22.151.01
П58

М. ПОПРУЖЕНКО

ЗБІРНИК ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

ПЛАНІМЕТРІЯ

Ціна 75 коп.

ДЕРЖАВНЕ
УЧБОВО-ПЕДАГОГІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
„РАДЯНСЬКА ШКОЛА“

М. ПОПРУЖЕНКО

ЗБІРНИК ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

ПЛАНІМЕТРІЯ

ЗАДАЧІ НА ОБЧИСЛЕННЯ

ПЕРЕКЛАД З 4-ГО РОСІЙСЬКОГО ВИДАННЯ

ДОПУЩЕНО НКО УРСР
ЯК ПОСІБНИК ДЛЯ ВЧИТЕЛІВ

ДЕРЖАВНЕ
УЧБОВО-ПЕДАГОГІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
РАДЯНСЬКА ШКОЛА
КИЇВ — 1937

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літописі Укр. Друку“, „Картковому репертуарі“ та інших покажчиках Української Книжкової Палати

Редактор *Гурін* Техредактор *Бучін*
Літредактор *Дінабург* Коректор *Султанський*

„Радшкола“. Видання № 238. Зам. № 1150. Уповнов. Головліту № 4752. Тираж 5.200. Формат паперу 60×92 1/16. Друк. арк. 4 1/4. Папер. арк. 2 1/8. Авт. арк. 5,63. Знаків в 1 пап. арк. 89.480. Здано на виробництво 26/VIII 1937 р. Підписано до друку 25/X 1937 р. Ціна книги 55 коп. Оправа 20 коп.

Книжкова фабрика ДВРШ ім. Г. І. Петровського, Харків.

Якщо в цій книжці будуть дефекти, просимо повернути її для заміни на адресу: Книжковій фабриці ім. Г. І. Петровського, Харків, вул. К. Маркса № 1.

ПЕРЕДМОВА.

Збірники задач з планіметрії, що є тепер, містять головним чином нескладні вправи, які зводяться здебільшого до безпосереднього підставляння числових значень різних величин, що входять у формули. „Задачник по геометрии“ Б. Н. Делоне і О. К. Житомирського, що вийшов з друку, має в собі багато цікавих і важких задач, переважна більшість яких є задачами на доводження і на побудову. Тим часом, для підвищення геометричної культури учнів надзвичайно важливо навчитись розв'язувати задачі, що потребують суто геометричних міркувань, а не самих тільки алгебричних і арифметичних викладок. З другого боку, дуже важливим є вміння довести задачу до відповіді („до числа“), а не обмежуватись установленням правильності „ходу розв'язування“, що нерідко в шкільній практиці вважається „цілком достатнім“.

„Збірник геометричних задач“ М. Попруженка є для цього прекрасним посібником; у ньому немає (або майже немає) шаблонних задач. Майже кожна задача вимагає оригінального підходу, і часто вдалі геометричні міркування безпосередньо приводять до відповіді, без складних обчислень, які здаються неминучими при трафаретному методі розв'язування. Книжка містить винятково багатий вибір задач (головним чином на обчислення) і може бути прекрасним посібником як для учнів, що хотять підвищити рівень своїх геометричних знань, так і для викладача в його класних заняттях.

Це 4-е видання значно відрізняється від попереднього 3-го видання, де автор, призначаючи книжку для повторення курсу планіметрії, не розміщав задач в якомусь певному порядку, наприклад, за ступенем трудності, за належністю їх до певного розділу курсу геометрії та ін.

У цьому виданні така класифікація проведена. Всі задачі розподілені за характером геометричних фігур, що входять

до них, на п'ять розділів. Щождо розміщення задач усередині кожного розділу, то тут залишено приблизно ту ж послідовність, як у попередньому виданні, щоб дати можливість тому, хто розв'язує задачу, самостійно віднести задачу до того чи іншого розділу геометрії і відповідно дібрати найкращий метод розв'язування. Частину задач, як таку, що не становить інтересу (наприклад, приклади з аналітичної геометрії), виключено; замість них додано деяку кількість нових, головним чином на виведення різних залежностей між лінійними елементами трикутників.

I. ТРИКУТНИКИ.

1. З середини O гіпотенузи поставлений до неї перпендикуляр, який перетинає один катет у точці K, а продовження другого в точці M. Знайти сторони і площу прямокутного трикутника, якщо $OK = a$ і $OM = b$.

2. В рівнобедреному трикутнику одна з рівних сторін 5, а основа 6. Знайти віддаль між ортоцентром (точка перетину висот) і центром ваги цього трикутника.

Катети прямокутного трикутника є b і c. Знайти бісектрису прямого кута.

4. $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$.

5. Медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 5. З середини її поставлений перпендикуляр до перетину з більшим катетом, і довжина одержаного відрізка дорівнює $1^7/_8$. Знайти катети і площу прямокутного трикутника.

6. $S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{abch_ah_bh_c}$.

7. Обчислити площу трикутника за трьома його медіанами.

8. Визначити площу трикутника за трьома його висотами.

9. Основа трикутника 15. Висота і медіана, відповідні основі, є $11\frac{1}{5}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{505}$. Знайти інші сторони.

10. Дано прямокутний трикутник ABC, катети якого є: $AB = 3$ і $AC = 4$. З середини O більшого катета поставлений перпендикуляр до перетину в точці K з продовженим перпендикуляром з вершини прямого кута на гіпотенузу.

Знайти: 1) площу трикутника AOK; 2) частину гіпотенузи даного трикутника, яка лежить усередині трикутника AOK; 3) віддалі CK і BK.

11. У трикутнику, сторони якого 4, 5 і 6, проведені бісектриси меншого кута і суміжного з ним. Знайти відрізок протилежної сторони, який лежить між цими бісектрисами.

12. У рівносторонньому трикутнику ABC, площа якого дорівнює S, відкладені від вершини B частини BM і BN, що дорівнюють $^1/_3$ сторони правильного трикутника; точки M і N сполучені з протилежними вершинами, при чому прямі AM і CN перетинаються в точці D. Знайти площу чотирикутника $BMDN$.

13. У трикутнику між сторонами a і b лежить кут у $30°$ Знайти третю сторону і площу трикутника.

14. У трикутнику між сторонами a і b лежить кут у 45°. Знайти третю сторону і площу.

15. У трикутнику між сторонами a і b лежить кут у 60°. Знайти третю сторону і площу.

16. У трикутнику між сторонами a і b лежить кут у 150°. Знайти третю сторону і площу.

17. У трикутнику між сторонами a і b лежить кут у 120°. Знайти третю сторону і площу.

18. У трикутнику між сторонами a і b лежить кут у 75°. Знайти третю сторону і площу.

19. У трикутнику між сторонами a і b лежить кут у 135°. Знайти третю сторону і площу.

20. Одна з рівних сторін рівнобедреного трикутника $= a$, кут між рівними сторонами $= 144°$. Знайти площу трикутника.

21. У трикутнику одна сторона $= a$, а прилеглі до неї кути — 30° і 45°. Знайти інші сторони і площу.

22. Прямокутний трикутник, катети якого a і $2a$, поділений на дві рівновеликі частини прямою, перпендикулярною до гіпотенузи. Знайти довжину цієї прямої і віддаль її від вершини меншого кута.

23. В прямокутному трикутнику менший катет дорівнює $\sqrt{3}$. Пряма, що проведена через вершину прямого кута і утворює із згаданим катетом кут, який дорівнює $^1/_3$ прямого, відрізає в гіпотенузі відрізок, що дорівнює $^1/_3$ гіпотенузи (рахуючи від меншого катета). Знайти другий катет, гіпотенузу і площу трикутника.

24. Вершини рівностороннього трикутника лежать на трьох паралельних прямих, при чому середня паралель віддалена від двох інших на a і b. Знайти сторону рівностороннього трикутника.

25. У трикутнику ABC кут A вдвоє більший кута B. За даними сторонами b і c знайти a.

26. Трикутник, сторони якого 13, 14 і 15, поділений на дві рівновеликі частини прямою, перпендикулярною до більшої сторони. Знайти довжину бісектриси і віддаль її від вершини більшої сторони.

27. $$(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

28. Знайти довжину h перпендикуляра, опущеного з вершини прямого кута на гіпотенузу прямокутного трикутника, катети якого є b і c.

29. На гіпотенузі BC прямокутного трикутника BAC побудований поза ним квадрат, і з центра O квадрата опущені перпендикуляри OK і OM на катети. Визначити вид і площу чотирикутника $OKAM$, якщо катети прямокутного трикутника є 3 і 4.

30. З вершини башти в 30 *м* заввишки видно міст, напрям якого лежить в одній вертикальній площині з віссю башти.

Промені зору, що йдуть до кінців моста, утворюють з вертикаллю кути в 60° і 45°. Визначити довжину моста.

31. Через середину O сторони AC рівностороннього трикутника ABC проведена пряма KN, яка зустрічає BC в N, а продовження AB — в K. Знайти KN, якщо $\frac{ON}{OK} = \frac{1}{2}$ і $AC = 4\sqrt{3}$.

32. В трикутнику ABC: $AB = 6$, $AC = 4$, $BC = 5$. Від точки A по сторонах AC і AB відкладені відповідно $AK = 3$ і $AM = 2$. Знайти периметр чотирикутника $BMKC$ і площу прямокутника, побудованого на його діагоналях.

33. Висота трикутника, що дорівнює 4, поділяє основу його на два відрізки, що відносяться, як 1 : 8. Знайти довжину прямої, яка паралельна висоті і поділяє трикутник на дві рівновеликі частини.

34. В рівносторонній трикутник, сторона якого = 3, вписаний другий рівносторонній трикутник, втроє менший першого площею. Знайти віддаль між суміжними вершинами цих трикутників.

35. Трикутник ABC, сторони якого a, b, c, поділений прямою KL (протилежною A) на дві частини, що мають однаковий периметр і однакову площу. Знайти площу і периметр прямокутника, побудованого на відрізках AK і AL.

36. Різниця проекцій катетів на гіпотенузу дорівнює висоті h відносно гіпотенузи. Знайти гіпотенузу і катети.

37. Дано трикутник із сторонами a, b, c. З двох висот його h_a і h_b і четвертої пропорціональної $\frac{h_a h_b}{h_c}$ до трьох висот складений новий трикутник. Знайти відношення площі першого трикутника до площі останнього.

38. Через точку D, взяту на основі BC трикутника ABC, проведені прямі DP, DQ, відповідно паралельні двом сторонам трикутника, і точки P і Q сполучені. Знайти площу трикутника APQ, якщо площа $DQC = S$, а площа $PBD = S_1$.

39. Бісектриса прямого кута визначає на гіпотенузі відрізки p і q. Знайти: 1) катети прямокутного трикутника; 2) висоту відносно гіпотенузи; 3) бісектрису прямого кута.

40. Знайти проекцію висоти трикутника відносно сторони a на медіану, що відповідає тій же стороні.

41. Трикутник, сторони якого 13, 14 і 15, поділений на три трикутники прямими, що сполучають центр ваги його з вершинами трикутника. Знайти площу кожного з цих трикутників.

42. Перпендикуляр, опущений з центра ваги трикутника на висоту, дорівнює 6, а основа трикутника = 20. Знайти відрізки, утворювані висотою на основі.

43 Трикутник ABC поділений на три рівновеликі частини двома прямими DE, DF, що виходять з точки D, взятої на стороні AB. Визначити положення прямих DE і DF, якщо $AC = 30$, $AB = 32$ і $AD = 25$.

44. З точки D, взятої на стороні AB трикутника ABC, проведені чотири прямі: DE, DF, DG і DH, що поділяють площу трикутника на п'ять частин; частини ці, рахуючи від A, відносяться, як $1:2:3:4:5$. Визначити положення прямих DE, DF, DG і DH, якщо $AB=112$, $AC=108$ і $AD=84$.

45. Трикутник із сторонами 13, 14 і 15 поділений на три рівновеликі частини прямими, перпендикулярними до більшої сторони. Знайти віддалі цих прямих від найближчих до них вершин трикутника, що лежать на більшій стороні.

46. В трикутнику ABC взята точка K на AC так, що $CK=\frac{AC}{3}$. Двома прямими EF і GH, паралельними BK, даний трикутник поділений на частини, що відносяться (рахуючи від A), як $1:2:3$. Знайти AF і AH, якщо $AC=15$.

47. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC взяті відповідно точки C_1, A_1, B_1 так, що $AC_1=\frac{1}{5}AB$; $BA_1=\frac{1}{5}BC$ і $CB_1=\frac{1}{5}CA$. Точки A_1, B_1 і C_1 сполучені прямими лініями. Знайти площу трикутника $A_1B_1C_1$, якщо площа даного $=S$.

48. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC взяті відповідно точки C_1, A_1, B_1 так, що $AC_1=\frac{1}{5}AB$; $BA_1=\frac{1}{5}BC$ і $CB_1=\frac{1}{5}CA$. Прямі AA_1, BB_1 і CC_1, перетинаючись, утворюють трикутник, площу якого треба знайти, якщо площа даного $=S$.

49. $S=\frac{l_a l_{1a}(b^2-c^2)}{4bc}$; $(b>c)$.

50. $l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

51. $l_{1a}=\frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$.

52. $\frac{bc}{l_a l_{1a}}-\frac{ca}{l_b l_{1b}}+\frac{ab}{l_c l_{1c}}=0$; $(a>b>c)$.

53. $4b^2c^2=l_a^2(b+c)^2+l_{1a}^2(b-c)^2$.

54. Дорога в гору піднімається двома уступами у вигляді ламаної лінії; перший уступ утворює з горизонтом кут у 30°, другий — 75°, а лінія, яка сполучає вершину гори з основою, нахилена до горизонту під кутом у 60°. Довжина першого уступу — 1 *км*. Знайти висоту гори.

55. Якщо n_c означає проекцію m_c на сторону c, то:

$$a^2-b^2=2cn_c.$$

56. З середини основи a рівностороннього трикутника хорду, паралельну основі, видно під прямим кутом. Знайти довжину цієї хорди.

57. На стороні BC трикутника ABC побудовані два рівносторонні трикутники BCD і BCD'. Знайти довжини прямих AD і AD', якщо сторони даного трикутника є a, b, c.

58. На стороні AB трикутника ABC відкладають довжину $AD = AC$ і проводять пряму DC. Знайти довжину її залежно від сторін трикутника.

59. З центра ваги трикутника опущені перпендикуляри на ті дві сторони, довжини яких a і b. Сума цих перпендикулярів $= l$. Знайти довжину кожного з них.

60. В рівносторонньому трикутнику ABC через середину O сторони AB проведена січна, яка зустрічає AC в M, а продовження BC — в N. Різниця площ трикутників OBN і OMA дорівнює площі даного рівностороннього трикутника. Знайти AM, якщо сторона рівностороннього трикутника $= 1 + \sqrt{2}$.

61. Знайти проекцію бісектриси кута A трикутника на одну з сторін цього кута.

62. Сторони трикутника ABC продовжені в тому ж самому напрямі до точок A_1, B_1, C_1 так, що $AA_1 = 3AB$, $BB_1 = 3BC$ і $CC_1 = 3CA$. Знайти відношення площ трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

63. На основі AB рівнобедреного трикутника ABC взята точка K так, що $AK = a$, $BK = b$. Знайти CK, якщо $AC = p$.

64. З вершини трикутника проведена до основи його a пряма, яка поділяє основу на два відрізки m і n. Знайти довжину цієї прямої, якщо сторона трикутника, прилегла до відрізка m, є c, а сторона трикутника, прилегла до відрізка n, є b.

65. Рівнобедрений трикутник, сторони якого 8, 5 і 5, поділений на три рівновеликі частини перпендикулярами, опущеними з деякої точки O на сторони трикутника. Знайти віддаль точки O від основи і від однієї з рівних сторін.

66. На перпендикулярі, поставленому з середини прямої $AB = a$, взяті три точки C, D, E, віддалі яких від AB такі:

$$\frac{a}{2}, \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad a + \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Знайти суму кутів ACB, ADB і AEB.

67. У рівнобедреному трикутнику ABC:

$$AB = AC = 75 \text{ і } BC = 90.$$

Вершини основи B і C сполучені з серединою O висоти (з A), і одержані прямі продовжені до перетину в точках C_1 і B_1 із сторонами трикутника. Знайти площу чотирикутника AC_1OB_1.

68. Для визначення довжини стіни спостерігач став спочатку на південь від одного кінця стіни, а потім на захід від другого кінця і з обох станцій, віддаль між якими 90 *м*, побачив стіну під кутом в 30°. Знайти довжину стіни.

69. $\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$

70. На неозначеній прямій $X'X$ узяті три точки A, B і C так, що:

$$AB=16\frac{1}{2},$$

$$BC=7\frac{1}{2},$$

а поза прямою XX' дана точка M така, що:

$$MAX=\frac{MBX}{2}=\frac{MCX}{3}$$

віддаль від точки M до прямої XX'

З вершин B і C трикутника опущені перпендикуляри на бісектрису кута A. Знайти їх довжини.

72. На рівних сторонах AB і AC рівнобедреного трикутника відкладені відрізки $AB_1=AC_1=\frac{h}{\sqrt{3}}$, де h — висота (з A) рівнобедреного трикутника. З B_1 і C_1 поставлені перпендикуляри до сторін до перетину в O, і з O опущений перпендикуляр OA_1 на основу.

Знайти відношення площ чотирикутників

$$AB_1OC_1,\ BB_1OA_1,\ OA_1CC_1$$

73. Сторони трикутника — 13, 20, 21. Паралельно бісектрисі найбільшого кута проведена пряма, що поділяє трикутник на дві рівновеликі площею частини. Знайти відрізки, утворювані цією прямою на більшій стороні.

74. З точки D, яка поділяє основу трикутника у відношенні $m:n$, проведені прямі, паралельні двом іншим сторонам. Знайти площі тих частин, на які поділився трикутник, якщо його площа $=S$.

75. В рівносторонньому трикутнику проведена пряма що перпендикулярна до однієї із сторін і дорівнює p. Знайти суму її проекцій на сторони трикутника.

76. З точки K на стороні AB трикутника ABC проведені прямі: KP паралельно AC і KN паралельно CB, до зустрічі із сторонами AC і CB; при цьому виявилося, що пряма NP паралельна AB. Знайти площу трикутника KNP, якщо сторони даного 13, 14 і 15.

77. Дано трикутник, сторони якого 36, 29 і 25. З середини O більшої сторони на дві менші опущені перпендикуляри OK і ON, і основи їх сполучені. Знайти площу трикутника OKN.

78. З деякої точки всередині трикутника на сторони його a, b, c опущені перпендикуляри p_1, p_2, p_3, і основи їх сполучені. Знайти площу трикутника, який утворився від сполучення основ перпендикулярів.

79. На гіпотенузі a і на катетах прямокутного трикутника побудовані квадрати (як у Піфагоровій теоремі), і вільні вершини їх сполучені. Знайти площу одержаної фігури, якщо площа трикутника $=S$.

80. На прямій AB взята точка C, а на її продовженні — точка D, так що $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$. Віддаль від точки C до середини AB дорівнює k, а віддаль від точки D до середини AB дорівнює m. Знайти довжину AB.

81. Трикутник, висота якого h, поділений прямою, паралельною основі, в крайньому і середньому відношенні. Знайти висоту меншого трикутника (більша частина площі трикутника дорівнює площі трапеції).

82. В трикутнику ABC проведені висоти CC_1 і AA_1. Знайти площу трикутника BC_1A_1, якщо $AB=13$, $BC=14$ і $AC=15$.

83. Основи трьох висот трикутника сполучені між собою. Треба знайти периметр трикутника, утвореного від цієї побудови.

84. Через деяку точку, взяту всередині трикутника, проведені три прямі, відповідно паралельні сторонам трикутника; ці прямі поділяють площу трикутника на шість частин, з яких три є трикутники з площами S_1, S_2, S_3. Знайти площу даного трикутника.

85. Всередині прямого кута вміщений рівносторонній трикутник так, що одна з вершин його лежить на бісектрисі прямого кута на віддалі d від його вершини, а дві інші вершини рівностороннього трикутника лежать на сторонах прямого кута (по одній на кожній). Знайти сторону рівностороннього трикутника.

86. Визначити площу трикутника за двома сторонами a та b і медіаною m_c відносно третьої сторони.

87. $h'_a=2k_a$.

88. $4(h_ak_a+h_bk_b+h_ck_c)=a^2+b^2+c^2$

89. $4\left(\frac{a}{k_a}+\frac{b}{k_b}+\frac{c}{k_c}\right)=\frac{abc}{k_ak_bk_c}$

90. Показати за допомогою обчислення, що три бісектриси внутрішніх кутів трикутника перетинаються в одній точці.

91. Показати за допомогою обчислення, що бісектриси двох зовнішніх кутів трикутника і одна бісектриса внутрішнього кута того ж трикутника перетинаються в одній точці.

92. Знайти віддаль (h''_a) від точки перетину двох висот трикутника до однієї з сторін його. З одержаної формули показати, що три висоти перетинаються в одній точці.

93. Перпендикуляри, опущені з точки, що лежить у площині трикутника, на сторони його, утворюють на сторонах його шість таких відрізків, що сума квадратів трьох несуміжних дорівнює сумі квадратів трьох інших.

94. Довести теорему, обернену № 93.

95. На підставі теореми № 94 довести, що перпендикуляри до сторін трикутника з їх середин перетинаються в одній точці.

96. На підставі теореми № 94 показати, що три висоти трикутника перетинаються в одній точці.

97. Віддалі трьох даних точок від сторони a трикутника є d_a, d'_a, d''_a, а відповідні віддалі тих же точок від сторони b є d_b, d'_b, d''_b. Знайти, чи лежатимуть три дані точки на одній прямій.

98. Перетворити формулу задачі № 64, припустивши, що $\frac{m}{n}=\frac{\alpha}{\beta}$

99. У прямокутнику $ABCD$ проведена діагональ AC, і трикутник ACD повернутий на 180° навколо діагоналі AC, як навколо осі, при чому точка D впала в точку D'. Знайти віддаль між вершинами B і D', якщо $AB=3$ і $BC=4$.

100. На сторонах a, b і c трикутника ABC взяті відповідно три точки A', B' і C' так, що:

$$\frac{A'B}{A'C}=u,\quad \frac{B'C}{B'A}=v,\quad \frac{C'A}{C'B}=w$$

Визначити площу трикутника $A'B'C'$ якщо площа даного $=S$.

101. На сторонах a, b і c трикутника ABC взяті три точки A', B', C'; прямі AA', BB', CC' утворюють своїми перетинами трикутник $A''B''C''$, площу якого треба знайти, якщо площа даного $=S$ і $\frac{A'B}{A'C}=u$, $\frac{B'C}{B'A}=v$, $\frac{C'A}{C'B}=w$.

102. На підставі теореми Чеви довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.

103. На підставі теореми Чеви довести, що бісектриси внутрішніх кутів трикутника перетинаються в одній точці.

104. На підставі теореми Чеви довести, що три висоти трикутника перетинаються в одній точці.

105. Три прямі, що виходять з вершин трикутника, перетинаються в одній точці, якщо поділяють протилежні сторони на частини, пропорціональні прилеглим кутам.

106. У трикутнику ABC проведена довільна пряма $C'B'$ антипаралельна стороні BC. Середина її O сполучена з A

і пряма OA продовжена до перетину з BC в α. Знайти відношення і довжини відрізків $B\alpha$ і $C\alpha$.

107. Знайти довжини симедіан трикутника залежно від сторін його.

108. Знайти ту симедіану прямокутного трикутника, яка виходить з вершини прямого кута, якщо катети його b і c.

109. З точки перетину симедіани, яка виходить з вершини A, із стороною, протилежною кутові A, опущені перпендикуляри на дві інші сторони трикутника. Знайти їх відношення і довжини.

110. Виявити за допомогою обчислення, що три симедіани трикутника перетинаються в одній точці.

111. Знайти віддалі від точки Лемуана до кожної з сторін трикутника.

112. Проекції точки K Лемуана на три сторони трикутника є K_a, K_b, K_c (K_a — проекція на сторону a та ін.). Знайти площу трикутника $K_aK_bK_c$.

113. У трикутнику ABC проведена медіана AA_1, симедіана $A\alpha$ і бісектриса $A\omega$ кута $A_1A\alpha$. Знайти відношення $B\omega$ до $C\omega$.

114. До трьох сторін трикутника ABC поставлені перпендикуляри: до BC з α (де α є точка перетину симедіани $A\alpha$ з BC), до AB з B і до AC з C. Перший перпендикуляр перетинається з другим у точці B', а перший з третім — у точці C'. Знайти відношення CC' до BB'.

115. На основі BC трикутника ABC взята точка M так, що $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2$. Визначити положення точки M.

116. Через довільну точку, що лежить усередині трикутника, проведені три прямі, відповідно паралельні сторонам трикутника. Довести, що відрізки цих прямих a', b', c', обмежені сторонами трикутника, задовольняють умову

$$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}=2.$$

117. Через деяку точку O, взяту в площині трикутника ABC, проведені прямі, паралельні трьом сторонам трикутника. Відрізки цих паралелей, обмежені сторонами трикутника, пропорціональні квадратам тих сторін, яким вони паралельні. Знайти довжини відрізків і віддалі їх від вершин трикутника.

118. При умовах попередньої задачі знайти площі трикутників AOB, COB і AOC.

119. Через деяку точку P, взяту всередині трикутника, проведені паралелі до трьох сторін його. Знайти довжини паралелей, якщо відомо, що відрізки сторін трикутника, які лежать між цими паралелями, рівні між собою.

120. Через деяку точку P_1, взяту всередині трикутника, проведені паралелі до трьох сторін трикутника. Знайти довжини паралелей, якщо відомо, що відрізки цих паралелей, які лежать між сторонами трикутника, рівні між собою.

121. Показати, що точки P, P_1 (див. задачі 119 і 120) і центр ваги трикутника лежать на одній прямій. В якому відношенні центр ваги поділяє віддаль між точками P і P_1?

122. Знайти віддаль між точкою перетину внутрішніх бісектрис трикутника і точкою перетину однієї внутрішньої і двох зовнішніх бісектрис, якщо $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$.

123. Перевірити рівність: $h_a'^2 h_b'^2 h_c'^2 = 8R^3 h_a'' h_b'' h_c''$.

124. В прямокутному трикутнику ABC катет $AB = 3$, катет $AC = 4$. З вершини A до гіпотенузи проведені дві прямі: AK — так, що $BK = 1$, і AM — так, що $\angle CAM = \angle BAK$. Знайти довжину CM.

125. Дано прямокутний трикутник ABC, де A — прямий кут. З A опущений перпендикуляр AK на гіпотенузу, а з K — перпендикуляри KP і KT на катети. Знаючи, що $BP = m$ і $CT = n$, визначити довжину x гіпотенузи.

126. Площа рівностороннього трикутника, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, вдвоє більша площі останнього. Знайти відношення катетів прямокутного трикутника.

127. В рівнобедреному трикутнику одна з рівних сторін $= 5$, а сума основи і її проекції на одну з рівних сторін $= 9^3/_5$. Знайти основу.

128. Довести, що рівність $S = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}$ справедлива тільки для рівностороннього трикутника.

129. В гострокутному трикутнику:

$$2(h_a h_a' + h_b h_b' + h_c h_c') = a^2 + b^2 + c^2.$$

130. $S = \dfrac{1}{4}(a h_a' + b h_b' + c h_c')$.

131. Рівнобедрений прямокутний трикутник повернувся навколо середини одного з своїх катетів на 45° від свого початкового положення. Знайти відношення площі, спільної для обох положень трикутника, до площі даного рівнобедреного трикутника.

132. З усіх вершин трикутника ABC поставлені перпендикуляри до його сторін до взаємного перетину ($DE \perp BC$; $EF \perp AC$; $FD \perp AB$). Від цієї побудови утворюється новий трикутник DEF, в якому треба знайти сторони і площу.

133. $h_a' h_a'' = h_b' h_b'' = h_c' h_c''$.

134. Рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого $= a$, повернутий навколо вершини прямого кута на 30° від свого початкового положення. Знайти площу, спільну для обох положень прямокутного трикутника.

135. У трикутнику ABC:

$$b = c.$$

Визначити суму віддалей деякої точки на стороні a до двох інших сторін трикутника.

136. На сторонах BA і AC рівностороннього трикутника відкладені відрізки $BC' = AB' = 2$.

Точки B' і C' сполучені, і пряма $B'C'$ продовжена до перетину з продовженням BC в точці A'. Знайти CA', якщо $BC = 5$.

137. Якщо a гіпотенуза прямокутного трикутника, то:

$$S = p(p-a) = (p-b)(p-c).$$

138. O — точка, що лежить на площині трикутника ABC і всередині його; AOA', BOB' і COC' — прямі, що перетинають сторони a, b і c в точках A', B' і C'. Довести, що:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$

139. Площа квадрата, побудованого на основі рівнобедреного трикутника, дорівнює площі цього трикутника. Знайти відношення сторін рівнобедреного трикутника.

140. Кут A трикутника ABC поділений пополам і з довільної точки, взятої на бісектрисі, опущений перпендикуляр на одну з сторін кута; від цієї побудови утворюється прямокутний трикутник, в якому треба знайти відношення катетів.

141. На вершині B вертикальної башти AB укріплена вертикальна жердина BC. Лінії зору, напрямлені до B і до C з деякої точки, що лежить у площині основи башти, утворюють з цією площиною кути в 30° і в 60°. Знайти відношення довжини жердини до висоти башти.

142. На стороні BC трикутника ABC взята довільна точка D і навколо трикутників ABD і ACD описані круги. Знайти відношення площ цих кругів.

143. Якщо різниця кутів при основі трикутника $= 90°$, то відповідна висота трикутника є середня пропорціональна між віддалями підошви висоти від кінців основи.

144. Якщо в трикутнику ABC:

$$B - C = 90°, \text{ то } \frac{2}{a^2} = \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(b-c)^2}.$$

145. Бісектриса внутрішнього кута A трикутника $= l$; бісектриса суміжного з ним зовнішнього кута $= l_1$; відношення сторін, які утворюють кут A, $= k$. Знайти площу трикутника.

146. Чи існують нерівні трикутники, що мають по 3 нарізно рівні кути і по 2 нарізно рівні сторони? В яких границях лежить відношення відповідних сторін цих трикутників?

147. Віддалі деякої точки від трьох вершин рівностороннього трикутника є d, e, f; сторона трикутника $= a$. Знайти залежність між a, d, e і f.

148. Якщо бісектриса гострого кута в прямокутному трикутнику поділяє протилежну сторону на частини, пропорціональні 2 і $\sqrt{3}$, то цей гострий кут $= 30°$.

149. У двох подібних прямокутних трикутниках добуток гіпотенуз дорівнює сумі добутків інших відповідних сторін.

150. Сторони трикутника пропорціональні числам 4, 5 і 6. Довести, що найбільший кут вдвоє більший найменшого.

151. Площа трикутника $ABC = S$; площа трикутника ABH, де H — ортоцентр, $= S_1$. Знайти площу прямокутного трикутника ABL, припускаючи, що точка L лежить на прямій CH або на її продовженні.

152. В трикутнику відомі сторони b і c і дві січні, проведені до сторони a:

$$AD = p \text{ і } AE = q,$$

при чому

$$CD = BE.$$

Визначити сторону a.

153. Через певну точку O, взяту всередині прямого кута A, проведена довільна січна BOB', і хай S і S' позначають площі трикутників ABO і $AB'O$. Довести, що: $\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} =$ = сталій величині при всякому положенні січної.

154. Знайти відношення площі трикутника ABC до площі трикутника $A'B'C'$, якщо A', B' і C' є точки перетину бісектрис трикутника з протилежними сторонами.

155. В прямокутному трикутнику відомі: сума катетів p і сума m двох прямих, що сполучають вершину прямого кута з точками, в яких гіпотенуза поділена на три рівні частини. Знайти гіпотенузу.

156. $l'_a = \sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}}$.

157. $al'^2_a + bl'^2_b + cl'^2_c = abc$.

158. $\frac{l'_a l'_b l'_c}{l''_a l''_b l''_c} = \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$.

159. Знайти сторони a і b трикутника, знаючи їх проекції p і q однієї на другу і знаючи третю сторону c.

160. В трикутнику ABC проведена висота AP і побудовані проекції D і E точки P на сторони AB і AC. Знайти довжину прямої DE і віддаль від точки A до прямої DE.

161. Бісектриса p прямого кута поділяє гіпотенузу в крайньому і середньому відношеннях. Знайти катети.

162. Визначити залежно від сторін прямокутного трикутника ABC (прямий кут A) віддалі $AG(p)$, $BG(q)$ і $CG(r)$, де G — центр ваги трикутника. Показати, що $5p^2 = q^2 + r^2$.

163. На трьох сторонах трикутника ABC в зовнішньому полі побудовані три правильні трикутники, і центри їх сполучені прямими, від чого утворився новий трикутник. Знайти його сторони.

164. В трикутнику ABC

$$BC = 2AC.$$

Довести, що медіана AD цього трикутника поділяє пополам кут між стороною AB і медіаною AE трикутника ADC.

165. В трикутнику ABC: $a = 14$, $h_a = 12$, $b + c = 28$. Знайти b і c.

166. $S = \dfrac{l_a l_b l_c (b+c)(c+a)(a+b)}{8abcp}$

167. $S = \sqrt{\dfrac{l_{1a} l_{1b} l_{1c} (b-c)(a-c)(a-b)p}{8abc}}$

$$(a > b > c).$$

168. Показати за допомогою обчислення, що рівність двох внутрішніх бісектрис можлива тільки в рівнобедреному трикутнику.

169. Знайти площу трикутника, розглядаючи її як границю суми площ прямокутників, вписаних у трикутник.

170. Проекції центра ваги трикутника на три сторони його є G_a, G_b, G_c. Знайти площу трикутника $G_aG_bG_c$.

171. На сторонах рівностороннього трикутника ABC побудовані квадрати, центри яких є A_1, B_1, C_1. Знайти відношення (площ) $\dfrac{A_1B_1C_1}{ABC}$.

172. В трикутнику ABC проведена пряма B_1C_1, паралельна BC, так, що $B_1C_1 = BB_1 + CC_1$. Знайти AB_1 і B_1C_1 залежно від сторін трикутника.

173. В трикутнику ABC проведена пряма B_1C_1, паралельна стороні BC. Площа трикутника $ABC = S$; площа трикутника $AB_1C_1 = S_1$. Знайти площу трикутника AB_1C.

174. За даними двома сторонами a і b трикутника знайти третю сторону, якщо відомо, що медіани m_a і m_b перетинаються під прямим кутом.

175. В трикутнику ABC висоти BD і CE рівні і перетинаються всередині трикутника в точці H так, що:

$$BH = 3HD$$

і

$$CH = 3HE.$$

Знаючи, що $BC = 2$, знайти решту сторін, висот і площу трикутника.

176. По катетах AB і AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC відкладені відповідно частини BD і AE, що дорівнюють нарізно третині катета, і потім точки B і D сполучені прямими з E. Довести, що кут ADE дорівнює кутові EBC.

177. Обчислити сторони b і c трикутника, знаючи, що:

$$a = 5,$$
$$b - c = 2,$$
$$B = 2C.$$

178. Хотять побудувати трикутник за двома сторонами b і c ($b > c$) і відрізком d сторони a, вміщеним між зовнішньою і внутрішньою бісектрисами кута A. Чи можна задати для d цілком довільну величину?

179. В трикутнику ABC проведена бісектриса AD (D на BC) кута A, і з точки D поставлений до неї перпендикуляр, який зустрічає AB в E і AC в F. Знайти AE і AF.

180. У прямокутному трикутнику ABC з вершини прямого кута проведена висота AD і на ній і на катетах відкладені відрізки:

$$AA' = BB' = CC' = 1.$$

Знайти площу трикутника $A'B'C'$, знаючи, що $AB = 3$ і $AC = 4$.

181. Розв'язати попередню задачу при умові, що

$$AA' = BB' = CC' = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

182. В трикутнику ABC:

$$C = 120^\circ,$$
$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Визначити кут B.

183. Сторони кута C, який належить трикутникові ABC, продовжені в зовнішнє поле кожна на довжину, що дорівнює c; сторони кута B продовжені так само на довжину, що дорівнює b, а сторони кута A — на довжину, що дорівнює a. Таким чином у зовнішньому полі утворилось шість точок, що лежать на кінцях продовжень і являють собою вершини шестикутника, площу якого треба знайти.

184. Вершина гострого кута A в прямокутному трикутнику ABC сполучена прямою з серединою M висоти CD з вершини прямого кута. Продовження прямої AM утворює на катеті BC два відрізки, відношення яких треба знайти, знаючи:

$$BC = a,$$
$$CD = h.$$

185. Перпендикуляр CD з вершини C прямого кута на гіпотенузу продовжений за точку C на довжину $CD' = CD$, точка D' сполучена з A і катет BC продовжений до перетину з AD' в точці F. Знайти BF, знаючи:

$$BC = a,$$
$$CD = h.$$

186. Дано трикутник ABC, в якому

$$AB = AC,$$
$$AH \text{ — висота},$$
$$\frac{BC}{AH} = \frac{9}{8}$$

На AH взято точку M так, що:

$$\frac{MH}{AH} = \frac{3}{5},$$

і через M проведені дві прямі, які утворюють з висотою кути в 45°. Довести, що ці прямі поділяють трикутник на чотири рівновеликі площею частини.

187. Бісектриси внутрішніх кутів трикутника перетинають протилежні сторони в точках A', B' і C'. Точки, симетричні з точками A', B', C' відносно відповідних вершин A, B, C, є A'', B'', C''. Знайти площу трикутника $A''B''C''$.

188. Розв'язати попередню задачу при умові, що A'', B'', C'' є точки, симетричні з вершинами A, B, C відносно точок A', B', C'.

189. Дано рівносторонній трикутник ABC. На сторонах його BC і AB відзначені дві точки D і E так, що:

$$BD = \frac{1}{3} BC,$$
$$AE = ED.$$

Довести, що:

$$EC = EB + BD.$$

190. В трикутниках ABC і $A'B'C'$:

$$A + A' = 90°.$$

Довести, що:

$$\left(\frac{S}{bc}\right)^2 + \left(\frac{S'}{b'c'}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

191. В трикутниках ABC і $A'B'C'$:

$$A + A' = 180°$$
$$B = B'.$$

Довести, що:

$$aa' = bb' + cc'.$$

192. H, M і D є основи висоти, медіани та бісектриси трикутника, які виходять з однієї вершини.

Дано, що

$$HD = 3MD.$$

Довести, що сторони трикутника утворюють арифметичну прогресію.

193. В прямокутному трикутнику, гострі кути якого 15° і 75°, добуток катетів дорівнює квадратові половини гіпотенузи.

194. A', B', C' є основи висот трикутника ABC. Довести, що:

$$AB \cdot AC' + BC \cdot BA' + CA \cdot CB' = AB \cdot BC' + BC \cdot CA' + CA \cdot AB' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

195. За двома сторонами b і c трикутника і бісектрисою l кута A обчислити третю сторону a і площу трикутника.

Умови можливості задачі?

196. A', B' і C' позначають точки перетину зовнішніх бісектрис трикутника ABC з відповідними сторонами.

Дано:

$$B'C' = a', \ C'A' = b' \text{ і } A'B' = c'.$$

Обчислити сторони a, b і c трикутника ABC.

197. В якому відношенні поділяє точка перетину внутрішніх бісектрис трикутника кожну з них?

198. Гіпотенуза прямокутного трикутника $= a$, бісектриса прямого кута дорівнює катетові.

Обчислити другий катет.

II. ЧОТИРИКУТНИКИ.

1. Паралелограми, ромби, прямокутники, квадрати.

199. За даною більшою стороною $2\sqrt{13}$ паралелограма обчислити меншу сторону, діагоналі та сторону рівностороннього трикутника, рівновеликого цьому паралелограмові, якщо відомо, що менша діагональ перпендикулярна до меншої сторони, а відношення кутів, прилеглих до основи, дорівнює 5.

200. На основі a трикутника знайти таку точку, щоб площа паралелограма, який утворився від проведення через неї прямих, паралельних двом іншим сторонам трикутника, становила $^1/_2$ площі трикутника.

201. В трикутник, в якого основа $= 16$, а висота $= 4$, вписаний прямокутник з площею $= 12$. Знайти сторони прямокутника.

202. Паралелограм $ABCD$, в якого $AB = 108$ і $BD = 136$, поділений прямими AE і AF на три частини, що відносяться, як $2:3:7$ (рахуючи від B). Визначити положення прямих AE і AF.

203. Паралелограм $ACDB$, в якому $AB = 108$ і $BD = 136$, поділений прямими AE і AF на три частини, що відносяться, як $3:17:4$ (рахуючи від B). Визначити положення прямих AE і AF.

204. В паралелограмі $ABCD$ на стороні $AD = a$ взята точка K так, що $AK = k$, і з точки K до протилежної сторони проведена пряма PX, яка поділяє площу паралелограма у відношенні $m:n$. Знайти BX.

205. Паралелограм $ABCD$ прямою AK і прямою ON, яка виходить з середини O сторони AB, поділений на три частини, що відносяться (рахуючи від D), як $4:3:1$. Визначити положення прямих AK і ON.

206. У трикутник, сторони якого 13, 14 і 15, вписаний ромб, один з кутів якого пристає до кута трикутника, що лежить проти сторони 15. Знайти діагональ і сторони ромба.

207. Сторони прямокутника 1 і 2. Визначити сторони, діагоналі і площу чотирикутника, утвореного прямими, що поділяють кути прямокутника пополам.

208. У трикутник, сторони якого 4, 5 і 6, вписаний паралелограм, периметр якого 9. Знайти сторони паралелограма, якщо відомо, що паралелограм і трикутник мають спільний кут, який лежить проти середньої величиною сторони трикутника.

209. З точки, взятої на більшій стороні прямокутника, нерівні сторони його видно під рівними кутами. Знайти віддаль цієї точки від однієї з менших сторін прямокутника, якщо виміри його є 65 і 63.

210. На гіпотенузі прямокутного трикутника, катети якого є a і b, побудований квадрат. Знайти довжину прямої, яка сполучає центр квадрата з вершиною прямого кута в прямокутному трикутнику.

211. Перпендикуляр до гіпотенузи a прямокутного трикутника перетинає один катет у точці B, продовження другого — в точці C і гіпотенузу — в точці D, віддаленій від середини гіпотенузи на k. Знайти площу прямокутника, побудованого на відрізках DB і DC.

212. У прямокутний трикутник вписаний квадрат так, що одна з сторін його пристає до гіпотенузи. Віддаль від вершини одного гострого кута до найближчої до неї вершини квадрата $= m$, а віддаль від вершини другого гострого кута до найближчої до неї вершини квадрата $= n$. Знайти площу квадрата.

213. У трикутник із сторонами 13, 14 і 15 вписаний прямокутник, одна з діагоналей якого паралельна меншій стороні, а одна з сторін паралельна більшій стороні трикутника. Знайти сторони прямокутника.

214. У трикутник ABC вписаний паралелограм так, що кут B в обох фігур спільний, а діагональ, яка не виходить з вершини B, перпендикулярна до сторони AB. Знайти сторони

паралелограма, якщо $BC = a$, $AB = c$, а проекція BC на AB дорівнює c_1.

215. Перпендикуляри, опущені з двох вершин прямокутника на його діагональ, поділили її на три рівні частини. Одна сторона прямокутника $= \sqrt{2}$. Знайти другу сторону.

216. На протилежних сторонах квадрата (всередині його) побудовані два рівносторонні трикутники. Перетин сторін цих трикутників утворює деякий чотирикутник. Знайти його вид, сторони, кути та площу, якщо сторона квадрата $= a$.

217. У прямокутнику $ABCD$ точка K поділяє сторону AB так, що $AK : KB = 3 : 4$, а точка M поділяє сторону CD так, що $DM : CM = 5 : 3$. В якому відношенні пряма KM поділяє площу прямокутника?

218. На сторонах AB, BC, CD і DA паралелограма $ABCD$ взяті точки E, F, G, H, що є вершинами чотирикутника $EFGH$. Знайти відношення площі цього чотирикутника до площі паралелограма, якщо $AE = a_1$, $EB = a_2$, $BF = b_1$, $FC = b_2$, $CG = c_1$, $GD = c_2$, $DH = d_1$, $HA = d_2$, $AB = a$ і $BC = b$.

219. Сторони паралелограма $ABCD$ поділені однаково у відношенні $m : n$, і точки поділу E, F, G, H сполучені відповідно з C, D, A, B. Треба обчислити: 1) відношення відрізків на прямих AG, CE та ін., 2) площі тих фігур, на які поділився паралелограм, якщо площа його $= S$.

220. З точки F_1, що лежить на стороні CD паралелограма $ABCD$, проведена січна, яка зустрічає: продовження AB в точці F, сторону AD — в точці E, діагональ BD в точці G, продовження BC в точці E_1 і продовження AC в точці G_1. За даними $BC = b$, $EE_1 = d$, $DE = m$, $CE_1 = n$ знайти всі відрізки січної.

221. У квадрат вписаний рівносторонній трикутник, одна з вершин якого лежить посередині сторони квадрата. Знайти відношення площі трикутника до площі квадрата.

222. В прямокутник, сторони якого відносяться як 3:4, вписаний ромб із стороною 25. Знайти площу ромба.

223. Дано квадрат, сторона якого $= a$. Кожні дві протилежні вершини квадрата є вершинами 2 рівних ромбів. Знайти площу, спільну обом ромбам, якщо площа кожного з них дорівнює половині площі квадрата.

224. В квадрат вписаний рівносторонній трикутник так, що одна з вершин квадрата зливається з вершиною трикутника. Знайти відношення площі трикутника до площі квадрата.

225. У паралелограмі $ABCD$ віддалі деякої точки діагоналі AC до сторін AD і AB обернено пропорціональні цим сторонам.

226. Прямою, паралельною діагоналі, паралелограм поділений на дві частини, з яких одна вдвоє більша другої. Визначити положення поділяючої прямої.

227. Середини сторін квадрата сполучені з протилежними вершинами. Ці прямі, перетинаючись, утворюють восьмикутник, площу якого треба знайти, знаючи сторону a квадрата.

228. У паралелограмі $ABCD$:

$$A = 60°,$$

$$BE = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$CE = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

де E — середина сторони AD. Знайти сторони паралелограма.

229. На чотирьох сторонах квадрата у внутрішньому полі його побудовані чотири правильні трикутники. Чотири вершини цих трикутників, розміщені всередині квадрата, і чотири вершини квадрата утворюють кінці восьмикутної зірки, площу якої треба знайти, знаючи сторону a квадрата.

230. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведена січна AMN, яка зустрічає сторони CB і CD або їх продовження в точках M і N. Довести, що:

$$BM \cdot DN = ab,$$

де a і b є сторони паралелограма.

231. Знайти, яким числам пропорціональні сторони і діагональ такого прямокутника, половина якого подібна цілому. (Для одержання половини прямокутника проводиться через точку перетину діагоналей пряма, паралельна одній із сторін.)

232. В ромбі $ABCD$ на діагоналі AC взята довільна точка P і сполучена прямою з точкою B. Довести, що:

$$AP \cdot PC = \overline{AB}^2 - \overline{PB}^2$$

233. В квадрат, сторона якого дорівнює c, вписаний прямокутник, подібний другому прямокутникові, в якого відношення сторін дорівнює k. Знайти площу вписаного прямокутника.

2. Трапеції.

234. В симетричній трапеції більша основа, що дорівнює діагоналі, дорівнює a. Різниця між основами дорівнює k. Знайти непаралельні сторони.

235. За даними чотирма сторонами a, b, c, d трапеції знайти довжину прямої, що сполучає середини паралельних сторін. (Паралельні сторони c і d.)

236. Непаралельні сторони трапеції продовжені до взаємного перетину, і через одержану точку проведена пряма, паралельна основам трапеції. Знайти відрізок її, обмежений продовженими діагоналями, якщо основи трапеції є a і b.

237. Трапеція, в якої основи 3 і 12, поділена лінією, паралельною основам, на дві подібні трапеції. Знайти довжину поділяючої лінії.

238. Основи трапеції 12 і 24. Пряма, паралельна основам, поділяє непаралельні сторони так, що відрізок, прилеглий до меншої основи, відноситься до другого відрізка як 3:5. Знайти довжину поділяючої прямої.

239. Дано три сторони трикутника: 52, 56 і 60. Паралельно більшій стороні проведена січна так, що периметр одержаної трапеції = 156. Знайти площу трапеції.

240. Більша основа прямокутної трапеції $= a$, висота її $= h$, а гострий кут $= 60°$. Знайти площу трапеції.

241. У рівнобічній трапеції більша основа $= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; всі інші сторони рівні між собою, а діагональ дорівнює більшій основі.

Знайти: 1) решту сторін трапеції, 2) кути трапеції, 3) відрізки, на які діагоналі взаємно поділяються.

242. Дано трапецію $ABCD$, діагоналі якої AC і BD перетинаються в точці O. Знаючи, що площі трикутників AOD і BOC відповідно дорівнюють p^2 і q^2, знайти: 1) відношення основ трапеції, 2) площі трикутників AOB і COD, 3) площу трапеції.

243. Одна з непаралельних сторін трапеції = 12, довжина перпендикуляра, опущеного з середини другої непаралельної бічної сторони на першу, $= 8^1/_3$. Знайти сторону квадрата, рівновеликого трапеції.

244. У симетричній трапеції, більша основа якої $= a$, середини сторін сполучені, від чого утворився квадрат із стороною b. Знайти площу трапеції і решту сторін.

245. Знайти площу симетричної трапеції, діагоналі якої взаємно перпендикулярні, а висота $= h$.

246. Дано прямокутну трапецію, в якої більша з непаралельних сторін = сумі основ, а висота = 10. Знайти площу прямокутника, побудованого на основах трапеції.

247. Визначити площу трапеції за двома діагоналями її 113 і 17 і висотою 15.

248. Трапеція, в якої основи 4 і 10, поділена на паралелограм і трапецію, площі яких відносяться як 2:5. Знайти відрізки, утворювані поділяючою лінією на меншій основі.

249. Знайти довжину такої прямої, паралельної основам a і b трапеції, що поділяє трапецію на дві рівновеликі площею частини.

250. Трапеція, в якої одна з діагоналей дорівнює 6, поділяється цією діагоналлю на два подібні трикутники. Знайти основи трапеції, якщо середня лінія її = 7,5.

251. Пряма, паралельна основам трапеції, поділяє її на дві частини, що відносяться як 7:2 (рахуючи від більшої основи). Знайти довжину цієї прямої, якщо основи трапеції 5 і 3.

252. В трикутнику ABC, площа якого $= S$, на стороні $AB = c$ відкладені частини: $AK = BN = m < \frac{c}{2}$ і з M і N про-

ведені паралелі KM і NP до BC (M і P — точки перетину паралелей з AC). Знайти площу трапеції $MKPN$.

253. Дано трикутник ABC, площа якого $= S$. Пряма, паралельна BC, поділяє кожну з двох сторін трикутника у відношенні $m:n$. З вершини A до протилежної сторони проведена друга пряма, яка поділяє BC у відношенні $p:q$. Знайти площі тих частин, на які поділився трикутник двома згаданими прямими.

254. В трапеції, основи якої a і b, проведена через точку перетину діагоналей пряма, паралельна основам. Знайти її довжину $2x$.

255. Обчислити діагоналі m і n трапеції за чотирма її сторонами a, b, c і d (b і d — паралельні сторони і $b > d$).

256. Знайти площу трапеції за чотирма сторонами її a, b, c і d (довжини паралельних сторін є b і d; $b > d$).

257. Середня лінія трапеції поділяє її на дві частини, що відносяться як $3:2$ (рахуючи від більшої основи). Знайти відношення основ трапеції.

258. Точки A і B, що лежать по одну сторону неозначеної прямої XY, віддалені від неї відповідно на 6 і 10. Через A і B проведені дві взаємно паралельні січні, що зустрічають XY у точках M і N, при чому $MN = 9$. Знайти площу трапеції $ABMN$.

259. Через вершини B і C трикутника ABC проведені дві прямі CJ і BH; перша паралельна AB, а друга паралельна AC. Ці дві прямі в точках H і J перетинаються з прямою HJ, паралельною BC і віддаленою від вершини A (в бік внутрішнього поля) на k ($k < h_a$). Знайти площу трапеції $BCJH$.

260. Пряма, проведена через точку перетину діагоналей трапеції паралельно її основам, поділяє трапецію на дві частини. Знайти відношення площ цих частин, якщо основи трапеції є a і b.

261. Менша основа трапеції $DC = b$; більша основа трапеції $AB = a$. На протязі меншої основи визначити точку M з умовою, щоб пряма AM поділила трапецію на дві рівновеликі частини.

262. Через вершини A і B меншої основи трапеції $ABCD$ проведені прямі:

AM — паралельна BC

BN — „ AD

(M і N на стороні DC).

Обчислити MN, знаючи, що $AB = b$ і $DC = a$.

3. Довільні чотирикутники.

263. Дано квадрат $ABCD$, сторона якого $= a$. На сторонах його відкладено довжини:

$$AA' = AA'' = BB' = BB'' = CC' = CC'' = DD' = DD'' = k < a.$$

$$A'A'', B'B'', C'C'', D'D''$$

продовжені до взаємного перетину. Знайти площу утвореного чотирикутника.

264. При умовах попередньої задачі визначити таку величину k, при якій восьмикутник $A'B''B'C''C'D''D'A''$ стає правильним, і знайти його площу.

265. Послідовні сторони чотирикутника є a, b, c і d. Дано:

$$b > a,$$
$$c > d,$$
$$b^2 - a^2 = c^2 - d^2.$$

Довести, що діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні.

266. Знайти залежність між сторонами і діагоналями чотирикутника (a, b, c, d — сторони, e і f — діагоналі).

267. Застосувати формулу задачі 266 до вписаного чотирикутника.

268. M і N є середини медіан BD і CE трикутника ABC. Обчислити площу фігури $BMNC$, знаючи площу S даного трикутника.

269. У шестикутнику $ABCDEF$:

$$AB = CD = EF = a,$$
$$BC = DE = FA = b$$

і всі кути рівні між собою.

Обчислити площу шестикутника.

III. КОЛА.

270. Радіуси двох концентричних кіл 15 і 8. На продовженому діаметрі взята точка на віддалі 17 одиниць від центра, і з неї проведені дотичні до цих кіл. Обчислити взаємну віддаль точок дотику.

271. У колі O одиничного радіуса проведена хорда AB, перпендикулярна до радіуса OP в його середині. З точки O проведений радіус OC, перпендикулярний до OA, і з центра A радіусом AC описана дуга до перетину з AB в точці D. На хорді BP відкладена частина BQ, що дорівнює BD, і на QP, як на діаметрі, описане коло, до якого проведена дотична з точки B. Знайти довжину цієї дотичної.

272. Два кола ортогональні (тобто дотичні в точці їх перетину взаємно перпендикулярні); радіуси їх 24 і 7. Знайти віддаль між центрами, спільну хорду і спільну зовнішню дотичну

273. Два кола, радіуси яких 2 і 3, дотикаються внутрішньо. З центра меншого кола поставлений перпендикуляр до лінії центрів до перетину з більшим колом, і з точок перетину проведені дотичні до меншого кола. Знайти кут між ними.

274. Дано півколо, обмежене діаметром $AB = 6$; на радіусах AO і OB побудовані півкола. Обчислити радіус кола, дотичного до трьох даних півкіл.

275. У колі радіуса r проведені два взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD. З точки C радіусом CA описана дуга AKB. Знайти сторону квадрата, рівновеликого серпкові $AKBD$.

276. Дано коло радіуса $1+\sqrt{5}$, у ньому діаметр AB і дотичну BC. Нарисоване коло, дотичне до BC, яке проходить через A, і до того так, що центр його лежить на першому колі. Знайти його радіус.

277. У колі радіуса r проведена хорда, що стягує дугу в $108°$. Знайти довжину хорди.

278. У круг радіуса r вписані чотири рівні круги, що дотикаються до даного і взаємно. Знайти радіус круга, рівновеликого сумі цих чотирьох кругів[1].

279. Через центри двох рівних кіл, які дотикаються зовні, радіуса 1 проведене коло, радіус якого $= 2$. З деякої точки, що лежить на останньому колі, описані кола, дотичні до перших двох. Знайти їх радіуси.

280. Дано коло і пряму, на якій дано точку. Знайти площі кругів, дотичних до даного кола і до даної прямої в зазначеній на ній точці, якщо: 1) радіус даного кола $= 1$; 2) віддаль від центра даного кола до даної прямої $= 3$; 3) віддаль від проекції центра на дану пряму до точки дотику $= 10$.

281. На круглому більярді покладена кулька на віддалі $^2/_3$ радіуса від центра. Кулька ця дістала поштовх в такому напрямі, що, відбившись тричі від борта, повернулась у попередню точку. Знайти довжину шляху, пройденого кулькою, якщо радіус більярда $= 2$.

282. Два кола, радіуси яких 4 і 9, дотикаються зовнішньо. Знайти радіуси кіл, дотичних до двох даних і до їх спільної зовнішньої дотичної.

283. У коло радіуса r вписані n рівних кіл, попарно дотичних між собою[2]. Визначити їх радіуси, якщо сторона правильного вписаного в дане коло n-кутника дорівнює a.

284. На діаметрі AB півкола взята точка C так, що $AC = 2r_1$ і $BC = 2r_2$. На AC і BC, як на діаметрах, описані півкола. Обчислити радіус кола, дотичного до цих трьох півкіл.

285. До двох кіл, які зовнішньо дотикаються в точці A і радіуси яких 3 і 1, проведена спільна зовнішня дотична BC. Знайти площу фігури ABC.

[1] Кожний з вписаних кругів дотикається до даного і до двох вписаних, суміжних з ним.

[2] Кожне коло дотикається до двох кіл, з ним суміжних, і до даного.

286. Через кінці діаметра і деяку точку на колі проведені три дотичні до взаємного перетину. Знайти радіус кола, якщо відомо, що точка дотику середньої дотичної поділяє відрізок її на дві частини: 12 і 3.

287. Півколо радіуса r поділене на 3 рівні частини, і точки поділу сполучені з одним кінцем діаметра. Знайти площу, обмежену двома хордами і дугою, що лежить між ними.

288. Два кола, радіуси яких є r і r_1, перетинаються під кутом у 60°. До цих кіл проведена спільна дотична, і в простір між спільною дотичною і даними колами вписане третє коло. Знайти його радіус.

289. Круг радіуса r обкладений чотирма рівними кругами, які дотикаються до даного і взаємно. Знайти площу одного з цих кругів.

290. Коло радіуса r обкладене трьома рівними колами, які дотикаються до даного і взаємно. Знайти радіус одного з цих кіл.

291. Радіуси двох кіл 2 і 1; віддаль між їх центрами 6; третє коло перетинає обидва дані під прямим кутом, а центр його лежить на прямій, що сполучає центри даних кіл. Знайти площу третього круга.

292. В деякий кут вписані три кола так, що середнє дотикається до двох крайніх. Радіуси двох крайніх кіл — R і r. Знайти радіус середнього.

293. Знайти радіус такого кола, з усіх точок якого друге коло радіуса $\sqrt{2}$ видно під прямим кутом.

294. До кола радіуса 2 дотикається внутрішньо друге радіуса $^2/_3$. Знайти радіус третього кола, дотичного до двох перших і до діаметра, що сполучає їх центри.

295. Центр кола радіуса 3 лежить на другому колі радіуса 5. З центра O другого кола проведений діаметр, дотичний до першого, і в точку дотику — радіус, що перетинається із спільною хордою в точці K. Знайти довжину прямої OK.

296. Два взаємно перпендикулярні радіуси OA і OB деякого кола продовжені відповідно до точок A_1 і B_1, при чому $OA = 2{,}5$, $AA_1 = 0{,}5$ і $BB_1 = 1{,}5$. Знайти, чи перетинає пряма A_1B_1 дане коло. Якщо перетинає, то яка довжина хорди, відрізуваної колом від цієї прямої?

297. Два взаємно перпендикулярні радіуси OA і OB продовжені до точок A_1 і B_1 так, що $AA_1 = BB_1 = \frac{r}{4}$, де r є радіус даного кола. Пряма A_1B_1 перетинає коло в точках M і N, де M є точка, ближча до A_1. На OA взята точка K так, що $OK = \frac{r}{4}$. Знайти довжину KM.

298. Радіуси двох кіл 2 і 1, а віддаль між центрами 5. Третє коло, центр якого лежить на одній прямій з центрами перших двох, перетинає більше коло під прямим кутом, а менше — по діаметру. Визначити положення центра і радіус третього кола.

299. Два круги, радіуси яких 2 і 1, а віддаль між центрами 5, перерізаються третім кругом по діаметрах. Знайти віддаль від центра більшого круга до центра третього і площу третього круга, якщо відомо, що центри всіх трьох кругів лежать на одній прямій.

300. У колі центра O, радіус якого дорівнює 5, проведені дві взаємно перпендикулярні хорди AB і CD так, що хорда CD радіусом OA і продовженим радіусом OB поділяється на три рівні частини. Знайти віддаль хорди CD від центра, якщо $AB=8$.

301. Два рівні кола, в яких $R=11$, розміщені так, що віддаль між їх центрами дорівнює 60. З точки O, яка лежить на лінії центрів, проведені до цих кіл дотичні, що утворюють між собою кут у 90°. Знайти віддаль точки O від середини лінії центрів даних кіл.

302. На діаметрі $AB=4$ півкола взята точка C так, що $AC=$ чверті радіуса, і на AC описане півколо. Знайти радіус кола, дотичного до двох згаданих вище півкіл і до півхорди, перпендикулярної до діаметра в точці C.

303. Дано коло O одиничного радіуса і до нього дотичну в A. На діаметрі AOB взята точка M так, що $AM=\frac{7}{6}$, і з M описане коло радіусом $=4$. Це коло перетинається з дотичною в точці H, а пряма HB зустрічає менше коло в K. Знайти різницю між площею круга одиничного радіуса і площею квадрата, сторона якого $=AK$.

304. Дано два кола, радіуси яких 5 і 3, а віддаль між центрами — 18. Через точку, взяту на лінії центрів і віддалену від центра меншого кола на 5, проведена січна так, що хорди, які відтинаються від неї обома колами, рівні між собою. Знайти віддалі цих хорд від центрів.

305. Три кола, радіуси яких

$$\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1,\ 3-\sqrt{3},$$

дотикаються попарно зовнішньо. Знайти площу криволінійного трикутника, що лежить між даними колами.

306. Дані прямий кут і на одній із сторін його дві точки: одна на віддалі 6, а друга на віддалі 24 від вершини прямого кута. Знайти радіус кола, яке проходить через ці точки і є дотичним до другої сторони прямого кута; обчислити віддаль від вершини прямого кута до точки дотику.

307. Радіуси двох кіл центрів O і o є R і r, а віддаль між центрами — d. Поза колами взята така точка A, що дотичні, проведені з неї до обох кіл, рівні між собою, і з точки A опущений перпендикуляр AK на лінію центрів. Знайти відрізки OK і oK.

308. На прямій $AB=1$, як на хорді, описані дві дуги так, що всі кути, вписані в одному сегменті, дорівнюють 135°,

а всі кути, вписані в другому сегменті, дорівнюють 120°. Знайти площу серпкоподібної фігури, що лежить між цими дугами.

309. У колі, радіус якого $= 4$, проведена хорда AB так, що сума віддалей точки B до дотичної, яка проходить через точку A, і до точки дотику дорівнює 6. Знайти довжину хорди AB.

310. Радіуси двох кіл 10 і 5, а віддаль між їх центрами — 113. На лінії, яка сполучає центри даних кіл, знайти точку, з якої обидва кола видно під рівними кутами, і визначити довжини видимих хорд.

311. На радіусах квадранта (чверть круга) всередині його побудовані два півкруги. Знайти площу тієї частини квадранта, яка лежить поза півкругами, якщо радіус квадранта $= r$.

312. До півкола, обмеженого діаметром $AB = 2r$, проведена в точці M дотична, яка зустрічає продовжений діаметр в P. Знайти проекцію AM на діаметр, якщо $AM = 2MP$.

313. Якщо кінці A і B хорди сталої довжини ковзаються по колу радіуса r, то кожна точка C хорди описує коло. Знайти площу кругового кільця, яке лежить між даним колом і колом, описуваним точкою C, якщо $AC = a$ і $BC = b$.

314. Пряма $AB = R$ безперервно переміщається так, що лишається весь час дотичною в точці A до кола радіуса R. При цьому AB описує деяку площу, величину якої треба знайти, припускаючи, що точка дотику пересунулась по колу на 30°.

315. У колі радіуса R і центра O проведені діаметр AOB і, через середину радіуса AO,— хорда, яку видно з середини радіуса OB під прямим кутом. Знайти віддаль цієї хорди від центра.

316. Два кола радіусів R і $\frac{R}{4}$ дотикаються внутрішньо в точці A. Через центр більшого кола проведений діаметр BC, дотичний до меншого, і точки B і C сполучені з A прямими лініями. Знайти площу трикутника ABC.

317. Три кола центрів A, B і C і радіусів a, b і c дотикаються попарно зовнішньо. Спільна дотична кіл A і B паралельна спільній дотичній кіл B і C. Віддалі від B і від C до діаметра кола A, перпендикулярного до паралельних дотичних, є p і q. Довести, що:

$$pq = 2a^2 = 8abc.$$

318. У колі радіуса r проведені дві хорди AB і AC (по різні сторони від точки A) так, що дуга $AB = 60°$ і дуга $AC = 90°$. Через точки A, O і середину M хорди AB проведене коло, яке перетинає хорду BC в точках K і P. Знайти довжини AK і AP.

319. У півколі діаметра $AB = 2R$ проведений радіус OC, перпендикулярний до AB. Знайти на колі таку точку M, щоб

пряма, яка сполучає її проекцію P на діаметр з точкою D перетину прямих OC і MB, була перпендикулярна до MB.

320. У колі радіуса R і центра O дано хорду CD на віддалі $OA = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ від центра. Радіус OC продовжений у зовнішнє поле на довжину $CE = 2R$, і через три точки C, D і E проведене коло. Треба: 1) знайти радіус цього кола, 2) показати, що дотична до кола CDE в точці E буде спільною дотичною двох розглядуваних кіл.

321. Два кола радіусів R і r дотикаються зовнішньо. Знайти віддаль від точки дотику до спільної зовнішньої дотичної.

322. Два кола радіусів R і r дотикаються зовнішньо, і на лінії їх центрів, як на діаметрі, описане третє коло. Потім побудоване четверте коло, дотичне до перших двох зовнішньо і до третього — внутрішньо. Знайти його радіус x.

323. Коло O проходить через центр O' другого кола. Спільні дотичні до обох кіл дотикаються до кола O в точках A і B. Довести, що пряма AB є дотична до кола O'.

324. У одного кола радіус удвоє більший, ніж у другого; кола ці розміщені одно поза другим так, що їх спільні внутрішні дотичні утворюють між собою кут в 60°. Знайти відношення спільної зовнішньої дотичної до спільної внутрішньої дотичної.

325. Дві хорди AB і CD кола центра O перетинаються в точці K. Центр O сполучений з K, і до прямої OK з точки K поставлений перпендикуляр, який перетинає коло в точках S і T. Потім проведені прямі AD і CB, що перетинаються з хордою ST в точках M і N (S, M, A і D лежать по одну сторону OK). Довести, що $SM = NT$.

326. Дано три кола, які попарно дотикаються зовнішньо; радіуси їх є r_1, r_2, r_3. Знайти радіуси кіл, які однаково дотикаються до трьох даних.

327. Два кола радіусів R і r дотикаються зовнішньо в точці A. На колі радіуса r взята точка B, діаметрально протилежна точці A, і в цій точці побудована дотична. Обчислити радіус кола, дотичного до двох даних і до дотичної, яка проходить через точку B.

328. Геометричне місце точок, віддалі яких від двох даних мають стале відношення $m:n$, є коло (якщо m не дорівнює n). Знайти радіус цього кола, припускаючи, що $AB = a$.

329. Три кола радіусів r, r_1 і R дотикаються попарно зовнішньо. Знайти довжину хорди, яка відтинається третім колом від спільної внутрішньої дотичної перших двох кіл.

330. Через середину радіуса деякого кола проведені дві неозначені прямі, нахилені до цього радіуса під кутом у 45°. Обчислити радіуси всіх кіл, дотичних до даного і до двох побудованих прямих.

331. Два кола радіусів R і r дотикаються в точці C, і до них проведена спільна зовнішня дотична AB, де A і B — точки дотику. Обчислити сторони трикутника ABC.

332. Через точку A, віддалену на $2R$ від центра O кола радіуса R, проведена до цього кола така січна AMN, що коло, описане на MN, як на діаметрі, дотикається до прямої AO в точці P. Визначити AP і MN.

333. З двох точок A і B, як з центрів, радіусом $AB = R$, описані два кола. Вони зустрічають продовження прямої AB в C і D і перетинаються в H і K. Через ці дві точки проведені чотири діаметри: HAL, HBM, KAP і KBN. Потім з центра K радіусом KP описана дуга PN, а з центра H радіусом HL описана дуга LM. Утвориться овал. Знайти його площу.

334. Знайти радіус кола, знаючи довжини a і b двох його хорд, що виходять з однієї точки, і віддаль d від середини однієї хорди (a) до другої (b).

335. В деякий кут вписані три кола так, що два крайні проходять через центр середнього. Знаючи радіуси R і r крайніх, знайти радіус середнього.

336. Дано коло, діаметр якого AB. Через A і B проведені дотичні до цього кола, які перетинаються з третьою змінною дотичною відповідно в точках M і N. Треба: 1) Показати, що добуток $AM \cdot BN$ сталий. 2) Обчислити minimum $\overline{MN}^2$.

337. До кола радіуса R з точки A проведені дві дотичні AB і AC, з B на AC опущений перпендикуляр $BD = a$.

Обчислити AB, AC і BC.

338. У двох колах, центри яких є O і O', проведені два взаємно перпендикулярні радіуси OA і OA', потім прямі AA' і OO' поділені пополам у точках M і J. Обчислити довжину прямої MJ, знаючи радіуси R і R' даних кіл.

IV. КОМБІНАЦІЇ З КІЛ І МНОГОКУТНИКІВ.

1. Коло і трикутник.

339. Катети прямокутного трикутника є 3 і 4. Через середину меншого катета і середину гіпотенузи проведений круг, дотичний до гіпотенузи. Знайти його площу.

340. Точка дотику вписаного кола поділяє гіпотенузу на два відрізки a і b. Знайти площу трикутника.

341. Показати, що в усякому трикутнику:

$$bc = 2Rh_a.$$

342. В рівнобедреному трикутнику ABC:

$$BC = 24; \quad AB = AC = 13.$$

Знайти радіус кола, дотичного до AB в B і до AC в C.

343. В коло вписаний рівнобедрений трикутник ABC, в якому $AB = AC = c$. Через точку A проведена хорда $AK = m$, яка перетинає BC в точці M. Знайти AM.

344. $R = \frac{abc}{4s}$

345. $r = \frac{s}{p}$

346. $r_a = \frac{s}{p-a}$

347. Обчислити радіус зовнівписаного в трикутник кола залежно від його сторін.

348. $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$.

349. $S = \frac{r_ar_br_c}{p}$.

350. $S = rr_a\sqrt{\frac{4R - r_a + r}{r_a - r}}$

351. $S = \frac{rr_a(r_b + r_c)}{a}$

352. $S = \frac{arr_a}{r_a - r}$

353. $S = \frac{ar_br_c}{r_b + r_c}$

354. $S = \frac{(a-b)\,r_ar_b}{r_a - r_b}$

355. $S = \frac{(a+b)\,rr_c}{r + r_c}$

356. Дано трикутник ABC і проведене зовнівписане коло, дотичне до продовжень сторін AC і AB в точках M і N. Знайти площу трикутника AMN, якщо $AB = 13$, $AC = 20$ і $BC = 21$.

357. На основі рівнобедреного трикутника, як на хорді, побудоване коло, дотичне до рівних сторін трикутника. Знайти його довжину, якщо основа трикутника 80, а висота 9.

358. Коло радіуса 2 має центр на одній із сторін прямого кута на віддалі 23 одиниць від вершини. Побудовано два кола, дотичні до даного і до сторін даного кута. Знайти їх радіуси і площу трикутника, вершини якого є центри згаданих кіл.

359. В рівносторонньому трикутнику, сторона якого a, вписане коло, а з вершини трикутника радіусом, що дорівнює половині сторони його, описане друге коло. Знайти площу, спільну обом кругам.

360. В прямокутному трикутнику катети — a і b, а гіпотенуза — c. Залежно від цих даних виразити діаметр кола, вписаного в прямокутний трикутник.

361. У трикутнику відомі: сторона a, різниця двох інших сторін l і різниця відповідних їм висот m. Знайти радіус описаного кола.

362. Показати, що для всякого трикутника дійсна залежність:

$$rr_a = (p-b)(p-c).$$

363. Показати, що в усякому трикутнику:

$$Rr_a = \frac{abc}{4(p-a)}$$

364. Перевірити справедливість рівності:

$$a^2 + (r_a - r)^2 = 4R(r_a - r).$$

365. Довести:

$$r_a r_b - rr_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).$$

366. Катети прямокутного трикутника — a і b. На відрізках гіпотенузи, що визначені основою перпендикуляра, опущеного на неї з вершини прямого кута, описані півкола. Знайти відрізки катетів, вміщені всередині цих півкіл.

367. З трьох вершин прямокутного трикутника описані кола таким способом, що два з них, центри яких лежать у вершинах гострих кутів, дотикаються зовнішньо між собою і внутрішньо до кола, центр якого у вершині прямого кута. Знаючи, що гіпотенуза $= 10$, а гострий кут $= 30°$, знайти: 1) радіуси кіл, 2) площу криволінійного трикутника, вершини якого є точки дотику кіл.

368. Довести, що:

$$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr.$$

369. Довести, що для всякого трикутника:

$$Rr = \frac{abc}{4p}.$$

370. Вивести співвідношення:

$$p^2 r^2 = r_a r_b r_c.$$

371. Довести, що:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr.$$

372. На діаметрі $2r$ півкруга побудований рівносторонній трикутник. Знайти площу тієї частини його, що лежить поза кругом.

373. На трьох сторонах рівностороннього трикутника, як на діаметрах, описані (всередині трикутника) півкола. Знайти площу утворюваного при цій побудові криволінійного трикутника, якщо сторона даного $= a$.

374. Навколо рівностороннього трикутника описане коло радіуса r. Знайти радіуси трьох кіл, дотичних до даного і до двох сторін трикутника або до їх продовжень.

375. $h_a + h_b + h_c = \frac{ab + bc + ca}{2R}$

376. З центра кола, вписаного в трикутник, сторони якого 13, 14 і 15, описане коло радіусом, що дорівнює 5. Знайти довжини хорд, що відтинаються цим колом на сторонах трикутника.

377. Сторони трикутника a, b і c. Описане коло, дотичне до двох перших сторін, а центр його лежить на третій стороні. Знайти радіус цього кола.

378. Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, $= r$, а радіус зовнівписаного кола, дотичного до гіпотенузи, $= r'$. Знайти площу прямокутного трикутника.

379. Дано радіуси R і r кіл описаного і вписаного в трикутник ABC і півпериметр p цього трикутника. Хотять утворити новий трикутник, сторони якого $AB + AC$, $AB + CB$ і $AC + CB$. Чи завжди можна утворити такий трикутник? Знайти його площу і радіус вписаного кола.

380. Знайти площу круга, дотичного до двох сторін правильного трикутника і до кола, вписаного в цей трикутник. Сторона правильного трикутника $= 18$

381. $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

382. $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$

383. Виразити діаметр описаного навколо трикутника кола через висоту, медіану і бісектрису одного з його кутів.

384. Сторони трикутника — 13, 14 і 15. Знайти віддаль між центром вписаного кола і центром того зовнівписаного кола, яке дотикається до більшої сторони.

385. Знайти площу трикутника, якщо відрізки, утворювані на одній із сторін точкою дотику вписаного кола, є m і n, а протилежний кут трикутника $= 60°$.

386. Через точку дотику двох зовнішньо дотичних кіл, радіуси яких 2 і 1, проведена січна так, що хорда, яка відтинається на ній більшим колом, дорівнює радіусові меншого. Знайти площу правильного трикутника, сторона якого дорівнює хорді, яку відтинає менше коло від тієї ж січної.

387. У рівносторонній трикутник із стороною $\sqrt{39}$ вписане коло, а на одній із сторін трикутника, як на хорді, побудоване друге коло, що поділяє перше пополам. Знайти радіус другого кола.

388. Сторони трикутника — 39, 35 і 10. Знайти радіус кола, яке проходить через середини трьох сторін цього трикутника.

389. Сторони трикутника — 39, 35 і 10. Знайти радіус кола, яке проходить через основи трьох висот цього трикутника.

390. Сторони трикутника — 39, 35 і 10. Відрізки висот, що лежать між спільною їх точкою перетину і вершинами трикутника, поділені пополам, і через три одержані точки проведене коло. Знайти його радіус.

391. Сторони трикутника — 17, 17 і 16. Знайти віддаль між центрами описаного і вписаного кіл.

392. Катети прямокутного трикутника — 3 і 4. Знайти віддаль між центрами описаного і вписаного кіл.

393. Гіпотенуза AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC продовжена на довжину $BK = AB$. Точка K сполучена з C і з C радіусом CB описане коло, яке перетинає CK в N. Знайти NK, якщо катет прямокутного трикутника $= r$.

394. В рівнобедреному трикутнику відома висота h, відповідна основі, і радіус r вписаного кола. Знайти сторони трикутника і радіус описаного кола. При якій умові центр описаного кола лежить на колі вписаному?

395. В рівнобедреному трикутнику відомі основа $2a$ і радіус r вписаного кола. Знайти радіус R описаного кола. При змінному a і сталому r визначити minimum R.

396. З усіх вершин прямокутного трикутника з катетами 3 і 4 деяке коло видно під кутами в 60°. Визначити положення центра його і радіус.

397. Стороні a трикутника протилежить кут у 45°. Навколо трикутника описане коло; знайти площу правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

398. Стороні a трикутника протилежить кут у 30°. Знайти площу правильного восьмикутника, вписаного в коло, описане навколо трикутника.

399. У півколі, обмеженому діаметром AB, проведені дві хорди: $AC = a$ і $AD = b$; від точки A по діаметру AB відкладена довжина AK, що дорівнює висоті (з A) трикутника ACD; перпендикуляр, поставлений до діаметра з K, зустрічає коло в K'. Знайти довжину AK'.

400. $\frac{h_a + h_b}{r_c} + \frac{h_b + h_c}{r_a} + \frac{h_c + h_a}{r_b} = 6.$

401. Довести правильність співвідношен

$$\frac{r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c} = \frac{r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b}{h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b}$$

402. $r_a + r_b + r_c = 4R + r.$

403. Площа квадрата, побудованого на одній стороні трикутника, дорівнює площі рівностороннього трикутника, побудованого на третій стороні. Знайти, яким числам пропорціональні сторони трикутника.

388. Сторони трикутника — 39, 35 і 10. Знайти радіус кола, яке проходить через середини трьох сторін цього трикутника.

389. Сторони трикутника — 39, 35 і 10. Знайти радіус кола, яке проходить через основи трьох висот цього трикутника.

390. Сторони трикутника — 39, 35 і 10. Відрізки висот, що лежать між спільною їх точкою перетину і вершинами трикутника, поділені пополам, і через три одержані точки проведене коло. Знайти його радіус.

391. Сторони трикутника — 17, 17 і 16. Знайти віддаль між центрами описаного і вписаного кіл.

392. Катети прямокутного трикутника — 3 і 4. Знайти віддаль між центрами описаного і вписаного кіл.

393. Гіпотенуза AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC продовжена на довжину $BK = AB$. Точка K сполучена з C і з C радіусом CB описане коло, яке перетинає CK в N. Знайти NK, якщо катет прямокутного трикутника $= r$.

394. В рівнобедреному трикутнику відома висота h, відповідна основі, і радіус r вписаного кола. Знайти сторони трикутника і радіус описаного кола. При якій умові центр описаного кола лежить на колі вписаному?

395. В рівнобедреному трикутнику відомі основа $2a$ і радіус r вписаного кола. Знайти радіус R описаного кола. При змінному a і сталому r визначити minimum R.

396. З усіх вершин прямокутного трикутника з катетами 3 і 4 деяке коло видно під кутами в 60°. Визначити положення центра його і радіус.

397. Стороні a трикутника протилежить кут у 45°. Навколо трикутника описане коло; знайти площу правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

398. Стороні a трикутника протилежить кут у 30°. Знайти площу правильного восьмикутника, вписаного в коло, описане навколо трикутника.

399. У півколі, обмеженому діаметром AB, проведені дві хорди: $AC = a$ і $AD = b$; від точки A по діаметру AB відкладена довжина AK, що дорівнює висоті (з A) трикутника ACD; перпендикуляр, поставлений до діаметра з K, зустрічає коло в K'. Знайти довжину AK'.

400. $\frac{h_a + h_b}{r_c} + \frac{h_b + h_c}{r_a} + \frac{h_c + h_a}{r_b} = 6.$

401. Довести правильність співвідношення:

$$\frac{r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c} = \frac{r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b}{h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b}.$$

402. $r_a + r_b + r_c = 4R + r.$

403. Площа квадрата, побудованого на одній стороні трикутника, дорівнює площі рівностороннього трикутника, побудованого на третій стороні. Знайти, яким числам пропорціональні сторони трикутника.

404. Гострокутний трикутник, дві сторони якого — 29 і 25, вписаний у коло радіуса $18\frac{1}{8}$. Знайти третю сторону і площу трикутника.

405. $a(k_b+k_c)+b(k_c+k_a)+c(k_a+k_b)=2pR$.

406. $4(k_bk_c+k_ck_a+k_ak_b)=(bc+ca+ab)-4R(R+r)$.

407. Виявити за допомогою обчислення, що прямі, які сполучають точки дотику зовнівписаних кіл з протилежними вершинами трикутника, перетинаються в одній точці.

408. На підставі теореми 94 довести, що перпендикуляри до сторін трикутника, поставлені з точок дотику зовнівписаних кіл, перетинаються в одній точці.

409. Середини сторін трикутника сполучені прямими, від чого утворився новий трикутник. Знайти віддалі від центра вписаного в ньому кола до сторін даного трикутника.

410. Знайти віддалі від точки перетину прямих, які сполучають вершини трикутника з точками дотику зовнівписаних кіл, до сторін його.

411. Показати за допомогою обчислення, що ортоцентр трикутника, центр ваги його і центр описаного кола лежать на одній прямій. Знайти, в якому відношенні центр ваги поділяє віддаль між двома іншими згаданими вище точками.

412. Показати за допомогою обчислення, що центр ваги трикутника, центр вписаного кола і точка зустрічі трансверсалей з вершин трикутника до точок дотику зовнівписаних кіл лежать на одній прямій. Знайти, в якому відношенні центр ваги трикутника поділяє віддаль між іншими двома точками.

413. Показати за допомогою обчислення, що три такі точки лежать на одній прямій: 1) центр ваги трикутника, 2) центр вписаного кола і 3) центр кола, вписаного в трикутник, вершини якого лежать у серединах сторін даного. Знайти, в якому відношенні центр ваги поділяє віддаль між іншими двома точками.

414. Знайти віддаль від центра O описаного навколо трикутника кола до центра ваги G цього трикутника.

415. Знайти віддаль від центра ваги G трикутника до центра O' вписаного кола.

416. $9\cdot\overline{GO'}^2=p^2+5r^2-16Rr$.

417. Знайти віддаль від ортоцентра трикутника до центра описаного кола.

418. Визначити віддаль між центром O описаного навколо трикутника кола і центром O' вписаного в той же трикутник кола за даними радіусами R і r цих кіл.

419. Знайти віддаль від центра O' вписаного в трикутник кола до ортоцентра H.

420. $\overline{HO'}^2=4R^2+4Rr+3r^2-p^2$.

421. Знайти віддаль від центра J_a зовнівписаного кола до ортоцентра.

422. $9\cdot\overline{GO_a}^2 = p^2 + 6r_a^2 - r^2 + 4R(3r_a - r)$.

423. Визначити віддаль між центром O_9 кола дев'яти точок і центром O' вписаного кола.

424. Визначити віддаль між центром кола 9 точок і центром J_a зовнівписаного кола.

425. Визначити віддаль між вершиною трикутника і центром зовнівписаного кола, яке дотикається до протилежної сторони.

426. Довести, що:

$$\overline{O_aO_b}^2 = (r_a + r_b)^2 + c^2.$$

427. $\overline{GO'}^2 + \overline{GO_a}^2 + \overline{GO_b}^2 + \overline{GO_c}^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$.

428. $\overline{HO'}^2 + \overline{HO_a}^2 + \overline{HO_b}^2 + \overline{HO_c}^2 = 48R^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)$.

429. З результатів задач 423 і 424 показати, що коло 9 точок дотикається до вписаного кола і до трьох кіл зовнівписаних (теорема Фейєрбаха).

430. $\left(\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c}\right)\left(\frac{a+b+c}{r_a + r_b + r_c}\right) = 4$.

431. $a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c)$.

432. $\overline{O'O_a}\cdot\overline{O'O_b}\cdot\overline{O'O_c} = 16R^2r$.

433. $\overline{AO_a}\cdot\overline{BO_b}\cdot\overline{CO_c} = 4Rr_a^2$.

434. $\overline{O_bO_c}\cdot\overline{O_cO_a}\cdot\overline{O_aO_b} = 16R^2p$.

435. $O_bO_c^2 + O_cO_a^2 + O_aO_b^2 = 8R(r_a + r_b + r_c)$.

436. Основи перпендикулярів, опущених на сторони трикутника з якоїсь точки описаного кола, лежать на одній прямій (пряма Сімпсона).

437. $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a$.

438. $d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 12R^2$.

439. $3(d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) = 4(a^2 + b^2 + c^2) + 4\cdot\overline{OH}^2$.

440. У трикутнику ABC побудоване коло радіуса 1, дотичне до сторін кута B. З A проведена до цього кола дотична. Знайти її довжину, якщо $AB = 13$, $AC = 15$ і $BC = 14$.

441. $h_a' + h_b' + h_c' = 2(R + r)$ або $k_a + k_b + k_c = R + r$.

442. $r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 4R^2 + h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2$.

443. Вивести залежність:

$$h_b'h_c' + h_c'h_a' + h_a'h_b' = 2R(h_a'' + h_b'' + h_c'').$$

444. Знайти довжини прямих, які сполучають центр вписаного в трикутник кола з вершинами трикутника.

445. У прямокутному трикутнику ABC опущений перпендикуляр AD на гіпотенузу BC. Знаючи радіуси r_1 і r_2 кіл, вписаних у трикутники ABD і ACD, знайти радіус r кола, вписаного в трикутник ABC.

446. $a^2 + h_a'^2 = b^2 + h_b'^2 = c^2 + h_c'^2 = 4R^2$.

447. $4(k_a^2 + k_b^2 + k_c^2) = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

448. На колі радіуса r відкладені від точки A (по обидві сторони її) дві дуги: $AC = 30°$ і $AB = 60°$. Знайти площу трикутника ACB.

449. $S = 2R^2 \cdot \frac{h_a h_b h_c}{abc}$

450. $r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b = p^2$

451. $r^3 = \frac{abc}{(a+b+c)^3} h_a h_b h_c.$

452. $\frac{R}{r} = \frac{1}{4}\left(\frac{r_a}{r} - 1\right)\left(\frac{r_b}{r} - 1\right)\left(\frac{r_c}{r} - 1\right)$

453. $a = \frac{r_a(r_b + r_c)}{p}$

454. Дано коло центра O і радіуса R. На одному з його радіусів OJ, як на діаметрі, описане друге коло, і через точку O проведена січна, яка зустрічає перше коло в точці B, а друге в A, при чому $OA = \frac{R}{4}$. В точках A і B побудовані до кіл дотичні, які перетинаються в точці C. Знайти висоту трикутника ABC відносно сторони AC і сторону AC.

455. $\frac{bc}{\overline{AO_a}^2} + \frac{ca}{\overline{BO_b}^2} + \frac{ab}{\overline{CO_c}^2} = 1$

456. $\frac{\overline{AO'}^2}{bc} + \frac{\overline{BO'}^2}{ca} + \frac{\overline{CO'}^2}{ab} = 1$

457. Радіус зовнівписаного кола, дотичного до гіпотенузи прямокутного трикутника, $= r$. Знайти площу квадрата, периметр якого дорівнює периметрові прямокутного трикутника.

458. $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{2}{h_a}$

459. $\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_a}$

460. $S = r_a r_b \sqrt{\frac{\overline{O_a O_b}^2}{(r_a + r_b)^2} - 1}.$

461. Віддалі кожної точки медіани m_a до сторін b і c обернено пропорціональні цим сторонам.

462. $a^2 + b^2 + c^2 + r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 16R^2$

463. $\frac{(r_b + r_c)(r_c + r_a)(r_a + r_b)}{r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b} = 4R.$

464. $\sqrt{\frac{r r_b r_c}{r_a}} + \sqrt{\frac{r r_c r_a}{r_b}} + \sqrt{\frac{r r_a r_b}{r_c}} = r$

465. Медіана, яка виходить з вершини A трикутника, продовжена до перетину з описаним колом у точці A'. Знайти AA'.

466. Знайти основу рівнобедреного трикутника, знаючи радіус r вписаного в трикутник кола і радіус r' того зовнівписаного кола, яке дотичне до однієї з рівних сторін трикутника.

467. $k_a = \frac{r + r_b + r_c - r_a}{4}$

468. $\frac{R}{2r} = \frac{p^2}{h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b}$

469. Через вершину A трикутника і через середину O сторони його AC проведені кола, дотичні до BC або до її продовжень. Знайти радіуси цих кіл, знаючи, що $AC = 30$, $AB = 26$ і $BC = 28$.

470. Три кола центрів O_1, O_2, O_3 і радіусів R_1, R_2, R_3 дотикаються попарно зовнішньо, при чому S є площа трикутника $O_1O_2O_3$; a, b, c — його сторони, а s — площа трикутника, утвореного трьома точками дотику. Довести, що:

$$\frac{s}{S} = 1 - \frac{R_1^2}{bc} - \frac{R_2^2}{ac} - \frac{R_3^2}{ab} = 2\frac{R_1R_2R_3}{abc}$$

471. $S = \sqrt{\frac{1}{2} R h_a h_b h_c}$.

472. $\frac{l_a' l_b' l_c'}{r} = \frac{abc}{p}$

473. Рівносторонній трикутник NBM і рівнобедрений прямокутний трикутник NAM мають спільну основу $NM = b$ і вершина A прямого кута лежить на висоті BO рівностороннього трикутника. З точки B радіусом BN описана дуга NCM, а з A радіусом AN дуга NDM. Знайти площу серпка $MCND$.

474. З трьох вершин правильного трикутника, сторона якого $= 2a$, радіусами, що дорівнюють a, описані три кола. Потім побудовані два інші кола, дотичні до трьох перших. Знайти їх радіуси.

475. Дано правильний трикутник ABC; побудована точка M, симетрична з точкою A відносно BC, і з точки M радіусом BC описане коло. Якщо P довільна точка цього кола, то:

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2.$$

476. $k_a\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + k_b\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + k_c\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 6R.$

477. В правильному трикутнику ABC із стороною $2a$ описані дві дуги, обмежені точками A і B: одна дотикається в точках A і B до сторін CA і CB, друга дотикається в точках A і B до бісектрис кутів A і B. Треба:

1) визначити число градусів у кожній з цих дуг
2) знайти радіуси дуг;
3) визначити площу, що лежить між дугами.

478. $\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}$

479. $\frac{\overline{CO'}\cdot\overline{CO_c}}{\overline{BO'}\cdot BO_b}=\frac{b}{c}$

480. $\overline{AO'}\cdot\overline{AO_a}=bc.$

481. Дано два трикутники ABC і $A'B'C'$ такі, що:

$$B=C;\ A=3B;$$
$$B'=C';\ 2A=B';$$
$$BC=A'B'=a.$$

Довести, що радіуси кіл, описаних навколо цих трикутників, рівні.

Обчислити радіус.

482. Площа прямокутного трикутника $=6$, а радіус зовнівписаного кола, дотичного до одного з катетів, дорівнює 3. Знайти сторони трикутника.

483. На підставі геометричних міркувань розв'язати рівняння:

$$a\sqrt{x^2-a^2}+b\sqrt{x^2-b^2}+c\sqrt{x^2-c^2}=\frac{2abc}{x}$$

484. У рівнобедреному трикутнику ABC:

$$BC=6,$$
$$AB=AC=10.$$

Вписане в трикутник коло дотикається до основи BC в точці D і до сторони AB в точці E. Точки E і D сполучені прямою ED, і продовження ED перетинає продовження AC в точці H. Визначити AH.

485. Бісектриса внутрішнього кута A в трикутнику ABC зустрічає протилежну сторону в D і описане коло в E. Знайти відношення $\frac{AE}{AD}$.

486. Коло дотикається до більшого катета прямокутного трикутника, проходить через вершину протилежного гострого кута і має центр на гіпотенузі. Знайти його радіус, якщо катети є 3 і 4.

487. Площа прямокутного трикутника, в якого гіпотенуза вдвоє більша одного з катетів, дорівнює S. Знайти площу трикутника, вершини якого є центри кіл, зовнівписаних у даний прямокутний трикутник.

488. Проекції центра вписаного в трикутник кола на сторони трикутника є P_a, P_b, P_c. Знайти площу трикутника $P_aP_bP_c$.

489. Через середини катетів прямокутного трикутника проведене коло, дотичне до гіпотенузи. Знайти його радіус, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника, $= 2^1/_2$, а площа трикутника $= 6$.

490. Через вершину гострого кута рівнобедреного прямокутного трикутника проведено круг, який є дотичним до продовження протилежного катета і проходить через середину гіпотенузи. Знайти площу круга, якщо катет рівнобедреного трикутника $= a$.

491. $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{s^2}$.

492. Навколо трикутника ABC описане коло, і до нього в точці A проведена дотична, що перетинається з продовженням BC в точці T. Визначити BT і AT.

493. Перевірити співвідношення:

$$\overline{AO'}^2+\overline{BO'}^2+\overline{CO'}^2=bc+ca+ab-12Rr.$$

494. Довести, що:

$$\overline{AO'}\cdot\overline{BO'}\cdot\overline{CO'}=4Rr^2.$$

495. Радіуси трьох концентричних кіл є 3, $2\sqrt{3}$ і 6. До меншого кола проведена довільна дотична, яка перетинає середнє коло в точці B, а зовнішнє в точці C,[1] при чому припускається, що B і C розміщені по різні сторони відносно точки дотику A. Точки B і C сполучені прямими з спільним центром O, від чого утворився трикутник BOC. Треба визначити його кути і сторону BC.

496. Рівнобедрений прямокутний трикутник вписаний у коло радіуса R. Друге коло дотикається до рівних сторін рівнобедреного трикутника і до першого кола. Знайти його радіус.

497. У півколо діаметра AB вписаний рівнобедрений прямокутний трикутник ABC; точка A сполучена з серединою D хорди CB, і пряма AD продовжена до перетину з колом у точці E; з E на CB опущений перпендикуляр EF. Довести, що:

$$CF=3EF.$$

498. У трикутнику ABC пряма Ейлера паралельна стороні a. За даними R і a знайти h_a.

499. При умовах попередньої задачі:

$$bc=3R\sqrt{4r^2-a^2}.$$

500. Центр ваги деякого прямокутного трикутника лежить на вписаному колі. Знайти відношення катетів.

[1] Інші точки не розглядаються.

501. Хорда $CD = K$ описаного навколо правильного трикутника ACB кола поділяє сторону AB на дві частини, які відносяться як $3:2$. Знайти радіус кола.

502. В коло радіуса 9 вписаний рівнобедрений трикутник такий, що сума віддалей від центра кола до сторін трикутника $= 11^1/_2$. Знайти віддаль від центра кола до однієї з рівних між собою сторін.

503. В трикутнику ABC — M є середина сторони AB; R_1, R_2, R — радіуси кіл, описаних навколо трикутників CMB, CMA і CBA. Знаючи сторони a і b і відношення

$$\frac{R_1 + R_2}{R} = n,$$

знайти медіану m_c.

504. AA' — внутрішня бісектриса трикутника, O' — точка перетину внутрішніх бісектрис.

Обчислити добуток $O'A \cdot O'A'$.

505. Якщо в трикутнику ABC

$$h_a = r_a,$$

то

$$l_a^2 = \frac{3}{4} bc.$$

Умови можливості задачі.

506. Дано, що коло, яке проходить через вершину A трикутника і через середини сторін AB і AC, дотикається до третьої сторони трикутника в точці M.

Довести, що AM є середня пропорціональна між BM і MC.

2. Коло і многокутник.

507. В півколо одиничного радіуса вписана трапеція (основа пристає до діаметра), периметр якої дорівнює 5. Знайти її сторони і площу.

508. В деякий кут вписане коло радіуса r, і довжина хорди, яка сполучає точки дотику, дорівнює a. Паралельно цій хорді проведені дві дотичні, і таким способом утворилась трапеція, площу якої треба знайти.

509. В ромб, який поділяється діагоналлю на два рівносторонні трикутники, вписаний круг одиничного радіуса. Знайти сторону ромба.

510. Діагоналі ромба 6 і 8. Знайти площу круга, вписаного в цей ромб.

511. Дано квадрат $ABCD$, сторона якого $= 4$. На AD взято точку K так, що $AK = 1$, і K сполучена з C; з B на CK опущений перпендикуляр BT. Знайти довжину цього перпендикуляра і радіус кола, описаного навколо чотирикутника $BTKA$.

512. З вершини квадрата радіусом, що дорівнює половині сторони квадрата, описане коло, а з суміжної вершини проведена дотична до цього кола. Знайти, в якому відношенні дотична поділяє площу квадрата.

513. Дано симетричну трапецію, в якої одна з непаралельних сторін дорівнює 5, а паралельні основи 1 і 7. Знайти площу круга, описаного навколо цієї трапеції.

514. В симетричну трапецію, в якої паралельні сторони 8 і 2, вписане коло. Знайти його радіус.

515. В півколо радіуса r вписаний квадрат. Знайти його площу.

516. Два рівні кола радіуса r перетинаються; віддаль між їх центрами $= r$. У спільну частину обох кругів вписаний квадрат. Знайти його сторону.

517. У трапеції, основи якої є 6 і 21, а одна з непаралельних сторін — 14, вписане коло. Знайти його радіус.

518. У півколо радіуса r вписаний чотирикутник $ACDB$ такий, що $AB = 2r$, $AC = r$ і $BD = r\sqrt{2}$. Знайти проекцію AB на напрям CD.

519. Пряма $AB = 2a$ поділена на дві рівні частини і на одній з них побудований квадрат, а на другій — рівносторонній трикутник; вершини цих фігур, що лежать поза даною прямою, сполучені між собою, і таким способом утворений п'ятикутник, в якому треба знайти кути, сторони, діагоналі та площу; крім того, визначити довжину хорди, яку відтинає від сторони квадрата коло, описане навколо трикутника.

520. На двох суміжних сторонах квадрата побудовані в зовнішньому колі два півкола і до них дотичні, паралельні своїм діаметрам. Знайти радіус кола, дотичного до цих двох півкіл і до згаданих дотичних, якщо сторона квадрата $= 2a$.

521. Сторони трикутника — 13, 14 і 15. З центра ваги трикутника опущені перпендикуляри на дві менші сторони, від чого утворився чотирикутник, в якому треба знайти: 1) сторони, 2) діагоналі, 3) радіус описаного кола і 4) площу.

522. Навколо кола, радіус якого дорівнює 2, описана симетрична трапеція з площею $= 20$. Знайти сторони трапеції.

523. В півколо вписаний чотирикутник, послідовні сторони якого є $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ і 6. Знайти радіус кола.

524. В коло радіуса $\sqrt{3}$ вписаний правильний трикутник, і проведена пряма, що сполучає середини двох дуг, які стягують сторони трикутника. Знайти довжину цієї прямої і довжини відрізків, що утворені на ній сторонами трикутника.

525. Через дві суміжні вершини квадрата проведене коло так, що дотична до нього з третьої вершини дорівнює подвійній стороні квадрата. Знайти радіус цього кола, якщо площа квадрата $= 10$.

526. За даними хордами a і b, що відповідають двом дугам у колі одиничного радіуса, знайти хорду, яка відповідає сумі цих дуг.

527. За даними хордами a і b, що відповідають двом дугам у колі одиничного радіуса, знайти хорду, яка відповідає різниці цих дуг.

528. У колі одиничного радіуса знайти хорду, що відповідає дузі в 210°.

529. Віддаль між центрами двох рівних кіл радіуса r дорівнює d. Знайти сторону і площу ромба, утворюваного дотичними, проведеними з центра кожного кола до другого кола.

530. У вписаному чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і CD продовжені до взаємного перетину. Знайти сторони одержаного (більшого) трикутника, якщо $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ $(d > b)$.

531. У півколі радіуса R вписаний чотирикутник $ACDB$ так, що сторона його AB пристає до діаметра, а $AC + DB = 2R$. Діагоналі чотирикутника перетинаються в O. Знаючи, що $OA = a$, $OB = b$, знайти сторони чотирикутника і площу трикутника OAB.

532. Знайти площу вписаного чотирикутника за чотирма його сторонами a, b, c і d.

533. Виразити площу вписаного чотирикутника залежно від чотирьох сторін його a, b, c і d, від однієї з діагоналей m і n і від радіуса R описаного кола. Користуючись одержаними виразами, знайти відношення діагоналей вписаного чотирикутника (протилежні сторони a і c, b і d).

534. Сторони чотирикутника, навколо якого можна описати і в який можна вписати коло, є a, b, c і d. Знайти його площу.

535. За чотирма сторонами a, b, c і d вписаного чотирикутника знайти його діагоналі.

536. У сегмент, дуга якого має 120°, вписаний квадрат. Визначити сторону квадрата, якщо радіус кола $= \sqrt{19} + 2$.

537. Півколо перерізане прямою AB, на яку з кінців діаметра MN опущені перпендикуляри $MK = p$ і $NP = q$. Знайти площу прямокутника, побудованого на відрізках KA і AP (Точці M відповідає точка K.)

538. На діаметрі кола радіуса R побудований рівносторонній трикутник, і зовнішня вершина його сполучена з серединою радіуса (в основі трикутника); одержана пряма продовжена до перетину з колом. Знайти довжину хорди, обмеженої згаданою точкою перетину і найближчим до неї кінцем діаметра.

539. Коло дотикається до двох суміжних сторін квадрата і поділяє третю сторону на два відрізки: 8 і 17. Знайти радіус цього кола.

540. В менший сегмент, який відтинається стороною правильного трикутника, вписаний рівносторонній трикутник, одна з сторін якого перпендикулярна до хорди сегмента. Знайти сторону правильного трикутника, якщо радіус кола $= r$.

541. Дано квадрат AOB радіуса R. Паралельно хорді AB на віддалі k від неї проведена січна, що зустрічає продовжені радіуси OA і OB в точках C і D, а дугу квадранта — в точках E і F. З точки E (найближчої до C) поставлений до CD перпендикуляр, який перетинає OA в точці G. Точки D і G сполучені прямою. Визначити DG.

542. Навколо кола радіуса r описана рівнобічна трапеція, в якої менша основа $= 2a$. Знайти діагоналі трапеції.

543. В коло радіуса r вписані два рівні прямокутники з взаємно перпендикулярними сторонами. Знайти площу, спільну обом прямокутникам, якщо відношення нерівних сторін кожного з них $= 2$.

544. В симетричній трапеції висота $= h$; діагональ BD перпендикулярна до сторони BC; кола, описані на сторонах AD і BC, як на діаметрах, дотикаються взаємно зовнішньо. Визначити основи AB і CD.

545. Знайти площу правильного зірчастого восьмикутника, вписаного в коло радіуса R.

546. На чотирьох сторонах квадрата, як на діаметрах, описані у внутрішньому полі півкола, що утворюють чотирипелюсткову фігуру. Обчислити її площу залежно від сторони $2a$ квадрата.

547. Відношення сторони описаного многокутника до сторони однойменного вписаного многокутника $= 2$. Знайти різницю площ цих многокутників, якщо радіус кола $= r$.

548. У квадраті проведені діагоналі, від чого він поділився на 4 трикутники. Знайти відношення площі чотирикутника, вершини якого є центри кіл, описаних навколо згаданих трикутників,— до площі чотирикутника, вершини якого є центри кіл, вписаних у ті ж трикутники.

549. До двох зовнішньо дотичних кіл радіусів R і r проведені дві спільні зовнішні дотичні. Знайти площу трапеції, утвореної цими двома дотичними і хордами, які сполучають точки дотику.

550. У крузі радіуса 5 проведена хорда $AB = 9$. На AB взята точка K так, що $AK = 7^1/_2$, і через K проведена хорда CD, перпендикулярна до AB; потім точки A і C, C і B, B і D, D і A сполучені прямими. Треба: 1) знайти площу чотирикутника $ABCD$; 2) знайти площу круга, який проходить через середини сторін чотирикутника.

551. Дано коло радіуса R. На радіусі його OA взята точка B так, що

$$OB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

і через точку B проведена перпендикулярна до OA хорда DC. В точці D до кола побудована дотична DE, яка зустрічає продовження радіуса OA в точці E, і на прямій BE, як на діаметрі, описане коло центра J, яке перетинається з першим у точках F і G. Знайти: 1) довжину спільної хорди двох кіл; 2) відношення площі чотирикутника $JFOG$ до площі трикутника BDE.

552. Дано вписаний в коло радіуса R чотирикутник $ABCD$, при чому:

$$\smile AB = 60°,$$
$$\smile BC = 90°,$$
$$\smile CD = 120°.$$

Треба: 1) визначити сторони чотирикутника; 2) довести, що діагоналі його взаємно перпендикулярні; 3) обчислити відрізки діагоналей і самі діагоналі; 4) знайти площу чотирикутника.

553. На колі центра O і радіуса R взята точка A, і в цій точці побудована дотична, на якій відкладений деякий відрізок AP. Точки P і O сполучені прямою, яка продовжена до зустрічі з колом у точці D, де проведена друга дотична, що перетинає продовження PA в E. З умови: площа трикутника OPA = площі $ODEA$, визначити PA.

554. Навколо кола радіуса R описаний чотирикутник $ABCD$, діагональ якого AC проходить через центр O, при чому:

$$AO = 2R,$$
$$A + C = 180°.$$

Визначити: 1) кути B і D; 2) площу трикутника AJO, де J — точка дотику сторони AB; 3) площу чотирикутника; 4) радіус кола, описаного навколо чотирикутника.

555. Дано чотирикутник $ABCD$, описаний навколо центра O. Знайти відношення $\frac{OA}{OC}$, якщо $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ і $AD = d$.

556. Навколо кола радіуса r описаний чотирикутник, послідовні сторони якого є a, b, c, d. Знайти відрізки сторін, утворювані точками дотику вписаного кола.

557. Одне коло дотикається до двох непаралельних сторін AA' і BB' прямокутної трапеції і більшої основи $A'B'$, а друге коло дотикається до двох непаралельних сторін трапеції і до меншої основи AB. Знаючи, що спільна внутрішня дотична цих кіл паралельна основам трапеції, і знаючи основи a і b трапеції, знайти: 1) дві інші сторони трапеції; 2) радіуси кіл; 3) довжину спільної внутрішньої дотичної, паралельної основам трапеції і обмеженої сторонами трапеції; 4) довжину спільної внутрішньої дотичної, непаралельної основам і обмеже-

ної сторонами трапеції; 5) відрізки, на які ця дотична поділяє перпендикулярну до основ сторону трапеції; 6) радіус кола, яке проходить через точки A і A' і є дотичним до BB'.

558. У вписаному чотирикутнику $ABCD$

$$AB = \frac{1}{2} AD,$$

$$BC = \frac{1}{2} CD.$$

Знаючи, що $AB = a$ і $AC = b$, обчислити BC. При якій умові AB дорівнює радіусові описаного навколо трикутника кола?

559. В прямокутній трапеції, висота якої $= 2h$, на стороні, неперпендикулярній до основи, як на діаметрі, описане коло, і виявилося, що воно дотикається до протилежної сторони трапеції. Знайти площу прямокутника, побудованого на основах трапеції.

560. З кожної вершини квадрата радіусом, що дорівнює стороні його r, описані у внутрішньому полі дуги, що дорівнюють чверті кола. Дуги ці, перетинаючись, утворюють чотиристоронню криволінійну фігуру. Знайти її площу.

561. На діагоналях трапеції, як на діаметрах, описані кола. Знайти довжину спільної хорди цих кіл, якщо діагоналі трапеції є $2a$ і $2a_1$, а різниця основ $= 2k$.

562. Коло радіуса r поділене в точках A, B і C на три рівні частини, і на радіусах OA, OB і OC відкладені відповідно довжини OA', OB', OC', що дорівнюють стороні вписаного в коло квадрата. Знайти відношення площі трикутника $A'B'C'$ до площі шестикутника, вписаного в те ж коло.

563. В колі радіуса R хорда AB, що відповідає дузі в 45°, проведена до перетину в точці K з перпендикуляром, поставленим до діаметра AM з його середини O. З B на AM опущений перпендикуляр BC. Знайти площу трапеції $OCBK$.

564. Сторона AB вписаного в коло радіуса $\sqrt{6}$ шестикутника і паралельна їй сторона $A'B'$ описаного шестикутника продовжені до перетину в точках C і C' з перпендикуляром, опущеним з центра кола на сторону вписаного шестикутника, суміжну з AB, і точки A і A' сполучені прямою. Знайти площу трапеції $AA'C'C$. (AB і $A'B'$ лежать по одну сторону від центра.)

565. DF — хорда кола, яка дорівнює стороні правильного вписаного трикутника; DC — діаметр цього кола $= 2\sqrt{3}$; AB — дотична, паралельна DF (AB і DF лежать по одну сторону від центра), при чому A — точка перетину її з продовженим діаметром DC, а B — точка перетину дотичної з продовженням прямої FC. Визначити площу трапеції $ADFB$.

566. Якщо в симетричну трапецію можна вписати коло, то висота трапеції дорівнює середньому геометричному основ,

а кожна з непаралельних сторін дорівнює їх середньому арифметичному,

567. При якій умові чотирикутник, вершини якого є середини сторін симетричної трапеції, буде квадратом?

568. У вписаному чотирикутнику $ABCD$

$$AB = a;\ BC = b;\ CD = c.$$

Точки B і D сполучені прямою, і трикутник BCD знятий з свого місця і стороною BC прикладений до сторони BA в зовнішнє поле так, що точка B лишилась на своєму місці, а точка C впала в точку E на стороні BA ($BC < BA$). При цьому точка D зайняла положення F. Пряма BF продовжена до зустрічі з продовженням AD в точці G. Знайти AG і відношення

$$\frac{BD}{BG}.$$

569. Центральний кут сектора $= 60°$; радіус дуги сектора $= \sqrt{2}+\sqrt{3}$. Знайти сторону квадрата, вписаного в сектор.

570. Центральний кут сектора $= 90°$; радіус дуги сектора $=5$. В сектор вписаний прямокутник, в якого одна сторона в 6 раз більша другої. Знайти сторони прямокутника.

571. Дано квадрат $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Центри кіл, вписаних у трикутники AOB, BOC, COD, DOA, ABC, BCD, CDA і DAB, утворюють вершини деякого восьмикутника. Знайти його площу, знаючи сторону a квадрата.

572. В півколі радіуса R, яке описане на AB, як на діаметрі, проведені дві хорди AC і AD. Перша дорівнює стороні квадрата, а друга — стороні правильного трикутника, вписаних у дане коло. Визначити довжину хорди CD і площу фігури ACD.

573. В коло радіуса R вписано квадрат $ABDC$, і в D проведена дотична до кола, яка перетинає продовження AB в точці E. Ця точка сполучена прямою з точкою C, і пряма EC перетинає BD в M. Визначити площу $ABMC$.

574. В квадрат $ABCD$ вписане коло радіуса r. До цього кола проведена довільна дотична, яка зустрічає CB в P і CD в Q. Довести, що площа трикутника APQ є величина стала.

V. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ.

575 — 580. У цих задачах треба знайти площі правильних многокутників, вписаних у коло радіуса r:

575. трикутника
576. квадрата
577. п'ятикутника
578. шестикутника
579. восьмикутника
580. десятикутника

581—586. У цих задачах треба знайти площі правильних многокутників, описаних навколо кола радіуса r:

581. трикутника
582. квадрата
583. п'ятикутника
584. шестикутника
585. восьмикутника
586. десятикутника

587—592. В цих задачах треба за заданою стороною a знайти площу вписаного в коло радіуса r многокутника:

587. трикутника
588. п'ятикутника
589. шестикутника
590. восьмикутника
591. десятикутника
592. дванадцятикутника

593—596. За даною площею S правильного многокутника знайти сторону:

593. трикутника
594. шестикутника
595. восьмикутника
596. дванадцятикутника

597—599. За даною площею S правильного многокутника знайти радіус кола, описаного навколо:

597. п'ятикутника
598. восьмикутника
599. десятикутника

600. Якщо A, B, C і D є послідовні вершини правильного многокутника, то:

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}.$$

601. Два правильні многокутники мають рівні сторони, а внутрішній кут одного вдвоє більший внутрішнього кута другого. Знайти відношення площ многокутників.

602. Знаючи площі S і S_1 правильних вписаних многокутників з n і $2n$ сторонами, визначити площу S_2 правильного вписаного многокутника з $4n$ сторонами.

603. В правильному многокутнику проведені послідовно діагоналі, що стягують по дві суміжні сторони, які в перетині дають правильний многокутник того ж числа сторін, як даний. Знайти площу одержаного многокутника.

604. Визначити площу фігури, утвореної двома паралельними сторонами правильного восьмикутника і двома діагоналями, що сполучають кінці цих сторін. Сторона восьмикутника $= \sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

605. Середини сторін квадрата $ABCD$ є O_1, O_2, O_3, O_4 (O_1 — середина AB, O_2 — середина BC та ін.). Прямі AO_2, BO_3, CO_4, DO_1 утворюють своїм перетином чотирикутник, вид і площу якого треба знайти, якщо сторона квадрата $= \sqrt{5}$.

606. Знайти сторону правильного п'ятнадцятикутника, вписаного в круг радіуса r.

607. На чотирьох сторонах квадрата побудовані (поза ним) рівносторонні трикутники, і зовнішні вершини їх сполучені. Знайти сторону правильного дванадцятикутника, рівновеликого одержаній фігурі, якщо сторона квадрата $= a$.

608. В правильному шестикутнику вершини сполучені через одну прямими лініями. Перетин цих прямих утворює новий шестикутник, площа якого $= \frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайти площу круга, описаного навколо першого шестикутника.

609. Усередині паралелограма $ABCD$, площа якого $= 8$, взята довільна точка O і сполучена з усіма вершинами. Знайти сторону правильного восьмикутника, площа якого дорівнює сумі площ трикутників OAB і OCD.

610. Правильний шестикутник, із стороною a, поділений прямою, що виходить з вершини його, на дві частини, які відносяться як $2:3$. Знайти довжину поділяючої лінії.

611. У правильному шестикутнику із стороною a вписаний п'ятикутник так, що всі вершини його, крім однієї, лежать у серединах сторін шестикутника, а одна вершина — спільна в обох многокутників. Знайти сторони і площу п'ятикутника.

612. Два рівні прямокутники накладені один на одного концентрично і так, що рівні їх сторони взаємно перпендикулярні, від чого утворилась фігура, яка має вигляд хреста. Сусідні вершини цього хреста сполучені між собою, і тоді утворився восьмикутник, площу якого треба знайти, знаючи розміри a і b прямокутника ($a > b$). При якій умові восьмикутник буде правильним?

613. Правильний шестикутник, сторона якого $= a$, перемістився так, що дві його суміжні вершини A і B пройшли в напрямах, перпендикулярних до AB, шляхи, які дорівнюють апофемі шестикутника. Знайти площу, спільну обом положенням шестикутника.

614. Усі сторони правильного шестикутника продовжені в одному напрямі на потроєну довжину сторони його, і крайні точки продовжень сполучені прямими.

Знайти відношення площі одержаної фігури до площі шестикутника.

615. A, B, C, D є послідовні вершини правильного семикутника. Довести, що

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

616. Коло радіуса r поділене на 10 рівних частин. Якщо сполучити хордою першу точку поділу з четвертою, четверту з сьомою, сьому з десятою, десяту з третьою і т. д., то утвориться правильний двадцятикутник з десятьма вхідними і десятьма вихідними кутами. Знайти площу цього двадцятикутника.

VI. ПОЗНАЧЕННЯ.

У формулах і задачах, що стосуються трикутника, прийняті такі позначення (якщо немає окремих застережень).

A, B, C — вершини трикутника.
a, b, c — сторони (лежать відповідно проти A, B, C).
A, B, C або α, β, γ — кути.
p — півпериметр.
h_a, h_b, h_c — висоти.
m_a, m_b, m_c — медіани.
l_a, l_b, l_c — бісектриси внутрішніх кутів.
l_{1a}, l_{1b}, l_{1c} — бісектриси зовнішніх кутів.
R — радіус описаного кола.
r — радіус вписаного кола.
r_a, r_b, r_c — радіуси зовнівписаних кіл.
S — площа трикутника.
H — точка перетину висот (ортоцентр).
G — точка перетину медіан (центр ваги).
O — центр описаного кола.
O' — центр вписаного кола (точка перетину бісектрис).
O_a, O_b, O_c — центри зовнівписаних кіл.
O_9 — центр кола Ейлера (коло дев'яти точок).
d — віддаль між центрами вписаного й описаного кіл.
h_a', h_b', h_c' — відрізки висот, що лежать між точкою їх перетину і вершинами.
l_a', l_b', l_c' — відрізки бісектрис, що лежать між точкою їх перетину і вершинами.
m_a', m_b', m_c' — відрізки медіан, що лежать між точкою їх перетину і вершинами.
h_a'', h_b'', h_c'' — відрізки висот між ортоцентром і сторонами трикутника.
l_a'', l_b'', l_c'' — відрізки бісектрис між точкою їх перетину і сторонами трикутника.
m_a'', m_b'', m_c'' — відрізки медіан між точкою їх перетину і сторонами трикутника.
d_a, d_b, d_c — віддалі центра описаного кола від центрів зовнівписаних кіл.
k_a, k_b, k_c — віддалі центра описаного кола від сторін трикутника.
g_a, g_b, g_c — віддалі якоїнебудь точки, взятої на описаному колі, від сторін.
g_a', g_b', g_c' — віддалі якоїнебудь точки, взятої на вписаному або зовнівписаному колі, від сторін трикутника.
t_a, t_b, t_c — віддалі якоїнебудь точки в площині трикутника і всередині його до сторін трикутника.

ВІДПОВІДІ.

1. $2\sqrt{ab}$; $2b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$;

$2a\sqrt{\frac{b}{a+b}}$.

2. $\frac{11}{12}$.

3. $\frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$.

4. Вказівка. Доповнити трикутник до паралелограма.

5. 6; 8.

7. $\frac{3}{4}\sqrt{M(M-m_a)(M-m_b)(M-m_c)}$,

де $2M = m_a + m_b + m_c$.

Вказівка. Хай BAC — даний трикутник; AA', BB', CC' — його медіани і G — точка їх перетину. Продовжимо GA' і відкладемо $A'A'' = GA'$. Площа трикутника $GA''C$ дорівнюватиме одній третині площі трикутника ABC. Сторони ж трикутника $GA''C$ визначаються легко.

8. $\frac{1}{S} =$

$=4\sqrt{H(H-h_a^{-1})(H-h_b^{-1})(H-h_c^{-1})}$,

де покладено: $2H = h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}$

Вказівка. Скористатись рівностями: $ah_a = bh_b = ch_c$.

9. 13 і 14.

10. $2\frac{2}{3}$; 0,7; $3\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}\sqrt{37}$.

11. $21\frac{9}{11}$.

12. $\frac{S}{6}$.

13. $\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{3}}$; $\frac{ab}{4}$.

14. $\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}$; $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$.

15. $\sqrt{a^2+b^2-ab}$; $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$.

16. $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{3}}$; $\frac{ab}{4}$.

17. $\sqrt{a^2+b^2+ab}$; $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$.

18. $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+4b^2-2ab(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$;

$\frac{ab}{8}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

19. $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$; $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$.

20. $\frac{a^2}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

21. $a(\sqrt{3}-1)$; $\frac{a}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$;

$\frac{a^2}{4}(\sqrt{3}-1)$.

22. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $a\sqrt{2}$.

23. 2; $\sqrt{7}$; $\sqrt{3}$.

24. $2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$.

25. $\sqrt{b^2+bc}$.

26. $4\sqrt{7}$; $3\sqrt{7}$.

27. Вказівка. $h_a = \frac{2S}{a}$ та ін.

28. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

29. $12\frac{1}{4}$.

30. Майже 22 *м*.

31. 9.

32. 12,5; 16,5.
33. 3.
34. 2 або 1.
35. $\frac{bc}{2}$ і $2p$.
36. $h\sqrt{5}$; $\frac{h}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $\frac{h}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.
37. $\frac{a^2}{h_b^2}$.
38. $\sqrt{SS_1}$.
39. $\frac{p(p+q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$; $\frac{q(p+q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$; $\frac{pq(p+q)}{p^2+q^2}$; $\frac{pq\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+q^2}}$.
40. $\frac{8S^2}{a^2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}$.
41. 28.
42. 1 і 19.
43. $AE = 12{,}8$; $AF = 25{,}6$.
44. $AE = 9{,}6$; $AF = 28{,}8$; $AG = 57{,}6$; $AH = 96$.
45. $\sqrt{33}$ і $\sqrt{42}$.
46. $5; 5\sqrt{3}$.
47. $\frac{13}{25}S$.
48. $\frac{3}{7}S$. Вказівка. Позначимо точку перетину прямих AA_1 і BB_1 через N, прямих BB_1 і CC_1 через P і прямих CA_1 і AA_1 через M. Тоді: $MNP = ABC - AMC - BPC - ANB$.

Для відшукання, наприклад, AMC знайдіть відношення: $\frac{AMC}{BMC}$ і $\frac{AMC}{AMB}$.

Майте на увазі, що: $AMC + BMC + AMB = ABC$.

50. Вказівка. Застосувати теорему про квадрат сторони трикутника.
54. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ *км*.
56. $\frac{a}{2}(3-\sqrt{3})$.
57. $\sqrt{k^2+2S\sqrt{3}}$ і $\sqrt{k^2-2S\sqrt{3}}$, де: $a^2+b^2+c^2=2k^2$.

Вказівка. Знайти суму квадратів і різницю квадратів AD і AD'.

58. $2\sqrt{\frac{b(p-b)(p-c)}{c}}$.
59. $\frac{lb}{a+b}$; $\frac{la}{a+b}$.
60. 1.
61. $\frac{2p(p-a)}{b+c}$.
62. 19.
63. $\sqrt{p^2-ab}$.
64. $x^2a = b^2m + c^2n - amn$.

Примітка. Відповідь виражає теорему Стевварта.

65. $\frac{1}{3}(9-5\sqrt{3})$ (віддаль від основи).
66. 180°.
67. 450.
68. $30\sqrt{3}$ *м*.
70. 13,2.
71. $\sqrt{\frac{c(p-b)(p-c)}{b}}$; $\sqrt{\frac{b(p-b)(p-c)}{c}}$.
72. Всі ці чотирикутники рівновеликі.
73. Один з відрізків дорівнює:

$$\frac{7}{11}\sqrt{330}.$$

74. $\frac{n^2S}{(m+n)^2}$; $\frac{m^2S}{(m+n)^2}$; $\frac{2mnS}{(m+n)^2}$.
75. $p\sqrt{3}$.
76. 21.
77. $88\frac{3208}{4205}$.
78. $\left(\frac{p_1p_2}{ab}+\frac{p_2p_3}{bc}+\frac{p_1p_3}{ac}\right)S$.
79. $4S+2a^2$.
80. $2\sqrt{km}$.
81. $\frac{h}{2}(\sqrt{5}-1)$.
82. $12\frac{72}{169}$.
83. $\frac{8S^2}{abc}$.

Вказівка. Сполучаючи основи двох якихнебудь висот, дістанемо трикутник, подібний даному.

84. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.
85. $d(\sqrt{3}-1)$.
86. $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-2m_c)}$, де $2p = a+b+2m_c$.

90. Якщо O є точка перетину бісектрис AA_1 і BB_1, то $OA_1 = \frac{a}{2p} AA_1$. Якщо O_1 є точка перетину бісектрис AA_1 і CC_1, то $O_1A_1 = \frac{a}{2p} AA_1$. Через те що $OA_1 = O_1A_1$, то три бісектриси перетинаються в одній точці.

91. Якщо AA_1O є бісектриса внутрішнього кута і O — точка перетину її з бісектрисою одного з зовнішніх кутів, то

$$OA = \frac{2p - a}{2(p - a)} AA_1.$$

92. $h'_a = \pm \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)}{8aS}$

97. Для того щоб три дані точки лежали на одній прямій, необхідно і досить, щоб

$$\frac{d_a - d'_a}{d'_a - d''_a} = \frac{d_b - d'_b}{d'_b - d''_b}.$$

98. $x^2 = \frac{\alpha b^2}{\alpha + \beta} + \frac{\beta c^2}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta a^2}{(\alpha + \beta)^2}$

99. 1,4.

100. $\frac{(1 + uvw)S}{(u + 1)(v + 1)(w + 1)}$

Примітка. Як зміниться формула, якщо протилежно напрямленим відрізкам приписати супротивні знаки? Чи справедлива одержана при цих умовах формула для різних положень точок A', B', C' — на сторонах трикутника і на їх продовженнях? Як на підставі одержаної формули довести теорему Менелая і обернену їй? Теорема Менелая полягає ось у чому: якщо січна перетинає сторони трикутника ABC або їх продовження в точках A', B', C', то існує така рівність:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

101. $\frac{(1 - uvw)^2 S}{(1 + u + uv)(1 + v + vw)(1 + w + uw)}$

Примітка. Як зміниться формула, якщо відрізкам $A'B$, $A'C$ тощо приписати супротивні знаки? Чи справедлива одержана при цих умовах формула для різних положень точок A', B', C' — на сторонах трикутника і на їх продовженнях? Як на підставі одержаної формули довести теорему Чеви і обернену їй? Теорема Чеви полягає ось у чому. Якщо в трикутнику ABC проведені три прямі AA', BB', CC' (A' на BC або на її продовженні та ін.), які перетинаються в одній точці, то існує така рівність:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1$$

105. Вказівка. Застосувати теорему Чеви.

106. $\frac{b^2}{c^2}$; $\frac{ac^2}{b^2 + c^2}$; $\frac{ab^2}{b^2 + c^2}$

Примітка. Якщо пряма перетинає дві сторони кута трикутника або їх продовження так, що утворює з однією з цих сторін кут, який дорівнює кутові трикутника, утвореному третьою стороною з другим боком кута, то ця січна називається антипаралельною відносно третьої сторони. Пряма $A\alpha$ називається симедіаною трикутника відносно сторони BC. Медіана є геометричне місце середин хорд, паралельних BC, а симедіана є геометричне місце середин хорд, антипаралельних BC. Чи існує пряма, відмінна від симедіани, яка поділяє сторону a у відношенні $b^2 : c^2$?

107. $\frac{bc}{b^2 + c^2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Вказівка. Див. задачу 106.

108. Перепендикуляр, опущений з вершини прямого кута на гіпотенузу.

Вказівка. Див. задачу 106.

109. $\frac{b}{c}$; $\frac{2bS}{c^2 + b^2}$; $\frac{2cS}{c^2 + b^2}$

Вказівка. Див. задачу 106.

110. Якщо K є точка перетину двох симедіан, що відповідають сторонам a і b, а $A\alpha$ — перша симедіана, то:

$$K\alpha = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} A\alpha.$$

Примітка. Точка перетину симедіан трикутника називається точкою Лемуана.

111. $\frac{2aS}{a^2 + b^2 + c^2}$ тощо.

Вказівка. Див. задачу 110.

112. $\frac{12S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$

Вказівка. Див. задачу 110.

З K_a провести паралельну пряму KK_b до перетину з продовженням K_cK в X і звернути увагу на подібність трикутників ABC і KK_aX.

113. $\frac{b}{c}$ Висновок?

Вказівка. Див. задачу 106.

114. $\frac{b^3}{c^3}$

115. Точка M лежить або в середині BC або зливається з основою висоти з A.

117. $\frac{a^2}{p}$; $\frac{b^2}{p}$; $\frac{c^2}{p}$; $\frac{2S}{p}$

118. $\frac{S(p-a)}{p}$; $\frac{S(p-b)}{p}$ $\frac{S(p-c)}{p}$

119. $\frac{a^2(b+c)}{ab+ca+bc}$ і т. д.

120. $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$

Вказівка. Див. задачу 116.

121. 1:2.

Вказівка. Див. задачу 97.

122. $2\sqrt{65}$ (бісектриса внутрішнього кута виходить з A).

124. $1\frac{7}{13}$.

125. $x^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}}$

126. $\sqrt{3}$.

127. 6.

128. Вказівка. Замінивши S відповідним виразом, звести дану рівність до такої суми трьох квадратів, яка дорівнює нулеві.

129. Вказівка. Теорема про квадрат сторони трикутника і теорема Птоломея.

131. $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$

132. $DE = \frac{a^2+b^2+c^2}{2h_a}$; площа $= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{16S}$

134. $a^2(2-\sqrt{3})$.

Вказівка. Шукана площа є сума площ двох рівних рівнобедрених трикутників.

135. h_b.

136. 9.

139. $\sqrt{17}:2$.

140. $\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

141. 2.

142. $\frac{b^2}{c^2}$.

145. $\frac{ll_1}{4} \cdot \frac{k^2-1}{k}$

146. (8; 12; 18) і (12; 18; 27) і т. д. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ і $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, виключаючи 1.

147. $a^4+b^4+e^4+f^4-a^2d^2-a^2f^2-a^2e^2-d^2f^2-e^2f^2-e^2d^2=0$.

151. $\sqrt{SS_1}$.

152. $a^2=\frac{2(b^2-c^2)^2(b^2+c^2-p^2-q^2)}{(b^2-c^2)^2-(p^2-q^2)^2}$

154. $\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{2abc}$

155. $\sqrt{\frac{p^4-9m^4}{2(p^2-5m^2)}}$.

159. $\frac{p(pq+\sqrt{p^2q^2+c^2(p^2+q^2)})}{p^2+q^2}$

і т. д.

160. $\frac{S}{R}$; $\frac{h_a^2}{2R}$.

161. $\frac{p(\sqrt{2}+\sqrt{10})}{4}$ і т. д.

162. $\frac{a}{3}$; $\frac{1}{3}\sqrt{b^2+4c^2}$; $\frac{1}{3}\sqrt{c^2+4b^2}$ і т. д.

163. $\frac{1}{3}\sqrt{3k^2+6S\sqrt{3}}$, де $2k^2 = a^2+b^2+c^2$.

Вказівка. Якщо O_b і O_a позначають центри трикутників, побудованих на сторонах a і b, і B' — вершину останнього трикутника, то трикутники O_bCO_a і BCB' подібні. Для відшукання сторони BB' див. задачу 49.

165. 13 і 15.

Вказівка. Прийняти за невідоме $\frac{1}{2}(b-c)$.

169. Вказівка. Поділити висоту на рівні частини; провести через точки поділу паралелі основі, і на кожній паралелі побудувати прямокутник, висота якого дорівнює одній поділці висоти трикутника.

170. $\frac{4(a^2+b^2+c^2)S^3}{9a^2b^2c^2}$

171. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

172. $\frac{c(c+b)}{2p}$; $\frac{a(c+b)}{2p}$.

173. $\sqrt{SS_1}$.

174. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.

175. $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$.

177. 4 і 6.

178. $\frac{2bc}{b+c} < d < \frac{2bc}{b-c}$.

179. Якщо: $AE = AF = x$, то $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)$.

180. 1, 2.

181. 0. Висновок?

182. 45°.

183. $\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+4abc}{abc}S$.

184. $\frac{a^2}{h^2}$.

185. $\frac{2a^3}{2a^2-h^2}$

187. $\frac{\Delta}{S}=6+\frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$

S — площа даного трикутника.

Вказівка. Теорема про відношення площ трикутників, що мають по рівному куту.

188. $\frac{\Delta'}{S}=3+\frac{8abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$.

195. $a^2=\frac{(b+c)^2(bc-l^2)}{bc}$;

$S=\frac{l(b+c)}{4bc}\sqrt{4b^2c^2-l^2(b+c)^2}$.

196. $a=\frac{a'(b'^2+c'^2-a'^2)}{2bc'}$

197. $\frac{b+c}{a}$; $\frac{a+c}{b}$; $\frac{a+b}{c}$

198. $\frac{a}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

199. $\sqrt{39}$; 13; $2\sqrt{13}$.

200. Віддаль шуканої точки від середини основи дорівнює:

$$\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

201. 3 і 4; 12 і 1.

202. $BE = 45\frac{1}{3}$; $BF = 113\frac{1}{3}$

203. $BE = 34$; $DF = 72$.

204. $\frac{2am}{m+n}k$.

205. K зливається з C; N є середина BC.

206. Одна з діагоналей $= \frac{28\sqrt{13}}{9}$

сторона $= 6\frac{20}{27}$

207. 1; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2}$

208. $1\frac{1}{2}$ і 3.

209. 16.

210. $\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$

211. $\frac{a^2}{4}-k^2$.

212. mn.

213. $4\frac{7}{12}$; $7\frac{7}{9}$

214. $\frac{cc_1}{c+c_1}$; $\frac{ac}{c+c_1}$

215. 2.

216. $\frac{a(3-\sqrt{3})}{3}$; $\frac{a^2(2\sqrt{3}-3)}{3}$

60°; 120°.

217. $\frac{59}{53}$.

218. $\frac{2ab-a_2b_1-b_2c_1-c_2d_1-d_2a_1}{2ab}$.

219. Якщо відрізки січної AG є по порядку AM, ML і LG, то

$$AM:ML:LG:AG = n(m+n):m(m+n):n^2:2n^2+m^2+2nm.$$

$$\frac{m^2S}{n^2+(m+n)^2};\ \frac{mn(2n+m)S}{2(m+n)[n^2+(m+n)^2]}$$

$$\frac{n^3S}{2(m+n)[n^2+(m+n)^2]}.$$

220. $EF_1=\frac{dm}{m+n}$; $EF=\frac{(b-m)d}{m+n}$

$EG=\frac{dm}{b+m+n}$; $E_1G_1=\frac{dn}{b-m-n}$

221. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$

222. 600.

223. $\frac{a^2}{3}$.

224. $2\sqrt{3}-3$.

226. Якщо x більший відрізок сторони a паралелограма, то

$$x=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

227. $\frac{a^2}{6}$.

228. 2 і $\frac{1}{2}$, 1 і 1.

229. $a^2(2\sqrt{3}-3)$.

231. 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

233. $2c^2\frac{k}{(k+1)^2}$.

234. $\sqrt{ak}$.

235. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{(c-d)^2}{4}}$.

236. $\frac{2ab}{a-b}$.

237. 6.

238. $16\frac{1}{2}$.

239. 1260.

240. $\frac{(6a-h\sqrt{3})h}{6}$.

241. 1; 72°; 1.

242. $\frac{p}{q}$; pq; $(p+q)^2$.

243. 10.

244. Площа $=2b^2$; менша основа $=2b\sqrt{2}-a$.

245. h^2.

246. 25.

247. 900.

248. 2 і 2.

249. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

250. 12 і 3.

251. $\frac{1}{3}\sqrt{113}$.

252. $\frac{c-2m}{c}S$.

253. $\frac{m^2p}{(m+n)^2(p+q)}S$;

$\frac{m^2q}{(m+n)^2(p+q)}S$; $\frac{np(2m+n)S}{(m+n)^2(p+q)}$;

$\frac{nq(2m+n)}{(m+n)^2(p+q)}S$.

254. $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

255. $\sqrt{\frac{b(a^2-d^2)+d(b^2-c^2)}{b-d}}$;

$\sqrt{\frac{d(b^2-a^2)+b(c^2-d^2)}{b-d}}$.

Висновки:

1) $m^2+n^2=c^2+a^2+2bd$.

2) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}=\frac{b+d}{b-d}$.

3) Знаючи b, d, m і n, знайти c і a. Знаючи a, c, m і n, знайти b і d.

Вказівка. Теорема Стевварта, задача № 64.

256. $\frac{b+d}{4(b-d)}\sqrt{(a+b+c-d)(a-b+c+d)(a+b-c-d)(-a+b+c-d)}$.

Вказівка. Знайдіть висоту трапеції з такого трикутника, всі сторони якого відомі.

257. 7 : 3.

258. 72.

259. $\frac{a(3h_a-k)(h_a-k)}{2h_a}$.

260. $\frac{(a+3b)a^2}{(b+3a)b^2}$.

261. $CM=a\cdot\frac{a-b}{a+b}$.

262. $2b-a$ або $a-2b$.

263. $2(a-k)^2$.

264. $k=\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$.

266. $f^2e^4+e^2f^4-Me^2f^2-Ne^2-Pf^2+Q-R=0$, де

$M=a^2+b^2+c^2+d^2$,

$N=a^2c^2+b^2d^2-a^2b^2-c^2d^2$,

$P=a^2c^2+b^2d^2-a^2d^2-b^2c^2$,

$Q=a^2c^4+a^4c^2+d^2b^4+b^2d^4$,

$R=a^2c^2d^2+a^2b^2d^2+a^2b^2c^2+b^2c^2d^2$.

Вказівка. Побудуйте проекції E і F вершин A і C на діагональ BD, а з C опустіть перпендикуляр CG на продовження AE, тоді $AC^2=e^2=EF^2+(AE+CF)^2$; потім визначте EF, AE і CF і підставте у написану вище рівність.

267. $\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$.

268. $\frac{5}{16}S$.

269. $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+4ab+b^2)$.

270. $9\frac{8}{17}$.

Вказівка. Скористайтесь теоремою Птоломея.

271. $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

272. 25; 13,44; $4\sqrt{21}$.

273. 90°.

274. 1.

275. r.

276. 4.

277. $\frac{r(1+\sqrt{5})}{2}$

278. $2r(\sqrt{2}-1)$.

279. $\sqrt{6}+\sqrt{2}\pm 1$.

280. $\frac{729\pi}{4}$ і 729π.

281. $\frac{10\sqrt{10}}{3}$.

282. 1,44; 36.

283. $\frac{ar}{a+2r}$.

284. $\frac{(r_1+r_2)r_1r_2}{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}$

285. $\frac{24\sqrt{3}-11\pi}{6}$

286. 6.

287. $\frac{\pi r^2}{6}$

288. $\frac{rr_1}{4(\sqrt{r}+\sqrt{r_1})^2}$

289. $\pi(3+2\sqrt{2})r^2$.

290. $(2\sqrt{3}+3)r$.

291. $6{,}5625\pi$.

292. $\sqrt{Rr}$.

293. 2.

294. 1.

295. $\frac{1}{2}\sqrt{73}$.

296. 1,4.

297. $r\cdot\frac{\sqrt{12-\sqrt{7}}}{4}$

298. Центр третього кола поділяє віддаль між центрами перших двох у відношенні 3:2; радіус $=\sqrt{5}$.

299. 2,2; 8,84.

300. $\frac{20\sqrt{97}}{97}$

301. $5\sqrt{14}$.

302. 0,21875.

303. $\pi-\frac{2108}{671}<0{,}0001$.

304. $\frac{23}{21}\sqrt{14}$; $\frac{5}{21}\sqrt{14}$.

305. $\frac{6\sqrt{3}-2\pi(5-2\sqrt{3})}{3}$

306. 15 і 12.

307. Різниця квадратів відрізків $=R^2-r^2$.

Розглянути випадки:

$$\begin{cases} d>R+r, \\ d=R+r, \\ d<R+r \text{ і } d>R-r, \\ d<R-r. \end{cases}$$

Пряма AK називається радикальною віссю двох даних кіл. Властивість радикальної осі?

308. $\frac{18-6\sqrt{3}-\pi}{72}$

309. 4.

310. Віддаль шуканої точки від центра меншого круга $=37\frac{2}{3}$. Довжина хорди меншого круга $=9\frac{103}{113}$

Чи існує друга точка, яка задовольняла б умову?

311. $\frac{\pi-2}{8}r^2$

312. $r\sqrt{3}$.

313. πab.

314. $\frac{\pi R^2}{12}$

315. $\frac{R\sqrt{3}}{4}$

316. $\frac{R^2}{3}$

318. Якщо K є точка найближча до B, то:

$$AK=\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{3}+2\sqrt{8\sqrt{3}-13}}$$

319. $PB=R\sqrt{2}$.

320. $3R$.

321. $\frac{2Rr}{R+r}$.

322. $\frac{1}{2x}=\frac{1}{R}+\frac{1}{r}$.

323. Показати, що віддаль від центра O' до AB дорівнює радіусові кола O'.

324. $\frac{\sqrt{11}}{3}$.

325. Вказівка. Теорема Менелая (задача № 100). Робота досить складна. Майте терпіння.

326. $\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3+2S}$;

$\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3-2S}$,

де S — площа трикутника, вершини якого лежать у центрах даних кіл.

Вказівка. Хай центри даних кіл лежать у точках A, B і C, а центр шуканого в D; радіуси їх позначимо відповідно r_1, r_2, r_3, x. З B і D опустіть перпендикуляри BE і DF на AC і з D — перпендикуляр DG на BE. З трикутників ABC і ADC знайдемо:

$$AE=r_1+\frac{r_2(r_1-r_3)}{r_1+r_3}$$

$$AF=r_1+\frac{x(r_1-r_3)}{r_1+r_3}$$

З прямокутного трикутника BDG:

$BD^2=BG^2+DG^2=(BE-DF)^2+$
$+(AE-AF)^2$, або
$BD^2=AB^2+AD^2-2AE\cdot AF-$
$-2BE\cdot DE$. Звідси:

$$BE\cdot DF=2\frac{[r_1r_3(r_1+r_3)-r_2(r_1^2+r_3^2)]\,x+r_1r_2r_3(r_1+r_3)}{(r_1-r_3)^2}$$

З другого боку, з прямокутних трикутників BAE і DAF знайдемо:

$$BE^2\cdot DF^2=\frac{4r_1r_3[r_2^2+(r_1+r_3)r_2]}{(r_1+r_3)^2}\cdot\frac{4r_1r_3[x^2+(r_1+r_3)x]}{(r_1+r_3)^2}$$

При розв'язуванні рівняння слід мати на увазі, що

$$S=\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}.$$

Інакше рівняння може бути складене на тій підставі, що площа трикутника ABC є сума площ трикутників ABD, BDC і ADC. Зазначені методи розв'язування належать Декартові.

327. $r+\frac{r^2}{R}$ і т. д.

328. $\frac{amn}{m^2-n^2}$.

329. $\frac{4R\sqrt{rr_1}}{r+r_1}$.

330. $\frac{3R}{2}(\sqrt{2}\pm1)$; $\frac{R}{2}(\sqrt{2}\pm1)$; $\frac{R}{2}(\sqrt{7}\pm2)$.

331. $2\sqrt{Rr}$; $2R\sqrt{\frac{r}{R+r}}$; $2r\sqrt{\frac{R}{R+r}}$.

332. $R\sqrt{3}$; $2R\sqrt{2\sqrt{3}-3}$.

333. $\frac{R^2(4\pi-\sqrt{3})}{2}$.

334. $\frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2\mp2b\sqrt{a^2-d^2}}$.

335. $\frac{2Rr}{R+r}$.

337. $\frac{R}{2R-a}\sqrt{a(2R-a)}$, $\sqrt{2aR}$.

338. $\frac{1}{2}\sqrt{R^2+R'^2}$.

339. $\frac{25}{9}\pi$.

340. ab.

342. 31,2.

343. $\frac{c^2}{m}$.

344. Вказівка. Проведіть діаметр BD і висоту BE і скористайтесь подібністю трикутників ABE і DBC.

345. Вказівка. Виразіть площу трикутника залежно від сторін і радіуса вписаного кола.

346. Вказівка. Див. попередню задачу.

347. $\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)}}$

356. $353\frac{37}{130}$

357. $\frac{3280\pi}{9}$

358. 35; 15; 230.

359. $\frac{a^2(5\pi - 6\sqrt{3})}{72}$

360. $a + b - c$.

361. $\frac{al}{2m}$.

366. $\frac{a^3}{a^2 + b^2}$; $\frac{b^3}{a^2 + b^2}$.

367. $\frac{5(3+\sqrt{3})}{2}$; $\frac{5(\sqrt{3}+1)}{2}$; $\frac{5(3-\sqrt{3})}{2}$; $\frac{25}{6}(4\pi\sqrt{3} - 3 - 4\pi)$.

368. Вказівка. Див. зад. № 235 і № 344.

371. Див. задачу № 368.

372. $\frac{r^2(3\sqrt{3} - \pi)}{6}$

373. $\frac{a^2(\pi - \sqrt{3})}{8}$

374. $\frac{2}{3}r$; $2r$; $6r$.

376. 6.

377. $\frac{2S}{a+b}$.

378. rr'.

379. $2p\sqrt{2Rr}$; $\sqrt{2Rr}$.

380. 3π.

381. Вказівка. $(a+b+c)$; $\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = a : \frac{1}{h_a}$.

383. $2R = \frac{l_a^2}{h_a}\sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}}$.

384. $5\sqrt{13}$.

385. $mn\sqrt{3}$.

386. $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

387. 3,25.

388. $10\frac{5}{32}$.

389. $10\frac{5}{32}$

390. $10\frac{5}{32}$

391. $\frac{17}{30}$.

392. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

393. $r(\sqrt{5} - 1)$.

394. $\frac{h(h-r)}{\sqrt{h(h-2r)}}$; $\frac{2hr}{\sqrt{h(h-2r)}}$; $\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}$; $\frac{h}{r} = 3 + \sqrt{2}$.

395. $\frac{(a^2+r^2)^2}{4r(a^2-r^2)}$; $\min R = 2r$.

396. Центр у середині гіпотенузи; радіус = 1,25.

397. $a^2\sqrt{3}$.

398. $2a^2\sqrt{2}$.

399. $\sqrt{ab}$.

400. Вказівка. Першу частину рівності можна представити у вигляді:

$$(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) - \left(\frac{h_a}{r_a} + \frac{h_b}{r_b} + \frac{h_c}{r_c}\right).$$

403. $2\sqrt{12}$; $2\sqrt{\pi}$; $\sqrt[4]{3\pi^2}$.

404. Третя сторона = 36.

405. Вказівка. Застосуйте теорему Птоломея.

407. Якщо точка перетину є O, а точка дотику на стороні a є A_1, то $OA_1 = \frac{p-a}{p} AA_1$.

409. $\frac{S(b+c)}{a+b+c}$.

410. $\frac{2S(p-a)}{ap}$

411. $\frac{1}{2}$.

Вказівка. Див. задачу № 97 і задачі, що стосуються визначення d_a.

412. $\frac{1}{2}$.

Вказівка. Див. задачу № 97 і дальші.

413. $\frac{1}{2}$.

Вказівка. Див. задачу № 97 і дальші.

414. $\frac{\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}}{3}$.

Вказівка. Застосуйте формулу задачі № 98 до трикутника AOA', де A' є середина сторони a, і до січної OG.

415. $\frac{\sqrt{9r^2+2(a^2+b^2+c^2)-3p^2}}{3}$.

Вказівка. Застосуйте формулу задачі № 98 до трикутника $AO'A'$, де A' — середина сторони a, і до січної $O'G$. Майте на увазі, що:

$$ab+ac+bc=2p^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

417. $\sqrt{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}$.

Вказівка. Див. задачі № 411 і № 414.

418. $\sqrt{R^2-2Rr}$.

Вказівка. Застосуйте формулу задачі № 98 до трикутника AOA', де A' є точка перетину бісектриси кута A із стороною a, і до січної OO'. Майте на увазі, що:

$$\frac{AJ}{O'A'}=\frac{b+c}{a} \text{ (задача 90).}$$

$$abc=4pRr.$$

$$AA'=?\ OA'=?$$

419. $\sqrt{\frac{4(2R^2+r^2)-(a^2+b^2+c^2)}{2}}$.

Вказівка. Застосуйте формулу задачі № 98 до трикутника $O'HO$, де O — центр описаного кола, і до січної $O'G$ (G — центр ваги). Майте на увазі результати задач № 417 і № 418.

421. $\sqrt{4R^2+2r_a^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$.

423. $\frac{R}{2}-r$.

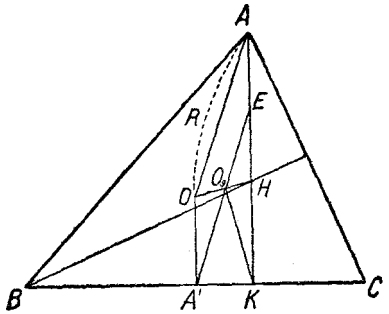
Вказівка. $O'O_9$ є медіана трикутника $O'OH$ (H — ортоцентр).

Примітка. Доведемо таку теорему. В усякому трикутнику:

1) Середини сторін, основи висот і середини відрізків висот, що лежать між ортоцентром і вершинами трикутника, лежать на одному колі. Це коло називається колом дев'яти точок (коло Ейлера).

2) Центр кола дев'яти точок лежить у середині прямої, яка сполучає центр описаного кола з ортоцентром.

3) Радіус кола дев'яти точок дорівнює половині радіуса описаного кола. Хай (див. рисунок) A' — середина сторони a.



O — центр описаного кола.

K — підошва висоти, опущеної на a.

H — ортоцентр.

E — середина AH.

Сполучимо A' з E і хай $A'E$ перетинається з OH в O_9. Через те що $AH=2OA'$ (задача № 87), то трикутники O_9OA' і O_9HE рівні між собою, KO_9 є медіана прямокутного трикутника $A'KE$, $O_9E=\frac{1}{2}AO$ і тому:

$$O_9E=O_9A'=O_9K=\frac{R}{2}$$

Отже, точка O_9 рівновіддалена від усіх 9 точок, зазначених у теоремі.

424. $\frac{R}{2}+r_a$.

425. $AO_a^2=\frac{pbc}{p-a}$

436. Вказівка. Теорема Менелая і подібність трикутників.

440. 11,5.

441. Вказівка. Опустіть перпендикуляри з центра описаного кола на сторони трикутника і до кожного з утворених чотирикутників застосуйте теорему Птоломея.

443. Вказівка. $h_b'h_c'=2Rh_a''$.

444. $\sqrt{\frac{p-a}{p}bc}$ і т. д.

445. $r^2=r_1^2+r_2^2$.

Вказівка. $\frac{r_1}{c}=\frac{r_2}{b}=\frac{r}{a}$.

446. Вказівка. Див. задачу № 87.

448. $\frac{r^2(\sqrt{3}-1)}{4}$

454. $\frac{3}{16}R$; $0{,}2R\sqrt{15}$.

457. $\frac{1}{4}r^2$.

462. Вказівка. Див. задачі №№ 371, 402 і 450.

465. $\frac{a^2+4m_a^2}{4m_a}$

466. $2r\sqrt{\frac{r'}{r'-2r}}$

469. $\frac{45(5\pm\sqrt{2})}{8}$

473. $\frac{b^2}{24}(6\sqrt{3}-\pi-6)$.

474. $\frac{a}{6}(2\sqrt{3}+3)$; $\frac{a}{6}(2\sqrt{3}-3)$.

475. Вказівка. Теорема про суму квадратів двох сторін трикутника.

476. Вказівка. Дістаньте формулу:

$$b=\frac{ck_a+ak_c}{R}$$

477. 120°; 60°; $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$; $2a$; $\frac{2a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{9}$.

481. $\frac{a\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}$

482. 3, 4, 5.

483. $x=\frac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

$2p=a+b+c$.

Вказівка. Прийміть x за діаметр кола, описаного навколо трикутника.

484. 17,5.

485. $\frac{(c+b)^2}{a^2}$

486. $1\frac{7}{8}$

487. $2(\sqrt{3}+1)S$.

488. $\frac{4S^3}{abc(a+b+c)}$

489. $1\frac{241}{960}$.

490. $\frac{25}{4}\pi a^2$.

492. $\frac{ac^2}{b^2-c^2}$; $\frac{abc}{b^2-c^2}$

495. 30°, 60°, 90°, $4\sqrt{3}$

496. $2R(\sqrt{2}-1)$.

498. $\frac{3}{2}\sqrt{4R^2-a^2}$.

Вказівка. Пряма, що проходить через ортоцентр, центр ваги трикутника і центр описаного кола, називається прямою Ейлера. Див. задачу № 411.

500. $\frac{6+3\sqrt{3}\mp\sqrt{36\sqrt{3}-1}}{8}$

501. $\frac{K}{15}\sqrt{57}$

502. $7\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$

503. $\frac{nab}{a+b}$.

504. $\frac{abc(b+c-a)}{(b+c)(a+b+c)}$

506. *Примітка.* При якому співвідношенні між сторонами трикутника існує властивість, зазначена в умовах задачі? Чи може кут A бути тупим або прямим?

507. 1; 1; 1; $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

508. $\frac{8r^3}{a}$

509. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

510. $5{,}76\pi$.

511. $3\frac{1}{5}$; $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

512. $(\sqrt{12}-1):1$.

513. $12{,}5\pi$.
514. 2.

515. $\frac{4}{5}r^2$.

516. $\frac{r(\sqrt{7}-1)}{2}$.

517. 5,6.

518. $\frac{r}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

519. 135°, 165° і т. д.;

$\frac{a}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $a\sqrt{3}$; $a\sqrt{4-\sqrt{3}}$;

$a\sqrt{2}$; $a\sqrt{5}$; $\frac{a^2(5+\sqrt{3})}{4}$; $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

520. $2a(2-\sqrt{3})$.

521. 4, $4\frac{4}{13}$, $6\frac{1}{3}$, $6\frac{5}{39}$, $\frac{\sqrt{505}}{3}$

$\frac{4\sqrt{505}}{13}$, $\frac{\sqrt{505}}{6}$, $25\frac{439}{507}$.

522. 8, 2, 5.
523. 5.
524. 3, 1.
525. 5.

526. $\frac{1}{2}(a\sqrt{4-b^2}+b\sqrt{4-a^2})$.

Вказівка. Проведіть у колі діаметр AB і від точки A відкладіть з одного боку хорду a, з другого b. Утворіть вписаний чотирикутник із сторонами a і b і скористайтесь теоремою Птоломея.

527. $\frac{1}{2}(a\sqrt{4-b^2}-b\sqrt{4-a^2})$.

Вказівка. Скористайтесь теоремою Птоломея, застосувавши побудову, подібну до зазначеної в задачі № 526.

528. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

529. $\frac{d^2}{2\sqrt{d^2-r^2}}$, $\frac{rd^2}{2\sqrt{d^2-r^2}}$

530. $\frac{d(ab+dc)}{a^2-b^2}$, $\frac{d(ad+bc)}{d^2-b^2}$

531. $\frac{2Ra}{a+b}$, $\frac{2Rb}{a+b}$,

$\frac{2R[\sqrt{(2a+b)(2b+a)ab}-ab]}{(a+b)^2}$

$\frac{Rab}{a+b}$.

Примітка. Чи існує залежність між R, a і b?

532. $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, де $2p=a+b+c+d$.

Вказівка. Треба продовжити протилежні сторони чотирикутника до взаємного перетину.

533. $\frac{n(ad+bc)}{4R}$ або $\frac{m(ab+cd)}{4R}$

$\frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$.

Вказівка. Треба мати на увазі формулу для радіуса описаного навколо трикутника кола $R=\frac{ab}{2h_c}$.

534. $S=\sqrt{abcd}$.

Вказівка. Див. задачу № 532 і майте на увазі, що $a+c=b+d$.

535. $\sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}}$

$\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{(bc+ad)}}$

Вказівка. Див. задачу № 533.
536. 3.
537. pq.

538. $R\sqrt{\frac{14-\sqrt{40}}{13}}$

539. 53 або 13.

540. $\frac{(\sqrt{33}-3)r}{6}$

541. $R\sqrt{2}$. Висновок відносно k?
Вказівка. Обчисляючи за найприроднішим планом, уникайте складної викладки.

542. $\sqrt{\frac{r^4+6r^2a^2+a^4}{a}}$

543. $0{,}8r^2$.

544. $h\sqrt{\sqrt{5}-2}$; $h\sqrt{\sqrt{5}+2}$.

545. $\frac{4R^2(3-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}$

546. $2a^2(\pi-2)$.

547. $\frac{9r^2\sqrt{3}}{4}$.

548. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

549. $\frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$

550. 36, $\frac{45}{16}\pi$.

551. $\frac{2}{7}R$, 2.

552. R; $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{3}$; $R\sqrt{2}$; $\frac{R\sqrt{2}}{2}$; $\frac{R\sqrt{6}}{2}$; $\frac{R^3(2+\sqrt{3})}{2}$.

553. $2R\sqrt{2}$.

554. 90°, $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$, $\frac{2R^2(3+2\sqrt{3})}{3}$ $\frac{R(3+\sqrt{3})}{2}$

555. $\sqrt{\frac{ad}{bc}}$.

556. $\frac{ab\pm M}{p}$, $\frac{cd\pm M}{p}$, $\frac{bc\pm M}{p}$ $\frac{ad\pm M}{p}$, де $a+c=b+d=p$, $\sqrt{abcd-p^2r^2}=M$.

Вказівка. Див. задачу № 555

557. $a+b$, $2\sqrt{ab}$, $\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $\sqrt{ab}$ і т. д.

558. $\sqrt{\frac{5b^2-8a^2}{8}}$; $7b^2=16a^2$.

559. h^2.

560. $\frac{r^2(\pi+3-3\sqrt{3})}{3}$.

561. $\frac{4S}{k}$, де S є площа трикутника з сторонами a, a_1 і k.

562. 1.

563. $\frac{3+\sqrt{2}}{4}R^2$.

564. $\sqrt{3}$.

565. $1\frac{7}{8}$.

567. Якщо a і b основи трапеції і c третя сторона трапеції, то повинно бути:

$$c^2=ab.$$

568. $\frac{ac}{b}$; $\frac{b}{a}$.

569. 1.

570. 6, 1.

571. $a^2(3\sqrt{2}-4)$.

572. $\frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $\frac{R^2}{12}(\pi+6-3\sqrt{3})$.

573. $\frac{3}{2}R^2$.

574. Площа $APQ=r^2$.

575. $\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$.

576. $2r^2$.

577. $\frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

578. $\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$.

579. $2r^2\sqrt{2}$.

580. $\frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

581. $3r^2\sqrt{3}$.

582. $4r^2$.

583. $5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

584. $2r^2\sqrt{3}$.

585. $8r^2(2-\sqrt{3})$

586. $2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$

587. $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

588. $\frac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

589. $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.

590. $2a^2(1+\sqrt{2})$

591. $\frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

592. $3a^2(2+\sqrt{3})$

593. $\sqrt[4]{\frac{16S^2}{3}}$

594. $\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}$

595. $\sqrt{S\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)}$

596. $\sqrt{\frac{S}{2}(2-\sqrt{3})}$.

597. $\sqrt{\frac{S}{\sqrt{2}}}$.

598. $\sqrt{\frac{2}{5}S\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}}$

599. $\sqrt{\frac{1}{5}S\sqrt{2(\sqrt{5}+1)}}$

601. 6.

602. $S_2^2=\frac{2S_1^3}{S+S_1}$

603. $\frac{ma(2r^2-a^2)^2}{4r^2\sqrt{4r^2-a^2}}$, де a сторона даного трикутника, m — число сторін, а r радіус описаного кола.

604. 1.

605. 1.

606. $\frac{r}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\right.$
$\left.-\sqrt{15}\right)$.

Вказівка. Скористайтесь теоремою Птоломея, маючи на увазі, що

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$$

607. $\frac{a}{\sqrt{3}}$

608. π.

609. $\sqrt{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

610. $\frac{a}{10}\sqrt{349}$.

611. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\frac{17}{16}a^2\sqrt{3}$.

612. $\frac{1}{2}(a^2+2ab-b^2)$; $\frac{a}{b}=\sqrt{2}+1$

613. $\frac{5a^2\sqrt{3}}{8}$

614. 13.

615. Вказівка. Скористайтесь теоремою Птоломея.

616. $\frac{5}{2}r^2\sqrt{50-22\sqrt{5}}$

ЗМІСТ

Стор.

Передмова 3

I. Трикутники 5

II. Чотирикутники 20

1. Паралелограми, ромби, прямокутники, квадрати . . 20

2. Трапеції 23

3. Довільні чотирикутники 25

III. Кола 26

IV. Комбінації з кіл і многокутників 32

1. Коло і трикутник 32

2. Коло і многокутник 43

V. Правильні многокутники 49

VI. Позначення 52

Відповіді 53