те ж саме, *еліптичною*.

Геометрично це значить, що для повного вивчення функції $s(\zeta)$ досить розглядати її в прямокутнику з сторонами $2\omega_1$ і $2\omega_2$ (рис. 143), включаючи ліву і верхню сторони. Очевидно, кожне своє значення функція s буде приймати в двох точках цього прямокутника „періодів" (в точках ζ_1 і ζ_2, що виходять одна з одної відображеннями вздовж сторін I і II).

Зокрема, вона має в прямокутнику періодів два прості полюси: $\omega_2 i$ і $\omega_1 + \omega_2 i$ (A і B на рис. 143). Таким чином функція $s(\zeta)$, однозначна в усій

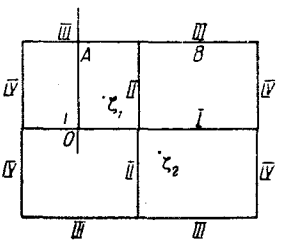

Рис. 143

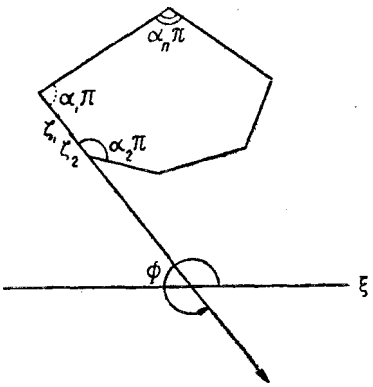

Рис. 144а

площині ζ, не має на скінченній віддалі інших особливих точок, крім полюсів. Це є мероморфна функція.

3. Многокутник. Займемося задачею більш загальною: відобразити взаємно і однозначно і конформно n-кутник на верхню півплощину. Шварц вперше розв'язав цю задачу; а проте, більш повне і точне розв'язання цієї проблеми дано було пізніше.

Отже, припустимо, що в площині змінного ζ є n-кутник (рис. 144а), внутрішні кути якого нехай будуть дорівнювати $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi, \ldots$, $\alpha_n\pi$, де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — дійсні числа, при чому кожне з них очевидно не перевищує 2. Спробуємо відобразити наш n-кутник на верхню півплощину z, при цьому так, щоб це відображення було взаємно однозначним і конформним.

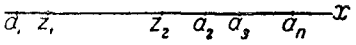

Рис. 144б

Для цього природно спробувати відобразити взаємно однозначно периметр n-кутника на дійсну вісь площини z. Якщо це зробити можна, то тоді вершинам n-кутника відповідатимуть якісь точки дійсної осі Ox. Позначимо їх відповідно через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, (рис. 144б). Спитаємо себе, який вигляд повинна мати функція, що виконує потрібне відображення.

Візьмемо будьяку сторону n-кутника і на ній дві будьякі різні точки ζ_1 і ζ_2. За припущенням цим останнім на дійсній осі площини z відповідають дві різні точки z_1 і z_2. Розглянемо, далі, різницю

$$\zeta_2 - \zeta_1 = Re^{\Phi i}.$$

Цілком ясно, що аргумент Φ цієї різниці є не що інше, як кут, створюваний з розгляданою стороною n-кутника дійсною віссю $O\xi$ площини ζ.

Крім того, ясно також, що аргумент Φ буде сталим, коли ζ_1 і ζ_2 змінюються по розгляданій стороні n-кутника, залишаючись, звичайно, в тому ж порядку. Візьмемо тепер відношення $\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{z_2 - z_1}$. Легко побачити, що аргумент цього відношення повинен залишатися сталим, поки z_1 і z_2 лежать між a_i і a_{i+1}. Коли $z_2 \to z_1$, то в границі зазначене вище відношення обернеться в похідну $\frac{d\zeta}{dz}$. Згідно з попереднім $\arg \frac{d\zeta}{dz}$ повинен залишатися сталим, поки z перебуває між a_i і a_{i+1}.

Помітивши це, ми вже легко знайдемо, який вигляд повинна

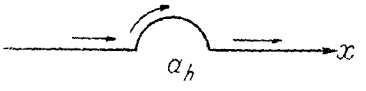

Рис. 145

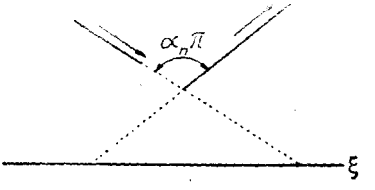

Рис. 146

мати шукана функція. Дійсно, можна написати:

$$\frac{d\zeta}{dz} = C(z - a_1)^{A_1}(z - a_2)^{A_2} \ldots (z - a_n)^{A_n}, \tag{57}$$

де A_i — дійсні числа, а C — якийсь сталий фактор. З виразу (57) ясно видно, що його аргумент сталий при всякому z, яке лежить між a_i і a_{i+1}. Отже, шукана функція ζ буде вигляду:

$$\zeta = C \int_0^z (t - a_1)^{A_1}(t - a_2)^{A_2} \ldots (t - a_n)^{A_n}\, dt + C_1. \tag{57'}$$

Нам треба визначити, чому дорівнюють $A_1, A_2 \ldots, A_n$, бо нам потрібна функція ζ, яка задовольняє тій умові, що коли z переходить через a_i, то відрізок прямої, який описує точка ζ, повертається на належний кут.

Візьмемо одну з точок $a_1, \ldots, a_h, \ldots, a_n$, наприклад, точку a_h. Навколо цієї точки опишемо півколо радіуса ρ, при чому $\rho \to 0$. Візьмемо, крім того, $z - a_h$. До переходу точки z через точку a_h, як показує рис. 145, $\arg(z - a_h) = \pi$; після переходу $\arg(z - a_h) = 0$. Значить, $\arg(z - a_h)$ при переході через a_h зменшується на π (інакше кажучи, дістає приріст $-\pi$). У вираз $\frac{d\zeta}{dz}$, $z - a_h$ входить як фактор у степені A_h. Отже, $\arg \frac{d\zeta}{dz}$ при

переході через a_h дістане приріст $-\pi A_h$. (Аргументи решти множників, очевидно, при цьому переході не зміняться).

Поглянемо, що буде відбуватися в площині ζ. З рис. 146 неважко побачити, що коли ζ переходить з однієї сторони n-кутника на другу, то вектор $\Delta\zeta = \zeta_2 - \zeta_1$ повертається на кут (тобто аргумент його дістає приріст) $\pi - \pi\alpha_h$. Щодо аргументу вектора $\Delta z = z_2 - z_1$, то такий завжди дорівнює нулеві ($z_2 > z_1$). Через це аргумент від $\frac{d\zeta}{dz} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\zeta}{\Delta z}$ дістає також приріст, що дорівнює $\pi - \pi\alpha_h$. Через це цілком ясно, що повинна мати місце нерівність:

$$\pi - \pi\alpha_h = -\pi A_h, \text{ або } A_h = \alpha_h - 1. \tag{58}$$

Значить, ζ запишеться так:

$$\zeta = C \int\limits_0^z (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + C_1. \tag{59}$$

При цьому очевидно, що

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n - 2, \tag{60}$$

бо сума всіх внутрішніх кутів n-кутника дорівнює $(n-2)\pi$.

Але ми покищо ще не переконані в тому, що коли z опише всю дійсну вісь, то ζ опише весь периметр многокутника, тобто прийде у вихідну точку. Переконаємося ж у цьому.

Візьмемо вираз (59). В підінтегральній функції сума всіх показників степенів дорівнює -2. Через це, якщо ми винесемо від кожного множника підінтегральної функції t за дужку, то одержимо підінтегральну функцію у вигляді:

$$\frac{1}{t^2} \psi(t),$$

де $\psi(t)$ означає голоморфну функцію при $t = \infty$. Такий вигляд підінтегральної функції показує нам, що коли $z \to \infty$, то ζ буде прямувати до певної границі, а це і значить, що ζ повинно вернутися в ту ж саму точку. Отже ми бачимо, що функція (59) дає відображення верхньої півплощини на многокутник, при чому відображення буде взаємно однозначне і конформне, що виходить з теореми § 2, п. 1.

Виникає супротивне питання: чи можна всякий наперед заданий многокутник відобразити на верхню півплощину? Інакше кажучи, чи можна підібрати сталі, які входять у формулу (59) так, щоб ця формула відобразила наперед заданий многокутник на верхню півплощину? Шварц дав тільки розглянуту половину розв'язання. Останнє питання було розв'язане в позитивному розумінні пізніше.

Позитивного розв'язання цієї задачі можна ждати вже з простого підрахунку числа дійсних параметрів, що входять у функ-

цію (59), і числа параметрів, потрібних для визначення n-кутника. Для того, щоб визначити n-кутник, необхідно й достатньо задати n його вершин. Отже, положення n-кутника визначається $2n$ дійсними параметрами. Підрахуємо число параметрів, що входять у функцію (59). Поперше, ми маємо $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; але вони зв'язані умовою:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = n - 2.$$

Значить незалежних параметрів буде $n - 1$. Далі, входять точки дійсної осі $a_1, a_2, \ldots, a_n$, що дає нам n нових параметрів. Комплексний фактор C дає два параметри; точно так само C_1. Отже, в функцію (59) входять $n-1+n+2+2=2n+3$ дійсних параметрів.

Але три точки дійсної осі, наприклад, a_1, a_2, a_3, ми можемо взяти цілком довільно, тому що за допомогою лінійного підставлення ми можемо верхню півплощину перевести саму в себе, при чому три точки дійсної осі переводяться в які завгодно наперед задані три точки тієї ж осі. Далі, можна було б показати, що інтеграл, який входить у формулу (59), при тількищо згаданому лінійному перетворенні не змінюється. Отже, у нас залишається $2n$ параметрів. Таким чином число істотних дійсних параметрів, що входять у формулу Шварца, збігається з числом дійсних сталих, які визначають положення заданого n-кутника. Це дає підставу надіятися, що кожному многокутникові відповідає своє розв'язання за формулою Шварца.

Для строгого обгрунтування цього факту зазначимо, що за теоремою Рімана існує функція $w = f(z)$, яка дає конформне відображення верхньої півплощини на даний многокутник P. Точку дійсної осі, яка відповідає в цьому відображенні вершині многокутника з кутом $\alpha_i \pi$, позначимо через a_i.

З другого боку, розглянемо функцію

$$\zeta = \psi(z) = \int_0^z (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt,$$

яка переводить верхню z-півплощину на якийсь многокутник P' площини ζ, при чому точка a_i відповідає вершині кута $\alpha_i \pi$ цього многокутника. Тим самим установлюється конформне відображення многокутника P на многокутник P', якщо вважати за відповідні точки многокутників P і P' ті, які є образами однієї й тієї ж точки z-півплощини. Аналітично цю відповідність дає функція $w = F(\zeta)$, яку дістаємо способом виключення z з рівностей $w = f(z)$ і $\zeta = \psi(z)$. Залишається довести, що $F(\zeta) = C\zeta + C_1$.

Для доведення дослідимо функцію $w = F(\zeta)$ поблизу вершин многокутника P'. Позначимо через ζ_k і $w_k = F(\zeta_k)$ відповідні вершини многокутників P' і P і заведемо замість ζ і w допоміжні змінні t і s за допомогою співвідношень

$$\zeta - \zeta_k = t^{\alpha_k}, \quad w - w_k = s^{\alpha_k}. \tag{61}$$

Очевидно, за допомогою цих операцій околи вершин ζ_k і w_k, які належать многокутникам P' і P, відображаються на області Q' і Q площин t і s, границі яких містять прямолінійні відрізки, що проходять через початок координат. Відображення $w = F(\zeta)$ і формули (61) визначають перетворення області Q' в область Q:

$$s = (w - w_k)^{\frac{1}{\alpha_k}} = [F(\zeta) - F(\zeta_k)]^{\frac{1}{\alpha_k}} = [F(\zeta_k + t^{\alpha_k}) - F(\zeta_k)]^{\frac{1}{\alpha_k}}.$$

Праву частину останньої рівності позначимо через $g(t)$, тобто візьмемо $s = g(t)$:

$$g(t) = [F(\zeta_k + t^{\alpha_k}) - F(\zeta_k)]^{\frac{1}{\alpha_k}}.$$

В наслідок принципу симетрії відображення області Q' на область Q, яке встановлюється за допомогою функції $s = g(t)$, може бути поширене на повні околи нульових точок площин t і s, а значить, $g(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$, де $a_1 \neq 0$, тому що відповідність між t і s взаємно однозначна.

За допомогою функції $g(t)$ відповідність між ζ і w може бути записана так:

$$w = w_k + s^{\alpha_k} = w_k + [g(t)]^{\alpha_k},$$

де $t = (\zeta - \zeta_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}$.

Тепер легко дослідити поведінку похідної $\frac{dw}{d\zeta}$ в околі вершини ζ_k. Справді:

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{d\zeta} = \alpha_k [g(t)]^{\alpha_k - 1} \cdot g'(t) \frac{1}{\alpha_k} (\zeta - \zeta_k)^{\frac{1}{\alpha_k} - 1},$$

або

$$\frac{dw}{d\zeta} = \left(\frac{g(t)}{t}\right)^{\alpha_k - 1} \cdot g'(t) = (a_1 + a_2 t + \ldots)^{\alpha_k - 1} (a_1 + 2a_2 t + \ldots).$$

Остання рівність нам показує, що $\frac{dw}{d\zeta}$, розглядана як функція t, неперервна в точці $t = 0$, і, значить, $\frac{dw}{d\zeta}$ залишається неперервною, коли точка ζ підходить до вершини ζ_k, залишаючись усередині многокутника P'. Таким чином функція $\frac{dw}{d\zeta}$, аналітична всередині многокутника P' і на його сторонах (в наслідок принципу симетрії), буде неперервною в усій замкнутій області P'. Крім того, $\frac{dw}{d\zeta}$ ніде не обертається в нуль.

Розглянемо функцію $\varphi(\zeta) = \ln \frac{dw}{d\zeta} = \ln \left|\frac{dw}{d\zeta}\right| + i \arg \frac{dw}{d\zeta}$, аналітичну в області P', неперервну в $\bar{P}'$. Коефіцієнт при уявній частині цієї функції зберігає стале значення на контурі многокутника P', тому що в точках сторін многокутника P' $\arg \frac{dw}{d\zeta}$ означає кут повороту відповідної сторони при відображенні на P (ці

кути для всіх сторін однакові в наслідок попарної рівності кутів многокутників P' і P).

Отже, гармонічна функція $\arg \frac{dw}{d\zeta}$, будучи сталою на контурі, є стале. Спряжена їй функція $\ln \left|\frac{dw}{d\zeta}\right|$, як це виходить з умов Коші—Рімана, буде також сталою, а тому $\varphi(\zeta) = \text{const}$, звідки випливає, що

$$\frac{dw}{d\zeta} = C, \text{ або } w = C\zeta + C_1,$$

що й потрібно було довести.

4. Трикутник. Ця остання задача розв'язується безпосередньо в найпростішому випадку, а саме, коли ми маємо трикутник.

Отже припустимо, що нам дано трикутник з кутами, рівними $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$. Ясно, що $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Припустимо, далі, що ми хочемо цей трикутник відобразити на верхню півплощину. Візьмемо формулу (59); в розгляданому випадку вона набере вигляду:

$$\zeta = C \int_{z_0}^{z} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} (t - a_3)^{\alpha_3 - 1} dt + C_2, \tag{62}$$

де a_1, a_2 і a_3 — дійсні числа. Займемося спрощенням формули (62); для цього ми візьмемо для a_i такі значення: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$.

Для того, щоб a_3 перевести в нескінченність, треба, як легко бачити, в підінтегральну функцію завести нове змінне τ таким чином:

$$t = -\frac{1}{\tau} + a_3.$$

Формула (62) набере вигляду:

$$\zeta = C \int_{\tau_0}^{z} \left(-\frac{1}{\tau} + a_3 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1} \cdot \left(-\frac{1}{\tau} + a_3 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1} \times$$
$$\times \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_3 - 1} \frac{d\tau}{\tau^2} + C_2. \tag{62'}$$

Виводячи під знаком інтеграла $\frac{1}{\tau}$ за дужки і помічаючи, що

$$\alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 1 + \alpha_3 - 1 = -2,$$

матимемо:

$$\zeta = C' \int_{\tau_0}^{z} (\tau - b_1)^{\alpha_1 - 1} (\tau - b_2)^{\alpha_2 - 1} d\tau + C_2. \tag{62''}$$

Візьмемо лінійне підставлення $\tau = a\tau' + b$, де a і b добираємо так, що коли $\tau = b_1$, то $\tau' = 0$, і коли $\tau = b_2$, то $\tau' = 1$. Інтеграл формули (62″) напишеться так:

$$\zeta = C_1 \int_{\tau_0}^{z} \tau^{\alpha_1 - 1} (1 - \tau)^{\alpha_2 - 1} d\tau + C_2. \tag{63}$$

Ось до якої канонічної форми ми звели інтеграл (62). Тут без доведення видно, що функція (63) даватиме відображення верхньої півплощини z на який завгодно зарані даний трикутник. Справді, функція (63), в якій ми взяли $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, при належних значеннях α_1 і α_2 дає відображення верхньої півплощини на трикутник, подібний даному.

Через це, щоб одержати відображення верхньої півплощини на наш трикутник, залишається перетворити трикутник, одержуваний за допомогою функції (63), в наш. Цього легко добитися перенесенням вершини одержуваного трикутника в одну з вершин даного трикутника обертанням і, нарешті, подібною зміною, що зводиться до належного добору фактора C_1 і аддитивної сталої C_2 у формулі (63).

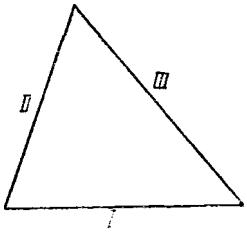

Рис. 147а

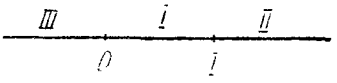

Рис. 147б

Функція $\zeta(z)$, визначувана формулою (63) (при $C_1 = 1$ і $C_2 = 0$), дає взаємно однозначне і конформне відображення верхньої півплощини z на середину трикутника, який лежить у площині ζ. Вона визначена, поки z лежить у верхній півплощині.

Прямолінійний відрізок I площини ζ (рис. 147а) переходить у прямолінійний же відрізок I дійсної осі площини z (рис. 147б). Отже, можна прикласти принцип симетрії. Прикладемо ж його; відображаючи наш трикутник відносно, наприклад, сторони II, одержимо якийсь чотирикутник (рис. 148б). Таким чином розрізана зазначеним на рис. 148а способом площина z відобразиться на одержаний вище чотирикутник, який міститься в площині ζ (рис. 148б).

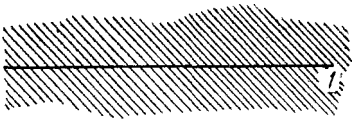

Рис. 148а

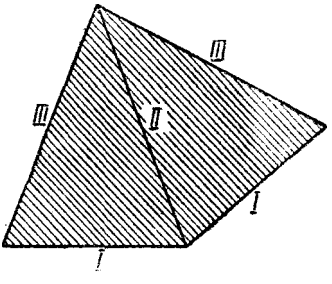

Рис. 148б

Принцип симетрії Шварца ми можемо прикласти далі, при чому відображення кожного трикутника, очевидно, можна робити відносно якої завгодно з його сторін. В результаті вся площина ζ покриється сіткою трикутників, що, взагалі кажучи, перекриваються. Для того, щоб одержати взаємно однозначну відповід-

ність площини ζ з змінним z, треба, замість площини z, взяти нескінченнолисту ріманову поверхню; при цьому, звичайно, зазначена взаємно однозначна відповідність буде можлива в тому випадку і тільки в тому, якщо трикутники на площині ζ не перекриваються.

Які ж будуть необхідні й достатні умови для того, щоб трикутники не перекривались?

З рис. 149 ясно, що для цього, наприклад, необхідно, щоб $\frac{2\pi}{2\alpha_1\pi}$ дорівнювало цілому числу. Точно так само повинно бути для других кутів.

Далі ясно, що цього й цілком достатньо. Отже, шукані умови можна записати таким чином:

$$\frac{1}{\alpha_1}=r_1,\quad \frac{1}{\alpha_2}=r_2,\quad \frac{1}{\alpha_3}=r_3,$$

де r_1, r_2, r_3 — цілі числа.

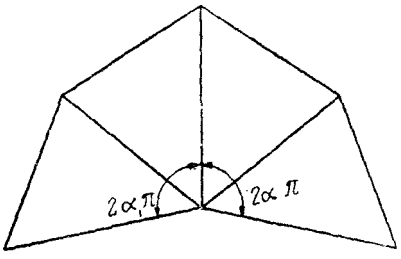

Рис. 149

Отже, тільки в цьому випадку функцію $\zeta=\zeta(z)$ можна обернути в однозначну функцію $z=z(\zeta)$, яка й буде давати взаємно однозначне відображення площини ζ на ріманову поверхню. Але ми бачили, що $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$. Отже,

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=1. \tag{64}$$

Останнє співвідношення являє собою діофантове рівняння; розв'язавши його, ми знайдемо всі можливі значення для r_1, r_2, r_3. Можна вважати, що

$$r_1\leqslant r_2\leqslant r_3.$$

Очевидно, що r_1 в такому випадку не може бути більше 3. Далі, легко бачити, що всі можливі випадки запишуться у вигляді такої таблиці:

r_1	3	2	2	2	1
r_2	3	4	2	3	∞
r_3	3	4	∞	6	∞

(65)

Які ж будуть трикутники при таких значеннях r? Візьмемо п'ятий стовпчик табл. 65. В цьому випадку трикутник має кути π, 0, 0. Це буде смуга. Формула (63) запишеться так (для краткості вважаємо $C_1=1$, $C_2=0$):

$$\zeta = \int_0^z \tau^{\alpha_1 - 1}(1-\tau)^{\alpha_2 - 1}\,d\tau = \int_0^z \frac{d\tau}{1-\tau} = \ln\frac{1}{1-z}.$$

Вийшла вже знайома нам функція.

Візьмемо третій стовпчик табл. (65). В цьому випадку трикутник матиме кути $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ і 0, тобто ми матимемо півсмугу. Формула (63) для даного випадку набере вигляду:

$$\zeta = \int_0^z \tau^{-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}\,d\tau = \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(1-t)}} = \arcsin(2z-1),$$

або $2z - 1 = \sin\zeta$. Одержимо знову елементарну функцію, яка дає відображення півсмуги на верхню півплощину.

Залишається розглянути три останні випадки, які дає табл. (65). Легко бачити, що це будуть:

1-й випадок — рівносторонній трикутник. Неважко бачити, що формула (63) в даному випадку набере вигляду:

$$\zeta = \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt[3]{\tau^2(1-\tau)^2}}.$$

2-й випадок — рівнобедрений прямокутний трикутник. Тут формула (63) напишеться так:

$$\zeta = \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt[4]{\tau^2(1-\tau)^3}}.$$

3-й і останній випадок — прямокутний трикутник з кутами в 30° і 60°. Формула (63) нам дасть:

$$\zeta = \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt[6]{\tau^3(1-\tau)^4}}.$$

Отже, ми вичерпали всі можливі випадки. Як у трьох останніх випадках, так і в попередніх двох елементарних, функція $z = z(\zeta)$ буде визначена в усій площині змінного ζ і при тому буде однозначною функцією.

Читачеві рекомендується, діючи аналогічно п. 2, довести двояку періодичність функції $z(\zeta)$ в кожному з трьох останніх випадків, а також виявити належність їх до класу мероморфних функцій.

5. Відображення зовнішньої області многокутника на верхню півплощину. В п. 3 було розглянуто задачу про взаємне однозначне і конформне відображення середини довільного многокутника на верхню півплощину (рис. 150). Ця задача розв'язу-

ється за допомогою формули (59) Шварца, яку можна переписати в такому вигляді:

$$\zeta = C\int_0^z (t-a_1)^{-\mu_1}(t-a_2)^{-\mu_2}\ldots(t-a_n)^{-\mu_n}\,dt + C_1, \qquad (66)$$

де $\mu_i\pi$ означають величини кутів між векторами-сторонами, взяті з належними знаками (рис. 150). Очевидно, $\Sigma\mu = 2$.

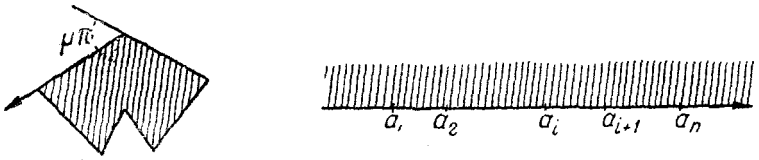

Рис. 150

Тепер ми розглянемо задачу про взаємно однозначне і конформне відображення зовнішньої області (яка містить нескінченно віддалену точку) многокутника на верхню півплощину (рис. 151). Для цього, діючи аналогічно п. 3, відобразимо спочатку взаємно однозначним чином периметр n-кутника на дійсну вісь площини z.

Припускаючи це відображення виконаним за допомогою функції $\zeta(z)$, ми, діючи, як в п. 3, переконаємося, що $\frac{d\zeta}{dz}$ повинна мати вигляд:

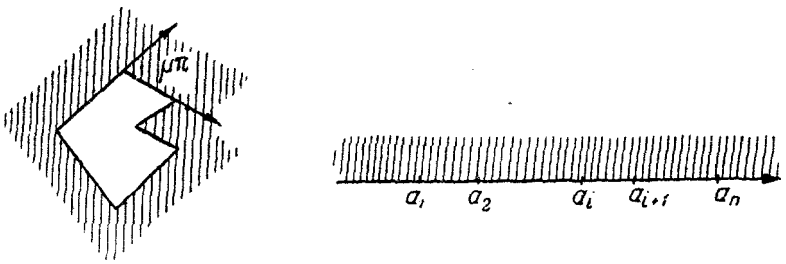

Рис. 151

$$\frac{d\zeta}{dz} = C(z-a_1)^{-\mu_1}(z-a_2)^{-\mu_2}\ldots(z-a_n)^{-\mu_n} \quad (\Sigma\mu_i = -2), \qquad (67)$$

щоб мати такі дві властивості:

1) $\arg\frac{d\zeta}{d}$ залишається сталим, поки z міститься між a_i і a_{i+1},

2) $\arg\frac{d\zeta}{dz}$ дістає приріст, рівний $\pi\mu_i$, коли z переходить через точку a_i, рухаючись по дійсній осі.

Нам залишається поставити вимогу, щоб ζ описувала весь периметр многокутника, тобто приходила у вихідну точку, коли z

опише всю дійсну вісь. Ця властивість у випадку внутрішньої задачі здійснювалась функцією ζ, визначуваною формулою (66), тому що $\Sigma\mu = 2$. В цьому випадку зовнішньої задачі $\Sigma\mu = -2$, і функція ζ, визначувана формулою (66), не буде мати цієї необхідної властивості. Через це треба змінити функцію ζ так, щоб вона мала потрібну властивість і зберігала дві сформульовані вище властивості, тобто змінити так, щоб ζ дістала потрібну властивість, а аргумент її похідної тимчасом не змінився. Тоді функція $\zeta(z)$ буде здійснювати взаємне однозначне відображення дійсної осі на периметр многокутника, і в наслідок § 2, п. 2 вона даватиме взаємно однозначне і конформне відображення верхньої півплощини на зовнішню область многокутника при умові, якщо в точці верхньої півплощини, що відповідає нескінченно віддаленій точці, функція $\zeta(z)$ має простий полюс.

Всім цим умовам ми задоволимо, якщо візьмемо:

$$\frac{d\zeta}{dz} = C\frac{(z-a_1)^{-\mu_1}(z-a_2)^{-\mu_2}\ldots(z-a_n)^{-\mu_n}}{(z-\beta)^2(z-\bar{\beta})^2}. \tag{68}$$

Справді, коли z описує дійсну вісь, аргумент $(z-\beta)^2(z-\bar{\beta})^2$ дорівнює нулеві, і тому властивості 1) і 2) для $\arg\frac{d\zeta}{dz}$ зберігаються. З другого боку, очевидно, що функція $\zeta(z)$, що визначається з формули (68), описує весь периметр многокутника за годинниковою стрілкою, коли z описує дійсну вісь, тому що вираз (68) матиме вигляд $\frac{1}{z^2}\varphi(z)$, де $\varphi(z)$ означає голоморфну функцію при $z=\infty$ ($\Sigma\mu = -2$). Нарешті, ця функція $\zeta(z)$ в точці $z=\beta$ має полюс першого порядку. Отже, шукана функція ζ буде вигляду:

$$\zeta = C\int_0^z \frac{(t-a_1)^{-\mu_1}(t-a_2)^{-\mu_2}\ldots(t-a_n)^{-\mu_n}}{(t-\beta)^2(t-\bar{\beta})^2}\,dt + C_1, \tag{69}$$

де $\Sigma\mu = -2$[1]).

Виникає супротивне питання: чи можна всяку дану область, що містить нескінченно віддалену точку, границя якої складається з периметра многокутника, відобразити на верхню півплощину z за допомогою формули (69)? Інакше кажучи, чи можна підібрати сталі, які входять у формулу (69), так, щоб ця формула відобразила зовнішню область наперед заданого многокутника на верхню півплощину? Це питання розв'язується в позитивному розумінні, прикладаючи міркування п. 3. Читачеві рекомендується упевнитися в цьому.

[1]) Крім того, $\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{\beta-a_k} + \frac{2}{\beta-\bar{\beta}} = 0$; якщо цю умову не буде виконано, то функція $\zeta(z)$ матиме в точці β логарифмічну точку розгалуження. (*Ред.*).

Вправи до розділу XII

1. Дослідити відображення верхньої півплощини на трикутник, якщо це відображення виконується за допомогою функції

$$w = \int_{z_0}^{z} (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1} (z-c)^{\gamma-1} dz$$

у випадку виродження: $\gamma = 1$.

Відп. Кут величини $\alpha\pi$.

2. Те ж, якщо $\gamma = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Відп. Смуга ширини $\frac{\pi}{b-a}$.

3. Користуючись задачею 2, відобразити смугу ширини $\frac{\pi}{b-a}$, обмежену двома паралелями дійсної осі на одиничний круг.

Відп. $w = \operatorname{arctg} t + \text{const}$.

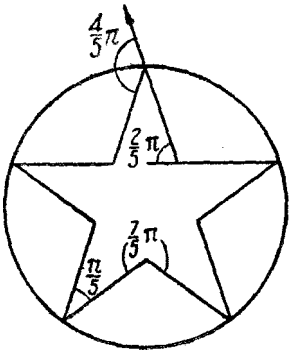

Рис. 152

4. Відобразити многокутник на одиничний круг.

Вказівка. Скористуватися формулою Шварца (66), взявши

$$\tau = \frac{t-i}{t+i}.$$

Відп.

$$\zeta = C' \int_{\tau_0}^{\tau} (\tau-\theta_1)^{-\mu_1} (\tau-\theta_2)^{-\mu_2} \ldots (\tau-\theta_n)^{-\mu_n} d\tau + C'',$$

де $|\theta_i| = 1$ і $\Sigma\mu_i = 2$.

5. Відобразити зовнішню область многокутника на одиничний круг.

Вказівка. Скористуватися формулою (69), взявши

$$\tau = \frac{t-\beta}{t-\bar{\beta}}.$$

Відп. $\zeta = C_1 \int_{\tau_0}^{\tau} (\tau-\theta_1)^{-\mu_1} \ldots (\tau-\theta_n)^{-\mu_n} \frac{d\tau}{\tau^2} + C_2,$

де $|\theta_i| = 1$ і $\Sigma\mu_i = -2$.

6. Відобразити на одиничний круг опуклий правильний многокутник.

Вказівка. У формулі задачі 4 треба взяти всі μ_i рівними $\frac{2}{n}$ і θ_i — кореням n-го степеня з одиниці. Потім показати, що різним дугам кола $\theta_i\,\theta_{i+1}$ відповідають рівні сторони многокутника.

Відп. $\zeta = C \int_0^z \frac{dt}{(1-t^n)^{\frac{2}{n}}}$, якщо центрові круга відповідає центр многокутника.

7. Відобразити на одиничний круг зіркоподібний десятикутник, зображений на рис. 152.

Відп. $\zeta = C \int_0^z \frac{(1+t^5)^{\frac{2}{5}}}{(1-t^5)^{\frac{4}{5}}} dt,$

якщо центрові круга відповідає центр десятикутника.

8. Відобразити на верхню півплощину еліпс з купюрами, що йдуть з кожного фокуса до найближчої вершини.

Вказівка. Виходячи з $z = \sin u$, відобразити дану область на прямокутник і потім скористуватися § 8, п. 1.

9. Відобразити на верхню півплощину середину еліпса, користуючись задачею 8.

10. Відобразити на верхню півплощину і на одиничний круг параболу $\rho = \frac{2}{1 + \cos \omega}$ з купюрою, що йде з фокуса до вершини.

Відп. $\zeta = \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{z}$; $w = \dfrac{\sin \frac{\pi}{2} \sqrt{z} - i}{\sin \frac{\pi}{2} \sqrt{z} + i}$.

11. Відобразити на верхню півплощину середину параболи $\rho = \frac{2}{1 + \cos \omega}$, користуючись задачею 10.

Відп. $w = i \cos \frac{\pi}{4} \sqrt{z}$.

12. Відобразити на одиничний круг область, зовнішню до квадрата.

Вказівка. Скористуватися задачею 5, прийнявши θ_i рівними кореням четвертого степеня з одиниці.

Відп. $\zeta = C \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\sqrt{1 - z^4}}{z^2} dz + C_1$.

Розділ XIII

Загальні властивості однолистих функцій

Нехай $w=f(z)$ — функція, яка виконує взаємно однозначне і конформне відображення круга $|z|<1$ на однозв'язну область D площини w. В цьому розділі ми будемо припускати, що область D не містить нескінченно віддаленої точки, тобто що нескінченно віддалена точка не є внутрішньою точкою області D. Інакше кажучи, ми будемо припускати функцію $f(z)$ голоморфною в одиничному крузі $|z|<1$.

Можна, не зменшуючи загальності, вважати $f(0)=0$, тому що в супротивному випадку ми розглядали б $f(z)-f(0)$, що геометрично зводиться до зсуву області D. Тому що точка $z=0$ буде внутрішньою для круга $|z|<1$, то відповідна точка $w=0$ буде внутрішньою для області D. Нашу функцію $w=f(z)$ можна, очевидно, зобразити у вигляді ряду:

$$w=a_1z+a_2z^2+\ldots,$$

і цей розклад буде справедливий у всьому крузі $|z|<1$, тому що в цьому крузі функція w голоморфна. Тому що відповідність між z і w є взаємно однозначна, то $\frac{dw}{dz}$ не дорівнює нулеві в крузі $|z|<1$. Зокрема, вважаючи $z=0$, ми бачимо, що $a_1=f'(0)$ не дорівнює нулеві. Таким чином при вивченні можна обмежитися розглядом функції

$$\frac{w}{a_1}=z+\frac{a_2}{a_1}z^2+\ldots$$

Результати, які ми при цьому одержимо, можуть бути узагальнені, розглядаючи $a_1f(z)$ замість $f(z)$, тобто обертаючи і подібно змінюючи область D.

Отже, ми будемо вивчати функцію

$$w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots, \tag{1}$$

голоморфну в крузі $|z|<1$, однолисту в цьому крузі (тобто таку, що приймає різні значення в різних точках z), що дорівнює нулеві при $z=0$ і має в своєму розкладі коефіцієнт при z, рівний одиниці.

Для краткості функцію, що задовольняє умовам: $f(0)=0$, $f'(0)=1$, називатимемо *нормованою*. Очевидно, з припущеної властивості однолистості випливає, що $\frac{dw}{dz}\neq 0$ всюди в крузі

$|z|<1$. Визначним для такої функції є те, що можна знайти абсолютно спільні межі, між якими міститься її модуль. Можливо також знайти межі для $|f'(z)|$ і $|\arg f'(z)|$. Ми одержимо ці результати після того, як визначимо верхні межі для модулів коефіцієнтів.

§ 1. Проблема коефіцієнтів

Щоб дістати верхню межу модулів коефіцієнтів розкладу функції, голоморфної в крузі $|z|<1$, однолистої в цьому крузі і нормованої, нам треба встановити два допоміжні твердження, відомі під назвою *внутрішньої* і *зовнішньої теорем площ.*

1. Внутрішня теорема площ. Нехай

$$w=f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots \tag{2}$$

— функція, голоморфна в крузі $|z|<1$, що має похідну, не рівну нулеві в цьому крузі. Розглянемо круг $|z|\leqslant r\,(r<1)$ і область $\overline{D}_r$, яку ми одержуємо в результаті відображення цього круга за допомогою функції $w=f(z)$. Взагалі кажучи, якщо дана функція не є однолистою, область $\overline{D}_r$ буде многолистою. Наша задача полягає в тому, щоб визначити величину площі цієї області $\overline{D}_r$. Ця остання виражається інтегралом:

$$\int_0^r\int_0^{2\pi}|f'(\zeta)|^2\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

і таким чином питання зводиться до обчислення цього інтеграла.

Помітивши, що $|f'(\zeta)|^2=f'(\zeta)\cdot\overline{f'(\zeta)}$, одержуємо:

$$\int_0^r\int_0^{2\pi}|f'(\zeta)|^2\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\int_0^r\int_0^{2\pi}(1+2a_2\zeta+3a_3\zeta^2+\ldots)(1+2\bar{a}_2\bar{\zeta}+3\bar{a}_3\bar{\zeta}^2+\ldots)\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\int_0^r 2\pi\rho\,(1+4|a_2|^2\rho^2+9|a_3|^2\rho^4+\ldots+n^2|a_n|^2\rho^{2n-2}+\ldots)\,d\rho.$$

Виконуючи квадратуру, що залишилася, одержуємо для площі області $\overline{D}_r$ таке значення:

$$\pi\,(r^2+2|a_2|^2r^4+3|a_3|^2r^6+\ldots+n|a_n|^2r^{2n}+\ldots). \tag{3}$$

За означенням за площу області D, одержуваної в відображенні круга $|z|<1$ за допомогою функції $w=f(z)$, ми приймемо границю, до якої прямує площа області $\overline{D}_r$, коли r прямує до одиниці. Тому що при зростанні r площа області $\overline{D}_r$, виражена формулою (3), зростає, то можливі лише два випадки:

1) площа області $\overline{D}_r$, тобто вираз (3), при $r \to 1$ прямує до визначеної скінченної границі, яка й буде величиною площі області D,

2) площа області $\overline{D}_r$, тобто вираз (3), при $r \to 1$ необмежено зростає, в якому випадку площа області D нескінченна.

Розглядаючи спочатку перший випадок, покажемо, що ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|^2$ збігається. Справді, сума ряду $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}$ обмежена при $0 < r < 1$, тому що вона за умовою, зростаючи, прямує до скінченної границі. Припускаючи, з другого боку, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|^2$ розбіжним, ми прийдемо до суперечності з умовою обмеженості ряду $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}$.

Дійсно, різниця між сумами $n-1$ перших членів в обох рядах дорівнює

$$\delta_n = 2|a_2|^2(1-r^4) + \ldots + n|a_n|^2(1-r^{2n}).$$

Вважаючи $1-r = \frac{1}{2n^4}$, покажемо, що δ_n обмежене, яке б не було n.

Для цього зазначимо, що

$$1-r^p = (1-r)(1+r+r^2+\ldots+r^{p-1}) < p(1-r),$$

звідки знайдемо:

$$\delta_n < (1-r)[2\cdot 4|a_2|^2 + \ldots + n\cdot 2n|a_n|^2]$$

і, заводячи $1-r = \frac{1}{2n^4}$, одержимо:

$$\delta_n < \frac{|a_2|^2}{2^2} + \ldots + \frac{|a_n|^2}{n^2} < \frac{|a_2|^2}{2^2} + \ldots + \frac{|a_n|^2}{n^2} + \ldots$$

Отже, δ_n явно менше суми останнього ряду, який збігається, тому що $|a_n|$ обмежені в своїй сукупності в наслідок обмеженості виразу (3) при $0 < r < 1$.

Отже, коли б $2|a_2|^2 + \ldots + n|a_n|^2$ необмежено зростало разом з n, то те ж саме було б і для виразу $2|a_2|^2 r^4 + \ldots + n|a_n|^2 r^{2n}$, де $r = 1 - \frac{1}{2n^4}$, а значить, і тим більш сума ряду

$$2|a_2|^2 r^4 + \ldots + n|a_n|^2 r^{2n} + \ldots$$

необмежено зростала б, коли $r = 1 - \frac{1}{2n^4}$ прямує до одиниці, що суперечить умові.

Отже, в розглядуваному нами випадку 1), коли область D має скінченну площу, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|^2$ збігається. Через це ми маємо (розд. 2, § 3, п. 7):

$$\lim_{r\to 1}\sum_{n=2}^{\infty} n\,|a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=2}^{\infty} n\,|a_n|^2. \tag{4}$$

Переходячи до границі при $r \to 1$ у виразі (3), що зображує площу області $\bar{D}_r$, ми, отже, для площі області D дістанемо значення:

$$\pi + \pi \sum_{n=2}^{\infty} n\,|a_n|^2. \tag{5}$$

Щодо випадку 2), коли область D має нескінченну площу, то й тут формула (5) для площі області D залишається в силі, бо в цьому випадку нескінченний ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n\,|a_n|^2$, що входить у цю формулу, розбігається. Дійсно при збіжності ряду $\sum_{n=2}^{\infty} n\,|a_n|^2$ виконувалося б співвідношення (4) і, значить, вираз (3) прямував би до скінченної границі, коли $r \to 1$; ця границя в наслідок означення дорівнює величині площі області D, що перебуває в суперечності з гіпотезою нескінченної площі області D.

Отже, ми повністю довели таке твердження, відоме під назвою внутрішньої теореми площ:

Якщо $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ є нормована функція, голоморфна в крузі $|z| < 1$, похідна якої в цьому крузі не дорівнює нулеві, то вона виконує конформне відображення круга $|z| < 1$ на область D (взагалі кажучи, многолисту) *з площею, що визначається формулою*:

$$\pi + \pi \sum_{n=2}^{\infty} n\,|a_n|^2. \tag{5}$$

Зокрема, звідси випливає, що серед всієї сім'ї функцій $f(z)$, які задовольняють умовам теореми площ, мінімальне по площі відображення виконує лише функція $w = z$, тобто мінімум площі відображеної області D досягається тоді, коли D збігається з первісною областю — одиничним кругом.

2. Зовнішня теорема площ. Твердження, яке має назву *зовнішньої теореми площ*, полягає ось в чому: *якщо*

$$w = \zeta + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + \ldots = \varphi(\zeta)$$

є функція однолиста в області $|\zeta| > 1$ і голоморфна всюди в цій області, за винятком нескінченно віддаленої точки, де вона має простий полюс, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\alpha_n|^2 \leqslant 1.$$

Це твердження називають теоремою площ, тому що воно являє

собою аналітичний вираз для такого очевидного геометричного факту: однолисте відображення зовнішньої частини одиничного круга $|\zeta| > 1$, що виконується за допомогою функції $w = \varphi(\zeta)$, залишає непокритим множину точок площини w, площа якої більша або рівна нулеві. З цього геометричного пояснення негайно випливає спосіб доведення.

Найпростіше провести доведення так: коло $|\zeta| = r$, $r > 1$ відображається в замкнуту правильну аналітичну криву, рівняння якої буде $w = w(\theta) = \varphi(re^{i\theta})$, якщо взяти $\zeta = re^{i\theta}$. Обчислимо площу A скінченної області, обмеженої цією кривої, вважаючи $w = u + iv$:

$$A = \int_0^{2\pi} uv'\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{w(\theta) + \overline{w(\theta)}}{2} \cdot \frac{w'(\theta) - \overline{w'}(\theta)}{2i}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{re^{i\theta} + re^{-i\theta}}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n e^{-in\theta} + \bar{\alpha}_n e^{in\theta}}{2r^n} \right\} \left\{ \frac{re^{i\theta} + re^{-i\theta}}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha_n e^{-in\theta} + n\bar{\alpha}_n e^{in\theta}}{2r^n} \right\} d\theta.$$

Провадячи обчислення і помічаючи, що в результаті інтегрування зникнуть всі члени, які містять $e^{i\theta}$ в цілому степені, відмінному від нульового, дістанемо:

$$A = \pi r^2 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|\alpha_n|^2}{r^{2n}}.$$

Очевидно, з геометричних міркувань, що $A > 0$, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|\alpha_n|^2}{r^{2n}} < r^2. \tag{6}$$

Діючи, як в п. 1, ми переконуємося, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2$ збігається, і переходом до границі при $r \to 1$ з нерівності (6) знайдемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leqslant 1.$$

3. Верхня межа для модуля коефіцієнта при z^2 в розкладі однолистої функції. Нехай $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ виконує однолисте відображення круга $|z| < 1$. Тоді легко показати, що

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2} a_2 z^3 + \ldots$$

виконує також однолисте відображення круга $|z| < 1$. Для цього доведемо, що коли $F(z_1) = F(z_2)$, то необхідно $z_1 = z_2$.

Справді, з рівності $F(z_1)=F(z_2)$ виходить: $[F(z_1)]^2=[F(z_2)]^2$ або $f(z_1^2)=f(z_2^2)$. Тому що $f(z)$ — однолиста функція, то з останньої рівності випливає $z_1^2=z_2^2$, тобто або $z_1=z_2$, або $z_1=-z_2$. Остання ж гіпотеза суперечить умові $F(z_1)=F(z_2)$, тому що в наслідок непарності функції $F(z)$ мали б при цій гіпотезі $F(z_1)=-F(z_2)$. Таким чином $F(z)$ — дійсно однолиста функція в крузі $|z|<1$.

Можливо те ж саме виявити й іншим способом. За допомогою функції z^2 круг $|z|<1$ переходить у дволистий одиничний круг з точкою розгалуження при $z=0$, потім за допомогою $f(z^2)$ цей останній відображається на площину, так же само розгалужену навколо $z=0$. Нарешті, при переході до $\sqrt{f(z^2)}$ це розгалуження усувається.

Очевидно, що функція $\Phi(\zeta)=\dfrac{1}{F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ однолисто зображає зовнішню область одиничного круга $|\zeta|>1$ і має такий розклад, справедливий при $|\zeta|>1$.

$$\Phi(\zeta)=\zeta-\frac{1}{2}a_2\frac{1}{\zeta}+\ldots$$

Згідно з зовнішньою теоремою площ (п. 2) маємо: $\frac{1}{2}|a_2|\leqslant 1$, звідки $|a_2|\leqslant 2$. Отже ми довели твердження: *якщо* $w=z+a_2z^2+\ldots$ *є функція, голоморфна і однолиста в крузі* $|z|<1$, то $|a_2|\leqslant 2$.

Визначним фактом є те, що ця межа не може бути поліпшена. Дійсно, вона досягається функцією

$$\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\ldots,$$

тому що остання функція відображає однолисто круг $|z|<1$ на область, повна границя якої утворена з сегмента дійсної осі між $-\frac{1}{4}$ і $-\infty$.

Щоб це показати, досить замість $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ розглянути функцію $\varphi(\zeta)=\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}=\dfrac{\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)^2}{\frac{1}{\zeta}}=\zeta+\frac{1}{\zeta}-2$ і виявити, що вона однолисто відображає $|\zeta|>1$ на область, повна границя якої утворена з сегмента дійсної осі між -4 і 0, що було вже показано в розд. XII, § 5, п. 3.

4. Константа Кебе. Розглянемо знов у крузі $|z|<1$ голоморфну і однолисту функцію:

$$w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$$

Припустимо, що $f(z)\neq c$ в крузі $|z|<1$. Тоді при $c\neq 0$ функція $f_1(z)=\frac{cf(z)}{c-f(z)}=z+\left(a_2+\frac{1}{c}\right)z^2+\ldots$ у крузі $|z|<1$ одноли-

ста і голоморфна. В наслідок п. 3, отже, маємо: $\left|a_2+\frac{1}{c}\right|<2$, тобто $|c|\geqslant\frac{1}{4}$, тому що $|a_2|\leqslant 2$. Звідси випливає: *немає ніякої граничної точки області, що є відображенням одиничного круга за допомогою $w=f(z)$, яка мала б віддаль від початку координат, меншу $\frac{1}{4}$*. Інакше кажучи, границя всякої області відображення одиничного круга за допомогою функції $w=f(z)$ має віддаль від початку координат, принаймні рівну $\frac{1}{4}$.

Знайдена межа $\frac{1}{4}$ не може бути поліпшена, тому що існують функції, для яких вона досягається. Приклад такої функції буде знов $\frac{z}{(1-z)^2}$, границя області відображення якої, як ми бачили в кінці п. 3, має віддаль від початку координат, в точності рівну $\frac{1}{4}$. Знайдена межа $\frac{1}{4}$ має назву *константи Кебе*.

5. Теорема спотворення. Перейдемо тепер до розгляду так званої теореми спотворення. Нехай знов

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots$$

у крузі $|z|<1$ голоморфна і однолиста. Утворимо вираз: $f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{\zeta}z}\right)$, який, якщо його розглядати як функцію ζ, буде являти собою функцію, голоморфну і однолисту в одиничному крузі $|\zeta|<1$, тому що лінійне перетворення $\frac{\zeta+z}{1+\bar{\zeta}z}$ переводить взаємно однозначно одиничний круг самого в себе. Нормуючи цей вираз, розглянемо функцію:

$$g(\zeta)=\frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right)-f(z)}{f'(z)(1-z\bar{z})},$$

голоморфну і однолисту в крузі $|\zeta|<1$, яка розкладається в такий степеневий ряд:

$$g(\zeta)=\zeta+\beta_2\zeta^2+\ldots$$

За формулою Тейлора для коефіцієнта β_2 одержимо:

$$\beta_2=\frac{1}{2}g''(0)=\frac{1}{2}\left[\frac{f''(z)(1-z\bar{z})}{f'(z)}-2\bar{z}\right].$$

Тому що в наслідок п. 3 маємо: $|\beta_2|\leqslant 2$, то $\left|\frac{f''(z)(1-z\bar{z})}{f'(z)}-2\bar{z}\right|\leqslant 4$. Поділивши на $1-z\bar{z}$ і помноживши на $|z|$, одержимо:

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|\leqslant\frac{4|z|}{1-|z|^2},$$

звідки виходить:

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} \leqslant R\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \leqslant \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

або

$$\frac{2|z|^2-4|z|}{1-|z|^2} \leqslant R\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \leqslant \frac{2|z|^2+4|z|}{1-|z|^2} \tag{7}$$

Помітивши, що

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{\partial \ln f'(z)}{\partial \ln z} = \frac{\partial \ln f'(z)}{\partial \ln |z|} = |z| \frac{\partial \ln f'(z)}{\partial |z|}$$

з останньої нерівності (7) знайдемо:

$$\frac{2|z|^2-4|z|}{1-|z|^2} \leqslant |z| \frac{\partial}{\partial |z|} R \ln f'(z) \leqslant \frac{2|z|^2+4|z|}{1-|z|^2}$$

або після скорочення на $|z|$ і заміни $R \ln f'(z) = \ln |f'(z)|$:

$$\frac{2|z|-4}{1-|z|^2} \leqslant \frac{\partial}{\partial |z|} \ln |f'(z)| \leqslant \frac{2|z|+4}{1-|z|^2}. \tag{8}$$

Нарешті, інтегруючи нерівність (8) в границях від 0 до $|z|$, знайдемо:

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \tag{9}$$

Такі нижня і верхня границі, між якими міститься $|f'(z)|$. Ці границі найкращі, тому що їх досягає функція $\frac{z}{(1-z)^2}$, похідна якої дорівнює $\frac{1+z}{(1-z)^3}$.

Нерівності (9) виражають собою так звану *теорему спотворення* (Verzerungssatz). Вона показує, що, яка б не була голоморфна і однолиста в крузі $|z|<1$ функція $f(z)$, нормована в початку координат, зміна масштабу в точці z при відображенні за допомогою цієї функції міститься між скінченними числами, які залежать тільки від $|z|$.

Замість нерівності (9) теорему спотворення можна зобразити в декілька іншій формі.

Тому що $f'(z)$ в крузі $|z|<r<1$ не має нулів, то мінімум і максимум її модуля для $|z| \leqslant r$ досягаються на колі $|z|=r$. Отже, з нерівності (9) виходить:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}, \text{ якщо } |z| \leqslant r. \tag{10}$$

Нарешті, якщо z_1 і z_2 — дві точки круга $|z| \leqslant r$, то маємо:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z_1)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}; \quad \frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z_2)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3},$$

звідки одержимо:

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^4 \leqslant \left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^4. \tag{11}$$

6. Межі для модуля однолистої функції. Помітивши, що $|f(z)| = \left|\int_0^z f'(z)\,dz\right|$, де інтегрування виконується вздовж радіуса точки z, одержимо:

$$|f(z)| \leqslant \int_0^{|z|} |f'(z)|\,d|z|.$$

Користуючись другою частиною нерівності (9), знайдемо:

$$|f(z)| \leqslant \int_0^{|z|} \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}\,d|z| = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \tag{12}$$

Щоб одержати нижню межу, помітимо, що $|f(z)|$ є довжина радіуса точки $f(z)$; позначаючи через $z = z(s)$ рівняння кривої, що з'єднує точки 0 і z, для якої цей радіус є зображенням, одержимо:

$$|f(z)| = \int_0^z |f'(z)|\,|dz|,$$

де інтегрування виконується вздовж зазначеної кривої $z = z(s)$. В наслідок лівої частини нерівності (9) маємо:

$$|f'(z)| \geqslant \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3},$$

а з другого боку,

$$|f(z)| = \int_0^z |f'(z)|\,|dz| \geqslant \int_0^{|z|} |f'(z)|\,d|z|.$$

Звідси зовсім просто знаходимо таку нерівність:

$$|f(z)| \geqslant \int_0^{|z|} \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\,d|z| = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}. \tag{13}$$

Об'єднуючи обидві нерівності (12) і (13), остаточний результат запишемо так:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \tag{14}$$

Установлені межі для $|f(z)|$ — найкращі, тому що їх досягає функція $\frac{z}{(1-z)^2}$.

Ліва частина нерівності (14) містить відомий уже з п. 4 результат про положення граничних точок, тому що при $|z| \to 1$ нижня межа $|f(z)|$ прямує до $\frac{1}{4}$. Права частина нерівності (14) обмежує ріст функції, голоморфної і однолистої в одиничному крузі.

При наближенні до кола модуль функції може ставати нескінченно великим тільки як другий степінь оберненої величини

віддалі від кола. Звідси можна зробити висновок про справедливість такого загального твердження: *нехай D довільна однолиста область, що містить точку $z=0$ і $f(z)$ — голоморфна функція в області D, яка відображає однолисто область D. Нехай далі, G — довільна замкнута множина точок, що належить області D; тоді існує число M, що залежить тільки від D і G, але не залежить від $f(z)$, таке, що всюди на G буде:*

$$|f(z)|<|f(0)|+|f'(0)|M.$$

Для доведення зазначимо, що

$$\varphi(z)=\frac{f(z)-f(0)}{f'(0)}$$

є функція, голоморфна і однолиста в D.

Для достатньо малого круга з центром $z=0$ можна використати нерівність (14), саме, якщо круг $|z|<R$ належить області D, то в крузі $|z|\leqslant\theta R\,(0<\theta<1)$ маємо:

$$|\varphi(z)|\leqslant\frac{\theta}{(1-\theta)^2},$$

і, значить,

$$|f(z)|<|f(0)|+|f'(0)|\frac{\theta}{(1-\theta)^2}. \tag{15}$$

Тепер, діючи так само, як при аналітичному продовженні, покриємо дану множину ланцюгом з скінченного числа кругів, виходячи з круга з центром $z=0$. В другому крузі ланцюга, центр якого z_0 належить першому кругові, маємо:

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{f'(z_0)}\right|\leqslant\frac{\theta}{(1-\theta)^2},$$

і, значить,

$$|f(z)|<|f(z_0)|+|f'(z_0)|\frac{\theta}{(1-\theta)^2}.$$

Тому що

$$|f(z_0)|<|f(0)|+|f'(0)|\frac{\theta}{(1-\theta)^2}\quad\text{і}\quad|f'(z_0)|<|f'(0)|\frac{1+\theta}{(1-\theta)^3},$$

то одержуємо:

$$|f(z)|<|f(0)|+|f'(0)|\frac{\theta}{(1-\theta)^2}\left[1+\frac{1+\theta}{(1-\theta)^3}\right]. \tag{16}$$

Порівнюючи нерівності (15) і (16), ми бачимо, що одночасно в обох кругах ланцюга має місце нерівність (16). Продовжуючи цей процес далі, ми переконуємося в справедливості нерівності

$$|f(z)|<|f(0)|+|f'(0)|M$$

на всій системі кругів ланцюга, тобто і тим більш на множині точок G, при чому число M не залежить від вигляду функції $f(z)$.

7. Теорема обертання. З установленої в п. 5 нерівності:

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|\leqslant\frac{4|z|}{1-|z|^2},$$

де $f(z)$ — нормована голоморфна і однолиста функція в одиничному крузі $|z|<1$, одержуємо:

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} \leqslant I\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \leqslant \frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

Помітивши, як це було вже відзначено в п. 5, що

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = |z| \frac{\partial \ln f'(z)}{\partial |z|},$$

ми знайдемо:

$$I\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = |z| \frac{\partial}{\partial |z|} \arg f'(z),$$

тому що

$$I \ln f'(z) = \arg f'(z).$$

Таким чином ми маємо:

$$-\frac{4}{1-|z|^2} \leqslant \frac{\partial}{\partial |z|} \arg f'(z) \leqslant \frac{4}{1-|z|^2}.$$

Провадячи інтегрування відносно $|z|$, одержимо теорему обертання:

$$|\arg f'(z)| \leqslant 2 \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{17}$$

Це твердження являє собою природний додаток до теореми спотворення, тому що воно регулює зміну напрямів при однолистому відображенні.

8. Спільна межа для модулів коефіцієнтів у розкладі однолистої функції. Вернемося знов до функції $f(z)$, голоморфної і однолистої в одиничному крузі $|z|<1$, припускаючи її нормованою за допомогою умов: $f(0)=0$, $f'(0)=1$:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

При якому завгодно $r\,(r<1)$ маємо:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\, e^{-in\varphi}\, d\varphi$$

і, значить,

$$|a_n| r^n \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho^2 e^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

де взято $r=\rho^2$. Далі маємо:

$$|a_n| r^n \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho^2 e^{i\varphi})|\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} |f(\rho^2 e^{i\varphi}|\, \frac{d\varphi}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho^2 e^{2i\psi})|\, d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sqrt{f(\rho^2 e^{2i\psi})}|^2\, d\psi. \tag{18}$$

Вважаючи $F(\zeta) = \sqrt{f(\zeta^2)}$, $\zeta = \rho e^{i\psi} = \sqrt{r} e^{i\psi}$, перепишемо (18) у вигляді:

$$|a_n| r^n \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\zeta)|^2 d\psi. \tag{19}$$

Нехай тепер

$$F(\zeta) = \zeta + b_2\zeta^2 + \ldots \qquad (b_1 = 1).$$

Тоді (19) можна зобразити так:

$$|a_n| r^n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \rho^{2n} = 2\int_0^{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \rho^{2n-1} \cdot d\rho.$$

Підінтегральна функція в останньому інтегралі, очевидно, дорівнює площі області, яку дістаємо у відображенні круга $|\zeta| \leqslant \rho$ за допомогою функції $F(\zeta)$, поділеної на $\pi\rho$ (п. 1). Помітивши ж, що площа цієї області явно не перевищує площі круга радіуса, рівного максимумові $|F(\zeta)|$ для круга $|\zeta| \leqslant \rho$, одержуємо:

$$|a_n| r^n \leqslant 2\int_0^{\rho} \frac{1}{\pi\rho} \pi \max_{|\zeta|=\rho} |F(\zeta)|^2 d\rho. \tag{20}$$

Тому що $F(\zeta) = \sqrt{f(\zeta^2)}$ і за теоремою п. 6 $|f(\zeta^2)| \leqslant \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)^2}$, то

$$|F(\zeta)| \leqslant \frac{\rho}{1-\rho^2}.$$

Після цього нерівність (20) запишеться так:

$$|a_n| r^n \leqslant 2\int_0^{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)^2} d\rho = \frac{\rho^2}{1-\rho^2},$$

або в наслідок рівності $\rho = \sqrt{r}$:

$$|a_n| r^n \leqslant \frac{r}{1-r}.$$

Тому що r — яке завгодно число, менше одиниці, то, вважаючи зокрема

$$r = 1 - \frac{1}{n},$$

одержимо:

$$|a_n| < \frac{n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}} = n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < en,$$

тому що при якому завгодно $n\,(n \geqslant 2)$

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e.$$

Одержана нерівність $|a_n| < en$ показує, що модуль кожного коефіцієнта в розкладі однолистої функції має сталу верхню межу, яка не залежить від вигляду функції при умові її нормування в початку координат.

Ще не доведено, хоча є всі підстави припускати, що $|a_n| \leqslant n$;

отже й тут межі досягає функція $\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$. В цьому напрямі, крім результату п. 3, установлено, що $|a_n|\leqslant n$, якщо всі коефіцієнти — дійсні числа

§ 2. Межі опуклості і зіркоподібності

1. Межа опуклості. Звернемося до геометричного тлумачення нерівності (7), установленої в § 1, п. 5 для однолистих, голоморфних в одиничному крузі нормованих функцій:

$$R\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\geqslant\frac{2|z|^2-4|z|}{1-|z|^2}. \tag{7}$$

Ми досягнемо цієї геометричної інтерпретації, якщо розглянемо відображення кола $|z|=r$. Кут додатного напряму дотичної до кола $|z|=r$ у точці $z=re^{i\varphi}$ є $\frac{\pi}{2}+\varphi$. У відображеній точці $f(z)$ дотична до відображеної кривої має напрям $\tau=\frac{\pi}{2}+$ $+\varphi+\arg f'(z)$. Помітивши, що кривизна лінії є $\frac{d\tau}{ds}=\frac{\frac{d\tau}{d\varphi}}{\frac{ds}{d\varphi}}$, продиференціюємо τ відносно φ:

$$\frac{d\tau}{d\varphi}=1+\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f'(z).$$

З другого боку,

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{\partial\ln f'(z)}{\partial\ln z}=\frac{1}{i}\,\frac{\partial\ln f'(z)}{\partial\varphi},$$

і, значить,

$$R\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f'(z),$$

тому що $\ln f'(z)=\ln|f'(z)|+i\arg f'(z)$. Таким чином, маємо:

$$\frac{d\tau}{d\varphi}=1+R\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right).$$

Знак $\frac{d\tau}{d\varphi}$ збігається з знаком кривизни лінії відображення, тому що $\frac{d\tau}{d\varphi}$ відрізняється від кривизни лише додатним множником $\frac{ds}{d\varphi}$. Отже, вираз $1+R\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)$ має знак, що збігається з знаком кривизни лінії відображення.

З другого боку, в наслідок нерівності (7) маємо:

$$1+R\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\geqslant\frac{1-4|z|+|z|^2}{1-|z|^2}.$$

Якщо тепер вираз, що стоїть у лівій частині останньої нерівності, додатній для $|z|=r$, то це, згідно з попереднім, означає, що відображення кола $|z|=r$ є опукла крива.

Простим обчисленням ми переконуємося, що для $|z|<2-\sqrt{3}=$ $=0{,}26\ldots$ вираз правої частини нашої нерівності весь час додатний, тоді як при $|z|>2-\sqrt{3}$ від'ємний. Через це при кожному однолистому відображенні $f(z)$ круга $|z|<1$ круг $|z|<2-\sqrt{3}$ відображається на опуклу область. Само по собі, взагалі кажучи, круг більшого радіуса відображається опукло за допомогою функції $f(z)$. Проте існує випадок, коли саме круг $|z|<2-\sqrt{3}$ відображається опукло і ніякий більший з ним концентричний уже не відображається опукло. Це буде у випадку функції $\frac{z}{(1-z)^2}$, що легко можна перевірити обчисленням. Знайдене число $2-\sqrt{3}$ являє собою, таким чином, найкращу межу опуклості для всієї сім'ї однолистих в одиничному крузі і нормованих функцій.

2. **Межа зіркоподібності**. У зв'язку з результатом попереднього пункту цікаво завести в розгляд, замість опуклих областей, так звані *зіркоподібні* області. Це будуть однолисті області, які містять точку $z=0$ і перетинаються з кожною прямою, що проходить через точку $z=0$, тільки по єдиному відрізкові.

В наслідок п. 1 ясно, що повинен існувати круг із центром $z=0$, який при кожному однолистому відображенні переходить у зіркоподібну область.

Назвемо *межею зіркоподібності* радіус найбільшого з цих кругів. Ми побачимо, що ця межа зіркоподібності більша, ніж 0,5, так що при кожному однолистому відображенні принаймні круг половинного радіуса переходить у зіркоподібну область. До цього приводять такі міркування. Якщо круг $|z|<r$ переходить у зіркоподібну область, то на кожному промені, який виходить з $w=0$, повинна лежати одна точка кривої відображення кола $|z|=r$. Через це $\arg f(z)$ повинен змінюватися завжди в одному і тому ж напрямі, коли точка z описує коло $|z|=r$. Аналітично це виражається за допомогою умови:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f(z)=R\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0$$

при $|z|\leqslant r$.

Отже, ми одержуємо такий критерій: *круг $|z|<r$ за допомогою $f(z)$ має зіркоподібне відображення тільки в тому випадку, якщо*

$$R\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0,$$

або, що те ж саме, якщо

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|<\frac{\pi}{2}\quad\text{при}\quad|z|<r.$$

Зазначимо тепер, що

$$\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}=\arg f'(z)-\arg\frac{f(z)}{z}$$

є кут, який утворює з вектором $\frac{f}{z}$ вектор $f'(z)$. Напрям вектора $f'(z)$, тобто $\arg f'(z)$, дає зміну напряму лінійного елементу в результаті відображення; а напрям вектора $\frac{f}{z}$, тобто $\arg\frac{f}{z}$, дає зміну азимуту в результаті відображення. Отже, формульований вище критерій показує, що різниця між змінами напряму і азимуту в крузі $|z|<r$ залишається менша $\frac{\pi}{2}$, — факт, що ясний з геометричного погляду.

Ця різниця між відносними напрямом і азимутом відображеного елементу буде тоді можливо найбільша, коли при відображенні радіуса, наприклад радіуса, що йде по дійсній осі, обертання буде можливо найбільшим і одночасно з тим довжина відображеної кривої, тобто $|f'(z)|$ можливо найменша. Цих умов ми досягаємо, якщо виберемо

$$w=\int_0^r \frac{1-r}{(1+r)^3} e^{i2\ln\frac{1+r}{1-r}} dr$$

як рівняння лінії, що є відображенням дійсної додатної осі. Зробивши обчислення, ми знайдемо:

$$\arg\frac{w}{z}=\arg w=\operatorname{arctg}\frac{e^{-2\rho}\cos 2\rho+e^{-2\rho}\sin 2\rho-1}{e^{-2\rho}\cos 2\rho-e^{-2\rho}\sin 2\rho-1} \quad \left(\rho=\ln\frac{1+r}{1-r}\right).$$

Отже, круг $|z|<r$ буде відображатися на зіркоподібну область, якщо при $|z|<r$ різниця

$$2\rho-\operatorname{arctg}\frac{e^{-2\rho}\cos 2\rho+e^{-2\rho}\sin 2\rho-1}{e^{-2\rho}\cos 2\rho-e^{-2\rho}\sin 2\rho-1}$$

залишається абсолютною величиною менша $\frac{\pi}{2}$. Обчисленням легко показати, що це має місце для $r=0{,}5$ (і значень менших), тоді як уже для $r=0{,}52$ цього не буде.

§ 3. Властивості функцій, що дають однолисті конформні відображення одиничного круга на області спеціального вигляду

1. Зіркоподібні й опуклі функції. Все, що було встановлено в § 1, п. 4, 5, 6 щодо довільних однолистих функцій, і тим більш буде справедливе для окремого випадку, коли функція сім'ї (S):

$$w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n\ldots$$

дає однолисте конформне відображення круга $|z|<1$ на зіркоподібну область. З другого боку, установлені межі досягаються, як ми бачили, функцією $\frac{z}{(1-z)^2}$, що дає відображення круга $|z|<1$ на зіркоподібну область. Через це ці межі будуть найкращі і для розгляданого тепер класу функцій.

Вважаючи тепер $f(z)=zF'(z)$ і помічаючи, що

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+\frac{zF''(z)}{F'(z)},$$

ми робимо висновок:

$$R\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)=1+R\left(\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right). \tag{21}$$

Тому що додатний знак лівої частини характеризує зіркоподібність відображення за допомогою функції $f(z)$, а додатний знак правої частини — опуклість відображення за допомогою функції $F(z)$, то звідси робимо висновок, що круг $|z|<1$ за допомогою $f(z)$ відображається на зіркоподібну область тільки в тому випадку, якщо цей круг за допомогою $F(z)$ відображається на опуклу область, при чому $f(z)$ і $F(z)$ зв'язані співвідношенням:

$$f(z)=zF'(z).$$

Звідси знайдемо негайно точні границі теореми спотворення для опуклих функцій (K). Таким чином, у наслідок п. 6 одержуємо:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|zF'(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

або

$$\frac{1}{(1+|z|)^2}\leqslant|F'(z)|\leqslant\frac{1}{(1-|z|)^2}. \tag{22}$$

Межі для модуля опуклої функції одержимо, аналогічно п. 6, за допомогою інтегрування нерівності (22):

$$\frac{|z|}{1+|z|}\leqslant|F(z)|\leqslant\frac{|z|}{1-|z|}. \tag{23}$$

Знайдені межі (22) і (23) є найкращими для опуклих функцій $F(z)$. Дійсно, вони досягаються функцією $w=\frac{z}{1-z}$, яка дає опукле відображення круга $|z|<1$. Вона відображає круг $|z|<1$ на півплощину $Rw>-\frac{1}{2}$. З лівої частини нерівності (23) при $|z|\to 1$ знайдемо, що межа опуклого відображення круга $|z|<1$ міститься від початку координат на віддалі, принаймні рівній $\frac{1}{2}$. Остання константа є точною, тому що її досягає функція $w=\frac{z}{1-z}$.

2. Верхні межі модулів коефіцієнтів у розкладах опуклої і зіркоподібної функцій. Розглянемо сім'ю (K) функцій:

$$w=z+a_2z^2+\ldots,$$

які дають однолисте конформне відображення круга $|z|<1$ на опуклі області, і доведемо: *яка б не була функція $w(z)$ зазначеної сім'ї (K), маємо:*

$$|a_n|\leqslant 1 \qquad (n=2,\ 3,\ldots).$$

Припустимо спочатку, що $w(z)$ відображає круг $|z|<1$ на опуклу область, обмежену многокутником, тобто

$$w(z)=\int_0^z\left(1-\frac{z}{z_1}\right)^{-\mu_1}\left(1-\frac{z}{z_2}\right)^{-\mu_2}\ldots\left(1-\frac{z}{z_s}\right)^{-\mu_s}dz, \tag{24}$$

де $0<\mu_k<1$, $\sum\limits_{k=1}^{s}\mu_k=2$ (розд. XII, § 8, п. 5) і покажемо, що в цьому випадку $|a_n|\leqslant 1$ $(n=2, 3, \ldots)$.

Помітивши, що

$$a_n=\frac{w^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{і} \quad w'(0)=1,$$

припустимо:

$$|w''(0)|\leqslant 2!,\ |w'''(0)|\leqslant 3!,\ldots,\ |w^{(n-1)}(0)|\leqslant (n-1)!$$

і доведемо, що

$$|w^{(n)}(0)|\leqslant n!$$

Для цього, продиференціювавши (24), маємо:

$$w'(z)=\left(1-\frac{z}{z_1}\right)^{-\mu_1}\left(1-\frac{z}{z_2}\right)^{-\mu_2}\ldots\left(1-\frac{z}{z_s}\right)^{-\mu_s}$$

Взявши логарифмічну похідну від останньої рівності, знайдемо:

$$\frac{w''(z)}{w'(z)}=-\sum_{k=1}^{s}\frac{\mu_k}{z-z_k}$$

або, вважаючи для скорочення

$$\omega(z)=-\sum_{k=1}^{s}\frac{\mu_k}{z-z_k},$$

матимемо:

$$w''(z)=\omega(z)\cdot w'(z).$$

Продиференціювавши обидві частини цієї рівності $n-2$ разів, користуючись формулою Лейбніца, одержимо:

$$w^{(n)}(z)=\omega^{(n-2)}(z)\,w'(z)+(n-2)\,\omega^{(n-3)}(z)\,w''(z)+$$
$$+\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}\,\omega^{(n-4)}(z)\,w'''\,z+\ldots+(n-2)\,\omega'(z)\,w^{(n-2)}(z)+$$
$$+\omega(z)\,w^{(n-1)}(z). \tag{25}$$

З другого боку, очевидно, маємо:

$$\omega^{(p)}(z)=(-1)^{p+1}p!\sum_{k=1}^{s}\frac{\mu_k}{(z-z_k)^{p+1}}.$$

Вважаючи тут $z=0$, одержимо:

$$|\omega^{(p)}(0)|\leqslant p!\sum_{k=1}^{s}\mu_k=2(p!). \tag{26}$$

З рівності (25) при $z=0$, користуючись нерівностями (26) і умовами:

$$w'(0)=1, \quad |w''(0)|\leqslant 2!, \ldots, \quad |w^{(n-1)}(0)|\leqslant (n-1)!,$$

остаточно знаходимо:

$$|w^{(n)}(0)|\leqslant 2(n-2)!+2(n-2)!\,2!+2\frac{(n-2)!}{2!}3!+\ldots+2(n-1)!=$$
$$=2(n-2)![1+2+\ldots+(n-1)]=n!,$$

що й потрібно.

Зазначимо тепер, що яку завгодно опуклу область можна апроксиміювати за допомогою опуклих многокутних областей і, значить, яку завгодно функцію $f(z)$ сім'ї (K) можна розглядати як границю функцій вигляду:

$$C\int_0^z\left(1-\frac{z}{z_1}\right)^{-\mu_1}\left(1-\frac{z}{z_2}\right)^{-\mu_2}\ldots\left(1-\frac{z}{z_s}\right)^{-\mu_s}dz; \tag{27}$$

ми робимо висновок: тому що за доведеним модуль коефіцієнта при z^n в розкладі функції (27) не більший C і в наслідок нормування C повинно прямувати до одиниці, то модуль коефіцієнта при z^n в розкладі опуклої функції не більший одиниці.

Переходячи від сім'ї (K) опуклих функцій до сім'ї (S) зіркоподібних функцій за допомогою співвідношення

$$f(z)=zF'(z),$$

ми одержимо відповідні межі для коефіцієнтів у розкладі зіркоподібної функції.

Дійсно, якщо

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$
$$F(z)=z+b_2z^2+\ldots+b_nz^n+\ldots,$$

то $a_n=nb_n$, і тому що $|b_n|\leqslant 1$, то $|a_n|\leqslant n$.

Знайдені верхні межі для модулів коефіцієнтів у розкладах опуклої і зіркоподібної функцій є точні, тому що вони досягаються відповідно функціями

$$\frac{z}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}z^n \quad \text{і} \quad \frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n.$$

Метод, викладений в цьому пункті, може бути застосований для одержання точних меж модулів коефіцієнтів, а також теорем спотворення у випадку симетричних опуклих функцій. Даючи змогу зробити це читачеві, зазначимо, що мажорантою для цього класу буде функція $w=\operatorname{arctg} z$, яка дає відображення одиничного круга на смугу ширини $\frac{\pi}{2}$, паралельну уявній осі. Переходячи потім від опуклих симетричних функцій до зіркоподібних симетричних функцій, установимо точні межі і для цих остан-

ніх. В цьому випадку мажорантою буде функція $w=\frac{z}{1+z^2}$, яка дасть відображення одиничного круга на область, повна границя якої складається з двох сегментів дійсної осі $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ і $\left(-\frac{1}{2}, -\infty\right)$.

§ 4. Екстремальні властивості функції, що відображає область на круг

1. Лема. Задача цього пункту — довести таке допоміжне надалі твердження: *якщо $\varphi(z)$ є функція, голоморфна в крузі $|z|<\rho$, то вважаючи $z=re^{i\theta}$, маємо яке б не було r, $0<r<\rho$:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(re^{i\theta})|^p\,d\theta \geqslant |\varphi(0)|^p \quad (p>0), \tag{28}$$

при чому рівність досягається тільки у випадку $\varphi(z)=\text{const}$.

Спочатку розглянемо випадок $p=2$. З розкладу Тейлора, який має місце всередині круга $|z|<\rho$:

$$\varphi(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_n z^n+\ldots,$$

одержуємо:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(re^{i\theta})|^2\,d\theta=|\alpha_0|^2+|\alpha_1|^2 r^2+\ldots+|\alpha_n|^2 r^{2n}+\ldots$$

Цей вираз, очевидно, більший або рівний $|\alpha_0|^2=|\varphi(0)|^2$, при чому рівність має місце тільки, якщо $\varphi(z)=\alpha_0$.

Якщо p — яке завгодно число, то розглянемо функцію $[\varphi(z)]^{\frac{p}{2}}$; якщо $\varphi(z)$ не має нулів усередині круга, то $\arg\varphi$ буде однозначний, і різні вітки функції $\varphi^{\frac{p}{2}}$ будуть однозначні. Вибираючи одну з них, матимемо функцію $\varphi^{\frac{p}{2}}$, голоморфну в крузі $|z|<\rho$. Досить тоді прикласти лему до цієї функції і показника 2, щоб поширити її на розгляданий випадок відносно $\varphi(z)$. Таким чином лема встановлена при якому завгодно p, якщо φ не має нулів усередині круга.

Переходимо тепер до випадку, коли φ має нулі всередині круга $|z|<\rho$. Ми можемо припускати, що $\varphi(0)\neq 0$, тому що в цьому випадку справедливість леми очевидна. Розглянемо круг радіуса $r\,(r<\rho)$; якщо всередині його немає нулів функції $\varphi(z)$, то для цього радіуса r твердження встановимо, прикладаючи лему до круга $|z|<r$ в розглянутому випадку. Якщо є нулі всередині круга $|z|<r$, то їх — скінченне число; позначимо їх через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, відзначивши кожний стільки разів, яка його кратність. Зауважимо, що коли $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ — точки, симетричні з $a_1, a_2, \ldots, a_n$ відносно кола $|z|=r$, то функція

$$\frac{(z-a_1')(z-a_2')\ldots(z-a_n')}{(z-a_1(z-a_2)\ldots(z-a_n)}$$

набирає на цьому колі значень, що мають модуль, рівний

$$\frac{r}{|a_1|}\frac{r}{|a_2|}\cdots\frac{r}{|a_n|}=\frac{r^n}{|a_1a_2\ldots a_n|}.$$

Отже, функція

$$\varphi_1(z)=\frac{|a_1a_2\ldots a_n|}{r^n}\frac{(z-a_1')\ldots(z-a_n')}{(z-a_1)\ldots(z-a_n)}\varphi(z)$$

голоморфна і не рівна нулеві в крузі $|z|<r$ і приймає на колі $|z|=r$ значення того ж модуля, що й $\varphi(z)$.

В наслідок леми, встановленої для $\varphi_1(z)$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi_1(re^{i\theta})|^p\,d\theta\geqslant|\varphi_1(0)|^p.$$

З другого боку,

$$|\varphi_1(re^{i\theta})|=|\varphi(re^{i\theta})| \text{ і } |\varphi_1(0)|=\frac{|a_1a_2\ldots a_n|}{r^n}\left|\frac{a_1'a_2'\ldots a_n'}{a_1a_2\ldots a_n}\right||\varphi(0)|,$$

тобто

$$|\varphi_1(0)|=\frac{|a_1'a_2'\ldots a_n'|}{r^n}|\varphi(0)|>|\varphi(0)|.$$

Таким чином, буде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(re^{i\theta})|^p\,d\theta>|\varphi(0)|^p,$$

і твердження цілком встановлене, тому що $\varphi(z)$, $\varphi(0)\neq 0$, яка має нулі всередині круга $|z|<r$, не є стале.

2. Перша екстремальна проблема. Розглянемо всі функції $\lambda(z)$, голоморфні в обмеженій однозв'язній області D, нормовані в точці z_0, тобто такі, що задовольняють умовам:

$$\lambda(z_0)=0,\quad \lambda'(z_0)=1. \tag{29}$$

Для цього класу ставиться така задача: *показати, що інтеграл*

$$I_p=\iint_D|\lambda(z)|^p\,dx\,dy\quad(p>0)$$

має мінімум для єдиної функції λ, *і визначити цю функцію.*

Нехай $w=f(z)$ виконує, при умовах (29), взаємно однозначне і конформне зображення області D на круг Δ: $|z|<\rho$, а $z=\varphi(w)$ є обернена функція. Тому що

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\left|\frac{dz}{dw}\right|^2=|\varphi'(w)|^2,$$

то

$$I_p = \iint\limits_{\Delta} |\lambda[\varphi(w)]|^p |\varphi'(w)|^2 \, du \, dv.$$

Вважаючи $\Lambda(w) = \lambda[\varphi(w)]$ і $w = re^{i\theta}$, одержимо:

$$I_p = \int\limits_0^{\rho} r \, dr \int\limits_0^{2\pi} |\Lambda(re^{i\theta})|^p |\varphi'(re^{i\theta})|^2 \, d\theta,$$

при чому φ' не обертається в нуль, і тому різні вітки $\varphi'^{\frac{2}{p}}$ однозначні. Виберемо вітку, рівну одиниці при $w = 0$; $\lambda[\varphi(w)]$ — функція голоморфна і при $w = 0$ має простий нуль. Отже, $\Lambda(w)\varphi'^{\frac{2}{p}}(w)$ голоморфна і при $w = 0$ має простий нуль. Візьмемо

$$\Phi(w) = \frac{\Lambda(w)\varphi'^{\frac{2}{p}}(w)}{w}, \quad \Phi(0) \neq 0;$$

тоді матимемо:

$$\int\limits_0^{2\pi} |\Lambda(re^{i\theta})|^p |\varphi'(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = r^p \int\limits_0^{2\pi} |\Phi(re^{i\theta})|^p \, d\theta,$$

звідки в наслідок леми п. 1, яким би не було $r < \rho$, одержимо:

$$\int\limits_0^{2\pi} |\Lambda(re^{i\theta})|^p |\varphi'(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \geqslant 2\pi r^p |\Phi(0)|^p. \tag{30}$$

Далі, щоб обчислити $\Phi(0)$, помітимо, що

$$\left[\frac{d\Lambda(w)}{dw}\right]_{w=0} = \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)_{z=z_0} \varphi'(0) = 1 \cdot \varphi'(0) = \frac{1}{f'(z_0)} = 1,$$

звідки

$$\Lambda(w) = w + \ldots, \quad \varphi'^{\frac{2}{p}}(w) = 1 + \ldots,$$

і, значить, $\Phi(w) = 1 + \ldots$, тобто $\Phi(0) = 1$. Отже, з нерівності (30) знайдемо:

$$\int\limits_0^{2\pi} |\Lambda(re^{i\theta})|^p |\varphi'(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \geqslant 2\pi r^p$$

і, нарешті,

$$I_p \geqslant 2\pi \int\limits_0^{\rho} r^{p+1} \, dr = \frac{2\pi}{p+2} \rho^{p+2}.$$

Отже,

$$I_p \geqslant \frac{2\pi}{p+2} \rho^{p+2}.$$

Якщо в останній формулі є знак рівності, то це може бути тільки в тому випадку, коли в формулі (30) є знак рівності при всякому r, що на підставі леми можливо лише при

$$\Phi(w) = \text{const} = 1.$$

Ця остання умова означає, що I_p досягає своєї нижньої межі. Умова $\Phi(w) = 1$ запишеться так:

$$\lambda[\varphi(w)] = w[\varphi'(w)]^{-\frac{2}{p}},$$

або

$$\lambda(z) = f(z)[f'(z)]^{\frac{2}{p}},$$

приймаючи за $[f'(z)]^{\frac{2}{p}}$ однозначну вітку, рівну одиниці при $z = z_0$.

Таким чином ми показали, що I_p досягає своєї нижньої межі $\frac{2\pi}{p+2}\rho^{p+2}$ тільки для функції

$$f_p(z) = f(z)[f'(z)]^{\frac{2}{p}}.$$

Крім того, зазначимо, що середнє значення $|\lambda(z)|$ порядку p на області D є.

$$m_p = \left(\frac{I_p}{d}\right)^{\frac{1}{p}} \quad (d \text{ — площа області } D),$$

звідки

$$m_p \geqslant \rho\left[\frac{2\pi\rho^2}{(p+2)d}\right]^{\frac{1}{p}},$$

при чому $m_p = \rho\left[\frac{2\pi\rho^2}{(p+2)d}\right]^{\frac{1}{p}}$ тільки для функції $f_p(z)$. Коли p необмежено зростає, то m_p — прямує до ρ, а $f_p(z)$ прямує до функції $f(z)$.

3. Друга екстремальна проблема. *Розглянемо всі функції* $\lambda(z)$, голоморфні в обмеженій однозв'язній області D, нормовані в точці z_0, тобто такі, що задовольняють умовам:

$$\lambda(z_0) = 0, \quad \lambda'(z_0) = 1; \tag{29}$$

показати, що *інтеграл*

$$J_p = \iint_D |\lambda'(z)|^p \, dx\, dy \quad (p > 0)$$

має мінімум для єдиної функції λ, *і визначити цю функцію.*

Як і попереду, нехай $w = f(z)$ виконує при умовах (29) взаємно однозначне і конформне відображення області D на круг: $\Delta: |z| < \rho$, а $z = \varphi(w)$ є обернена функція. Діючи аналогічно п. 1, одержимо:

$$J_p = \iint_\Delta |\lambda'[\varphi(w)]|^p |\varphi'(w)|^2 \, du\, dv$$

або, заводячи полярні координати $w = re^{i\theta}$ і вважаючи

$$\lambda'[\varphi(w)] = \Lambda_1(w) = 1 + \ldots,$$

знайдемо:

$$J_p = \int_0^{\rho} r\,dr \int_0^{2\pi} |\Lambda_1(re^{i\theta})|^p |\varphi'(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Вважаючи

$$\Phi_1(w) = \Lambda_1(w)\varphi'^{\frac{2}{p}}(w), \quad \Phi_1(0) = 1,$$

матимемо:

$$\int_0^{2\pi} |\Lambda_1(re^{i\theta})|^p |\varphi'(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} |\Phi_1(re^{i\theta})|^p d\theta,$$

звідси в наслідок леми п. 1 одержимо:

$$\int_0^{2\pi} |\Lambda_1(re^{i\theta})|^p |\varphi'(re^{i\theta})|^2 d\theta \geqslant 2\pi |\Phi_1(0)|^p = 2\pi$$

і, нарешті,

$$J_p \geqslant 2\pi \int_0^{\rho} r\,dr = \pi\rho^2.$$

Рівність має місце тільки в тому випадку, коли $\Phi_1(w) = \text{const} = 1$, тобто:

$$\Lambda_1(w)\varphi'^{\frac{2}{p}}(w) = 1 \text{ або } \lambda'(z) = [f'(z)]^{\frac{2}{p}} \{[f'(z_0)]^{\frac{2}{p}} = 1\},$$

звідки

$$\lambda(z) = \int_{z_0}^{z} [f'(z)]^{\frac{2}{p}} dz.$$

Така єдина функція, для якої J_p досягає своєї нижньої границі $\pi\rho^2$.

Середнє значення порядку p від $|\lambda'|$ є

$$m'_p = \left(\frac{J_p}{d}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\frac{\pi\rho^2}{d}\right)^{\frac{1}{p}},$$

при чому $m'_p = \left(\frac{\pi\rho^2}{d}\right)^{\frac{1}{p}}$ тільки для функції $\lambda' = [f'(z)]^{\frac{2}{p}}$. Коли p необмежено зростає, то m'_p прямує до одиниці, і функція прямує до $z - z_0$.

Якщо $p = 2$, то J_p має просте геометричне значення: J_2 є площа поверхні Рімана, яка виходить у відображенні області D. Зазначимо, що при $p = 2$ мінімізуюча функція буде:

$$\lambda(z) = \int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz = f(z).$$

Отже, серед всіх функцій, голоморфних в обмеженій області D і нормованих у точці z_0, існує єдина функція, яка реалі-

зує мінімум площі поверхні Рімана, перетвореної з D; ця функція виконує взаємно однозначне конформне відображення області D на круг з центром у початку координат.

Замість того, щоб шукати мінімум площі при умовах нормування функції, можливо за принципом взаємності накласти умову на перетворену площу і шукати максимум $|\lambda'(z_0)|$. Отже, розглянемо всі функції $\mu(z)$, голоморфні в області D, які задовольняють умовам $\mu(z_0)=0$, $\mu'(z_0)\neq 0$ і перетворюють область D у поверхню Рімана даної площі A. Тоді функція $\frac{\mu(z)}{\mu'(z_0)}$ перетворює область D у поверхню Рімана площі, рівної $\frac{A}{|\mu'(z_0)|^2}$, і тому що вона нормована у точці z_0, то матимемо згідно з попереднім:

$$\frac{A}{|\mu'(z_0)|^2}\geqslant \pi\rho^2,$$

де ρ — радіус, що відповідає точці z_0 і області D. Отже,

$$|\mu'(z_0)|^2\leqslant\frac{A}{\pi\rho^2}$$

$$|\mu'(z_0)|\leqslant\sqrt{\frac{A}{\pi\rho^2}}.$$

Максимум $|\mu'(z_0)|$ досягається тільки, якщо $\frac{\mu(z_0)}{\mu'(z_0)}$ реалізує взаємно однозначне і конформне відображення області D на круг з центром у початку координат.

Якщо $f(z)$ означає функцію, нормовану в точці z_0, яка виконує це відображення, то умова, необхідна й достатня для того, щоб функція $\mu(z_0)$ давала максимум $|\mu'(z_0)|$, отже, запишеться так:

$$\frac{\mu(z)}{\mu'(z)}=f(z),$$

звідки

$$\mu(z)=Cf(z).$$

За умовою перетворення площа рівна A і через це $|C|^2\pi\rho^2=A$, звідки $|C|=\sqrt{\frac{A}{\pi\rho^2}}$.

Отже, шукана функція $\mu(z)$ буде вигляду

$$e^{i\omega}\sqrt{\frac{A}{\pi\rho^2}}\cdot f(z).$$

Функції цієї форми здійснюють взаємно однозначне і конформне відображення області D на круг із центром у початку координат і площі A. Звідси випливає: *серед функцій $\mu(z)$, що є голоморфні в області D, $\mu(z_0)=0$, $\mu'(z_0)\neq 0$ і перетворюють D у поверхню Рімана площі A, ті функції, які реалізують максимум $|\mu'(z_0)|$, виконують взаємно однозначне конформне відображення області D на круг із центром у початку координат площі A.*

Покажчик

Стор.

Абеля теорема друга 62
— — перша 55
Абсолютно збіжний ряд 34
Алгебри основна теорема 228
— основний принцип 214
Александров 163
Аналітична дуга правильна . . . 289
— функція в області 69
— — (можливі узагальнення теореми єдиності) 248
— — (однозначне визначення по її граничних значеннях) 305
— — повна 271
— — поняття повної аналітичної функції в розумінні Вейерштрасса 268
— — властивість єдиності 191
Аналітичне продовження 267,274
— — гармонічної функції 291
— — принцип Шварца 290
Аналітичної функції нулі 195
— — розклад у степеневий ряд . 187
Ангармонічне відношення 99,113
Аргументу похідної геометричний зміст 76
— — гідродинамічне тлумачення . 142
Аргумент комплексного числа . . 19
Асоціативність додавання 16
— множення 16
Афікс 100

Байдужа точка 104
Бібербах (Bieberbach) 186
Блашке (Blaschke) 248
Блоха твердження 256
Больцано—Вейерштрасса принцип . 26
Бор (Bohr) 82

Вектор 18
Векторне поле 138
Величина зміни масштабу 79
Вейерштрасса перша теорема . . . 182
— теорема друга 198
— — про значення функції поблизу істотно особливої точки . . . 207
— формула розкладу цілої трансцендентної функції на добуток лінійних множників 243,246

Стор.

Вісь дійсна 18
— уявна 18
Відношення ангармонічне 99,113
Відображення верхньої півплощини в саму себе 94
— одиничного круга самого в себе 275
— конформне 79
— — I і II роду 80
— криволінійного чотирикутника на звичайний 124
— круга на верхню півплощину . 96
— круга самого в себе 97
— області, обмеженої двома лініями, які перетинаються 120
— області, обмеженої двома дотичними колами, на верхню півплощину 124
— параболи на верхню півплощину 309
— півкола на верхню півплощину 120
— смуги на верхню півплощину 123
— системи комплексних чисел на саму себе 18
— головна частина 83
Відштовхна точка 104
Віддаль неевклідова 108
Властивості інтеграла по комплексному змінному 144
Властивість лінії Жордана 44
Властивість стереографічної проекції 32
Віднімання комплексних чисел . . 17
— рядів 36
— геометричне тлумачення 18
Внутрішня точка 43

Гармонічна функція 75
— — (аналітичне продовження) . . 291
— — (принцип симетрії) 291
— — спряжена 75,76
Гармонічної функції значення в центрі 179
Геометричне зображення комплексних чисел 18
— — числа 22
— тлумачення критерію збіжності Коші 28

Стор.

Геометричне тлумачення додавання і віднімання комплексних чисел 18
— — множення і ділення комплексних чисел 22
Геометричний зміст аргументу похідної 76
— — діференціала 82
— — модуля похідної 79
Геометрія сферична 115
Гейне—Бореля лема 49,159
Гідродинамічне тлумачення модуля і аргументу похідної 142
Гіпербола 40
— рівностороння (відображення на верхню півплощину) 307,314
Гіперболічний синус і косинус . . 68
Гіперболічні функції 68
Гіперболічних і еліптичних перетворень механічне тлумачення . 103
Гіперболічне перетворення 102
Гіперцикли 112,113
Головна частина приросту 71
— — ряду Лорана 202
Голоморфна функція в області . . 191
— — в точці 191
— — (зображення у вигляді нескінченного добутку) 245
— — (теорема про обернення) . . 256
Горицикли 111,113
Границя 23
— найбільша 57
Границь принцип 23
Гранична точка 25
Граничне число 25,57
— значення інтеграла типу Коші . 173
Гріна формула 117,133,136
Група перетворень 99

Дедекінда розріз 24,56
Ділення комплексних чисел 17
Ділення геометричне тлумачення . 22
Дійсна вісь 18
— частина комплексного числа . . 16
Дистрибутивність відносно додавання і множення 16
Диференціал 71
Диференціала геометричний зміст . 82
Диференціал повний 136
Добутки нескінченні 237
— — (основний критерій збіжності) 238
— — збіжні 237
Довжина (неевклідова) дуги 114
— — кривої 110
Додавання комплексних чисел . . . 15
— рядів 36
— асоціативність 16
— геометричне тлумачення 18
— комутативність 16
— модуль 16

Стор.

Евклідове зображення геометрії Лобачевського 107,113
Екстремальна проблема друга . . 371
— — перша 369
Елемент 275
Елементарна робота 131
Еліпс (відображення середини на верхню півплощину) 319
Еліптична функція 335
Еліптичного перетворення геометричне тлумачення 105
Еліптичне перетворення 102
Ейлера формула, що пов'язує показникову функцію з тригонометричною 66

Жордана лінії геометричне тлумачення 44
Жордана лінія 43
— — гладка 128
Жордана теорема 283
Жулія (G. Julia) 186

Замкнута область 46
Зв'язна множина 271
Зв'язності умова 278
Збіжності природна межа 270
— круг 55
— радіус 57,58
Збіжність (рівномірна) степеневого ряду 62
Збіжна послідовність 27
Збіжний (абсолютно) ряд 35
— (умовно) ряд 35
Зіркоподібна область 363
Зіркоподібності межа 363
Зіркоподібні функції 364
Змінне комплексне 42
Зовнішня точка 44
Зображення комплексних чисел на сферах 29
Зсув паралельний 88

Ізольована особлива точка 204
Інверсія 22,90
— прямої лінії відносно кола . . . 125
Інтеграла криволінійного властивості 132
— по комплексному змінному властивості 144
— типу Коші значення 177
Інтеграл Коші 150,166,169,178
— криволінійний 127,131
— неозначений по комплексному змінному 156
— визначений 128
— по комплексному змінному . . . 142
— Пуассона 178
— типу Коші 169
— типу Коші (вираз граничних значень із середини контура) . . . 176

Стор.

Інтеграл типу Коші (вираз зовнішніх граничних значень) 177
— — — значення в точці 177
— — — граничні значення 173
Інтегрування рівномірно збіжного ряду 145
Істотно особлива точка 304,207

Каратеодорі (Caratheodory) . . 302
Колмогоров 163
Кебе константа 356
Кола неевклідова довжина 114
Коло неевклідове 110,113
— фундаментальне 108
Комутативність додавання 16
— множення 16
Комплексна числова площина . . . 18
Комплексного змінного область зміни 42
— — функція 42
— — площина 31
— числа модуль 19
— — аргумент 19
— — дійсна частина 16
— — уявна частина 16
— — тригонометрична форма . . . 20
Комплексне змінне 42
— число 15
Комплексних чисел віднімання . . 17
— — ділення 17
— — зображення на сфері 29
— — рівність 16
— — додавання 15
— — множення 15
Консерватизм кутів 79
Конформне відображення 79
— — I і II роду 80
— — (принцип збереження області). 278
— — (відповідність границь) . . . 328
— — (умови, що визначають єдиність конформного відображення) 277
Косинус гіперболічний 68
Коші—Адамара формула 59
— інтеграл 150,166,169,178
— критерій збіжності 28
— — критерію збіжності геометричне тлумачення 28
— Рімана умови 71,84,173
— — — в полярних координатах . 85
— теорема 146,147,150
— теорема (доведення) 153
— — (узагальнення) 165
— формула 166
— — (поширення на випадок складних контурів) 167
Кратна точка 25,42
Криволінійного інтеграла механічний зміст 131
— — властивості 132
Криволінійний інтеграл . . . . 127—131

Стор.

Криволінійний інтеграл (умови незалежності значень від путі інтегрування) 135
Критерій збіжності Коші 28
Критичні точки 119
Круг n-листий 120
— збіжності . . . . . 55—57
Кругова властивість лінійних функцій 91
Кусково-гладка лінія 128
Кут неевклідів 108
Кут паралелізму в геометрії Лобачевського . . . . . 115—116
— (неевклідів) паралелізму 115

Ландау теорема 260
Лапласа рівняння 75
Лема Гейне—Бореля 49,159
— про граничну функцію відображення 325
Лемніската 40
Лінійна функція загальна 90
— — ціла 88
Лінійного перетворення нормальна форма 102
Лінійне перетворення на верхню півплощину одиничного круга 96,125—126
— — одиничного круга самого в себе . . . . . 97,125—126
Лінійних перетворень типи 101
Лінійних функцій кругова властивість 91
Лінії Жордана властивість 44
Лінія Жордана 43
— — гладка 128
— кусково-гладка 128
— рівня 140
Ліувілля теорема 197,208
Лишок (обчислення лишку відносно полюса) 223
— логарифмічний 226
— основна теорема 223
— (застосування теорії лишків до обчислення означених інтегралів) 229—235
— (теорема про суму лишків відносно всіх особливостей) 226
— функції відносно нескінченно віддаленої точки 225
— — — ізольованої особливої точки 222
Лобачевського постулат 107
Логарифмічна функція 160
Логарифмічний лишок 226
Локсодромічне перетворення . . . 102
Ломан (Loman) 75
Лорана розклад в околі нескінченно віддаленої точки 210
— розклад функції $e^{1/z}$ 209
— — — $\operatorname{ctg} z$ 209
— ряд . . . . . 200—202

Стор.

Лорана ряд (єдиність розкладу) . . 203
Лузін 307

Масштабу величина спотворення . 79
Межа (природна) збіжності 270
— зіркоподібності 363
— області 44
— опуклості 362
— для модулів коефіцієнтів у розкладі однолистої функції 360
— опуклості модуля однолистої функції 358
Меншов Д. 81
Мероморфна функція 213,337
— — (зображення у вигляді відношення двох цілих функцій) . . . 246
Механічний зміст криволінійного інтеграла 131
Міттаг—Леффлера задача 247
Многозначна функція 43
— — (приклади) 272
Многозв'язна область 45
Многокутник (відображення зовнішньої області на верхню півплощину) 345
— (відображення на верхню півплощину) 337
Множення двох спряжених чисел . 16
— комплексних чисел 15
— рядів 38
— асоціативність 16
— геометричне тлумачення 22
— комутативність 16
— модуль 17
Множина зв'язна 271
Множник подвійної точки 104
Модуль комплексного числа . . . 19
— додавання 16
— множення 17
Модуля максимального принцип . . 194
— похідної геометричний зміст . . 79
— — гідродинамічне тлумачення 142
Моногенність функції в точці . . . 69
Морера теорема 172,183
Муавра формула 20

Невихровий потік рідини 138
Неевклідова довжина кривої . . . 110
— довжина дуги 114
— довжина кола 114
— коло 110,113
— площина 108
— площа 111
— — круга 116
— — трикутника 116
— пряма 108
— віддалі обчислення 109,114
Неевклідова трикутника сума кутів 118
— віддаль 108

Стор.

Неевклідів кут 108
— — паралелізму 115
— центр 110
Неевклідові переміщення 108
— прямі 113
— радіуси 110
— точки 113
Необмежена послідовність 26
Невизначений інтеграл по комплексному змінному . . . . . 156—158
Нерухома точка перетворення . . 92
Неперервність у замкнутій області 48
— рівномірна 49
— суми ряду (теорема) 52
— функції в області 46
— — у точці 46
— — комплексного змінного . . . 46
Нескінченнозначна функція 43
Нескінченнозначність 162
Нескінченно віддалена точка . . 30—31
Нескінченні добутки 237
— — (основний критерій збіжності)
— — збіжні 237
— — розбіжні 237
Нормальна форма лінійного перетворення 102
Нулі аналітичної функції 196
Нуль кратний 197
Нуль множина 178
— простий 197
Нуля порядок 197

Обернена функція 43
Обернене перетворення 98
Обертання 88,98
— теорема 389
Області границя 44
— збіжності степеневого ряду . . 54
Область 280
— замкнута 46
— зіркоподібна 363
— зміни комплексного змінного . . 42
— многозв'язна 45
— (загальне означення) 43
— обмежена 46
— однозв'язна 45
— існування функції 271
Обмежена область 46
— послідовність 26
Обтікання кругового циліндра потоком без циркуляції 215
Однозв'язна область 45
Однозначна функція 43
Однозначні функції (приклади). . . 272
Ознака збіжності ряду 34
Означений інтеграл 127
Опуклі функції 365
Опуклості межа 362
Околу умова 278

Стор.

Окіл нескінченно віддаленої точки 210
— — — — (поведінка функції) . . 211
— ізольованої особливої точки . 204,210
— однолистий 278
— точки 46,278
Операції над неперервними функціями 47
Особлива (істотно) точка 204,207
— точка 189
— — ізольована 204
— — (поведінка функції в околі ізольованої особливої точки) 207
— — усувана 204,211,212

Парабола подвійна 310
Параболічне перетворення . . . 102,103
Паралелізму неевклідів кут 115
Паралельні прямі 107
Паралельний зсув 88,99
Первісні фактори (множники) . . . 244
Переріз Дедекінда 24,56
Переміщення неевклідові 108
Переставлення членів ряду 38
Перетворення верхньої півплощини в одиничний круг 96
— одиничного круга самого в себе 97
— лінійне 92
— обернене 98
— подібності 89
— подібне 99
— за допомогою взаємних радіусів векторів (інверсія) 22,90
Перетворень група 99
Перетворення траєкторії 103
Пікара мала теорема 262
— теорема 256
— — загальна 265
Плоский потік 148
Площина комплексна числова . . . 18
— комплексного змінного 30
— — — розширена 30
— неевклідова 108
Площ зовнішня теорема 353
—внутрішня теорема 351
Площа круга в сферичній геометрії
— неевклідова 111
— (неевклідова) круга 116
Поверхня Рімана 119,123
Подвійні ряди 36
Подібності перетворення 89
Показникова форма представлення комплексного числа 67
Поле векторне 138
Полюс 212
— кратний 205
— порядку m 211
— простий 205
— функції 204,205
Понселе точки 106,110

Стор.

Порядок нуля 197
Послідовність обмежена 26
— необмежена 26
— збіжна 27
Постулат Лобачевського 107
Потенціал швидкостей 140
Потенціальна функція потоку . . . 217
Потоку функція 141
— циркуляція 139,140,149
Потік рідини невихровий 138,139
— — вільний від джерел . . . 138,139
— плоский 148
Похідна 69
Правильна частина ряду Лорана . 202
Привалов І. 186,293,307
Приклади неперервних ніде не диференційовних функцій 70
— однозначних функцій 272
Примітивна функція 157
Прінгсгейм 64
Прінгсгейма узагальнення теореми Абеля 64
Принцип симетрії узагальнення . 289,290
Принцип Больцано-Вейерштрасса . 26
— взаємно однозначної відповідності 282
— максимального модуля 194
— симетрії 288
— симетрії для гармонічних функцій 291
— теорії границь 23
Притягаюча точка 104
Проекція стереографічна 30
Простий нуль 197
Пряма неевклідова 107
Прямокутник (відображення на верхню півплощину) 331
— періодів 337
Прямі неевклідові 113
— паралельні 107
Пуассона інтеграл 178

Радикал 118
Радіус сферичний 115
— збіжності 57,58
Радіуси неевклідові 110
Раціональна функція 70
— — (розклад на найпростіші дроби) 214
Рівняння Лапласа 75
Робота повна 132
— елементарна 131
Рівність комплексних чисел 16
Рівномірна неперервність 49
Рівномірно збіжного ряду інтегрування 145
Рівномірно збіжного ряду ознака . 53
Рівномірно збіжний ряд . . . . 50—51
Різниця двох комплексних чисел . 17

Стор.

Розклад аналітичної функції в степеневий ряд 187
— раціональної функції на найпростіші дроби 214
Розтягу постійність 79
Рімана сфера 30,105
— теорема 322
— — (доведення) 325
— Шварца принцип симетрії . . . 283
Ріманова поверхня 119,123
Руше теорема 234
Ряд 33
— абсолютно збіжний 35
— Лорана . . . . . 200—202
— — (єдиність розкладу) 203
— — правильна частина і головна частина 202
— ознака збіжності 34
Рядів додавання і віднімання . . . 36
Рядів множення 38
Ряд: переставлення членів 38
— рівномірно збіжний . . . . . 50—51
— — — (ознака) 53
— розбіжний 33
— (розбіжний) коливний 33
— власне розбіжний 33
— збіжний 33
— Тейлора 186
— умовно збіжний 35
Ряди подвійні 36
— степеневі 54
— функцій 50

Силова функція 138
Симетрії принцип 288
Симетричні (взаємно) точки . . . 90
— точки відносно дуги 290
— (взаємно) точки відносно кола . 22
Синус гіперболічний 68
Спотворення теорема 356
Спряжена гармонічна функція . 75—76
Спряжене комплексне число . . . 16
Степенева функція 118
Степеневого ряду рівномірна збіжність 62
Степеневі ряди 54
Стереографічна проекція 30
Стереографічної проекції основна властивість 32
— — формула . . . . . 31—32
Сума рядів 36
— кутів неевклідового трикутника 118
Сфера Рімана 30,105
— числова 30
Сферичний радіус 115

Теорема Абеля друга 63
— — перша 55
— Вейєрштрасса друга 198

Стор.

Теорема Вейєрштрасса перша . . 182
— обертання 389
— єдиності (узагальнення) 307
— спотворення 356
— Коші . . . . . 146—147,150
— — (доведення) 153
— — (узагальнення) 165
— Ландау 260
— Ліувілля 197,208
— (мала) Пікара 262
— Морера 172,183
— про подвійні ряди 36
— про лишки 223
— про неперервність суми рівномірно збіжного ряду 52
— про рівномірну неперервність . 49
— (основна) алгебри 228
— Пікара 256
— площ (зовнішня) 353
— — (внутрішня) 351
— Руше 234
— про модуль і аргумент 20
Тейлора ряд 186
— формули 187
Типи лінійних перетворень 101
Точка байдужа 104
— нескінченно віддалена . . . . 30—31
— — — (її окіл) 210
— зовнішня 44
— внутрішня 44,271
— гранична 44
— кратна 25,42
— (m-листа) розгалуження 278
— нерухома 92
— особлива 189
— — (ізольована) 204
— — усувана 204,211,212
— відштовхна 104
— правильна 189
— гранична 25
— притягальна 104
— істотно особлива 204,207
Точки взаємно симетричні (інваріантність при лінійному перетворенні) 95
— (подвійні) перетворення 304
— кратні 42
— критичні 119
— Понселе 106,110
Траєкторія перетворення 103
— течії 217
Трикутника неевклідова площа . . 116
Трикутник (відображення на верхню півплощину) 342
— прямокутний 345
— рівнобедрений прямокутний . . 345
— рівносторонній 345
Тригонометрична форма комплексного числа 20
Тригонометричні функції 55

Стор.

Умова незалежності значення криволінійного інтеграла від путі інтегрування 135
Умови Коші—Рімана 71,84,173
— — — в полярних координатах . 85
— моногенності функції 73
Умовно збіжний ряд 35
Уявна вісь 18
— частина комплексного числа . . 16

Фактори (множники) первісні . . . 244
Формула Гріна 117,133,136
— Коші 166
— — (поширення на випадок складних контурів) 167
— Муавра 20
— Якобі і Іенсена 249
Формули паралельного перенесення осей 88
— додавання і віднімання синуса і косинуса 67
— стереографічної проекції 31
Формули Тейлора 187
Френеля інтеграли 236
Фундаментальне коло 108
Функції опуклі 364
— гіперболічні 68
— неперервність 46
— тригонометричні 68
Функціональні ряди 50
Функція аналітична в області . . . 69
— — (властивість єдиності) 191
— нескінченнозначна 43
— допоміжна 324
— гармонічна 76
— — спряжена 76
— голоморфна в області 191
— — в точці 191
— двоякоперіодична (еліптична) . 335
— зіркоподібна 364
— комплексного змінного 42
— лінійна загальна 90
— — ціла 88
— логарифмічна 160
— мероморфна 213,246,337

Стор.

Функція многозначна 43
— нормована 350
— обернена 43
— однозначна 43,272
— показникова 68
— потоку 141
— — потенціальна 217
— — характеристична 140,148
— примітивна 157
— раціональна 70
— силова 138
— степенева 118
— трансцендентна 213
— ціла 212
— еліптична 335

Характеристична функція потоку . 140, 148,215

Центр неевклідів 110
Ціла трансцендентна функція . . . 213
— функція 212
— — (зображення у вигляді нескінченного добутку) 245
Циліндра (круглого) обтікання потоком без циркуляції 215
Циркулярний (чисто) потік 217
Циркуляція потоку 139,140,149

Частка двох комплексних чисел . . 17
Числова сфера . . . . . 30—31
Число комплексне 15
— граничне 58
Чотирикутник криволінійний . . . 12

Шварца лема 29
— — (загальна форма) 302
— — (до оцінки похідної функції) 301
— нерівність . . . . . 330—331
— принцип аналітичного продовження 297
Шотткі нерівність 26
— — (узагальнена) 2

Якобі і Іенсена формула 245

ПОМИЛКИ

Стор.	Рядок	Надруковано	Треба
39	17 зв.	числа (22)	числа (32)
50	18 зв.	Яку лемі	Як у лемі
91	13 зв.	$z = \infty$	$z \neq \infty$
123	13 зн.	(крім $w = 0$)	(крім $w = 0, \infty$)
241	1 зв.	$. (1 + \alpha^{n}) .$	$(1 + \alpha_n)$
241	1 зв.	$. . . \beta^{n}$	β_n
241	7 зн.	$u^{n}(z) .$	$u_n(z) .$
253	1 зн.	$. z^{k} .$	z_k
291	19 зн.	$\varphi(z)$	$\varphi(t)$
310	Рис. 110	Повернути на 180°	
373	14 зн.	$\frac{\mu(z)}{\mu'(z)}$	$\frac{\mu(z)}{\mu'(z_0)}$

С
Зам. № 1711