Проф. Д. М. СІНЦОВ

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ЧАСТИНА ПЕРША

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО
„РАДЯНСЬКА ШКОЛА“

Проф. Д. М. СІНЦОВ

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

ЧАСТИНА ПЕРША

ДЕРЖАВНИЙ НАУКОВО-МЕТОДОЛОГІЧНИЙ КОМІТЕТ НАРКОМОСВІТИ УСРР УХВАЛИВ ДО ВЖИТКУ ЯК ПОСІБНИК ДЛЯ ВИШ'ІВ

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО „РАДЯНСЬКА ШКОЛА
ХАРКІВ—ОДЕСА
1931

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літопису Українського Друку“, „Картковому репертуарі“ та інших покажчиках Української Книжкової Палати

міськліт № 2498—10/IX 31 Замовл. № 2291. Тираж 7000.

13¾ арк. (ОСТ 364 А5) V—1931.

ПЕРЕДМОВА ДО УКРАЇНСЬКОГО ВИДАННЯ

Курс з аналітичної геометрії востаннє видано 1916 р., а тому бажаних змін і доповнень, а також нового матеріялу запроваджено не багато.

З цього видання довелось усунути вступ історичного й елементарно-геометричного характеру, а також увесь § 1 вид. 1916 р. про лінійні Гільбертові аксіоми, аджеж є повний російський переклад Grundlagen der Geometrie, то й немає потреби давати ці аксіоми. Щоб не збільшувати розміру книги, в другій частині (анал. геометрія в просторі) викинуто: X-й розділ—поверхні 2-го порядку, як лінійчаті, XI-й розділ—визначення поверхень 2-го порядку за даними умовами. Та дещо запроваджено й нового, а саме: доповнення в I-й частині до розділу про загальні властивості кривих другого порядку, доведення Паскалевої і Бріяншонової теорем тощо, а також додано 59-й параграф „Теорія кореляцій (взаємних перетворень)". У другій частині вставлено новий § 22 і, крім того, змінено виклад § 26-го про дотичний до сфери конус.

Наприкінці подаємо, за Kötter-ом, короткі історичні вказівки про час відкриття тих чи тих властивостей поверхень другого порядку, що далеко менше відомо, ніж історія конічних перерізів.

Перед загальним викладом аналітичної геометрії на площині подано в курсі льонґіметрію, тобто, як визначати положення точки на прямій і деякі твердження, що випливають з цього. Але, читаючи вперше, цей розділ можна проминути, почавши вивчати курс безпосередньо з § 2-го.

У курсі широко вживається як позначень, так і властивостей детермінантів (визначників). Гадаємо, що теорія детермінантів уже відома читачеві. Проте, в аналітичній геометрії доводиться користуватися лише детермінантами 2-го і 3-го порядків.

Уважаємо також, що читачі обізнані з геометричними побудовами альґебричних формул, які випливають із розв'язок геометричних задач, тобто в суті—треба *вміти будувати* корені квадратового рівнання.

Щоб не збільшувати розміру книги, задач і вправ не подано. Оформлення українського тексту взяли на себе мої співробітники з катедри геометрії І. С. Чернушенко і М. М. Іванченко.

Щоб скорше довести книжку до читача, її випускається двома окремими частинами, на які і у суті вона розподіляється,—тобто аналітичну геометрію на площині та аналітичну геометрію в просторі.

Автор

Харків. 1930 р.

ЗМІСТ

Розділ I. Координати

Розділ II. Визначення рівнаннями

Розділ III. Пряма лінія

Розділ IV. Перетворення координат

Розділ V. Коло

Розділ VI. Криві 2-го порядку. Загальна теорія

Розділ VII. Еліпса

Розділ VIII. Гіперболя

Розділ IX. Параболя

Розділ X. Загальні властивості конічних перерізів

Розділ XI. Визначення конічних перерізів за даними умовами

Розділ XII. Колінеарні перетворення і перетворення подібности. Теорія кореляції

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

РОЗДІЛ I

Координати

§ 1. Геометрія на прямій (льонґіметрія)

Координати точки на прямій. Щоб визначити положення точки на прямій, ми обираємо довільну точку O за початок і відносно неї визначаємо положення всякої іншої точки: $\overline{OA}$ є координата точки A відносно початку O.

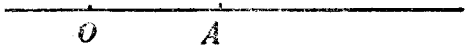

Рис. 1.

Щоб розрізнити, яка з рівновіддалених від O точок міститься праворуч чи ліворуч від початку, запроваджується знак: один напрям від O вважаємо за додатний (наприклад, праворуч), а протилежний—за від'ємний. Наприклад, якщо $\overline{A'O} = \overline{OA} = a$, то для A координата $x = a$, а для A' координата $x' = -a'$.

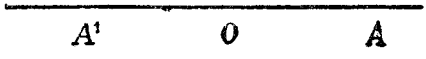

Рис. 2.

Тепер можна і для віддалі поміж двома точками встановити певний знак.

Уважатимемо віддаль $\overline{AB}$ за додатну, якщо на прямій точка B лежить від A в додатному напрямі, — і в іншому разі за від'ємну.

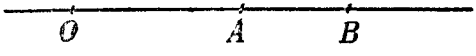

Рис. 3.

Звідси $\overline{AB} = -\overline{BA}$. Визначмо це в координатах A і B.

Якщо координата A є $\overline{OA}=x'$, а координата B є $\overline{OB}=x''$, то

$$\overline{AB}=x''-x',$$
$$\overline{BA}=x'-x''.$$

Це саме правило чинне й тоді, коли A і B містяться по різні сторони від початку O, наприклад (рис. 2):

$$\overline{A'A}=a-(-a)=2a.$$

Звичайно, щоб дістати ці x' і x'', відповідні до точок A і B, треба виміряти OA якоюсь одиницею довжини (відтинком [0,1]).

Ангармонійне відношення. Хай дано три точки: A, B, C. Узявши A і B за основні, а C за третю змінну, розглянемо, як зміняється значіння відношення:

$$k=\frac{AC}{BC},$$

коли C взяти в різних місцях прямої. Якщо координату C позначимо x, а координати A і B відповідно x' і x'', то

$$k=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{x-x'}{x-x''}$$

Хай $x''>x'$. Тоді при $C\equiv 0$ і $k=0$,

якщо C є середина $\overline{AB}$, то $k=-1$, $x=\frac{x'+x''}{2}$

$$C\equiv B \qquad k=-\infty,$$
$$C\equiv \infty \qquad k=+1.$$

Рис. 4.

Візьмім чотири точки і складім подвійне відношення:

$$\lambda=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{DB};$$

якщо $\overline{OA}=x'$, $\overline{OB}=x''$, $OC=x$ і $OD=''$

то

$$\lambda = \frac{x - x'}{x - x''} : \frac{x''' - x'}{x''' - x''} = \frac{(x - x')\,(x''' - x'')}{(x - x'')\,(x''' - x')}.$$

Це й є так зване ангармонійне відношення.

Чотири точки можна комбінувати в подвійне відношення 4 ! = 24-ма різними способами.

Якщо $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \lambda = (ABCD)$, то очевидно, що $(ABDC =$

$= \frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BD} = \frac{1}{\lambda}$; подібно до цього $(BACD) = \frac{1}{\lambda}$

Звідси:

$$(BADC) = \lambda = (ABCD).$$

Хай

$$\lambda' = (ACBD) = \frac{x'' - x'}{x''' - x} : \frac{x''' - x''}{x''' - x} = \frac{(x'' - x')\,(x''' - x)}{(x''' - x')\,(x'' - x)}$$

тоді

$$\lambda + \lambda' = \frac{(x - x')\,(x''' - x'') - (x'' - x')\,(x'' - x)}{(x - x'')\,(x''' - x')} =$$

$$= \frac{(x' - x'' + x'' - x')\,(x''' - x + x - x'') - (x'' - x')\,(x''' - x)}{(x - x'')\,(x''' - x')} =$$

$$= \frac{(x - x'')\,(x''' - x'') + (x'' - x')\,(x - x'')}{(x - x'')\,(x''' - x')} = 1$$

тобто

$$\lambda_1 = 1 - \lambda.$$

Переглядаючи всі комбінації, ми дістаємо шість значінь ангармонійного відношення:

$$\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ 1 - \lambda,\ \frac{1}{1 - \lambda},\ 1 - \frac{1}{\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

Цікавий і визначний окремий випадок, коли $\lambda = -1$

У цьому разі відношення зветься гармонійним.

Шість значінь ангармонійного відношення зведуться тоді лише до трьох:

$$-1,\ 2 \text{ і } \frac{1}{2}$$

Приклад. Точки зустрічі двох діягоналей повного чотирикутника з третьою є гармонійно спряжені відносно вершків, що лежать на цій діягоналі.

Є ще випадок, коли шість значінь ангармонійного відношення зводяться до трьох різних. Це тоді, коли:

$$\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}, \text{ тобто } \lambda^2 - \lambda + 1 = 0, \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$\left(\text{другий корінь } \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}\right)$. Але цей випадок має не таке важливе значіння, як попередній. Його звуть еквіангармонійне відношення.

Можна помітити, якщо не звертати увагу на три обернені значіння, що з трьох значінь:

$$\lambda, \ 1 - \lambda \text{ і } 1 - \frac{1}{\lambda}$$

два завжди додатні, а третє від'ємне.

Відхилімся тепер і вийдім за межі наших досліджувань на прямій. Доведемо, що ангармонійне відношення не зміняється при проєктуванні.

Візьмім поза нашою прямою точку S і сполучім її з точками A, B, C, D.

Хай ще $SH \perp OABCD$.

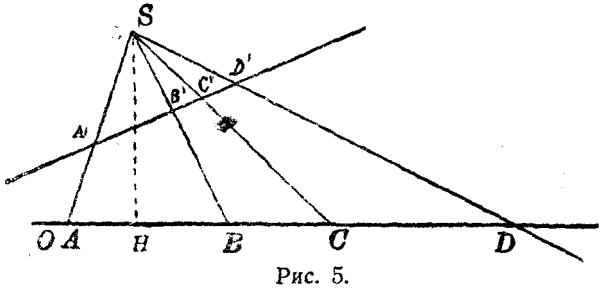

Рис. 5.

Тоді:

$$2 \triangle ASC = \overline{AC} \cdot \overline{SH} = \overline{AS} \cdot \overline{SC} \sin ASC,$$
$$2 \triangle BSC = \overline{BC} \cdot \overline{SH} = \overline{SC} \cdot \overline{BC} \sin BSC.$$

Звідси:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AS}{BS} \frac{\sin ASC}{\sin BSC}.$$

також:

$$2 \triangle ASD = \overline{AD}.\overline{SH} = \overline{AS}.\overline{SD} \sin ASD,$$
$$2 \triangle BSD = \overline{BD}.\overline{SH} = \overline{BS}.\overline{SD} \sin BSD.$$

Звідси:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AS}{BS} \cdot \frac{\sin ASD}{\sin BSD}.$$

Таким чином,

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin ASC}{\sin BSC} : \frac{\sin ASD}{\sin BSD}.$$

Ангармонійне відношення чотирьох точок дорівнює ангармонійному відношенню чотирьох променів (півпрямих), що сполучають ці точки з довільною точкою площини.

Якщо наші промені перетнемо ще будь-якою прямою, то матимемо знову чотири точки A', B', C' і D' з тим самим ангармонійним відношенням.

Якщо уявити, що друга пряма злилася з першою (цього можна досягти, обертаючи її, наприклад, навколо їхньої точки перетину), то цією операцією ми від чотирьох точок A, B, C, D перейдемо до чотирьох точок тої самої прямої і з тим самим ангармонійним відношенням.

Якщо обмежитись лише нашою прямою, то й тут можна довести незмінність ангармонійного відношення від деяких операцій.

Якщо змінити початок, узявши за нього, замість точки O іншу точку O' ($OO' = a$), то дістанемо: $x = x_1 + a$.

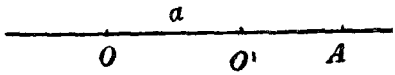

Рис. 6.

Віддаль двох точок при цьому не зміняється:

$$x' - x = (x'_1 + a) - (x_1 + a) = x'_1 - x_1.$$

Якщо, зміняючи початок, змінити ще й напрям, тобто вважати x за додатні не праворуч, а ліворуч, то віддалі змінять знаки, але прості відношення не зміняться і зберігають знак.

Прості відношення, тобто відношення двох відтинків прямої, не зміняються при лінійному перетворенні.

Якщо

$$x = aX + b,$$

то

$$x_1 - x_2 = a(X_1 - X_2),$$
$$x_3 - x_4 = a(X_3 - X_4).$$

Звідси:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{X_1 - X_2}{X_3 - X_4}.$$

Так само й ангармонійні відношення чотирьох точок прямої: вони не змінюються із зміною системи координат на прямій. Навіть більше: ангармонійне відношення чотирьох точок не зміняється при найзагальнішому лінійному перетворенні:

$$x = -\frac{AX + B}{CX + D}.$$

Справді, тоді

$$x - x' = \frac{(AX' + B)(CX + D)(AX + B)(CX' + D)}{CX' + D)(CX + D)} =$$

$$= \frac{(BC - AD)(X - X')}{(CX' + D)(CX + D)};$$

$$\frac{x - x'}{x - x''} = \frac{X - X'}{X - X''} \cdot \frac{CX'' + D}{CX' + D};$$

$$\frac{x''' - x'}{x''' - x''} = \frac{X''' - X'}{X''' - X''} \cdot \frac{CX'' + D}{CX' + D}$$

і

$$\frac{x - x'}{x - x''} : \frac{x''' - x'}{x''' - x''} = \frac{X - X'}{X - X''} : \frac{X''' - X'}{X''' - X''}.$$

Тут ми використовували загальне лінійне (дробове) перетворення. При такому перетворенні кожна точка x прямої підпорядковує іншу точку X тої самої (або й іншої) прямої так, що координата X зв'язана з координатою x першої точки рівнанням:

$$X = -\frac{Dx + B}{Cx + A}$$

або, позбавившись від знаменника:

$$CXx + Dx + AX + B = 0 \qquad (1)$$

І, навпаки, звідси:

$$x = -\frac{AX + B}{CX + D}$$

Можна й окремо робити таке перетворення, що встановляє поміж точками прямої проєктивну або гомографічну відповідність.

Точці x, довільно обраній, відповідає точка X від неї, взагалі, відмінна.

Але можна поставити питання, чи є такі точки, що збігаються із своїми відповідними. Для них $X = x$.

Рівнання (1) дає:

$$Cx^2 + (A + D)x + B = 0.$$

Отже, ми дістаємо дві точки, що одна одній відповідають у проєктивності, встановлюваній рівнанням (1). Це подвійні точки проєктивної відповідности.

$$x = -\frac{A + D}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(A + D)^2 - 4BC}.$$

За властивостями квадратового рівнання ці корені будуть дійсні і різні, коли

$$(A + D)^2 - 4BC > 0.$$

Вони рівні, якщо цей вираз $= 0$, і уявні, якщо він < 0.

Залежно від цього, розрізняють три типи проєктивної відповідности (гомографії).

Інволюція. Зворотне перетворення взагалі різниться від прямого; інакше: якщо точці x_1 за (1) відповідає точка X_1, то точці X_1 в тому самому перетворенні (1) відповідає якась інша точка $-\frac{DX_1 + B}{CX_1 + A}$, взагалі відмінна від x_1.

Щоб ці точки збігались, треба, щоб (1) було симетричне щодо x і X, тобто, щоб воно не змінялось, коли ми перемістимо x і X одне на місце одного. Для цього доконечно й достатньо, щоб

$$A = D$$

Рівнання (1) в цьому частковому випадку матиме вигляд:

$$CXx + A(X + x) + B = 0. \qquad (2)$$

Така відповідність має назву **інволюційної відповідности** або **інволюції**.

Тут не лише

$$X = -\frac{Ax + B}{Cx + A},$$

а й навпаки

$$x = -\frac{AX + B}{CX + A}.$$

Розгляньмо чотири точки: точку x, відповідну їй інволюційну (2), точку $-\frac{Ax+B}{Cx+B}$ і **подвійні точки цієї інволюції**:

$$-\frac{A}{C} \pm \sqrt{A^2 - BC} \equiv -\frac{A \pm \sqrt{\Delta}}{C}, \text{ де } \Delta = A^2 - BC.$$

Складім ангармонійне відношення цих чотирьох точок, обравши за основні подвійні точки

$$\frac{x - \left(-\frac{A}{C} + \frac{\sqrt{\Delta}}{C}\right)}{x - \left(-\frac{A}{C} - \frac{\sqrt{\Delta}}{C}\right)} : \frac{-\left(-\frac{A}{C} + \frac{\sqrt{\Delta}}{C}\right) - \frac{Ax+B}{Cx+A}}{-\left(-\frac{A}{C} - \frac{\sqrt{\Delta}}{C}\right) - \frac{Ax+B}{Bx+A}}$$

або, помноживши чисельника й знаменника першого відношення на C, — а другого на $C\,(Cx + A)$,

$$\frac{(A + Cx) - \sqrt{\Delta}}{(A + Cx) + \sqrt{\Delta}} : \frac{\Delta - \sqrt{\Delta}\,(Cx + A)}{\Delta + \sqrt{\Delta}\,(Cx + A)}.$$

або, скоротивши друге відношення на $\sqrt{\Delta}$, матимемо:

$$\frac{(Cx + A) - \sqrt{\Delta}}{(Cx + A) + \sqrt{\Delta}} : \frac{(Cx + A) + \sqrt{\Delta}}{(Cx + A) + \sqrt{\Delta}} = -1.$$

Пара точок, взаємно відповідних в інволюції, утворюють з двома точками цієї інволюції чотири гармонійні точки. Цю теорему можна довести простіше, якщо за початок лічби (початок координат) узяти середину віддалі між подвійними точками (так званий центр інволюції). Тоді $A=0$, і рівнання (2) матиме вигляд:

$$CXx+B=0.$$

Отже, тепер подвійні точки $\pm\sqrt{-\frac{B}{C}}$ і ангармонійне відношення набирає вигляду:

$$\frac{x-\sqrt{-\frac{B}{C}}}{x+\sqrt{-\frac{B}{C}}}:\frac{-\frac{B}{Cx}-\sqrt{-\frac{B}{C}}}{-\frac{B}{Cx}+\sqrt{-\frac{B}{C}}}=-1.$$

§ 2. Визначення положення точки на площині. Система прямокутніх координат.

Якщо точка лежить на площині, то визначити її положення однією координатою вже не можна. Але є способи — і досить різноманітні — визначати положення точки і в цьому разі. Найбільш поширені:

Координати прямокутні (Декартові) [1]). Візьмім дві взаємно перпендикулярні прямі і їхню точку перетину O вважаймо для обох прямих за початкову точку (початок координат) (рис. 7). Щоб було зручніше, координати на першій прямій (горизонтальній) позначатимемо x, а на другій (вертикальній) — y, а прямі зватимемо відповідно: OX і OY. Щодо знаків, то умовмося на першій прямій вважати за додатний напрям праворуч, а на другій — догори. Якщо задати для x і y цілком певні значіння $x(=ON)=a$ і $y(=OP)=b$, то на осях OX і OY дістанемо

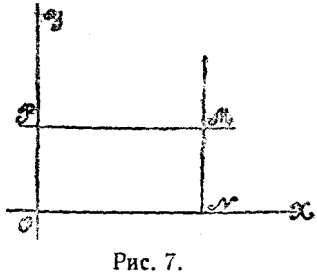

Рис. 7.

[1]) Скісокутні й полярні див. далі, розділ IV.

цілком визначені точки N і P. Через N проведім пряму $NM \parallel OY$, а через P пряму $PM \parallel OX$. Ці дві прямі перетинаються в одній точці M, і, таким чином, перетином цих двох прямих визначиться точка M або: точка M визначається двома координатами $x = a$, $y = b$, і за такого визначення вона є єдина можлива. Навпаки, якщо точка M дана, то проводимо через неї прямі, паралельні до осей OX і OY, і ці прямі визначають на осях OY і OX точки P і N з координатами $y = b$ і $x = a$, і ці точки є єдині можливі.

З властивости паралельних прямих $NM = OP$ і $PM = ON$, тобто, якщо на прямій NM вважати за початок точку N, то NM, координата точки M відносно N, дорівнює координаті P на OY відносно O. А якщо на прямій PM вважати за початок точку P, то координата точки M на PM відносно P дорівнює координаті точки N на OX відносно O.

Отже, якщо треба на площині взяти точку, що має координати відносно осей OX і OY: $x = a$ і $y = b$, то дістати цю точку можна й іншим порядком, а саме: беремо на OX точку N так, щоб її координата $ON = x$ дорівнювала a. Через точку N проводимо пряму, паралельну до осі Y, і на цій прямій відшукуємо точку M таку, щоб її координати відносно N, тобто NM, дорівнювали b. Зрозуміло, що це та самісінька точка, що ми мали її раніш. Або ще можна на осі OY узяти точку P з координатою OP відносно O, що дорівнює b, потім провести через P пряму, паралельну до оеі OX, а вже на цій прямій узяти точку M з координатою PM відносно P, що дорівнює a. Знову таки дістанемо точку з координатами $x = a : y = b$. Вісь OX зветься **вісь іксів** (x-ів) або **вісь абсцис**, а вісь OY—(**вісь ігреків** або **вісь ординат**. Знак кожної з координат показує, в якому напрямі треба її відкладати на відповідній осі.

Якщо точка лежить на одній з осей, то координата по цій осі є віддаль точки від початку координат з відповідним знаком, а друга координата дорівнює нулеві.

Якщо, напр., візьмемо точку N на осі OX, на віддалі $ON = a$, тоді $x = a$. Щождо y, то вона є віддаль від N по прямій, що проходить через N паралельно до осі OY, а ця віддаль є нуль: $y = 0$. Єдина точка, що має обидві коор-

динати в цій системі осей OX і OY, що дорівнюють нулеві, це точка O — початок координат.

Системи осей OX і OY скорочено позначають: система осей XOY. Вона поділяє всю площину на чотири частини,— на чотири чверті (квадранти) або кути. У перший чверті, утвореній додатним напрямом осей OX і OY, містяться точки, що мають обидві додатні координати; у другій, обмеженій додатним напрямом осі y-ків і від'ємним — осі x-ів, містяться точки з від'ємними абсцисами й додатними ординатами; у третьому куті, обмеженому від'ємними напрямами обох осей, обидві координати від'ємні, а в четвертому, обмеженому додатним напрямом осі x-ів і від'ємним — осі y-ів, абсциси додатні, а ординати від'ємні.

§ 3. Основні задачі в прямокутніх координатах

Розв'яжемо за допомогою цієї системи кілька задач.

Задача 1. Віддаль поміж двома точками. Хай точка A має координати x_1 і y_1, а точка B — координати x_2 і y_2.

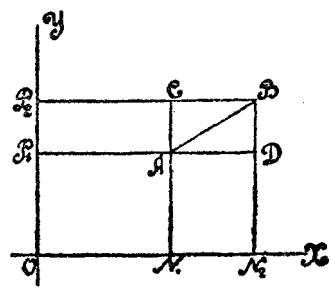

Рис. 8.

Проведемо через A і B прямі, паралельні до осей. Вони перетнуть вісь OY у точках N_1 і N_2, а вісь OY — у точках P_1 і P_2 і утворять прямокутник $ACBD$ з діягоналею AB (рис. 8).

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2.$$

Тому

$$\overline{AD} = \overline{CB} = \overline{N_1N_2} = x_2 - x_1.$$

Але

$$\overline{AC} = \overline{DB} = \overline{P_1P_2} = y_2 - y_1.$$

Отже, шукана віддаль d визначиться рівністю:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \qquad (1)$$

Звідси:

$$d = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Подвійний знак відповідає різним напрямам віддалі: або d є AB, тобто віддаль від A до B, або, навпаки, d є BA, тобто віддаль від B до A. Звичайно за віддаль поміж двома точками вважають абсолютну величину цієї віддалі і тому перед коренем беруть лише знак $+$.

Задача 2. Віддаль точки від початку координат. Це окремий випадок попередньої задачі. Хай x_1, y_1 є координати точки A. Якщо провести прямі $AP \parallel OX$ і $AN \parallel OY$, то AO буде діягоналею прямокутника $OPAN$ (рис. 9) і гіпотенузою прямокутнього трикутника ONA. Катети ON і OP є x_1 і y_1, тобто координати точки A. Звідси, позначивши віддаль точки від початку r, маємо:

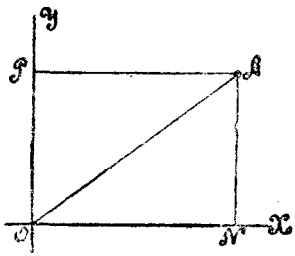

Рис. 9.

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 \qquad (2)$$

і

$$r \pm \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Звичайно береться абсолютне значіння цієї віддалі, тому треба корінь брати лише із знаком $+$.

Задача 3. Координати середини відтинку. Хай знову координати точки A і B є відповідно x_1, y_1 і x_2, y_2. Треба визначити координати точки E — середини відтинку AB.

Проводимо $P_2B \parallel P_0E \parallel P_1A \parallel XO$ і $AN_1 \parallel EN_0 \parallel BN_2 \parallel OY$ (рис. 10).

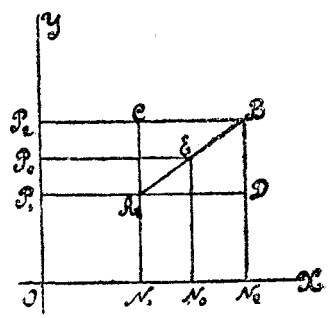

Рис. 10.

З того, що $AE = EB$, то і $N_1N_0 = N_0N_2$ і $P_2P_0 = P_0P_1$, як відтинки, утворені паралельними прямими на прямих AB та OX з одного боку і AB та PY — з другого. Отже:

$$x_0 - x_1 = x_2 - x_0,$$

$$y_0 - y_1 = y_2 - y_0.$$

Звідси:

$$2x_0 = x_1 + x_2; \quad 2y_0 = y_1 + y_2$$

або

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (3)$$

Ця задача є окремий випадок наступної задачі:

Задача 4. Розділити даний відтинок у даному відношенні. Інакше: шукаємо на даній прямій, що сполучає дві дані точки, таку точку, що відношення її віддалей від двох даних точок прямої дорівнюватиме даному відношенню. Зформулювавши так задачу, ми бачимо, що шукана точка може міститися не лише поміж даними точками, а й поза ними. Перше формулювання має на оці лише перший випадок. Ми розглянемо обидва (рис. 11).

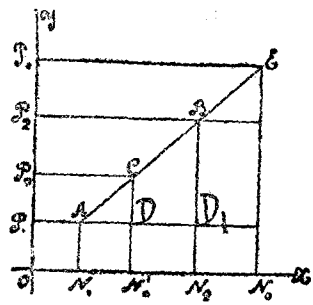

Рис. 11.

а) Шукана точка E лежить поза відтинком AB, на його продовженні. Віддаль AC і BE беремо в одному напрямі, тому відношення $\frac{AE}{BE}$ є додатне.

Хай

$$\frac{AE}{BE} = \frac{m}{n}.$$

За властивістю паралельних

$$\frac{AE}{BE} = \frac{N_1 N_0}{N_2 N_0} \text{ і } \frac{AE}{BE} = \frac{P_1 P_0}{P_2 P_0}.$$

Отже

$$\frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2} = \frac{m}{n} \text{ і } \frac{y_0 - y_1}{y_0 - y_2} = \frac{m}{n}$$

Звідси

$$(x_0 - x_1) \,.\, n = (x_0 - x_2) \,.\, m$$

або

$$x_0 (m - n) = m x_2 - n x_1$$

і

$$x_0 = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}. \qquad (4_1)$$

Так само знайдемо

$$y_0 = \frac{my_2 - ny_1}{m - n}. \qquad (4_2)$$

б) Шукана точка C лежить на відтинку AB між A і B. Віддаль C від A і B відкладаємо в протилежних напрямах, тому їхнє відношення буде від'ємне:

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{m}{n},$$

а що

$$\frac{AC}{BC} = \frac{N_1 N'_0}{N_2 N'_0} = \frac{P_1 P'_0}{P_2 P'_0},$$

то

$$\frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2} = -\frac{m}{n}$$

і

$$m(x_0 - x_2) + n(x_0 - x_1) = 0.$$

Звідси:

$$x_0 = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}. \qquad (5_1)$$

Так само знайдемо, що

$$y_0 = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}. \qquad (5_2)$$

Поділім у правих частинах $(4_1, 4_2)$ і у $(5_1, 5_2)$ чисельника і знаменника на n і позначмо $\frac{m}{n} = k$;

дістанемо:

$$x_0 = \frac{x_1 \pm kx_2}{1 \pm k}, \quad y_0 = \frac{y_1 \pm ky_2}{1 \pm k}.$$

Дві пари формул можна сполучити в одну:

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k},$$

якщо для k надавати не лише додатні, а й від'ємні значіння. При всіляких значіннях k ці формули дають координати точок на тій прямій, що сполучає дві дані точки. Кожній точці цієї прямої відповідає цілком певне значіння k, що є відношення її віддалей (з відповідними знаками) від двох даних точок; і, навпаки, кожному значінню k відповідає цілком певна точка прямої.

Якщо точка міститься між A і B, то k від'ємне; для A воно дорівнює нулеві, для середини поміж A і B — $k = -1$, і з наближенням до B воно зростає своєю абсолютною величиною, а для B обертається на $-\infty$.

Переміщуючись по прямій далі за B в тому самому напрямі, зустрінемо точки, що для них k додатне, і що ближче точка до B то більше буде k; зменшується воно, коли віддалятися від B до 1.

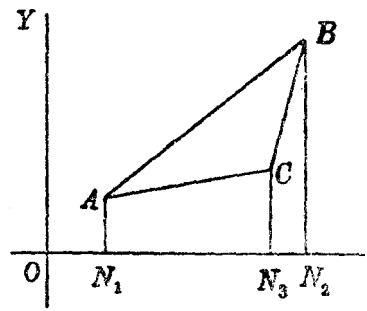

Рис. 12.

Задача 5. Площа трикутника за координатами його вершин. Хай дано три точки A, B і C з координатами x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3. Якщо проведемо

$$AN_1 \parallel BN_2 \parallel CN_3 \parallel OY,$$

то

площа $ABC =$ пл. $N_1ABN_2 -$ пл. $N_1ACN_3 -$ пл. N_3CBN_2

або

$$\triangle = \frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1) - \frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1) - \frac{1}{2}(y_3+y_2)(x_2-x_3) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{y_1(x_2-x_3) + y_2(x_3-x_1) + y_3(x_1-x_2)\right\}$$

або

$$= \frac{1}{2}\left\{x_1(y_3-x_2) + x_2(y_1-y_3) + x_3(y_2-x_1)\right\}.$$

Якщо трикутник у такому положенні, як на рис. 13, то навпаки:

$$\triangle ABC = \text{пл. } N_1ACN_3 + \text{пл. } N_3CBN_2 - \text{пл. } N_1ABN_2.$$

Для площі трикутника дістали той самий вираз лише з оберненим знаком. Щоб площа трикутника була додатна, треба, обравши один вершок за початковий, брати другий вершок так, щоб, переходячи до нього, площа залишалася праворуч, тобто так, як це зроблено у двох попередніх випадках.

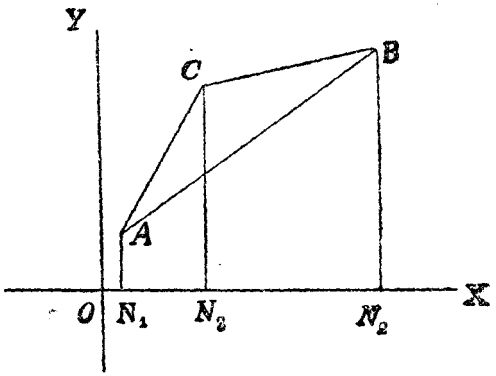

Рис. 13.

Запроваджуючи символіку теорії детермінантів, можна площу трикутника подати ось так:

$$2\triangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Якщо розвинути цей детермінант за елементами першої вертикалі, то дістанемо наш попередній вираз площі. Віднімаючи елементи першого рядка з відповідних елементів двох інших, дістанемо вираз площі у вигляді детермінанта другого порядку.

$$2\triangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)(x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Останній вираз можна вивести і безпосередньо.

Припустім, що жадний з боків трикутника не паралельний з осями координат, і хай $x_1 < x_2 < x_3$. Треба розрізняти два випадки:

а) коли значіння y_1 зростають за тим самим порядком або навпаки — зменшуються, тобто або $y_1 < y_2 < y_3$, або $y_1 > y_2 > y_3$, і

б) інші можливі випадки. В останньому випадку проведемо через точку, що має середню на величину ординату, пряму, паралельну до осі абсцис, а через точку із середньою на величину абсцисою також пряму, паралельну до осі ординат; їхня точка перетину лежатиме в середині трикутника (на рисунку точка D). Маємо:

$$\text{пл.}\, ABC = \text{пл.}\, ABD + \text{пл.}\, BCD + \text{пл.}\, CAD\,.$$

Але

$$\text{пл.}\, ABD = \text{пл.} EBD,$$

$$\text{пл.}\, ADC = \text{пл.} JDC\,,$$

і таким чином

$$\text{пл.}\, ABC = \text{пл.}\, EDB + \text{пл}\, JBC\,.$$

А що

$$\triangle EDB = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

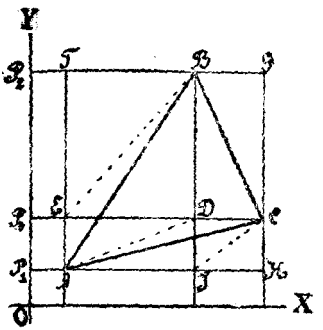

Рис. 14.

$$\triangle JBC = \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_2 - y_1)\,,$$

то, якщо винесемо в другому доданку з першого чинника за дужку знак мінус, дістанемо:

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\Big[(x_2 - x_1)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_2 - y_1)\Big]$$

Щождо першого випадку, то тут точка D лежить поза трикутником, і ми матимемо:

$$\text{пл.}\, ACB = -\,\text{пл.}\, ABD + \text{пл.}\, BDC + \text{пл.}\, ACD$$

або

$$\text{пл.}\, ABC = \text{пл.}\, ABD + \text{пл.}\, BCD - \text{пл.}\, ACD$$

але, якщо додержувати правила щодо знаку площі то вираз дістанемо той самий.

Зазначмо ще окремий випадок, коли один з вершків трикутника лежить у початку координат, наприклад, $x_3 = y_3 = 0$; з формули матимемо:

$$\triangle ABO = \frac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_2)$$

Умова, щоб три точки лежали на одній прямій. Якщо три точки лежать на одній прямій, то площа трикутника, утвореного цими точками, дорівнює нулеві. І, навпаки, площа трикутника може дорівнювати нулеві лише тоді, коли два його вершки зливаються або коли третій вершок лежить на тій прямій, що сполучає дві перші. Отже шукана умова є

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

РОЗДІЛ II

Визначення ліній рівнаннями

§ 4. Лінія, як геометричне місце точок

Поняття про геометричні місця відоме з елементарної геометрії, наприклад: а) коло є геометричне місце точок, рівновіддалених від одної даної точки центра, або геометричне місце вершка прямого кута, що спирається на діяметр; б) перпендикуляр, поставлений із середини відтинка поміж двома точками, є геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних; в) бісектриса кута, утвореного двома прямими, є геометричне місце точок, рівновіддалених від рамен кута, і т. ін.

В аналітичній геометрії, коли ми прикладаємо методу визначати точки за допомогою координат, уявлення про лінію, як сукупність таких точок, що задовольняють ту чи ту умову, або підлягають тому чи тому законові, є основне. Прикладім це до прямої лінії.

Ґрунтуючись на цьому, ми вважаємо за доцільне спочатку подати рівнання прямої на підставі різних даних, що визначають пряму.

1. Перш за все, відомо, що пряма цілком визначається двома її точками. Тому, якщо ми знаємо дві точки, то можна побудувати рівнання, що цілком визначає пряму. Справді, якщо (x_1, y_1) і (x_2, y_2) є дві дані точки, то координати x, y будь-якої третьої точки, що сполучає дані точки прямою, задовольняють умову:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

бо в цьому випадку площа трикутника, утвореного трьома точками, дорівнює нулеві. Узявши другий вигляд формули для цлощі трикутника. дістанемо те саме рівнання у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$(x - x_2)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

Можна дістати рівнання прямої, що проходить через дві точки, і інакше, не користуючись із формули для площі трикутника.

Можна використати виведені формули для координат точки, що лежать на прямій, поділяючи її в даному відношенні k.

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}$$

Ці формули прн всіх значіннях k дають точки прямої, що проходять через дві дані точки, тому можна визначити координати всіх її точок.

За змінною k ці формули можна розглядати, як рівнання прямої в так званій параметричній формі. Щоб дістати рівнання в звичайній формі, треба „виключити“ параметр k, цю допомічну змінну.

Для цього розв'яжемо кожну з двох рівностей відносно k. Матимемо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{-k}{1 - k}; \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{-k}{1 - k}$$

А що в обох рівностях значіння k те саме, то для всіх точок прямої, що сполучає дві дані точки,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Ця рівність відбиває ту властивість точок A, B, C прямої (рис. 11), то $\triangle ACD$, подібний до $\triangle ABD_1$, бо, справді, з цього виникає:

$$\frac{AD}{AD_1} = \frac{CD}{BD_1}$$

а коли ці пропорції подати в координатних символах, то це й буде наше рівнання.

Воно набирає надзвичайно простого вигляду, якщо дані точки лежать на координатних осях; справді, хай $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_1 = b$. Рівнання тоді буде:

$$\frac{y}{b} = \frac{x - a}{-a}$$

або

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Не подаючи докищо інших, вартих уваги, виглядів рівнання прямої, ми зупиняємось на виводі рівнань деяких інших ліній і передусім виведемо рівнання кола.

2. Безпосередньо визначаємо, що квадрат віддалі точки (x, y) від точки (a, b) є дана величина r^2:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

Це рівнання, що його справджують усі точки цього кола, і лише вони єдині.

Хай, далі, центр кола зіллється з початком координат. Як відомо, перпендикуляр із точки кола на діяметр є середнє геометричне поміж відтинками діяметра:

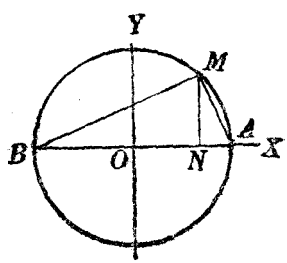

Рис. 15.

$$\overline{MN}^2 = \overline{AN} \,.\, \overline{NB},$$

тобто

$$y^2 = (x + r)(r - x)$$

Кожний з катетів є середнє геометричне поміж усім діяметром і приляжним відтинком, тобто

$$\overline{AM}^2 = \overline{AB} \,.\, \overline{AN} \quad \text{і} \quad \overline{MB}^2 = \overline{AB} \,.\, \overline{NB}$$

що в координатних символах дає

$$(x+r)^2 + y^2 = 2r(r+x) \quad \text{і} \quad (x-r)^2 + y^2 = 2r(r-x).$$

Наостанку, з того, що тут AMB є прямий, то

$$\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{AB}^2,$$

тобто

$$[(x+r)^2 + y^2] + [(x-r)^2 + y^2] = 4r^2$$

Усі ці рівнання після зведення дають:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

до якого також зводиться й перше, якщо $a = b = 0$

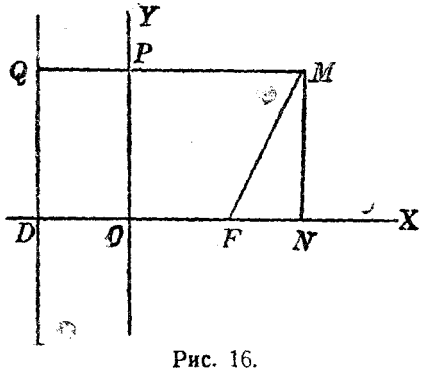

Рис. 16.

3. Дано пряму, паралельну до осі y-ів так, що вона проходить на віддалі a ліворуч, і точку F на осі x-ів на тій самій віддалі праворуч. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від даної прямої і даної точки.

Віддаль точки M від прямої є перпендикуляр $MQ = x + a$, а віддаль від точки F

$$MF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

За умовою задачі

$$(x+a)^2 = (x-a)^2 + y^2, \quad \text{або} \quad y^2 = 4ax -$$

це крива, що має назву параболі.

4. Пряма сталой довжини $a+b$ спирається своїми кінцями на дві взаємно перпендикулярні прямі. Знайдіть геометричне місце точки M, що поділяє пряму в відношенні $\frac{a}{b}$

За умовою $MB=b$; $MA=a$,

якщо $\angle MBN=t$, то $\angle MAP=\frac{\pi}{2}-t$

$MN=y=\sin t$, $MP=x=a\cos t$

Виключивши t, дістанемо:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

Ця крива є еліпса.

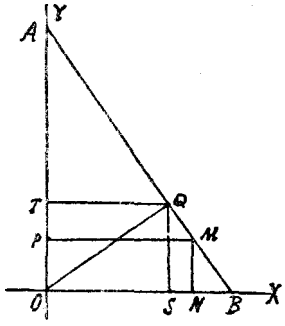

Рис. 17.

5. На пряму AB (попередня задача) спускаємо перпендикуляр із початку координат; його підошва Q описує криву, що зветься „чотирилистковий вінчик“

$$\angle QOB=\frac{\pi}{2}-t$$

$$x=OS=OQ\sin t=OB\sin^2 t$$

$$y=OT=OQ\cos t-OA\cos^2 t$$

$$OA=(a+b)\sin t;\ OB=(a+b)\cos t$$

Отже

$$x=(a+b)\sin^2 t\cos t;\ y=(a+b)\cos^2 t\sin t$$

Звідси:

$$x^2+y^2=(a+b)^2\sin^2 t\cos^2 t,\ xy=(a+b)^2\sin^3 t\cos^3 t$$

і таким чином шукане рівнання

$$(x^2+y^2)^3=(a+b)^2x^2y^2$$

Цими прикладами ми докищо й обмежимось і перейдемо до систематичного викладу застосовання методи координат, до вивчення прямої, кола і конічних перерізів,

тобто ліній, що визначаються рівнаннями 1-го й 2-го степеня. Ці лінії важливі й цікаві не лише тим, що їм належать визначні властивості, а й тим, що з них користаються в прикладній математиці. Але вони становлять майже виключно зміст звичайних курсів аналітичної геометрії на площині з тих причин, що, визначаючись у Декартових координатах порівняно нескладними рівнаннями, вони найпридатніші для того, щоб на них показати суть методи координат, як способу вивчати властивості геометричних образів. На них бо досить просто можна з'ясувати, як саме властивості кривої випливають із її рівнання; з рівнання, так би мовити, можна „вичитати" властивості кривої, і, таким чином, стає зрозумілим, чому ми, виявляючи властивості кривої, заміняємо криву на її рівнання.

Приклади на складання рівнань кривих.

1) Геометричне місце точки, сума віддалей якої від двох даних точок величина стала, є еліпса.

Віддаль між двома точками хай дорівнює $2c$; дана стала величина $2a > 2c$. Координатні осі обираємо так, щоб координати даних точнк $(\pm c, 0)$. Якщо покласти $a^2 - c^2 = b^2$ то рівнання кривої $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

2) Геометричне місце точки, що ріжниця її віддалей від двох даних точок $(+c, 0)$ і $(-c, 0)$ величина стала $2a < 2c$, є гіперболя. Якщо покласти $a^2 + c^2 = b^2$, то рівнання кривої $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

3) Геометричне місце точок таких, що добуток їхніх віддалей від двох даних точок є величина стала $(= a^2)$, рівнання $(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 - a^4 = 0$. Якщо $a = c$, то крива зветься **лемніската**.

РОЗДІЛ III

Пряма лінія

§ 5. Різні види рівнання прямої

1. Пряма, паралельна до осі координат. Якщо пряма паралельна до осі y-ів, то всі її точки однаково віддалені від осі. Хай ця віддаль дорівнює a. Тоді для всіх точок прямої абсциса $x=a$. Отже, $x=a$ є рівнання, що його вдовольняють усі точки прямої, паралельної до осі y-ів, — це є рівнання нашої прямої. Зокрема рівнання самої осі y-ів є $x=0$.

Точки прямої, паралельної до осі x-ів, якщо вони віддалені від неї на b, усі мають ординати $y=b$. Тому $y=b$ є рівнання, що його вдовольняють усі точки такої прямої. Зокрема $y=0$ є рівнання осі x-ів.

2. Пряма, що проходить через початок координат. Хай (x_1, y_1) є якась точка такої прямої. З подібности трикутників OMN і OM_1N_1 маємо:

$$\frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1}, \quad \text{або} \quad yx_1-y_1x=0.$$

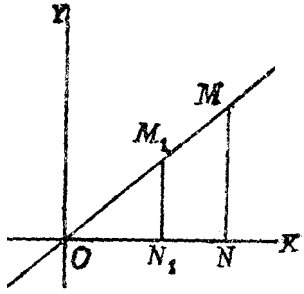

Рис. 18.

Але відношення $\frac{y}{x}$ є величина стала й дорівнює tg α, якщо $\alpha=\angle M_1ON_1$.

Позначмо його m.

Рівнання матиме вигляд:

$$\frac{y}{x}=m,$$

або

$$y=mx.$$

3. Пряма, що утворює з віссю x-ів кут α ($\operatorname{tg}\alpha = m$), а на осі y-ів відрізає відтинок, що дорівнює b.

Хай дана пряма перетинається з віссю y-ів у точці B. ($OB = b$). Проведім $BP \parallel OX$. Кут $MBP = \alpha$. Хоч як ми візьмемо точку M на прямій, відношення

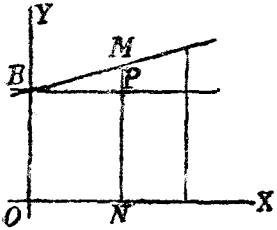

Рис. 19.

$$\frac{MP}{BP} = \text{стале} = \operatorname{tg}\alpha$$

або

$$\frac{y-b}{x} = m.$$

Розв'язуючи його відносно y, маємо:

$$y = mx + b$$

тобто рівнання прямої, що задана напрямом і відтинком на осі y-ків. Звичайно, в такому вигляді не можна дістати рівнання прямої, паралельної до осі y-ів, бо тоді $\alpha = \frac{\pi}{2}$ і $\operatorname{tg}\alpha = \infty$

4. Нормальний вид рівнання прямої (O. Hesse). Хай пряму задано завдовжки p перпендикуляра, спущеного на неї з початку координат, і кутом α, що його утворює цей перпендикуляр з віссю x-ів. Візьмім на прямій будь-яку точку M і проведім $OQ \perp AB$, $MN \perp OX$, $NS \perp OQ$ і $ML \perp NS$.

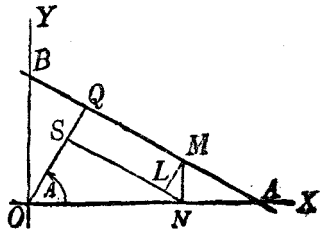

Рис. 20.

Тоді

$$p = \overline{OQ} = \overline{OS} + \overline{SQ}.$$

Але

$\overline{OS} = \overline{ON}\cos SON$, тобто $\overline{OS} = x\cos\alpha$,

а

$\overline{SQ} = ML = MN\sin MNL$, тобто $SQ = y\sin\alpha$

(бо $\angle MNL = \angle SON$)

Отже шукане рівнання:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

5. Загальне рівнання прямої. Усі попередні рівнання прямої є рівнання першого степеня відносно x і y. І, навпаки, загальне рівнання першого степеня відносно x і y

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

завжди визначає пряму лінію.

Справді, якщо два з коефіцієнтів a, b, c дорівнюють нулеві, то рівнання зводиться до вигляду $ax = 0$, або $by = 0$, тобто $x = 0$ або $y = 0$, і тоді воно визначає одну з осей координат. Якщо один із трьох коефіцієнтів дорівнює нулеві, а два не дорівнюють нулеві, то рівнання зводиться до одного з трьох виглядів: $Ax + C = 0$, $By + C = 0$ або $Ax + By = 0$ і, за попереднім, визначає або пряму, паралельну до одної з осей, або (3-й випадок) пряму, що проходить через початок координат.

Якщо, наостанку, всі три коефіцієнти відмінні від нуля, то ми можемо звести рівнання до одного з трьох рівнозначних (еквівалентних) виглядів:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

$$y = mx + b$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

поділяючи (1) на величину конечну і відмінну від 0. Справді, щоб звести до першого вигляду, поділяємо на $-C$ (якщо $C \neq 0$) і дістанемо:

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$$

Отже

$$-\frac{C}{A} = a; \quad -\frac{C}{B} = b$$

Розв'язуючи відносно y, матимемо (при $B \neq 0$):

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}; \text{ поклавши } m = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B} \text{ і } b = -\frac{C}{B}$$

ми маємо другий вигляд.

Наостанку, щоб звести до нормального вигляду, треба помножити на таку величину k, щоб коефіцієнти можна було вважати за косинус і синус якогось дійсного кута $kA = \cos\alpha$, $kB = \sin\alpha$, звідси $k^2(A^2 + B^2) = 1$, тобто $k = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ а, значить, $p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Таким чином, за всяких значінь коефіцієнтів A, B, C рівнання $Ax + By + C = 0$ завжди визначає пряму лінію. Тому воно зветься **загальне рівнання прямої**.

§ 6. Основні задачі на пряму

Коефіцієнти A, B, C можуть приймати всілякі значіння, але один із них обов'язково мусить бути відмінний від 0. Тому на один із коефіцієнтів завжди можна поділити. Таким чином, довільними являються не самі коефіцієнти, а відношення двох із них до третього, отож: загальне рівнання прямої має дві довільні величини, два параметри, яким можна надавати довільні значіння, щоби пряма вдовольняла ті чи ті умови.

1. Щоби пряма відрізала на осях відтинки a або b, її рівнання повинно справджуватися підставленням: $x = a$, $y = 0$ і $x = 0$, $y = b$; це дає два співвідношення поміж коефіцієнтами: $Aa + C = 0$, $Bb + C = 0$, звідкіль дістанемо:

$$A = -\frac{1}{a} \cdot C; \; B = -\frac{1}{b} \cdot C$$

а, підставивши їх у рівнання, матимемо: $-C\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0$

Якщо треба, щоб пряма проходила через дану точку (x_1, y_1), то це зводиться до умови

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$

з якої видно, що координати даної точки справджують рівнання прямої. Один коефіцієнт звідси й визначається; найзручніше знайти C:

$$C = -Ax_1 - By_1$$

Підставивши отаке C в рівнання, знайдемо загальне рівнання прямих, що проходять через дану точку:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

Відношення A до B залишається довільним: через дану точку проходить не одна пряма, а безліч їх; сукупність їх зветься в'язка прямих; їхня спільна точка, в даному разі (x_1, y_1) зветься вершок або центр в'язки.

2. Пряма, що проходить через дві дані точки. Якщо дано й другу точку $(x_2 y_2)$, то її координати також повинні справджувати рівнання прямої; отже, ми маємо ще додаткову умову:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$$

звідки знаходимо значіння відношення $\frac{A}{B}$, що відповідає цій прямій:

$$\frac{A}{B} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Вставивши це в рівнання прямої, матимемо:

$$-\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + (y - y_1) = 0$$

або

$$(x_2 - x_1(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0$$

Можна було б міркувати й так: пряма, визначена рівнанням

$$Ax + By + C = 0$$

проходить через точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), якщо вдовольняються дві умови:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Якщо ці три рівнання згідні (сумісні) відносно A, B, C, то умова згідности цих рівнань дасть рівнання:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

або, розв'язуючи два умовні рівнання відносно $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, матимемо:

$$\frac{A}{C} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 y_2 - y_1 x_2}, \quad \frac{B}{C} = -\frac{x_1 - x_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

або

$$\frac{A}{y_2 - y_1} = \frac{B}{x_1 - x_2} = \frac{-C}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

а, підставивши це в рівнання прямої, матимемо:

$$x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) - (x_1 y_2 - y_2 x_2) = 0$$

це легко зводиться до того самого вигляду, що ми мали й раніш.

3. Пряма, що проходить через дану точку й має даний напрям. Пряма, що проходить через точку (x_1, y_2),

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

утворює з віссю x-ів кут α ($\operatorname{tg}\alpha = m$), якщо відношення $\frac{y - y_1}{x - x_2}$ $\left(\text{а воно для прямої незмінне і дорівнює} -\frac{A}{B}\right)$ дорівнюватиме $\operatorname{tg} A = m$. Отже, рівнання такої прямої буде;

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Є ще один визначний окремий випадок задачі про проведення прямої через дану точку, а саме, коли точку за-

дано не її координатами, а як перетин двох прямих, визначених їхніми рівняннями. Цей випадок розглянемо окремо.

4. Провести пряму через точку перетину двох даних.

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_2x - B_2y + C_2 = 0$$

Замість того, щоб шукати точку перетину (див. далі), помічаємо, що, помноживши ліві частини рівнань на довільні чинники λ, μ і додаючи, дістанемо:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

або

$$x(\lambda A_1 + \mu A_2) + y(\lambda B_1 + \mu B_2) + C_1\lambda + C_2\mu = 0$$

Це рівнання першого степеня, отже, воно й визначає пряму. Координати спільної точки обертають на нуль обидва тричлени, що стоять у дужках окремо, а, значить, вони справджують і все рівнання за всяких значінь λ і μ. Отже, це й є шукана пряма (геометричне значіння лівої частини буде далі).

5. Точка перетину двох прямих:

$$Ax_1 + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Координати її вдовольняють обидва рівнання. Розв'язуючи їх сукупно, дістанемо:

$$x = -\frac{C_1B_2 - B_1C}{A_1B_2 - B_2A_2}, \quad y = -\frac{A_1C_2 - C_1A_2}{A_1B_2 - B_1A_2}$$

значіння дістаємо цілком означені, бо

$$A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0$$

Якщо ж $A_1B_2 - B_1A_2 = 0$, то або 1) чисельники при цьому на нуль не обертаються, і тоді для x і y конечних значінь не буде, точка перетину відходить на безконечність, прямі

паралельні (і для них тангенси кутів з віссю x-ів дорівнюють $-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{A_2}{B_2}$); або 2) чисельники також обертаються на нуль, тоді x і y неозначені, але тоді

$$-\frac{A_1}{A_2}=-\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

рівнання відрізняється лише чинником, прямі зливаються, і кожна їхня точка є точка перетину.

6. Умови перетину трьох прямих. Три прямі:

$$\begin{aligned} Ax+By+C&=0\\ A_1x+B_1y+C_1&=0\\ A_2x+B_2y+C_2&=0 \end{aligned}$$

проходять через одну точку, якщо координати точки перетину двох із них справджують рівнання третьої. Тому, якщо підставити знайдені координати перетину другої і третьої прямої у перше рівнання і помножити на спільного знаменника, то матимемо:

$$O=A(B_1C_2-C_1B_2)+B(C_1A_2-A_1C_2)+C(A_1B_2-B_1A_2)$$

або, записавши це детермінантом (як умову іхньої згідности):

$$\begin{vmatrix} A & B & C\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0$$

Можна й запобігти обчисленням цього—до деякої міри—складного виразу, якщо звернути увагу, що вся суть у тому, щоб третє рівнання можна було звести до вигляду рівнання прямої, що проходить через точку перетину двох інших.

Аналітично це призводить, звичайно, до того ж самого, але із тотожности

$$Ax+By+C=\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)$$

виникають для λ і μ три рівнання:

$$\begin{aligned} A&=\lambda A_1+\mu A_2\\ B&=\lambda B_1+\mu B_2\\ C&=\lambda C_1+\mu C_2 \end{aligned}$$

Ці рівнання будуть згідні за тої умови, що її виведено раніш. З цього можна помітити: якщо альґебрична сума лівих частин трьох рівнань тотожньо дорівнює нулеві, то три прямі проходять через одну точку.

Приклад. Медіяни трикутника перетинаються в одній точці.

7. Кут двох прямих. Умова паралельности й перпендикулярности. Якщо дві прямі утворюють з віссю x-ів кути α і α', то кут поміж ними $V=\alpha-\alpha'$ (при $\alpha>\alpha'$) і

$$\operatorname{tg} V=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha'}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'}$$

Якщо прямі задано рівнаннями:

$$y=mx+b,\quad y=m'x+b'$$

то

$$\operatorname{tg}\alpha=m,\quad \operatorname{tg}\alpha'=m'$$

$$\operatorname{tg} V=\frac{m-m'}{1+mm'}$$

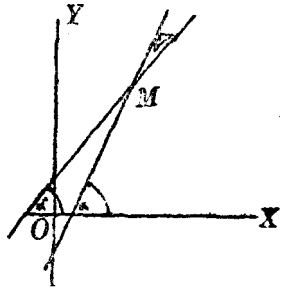

Рис. 21

Якщо прямі задано рівнаннями:

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0,$$

то

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{A}{B},\quad \operatorname{tg}\beta=-\frac{A'}{B'}$$

$$\operatorname{tg} V=\frac{A'B-AB'}{AA'+BB'}$$

Звідси умова паралельности

$$\operatorname{tg} V=0;\quad m=m',\ \text{або}\ A'B-AB'=0;$$

якщо прямі паралельні, коефіцієнти при x і y в їхніх рівнаннях пропорціональні.

Прямі перпендикулярні, якщо $V=\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{tg} V=\infty$ тобто за умови:

$$1+mm'=0, \quad \text{або} \quad m'=-\frac{1}{m}$$

або

$$AA'+BB'=0$$

Висновок I. Прямі

$$Ax+By+C=0$$
$$Ax+By+D=0$$

відрізняються лише вільними членами, отже, вони паралельні.

Висновок II. Прямі

$$Ax+By+C=0$$
$$Bx-Ay+D=0$$

взаємно перпендикулярні.

§ 8. Через дану точку (x_1, y_1) провести пряму, перпендикулярну до даної прямої.

Шукане рівнання буде:

$$m(y-y_1)+(x-x_1)$$

9. З даної точки на дану пряму спустити перпендикуляр.

Рівнання цієї прямої ми вже мали. Треба лише знайти довжину перпендикуляра.

Перший спосіб. Позначивши x і y координати його підовши, знайдемо їх із рівнань:

$$y-mx-b=0$$

$$m(y-y_1)+(x-x_1)=0$$

перше з них для зручности замінимо:

$$y-y_1-m(x-x_1)+y_1-mx_1-b=0$$

розв'язучи їх відносно $y-y_1$ і $x-x_1$, матимемо:

$$y-y_1=-\frac{y_1-mx_1-b}{1+m_2},\quad x-x_1=-\frac{m(y_1-mx_1-b)}{1+m^2}$$

Піднісши до квадрату й додаючи, знайдемо для довжини δ шуканого перпендикуляра

$$\delta=\pm\frac{y_1-mx_1-b}{\sqrt{1+m^2}}$$

Другий спосіб. Хай рівнання прямої дано в нормальному вигляді:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

Проведемо через дану точку (x_1, y_1) пряму, паралельну до даної її рівнання

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p'=0.$$

Величина p' визначається з умови, що пряма проходить через точку (x_1, y_1)

$$x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p'=0.$$

Отже:

$$p'-p=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p,$$

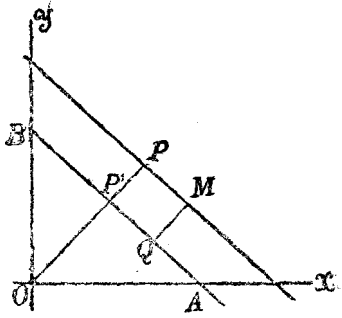

Рис. 22.

ріжниця перпендикулярів (тобто віддаль поміж прямими) та сама, що й результат підставлення в нормальнім рівнанні даної прямої координат даної точки.

Щождо знака, то якщо дана точка x, y і початок (0, 0) містяться по різні боки прямої, $p'>p$ і $p'-p>0$, а якщо по один бік, то $p'-p<0$.

Але в першому разі перпендикуляри на пряму з початку і з даної точки спускаються в протилежних напрямах, а що перший завжди є додатний, то цілком природно другий

вважати за від'ємний. Якщо ж $p'-p<0$, то обидва перпендикуляри одного напряму. Отже їх і треба вважати за додатні. Виходить, треба покласти $p'-p=-\delta$. Таким чином

$$-\delta = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p$$

Якщо пряму задано рівнанням

$$Ax+By+C=0$$

то спочатку приводимо це рівнання до нормального вигляду, поділяючи на

$$\pm\sqrt{A^2+B^2}$$

(знак треба брати протилежний знакові вільного члена), і підставляємо (x_1, y_1)

$$-\delta = \pm\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Можна знак ліворуч випустити, і тоді скажемо, що в формулі:

$$\delta = \pm\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

знак перед правою частиною треба брати той самий, що й знак вільного члена C.

Ця формула має численні й різноманітні застосовання.

1. З неї можна вивести площу трикутника.

Хай вершки його (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3), довжина одного з боків трикутника, що його приймемо за основу

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

рівнання цього боку

$$0 = \begin{matrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{matrix} = x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)+(x_1y_2-y_1y_2)$$

Довжина перпендикуляра на цей бік із третього вершка за щойно виведеною формулою

$$\begin{matrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{matrix} : \pm\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)^2}$$

Помноживши основу на висоту, дістанемо подвоєну площу. Отже:

$$2\triangle = \pm\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Геометричне місце точок таких, що перпендикуляри спущені з них на дві дані прямі

$$Ax+By+C=0, \quad A'x+B'y+C'=0.$$

Перпендикуляри перебувають у даному відношенні $\frac{m}{n}$, якщо є пряма

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \pm\frac{m}{n}\cdot\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

Зокрема, якщо $m=n$, то ми маємо бісектрису кута поміж даними прямими:

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \pm\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

Зауваження. Тепер ясно значіння відношення $\frac{\lambda}{\mu}$ у рівнанні в'язки прямих

$$\lambda(Ax+By+C)+\mu(A'x+B'y+C')=0$$

що проходять через точку перетину двох даних: воно пропорціональне відношенню перпендикулярів, спущених із точок прямої на дві дані прямі.

3. Відношення, в якому пряма $Ax+By+C=0$, поділяє віддалі між двома даними точками (x_1, y_1) (x_2, y_2), до-

рівнює відношенню (з оберненим знаком) перпендикулярів (бо вони спускаються на пряму в протилежних напрямах):

$$m:n=-\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}:\frac{Ax_2+By_2+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

або

$$\frac{m}{n}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$$

Наостанок.

4. За допомогою цієї формули можна розв'язати загальну задачу перетворення координат прямокутніх на прямокутні: дано дві взаємно перпендикулярні прямі:

$$Ax+By+C=0$$

$$Bx+Ay+D=0$$

узяти їх за нові осі координат.

Треба знайти вираз для нових координат кожної точки $M\equiv(x, y)$ за допомогою цих координат і рівнань даних прямих. Щоби розв'язати це, помічаємо, що перпендикуляр на першу пряму, що ми її приймаємо за вісь x'-ів, буде новою координатою y', а перпендикуляр із M на другу, що ми приймаємо її за вісь y'-ів, буде новою координатою x'. Тоді

$$x'=\pm\frac{Bx-Ay+D}{\sqrt{A^2+B^2}};\quad y_1=\pm\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Подвійні знаки відповідають можливості той чи той напрям на прямій уважати за додатний.

Ці формули дають змогу за даними координатами точки в попередній системі вираховувати її координати в новій системі. Але, коли доводиться, переходячи від попередньої системи до нової, складати рівнання кривої, то цього не досить, а треба знати й обернені формули, тобто вирази для старих координат через нові. Тому ми розглянемо це досить важливе питання окремо.

РОЗДІЛ IV

Перетворення координат

§ 7

Основна задача переходити від одної системи координат до другої розпадається на такі дві окремі задачі: a) зміна початку координат без зміни напряму осей, b) зміна напряму осей (повертання їх на кут) без зміни початку координат, c) загальний випадок: зміна і початку і напряму

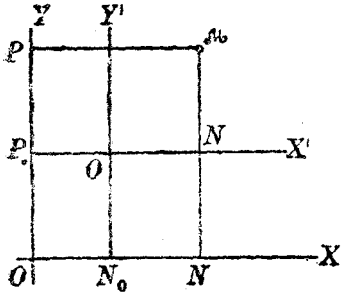

Рис. 23.

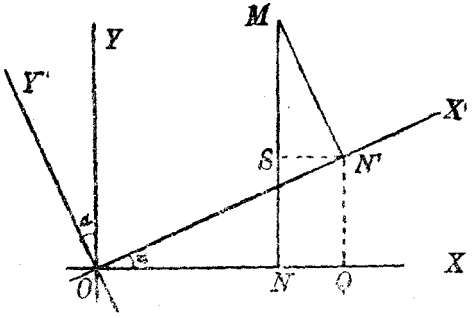

Рис. 24.

осей, — проте, цей загальний випадок сходить на послідовне застосовання двох перших перетворень, а тому вони мають головне значіння.

I. Зміна початку координат. Нові осі паралельні до старих; новий початок має відносно старих осей координати a, b.

Очевидно:

$$ON = ON_0 + N_0N_0 = ON_0 + O'N', \text{ а}$$
$$OP = OP_0 + P_0P = OP_0 + O'P'$$

тобто

$$x = x' + a, \quad y = y' + b,$$

І навпаки

$$x' = x - a, \quad y' = y - b.$$

II. Зміна напряму осей. Хай α кут $XOX' = YOY_1$, провівши $MN \perp OX$ і $MN' \perp OX'$; $N'Q \perp OX$ і $SN' \perp MN$, маємо $ON = OQ - NQ = OQ - SN'$; $MN = MS + SN = MS + N'Q$,

а що із трикутника $ON'Q$:

$$OQ = x' \cos\alpha \quad \text{і} \quad N'Q = x' \sin\alpha,$$

а із трикутника MSN':

$$MS = y' \cos\alpha, \quad SN' = y' \sin\alpha$$

то

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \quad \text{і} \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$$

І, навпаки, звідси можна визначити x і y координатами x' і y', а саме: помножаючи на $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ і додаючи, матимемо:

$$x = x \cos\alpha + y \sin\alpha,$$

а, помноживши на $-\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ і додаючи, матимемо:

$$y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha.$$

Ці формули можна було б дістати й відразу, замітивши, що обернене перетворення сходить на перехід від осей $X'OY'$ до XOY при повертанні на кут α в оберненому напрямі, тобто на $-\alpha$.

(Прямий напрям обертання в бік, протилежний обертанню годинникової стрілки).

Тому треба замінити в перших формулах α на $-\alpha$ і поміняти місцями x, y і x', y'.

III. Загальний випадок. Перехід від осей XOY до осей $X'OY'$, що мають початок в точці $O' = (a, b)$ і інший напрям, який визначається кутом $(OX, O'X') = \alpha$, здійснюємо за два рази. Спочатку від осей XOY переходимо до осей $X'O'Y'$, паралельних до попередніх: $OX \parallel O'X'$ і $OY \parallel O'Y'$ — перший випадок перетворення. Після цього повертаємо осі на кут α — другий випадок перетворення.

§ 8. Поняття про скіснокутні координати

Ми припускали, що положення точки визначається відносно двох взаємно-перпендикулярних прямих — осей координат. Але цієї ж мети можна досягти, узявши за основні осі прямі, що перетинаються під будь-яким кутом $\omega \neq 0$. Треба лише умовитися відраховувати віддаль від кожної з цих прямих—осей координат—прямими, паралельними до другої осі. Таким чином, якщо дано точку M, то її координати дістанемо, провівши $MN \| OY$ і $MP \| OX$, і тоді $ON = x = PM$ і $OP = MN = y$. Щодо знаків, то приймемо ту саму умову, що й у прямокутній системі. І навпаки, якщо дано координати $x = a$, $y = b$, то відкладаємо по осі x-ів $ON = a$ (з відповідним знаком) і $PO = b$ (й теж з відповідним знаком) і, провівши $PM \| OX$ і $NM \| OY$, в їхньому перетині матимемо єдину точку M з координатами a і b.

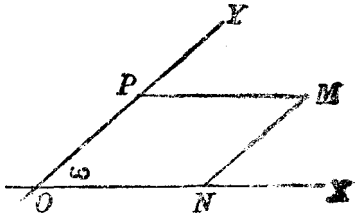

Рис. 25.

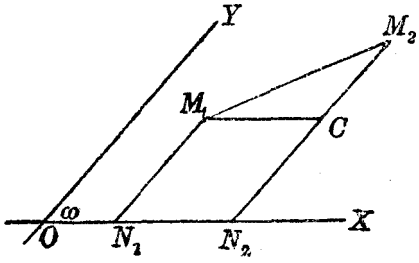

Рис. 26.

Розв'язання задач буде аналогічне тому, що й у прямокутніх координатах. Формули маємо тотожні в тому разі, коли, виводячи їх, користаємось лише подібністю трикутників і паралельністю ліній, що їх проводимо для доведення. Змінюються вони лише в тих випадках, коли використовуємо перпендикулярність координатних ліній. Так, віддаль поміж двома точками (x_1, y_1) і (x_2, y_2) дістанемо не за допомогою Пітагорової теореми, а за теоремою — квадрат боку, що лежить у трикутнику проти відомого кута (тут $\pi - \omega$, якщо ω кут між осями). Отже

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega$$

Віддаль точки (x, y) від початку

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega}$$

Щождо формули для координат середини відтинку, а також для точки, що поділяє відтинок у даному відношенні, то ці формули залишаються без зміни.

Далі, рівнання прямої даного напряму, що утворює з віссю x-ів кут α і відрізає на осі y-ів відтинок b, дістанемо в тому самому вигляді

$$y = mx + b,$$

але з іншим значінням m.

Справді, узявши на прямій довільну точку M, із трикутника BMQ, в якому $MQ \parallel OY$ і $BQ \parallel OX$, $\angle MBQ = \alpha$, $\angle BQM = \pi - \omega$, $MQ = y - b$, $BQ = x$, маємо:

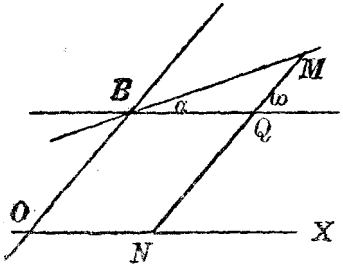

Рис. 27.

$$\frac{y-b}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}.$$

Позначивши сталі відношення через m, матимемо знову те саме рівнання, але m, що й тут має назву кутового коефіцієнта, уже не танґенс кута з віссю x-ів, а відношення синусів і

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m\sin\omega}{1 + m\cos\omega}$$

(при $\omega = \frac{\pi}{2}$, звідси маємо $\operatorname{tg}\alpha = m$).

Тому умову паралельности дістанемо із

$$\frac{m\sin\omega}{1 + m\cos\omega} = \frac{m'\sin\omega}{1 + m'\cos\omega};$$

вона є та сама: $m = m'$, а умова перпендикулярности змінюється

$$\frac{m\,m'\sin^2\omega}{(1 + m\cos\omega)(1 + m'\cos\omega)} + 1 = 0$$

або

$$1 + mm' + (m + m')\cos\omega = 0$$

Рівнання прямої, що відрізає відтинки a і b на осях і в скіснокутній системі координат, є

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

але нормальне рівнання прямої буде:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0,$$

де

$\alpha + \beta\omega$ (α і β є кути перпендикуляра з OX і OY).

Однак не має потреби докладно зупинятися на виводі формул у скіснокутніх координатах. Досить відзначити два факти. Поперше їх зручніше застосовується до деяких випадків, бо, маючи величину кута поміж осями, ми можемо дві лінії фігури вважати за координатні осі.

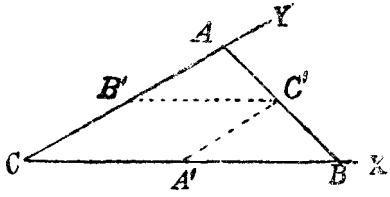

Рис. 28.

Як ілюстрацію до цього, розгляньмо задачу: *довести, що медіяни трикутника перетинаються в одній точці.*

Хай боки трикутника ABC дорівнюють $AC = b$, $CB = a$, $AB = c$. Вважатимемо боки AC і CB за осі y-ів і x-ів. Середини боків: B', C' і A мають координати

$$\left(0, \frac{b}{2}\right), \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

Рівнання медіяни $A'A$: $\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,

„ „ $B'B$: $\frac{x}{a} + \frac{2y}{b} = 1$

„ „ $C'C$: $\frac{2x}{a} = \frac{2y}{b}$, або $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

Віднімаючи із рівнання $A'A$ рівнання $B'B$ почленно, матимемо:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

тобто рівнання $C'C$, що і доводить теорема.

Подруге, надзвичайно важливо вміти завжди від системи осей скіснокутніх переходити до іншої також скіснокутньої чи прямокутньої, або й навпаки; це й розглянемо:

1. Якщо осі мають той самий напрям, а зміняється лише початок координат, то формули перетворення ті самі, що й за прямокутньої системи:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b$$

(a, b є координати нового початку).

2. Якщо дана система скіснокутніх координат з кутом ω поміж осями, то, щоб перейти від прямокутньої системи, досить повернути вісь y-ів на кут $\frac{\pi}{2} - \omega$:

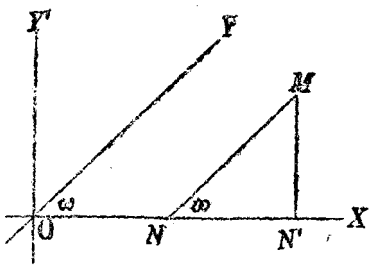

Рис. 29.

$$ON' = x' = x + y\cos\omega;$$
$$MN' = y' = y\sin\omega.$$

Звідси й навпаки

$$y = y'\operatorname{cosec}\omega,$$
$$x = x' - y'\operatorname{cotg}\omega.$$

3. Хай від скіснокутньої системи координат XOY з кутом ω переходимо до нової $X'OY'$, так що $\angle XOX' = \alpha$, $XOY' = \beta$.

Проводимо

$$MN \parallel OY \text{ і } MN' \parallel OY'$$

Встановимо в точці O перпендикуляр до лінії OY і спустимо на нього перпендикуляри із M (або N) і з N'

$$OQ = ON\cos XOQ = x\sin\omega;$$
$$OQ' = x'\cos X'OQ = x'\sin(\omega - \alpha)$$

бо

$$X'OQ = \frac{\pi}{2} - \omega + \alpha.$$

$$QQ' = SN' = MN' \sin(\beta - \omega) = -y' \sin(\omega - \beta),$$

отже

$$x \sin \omega = x' \sin(\omega - \alpha) + y' \sin(\omega - \beta).$$

Так само, провівши через O перпендикуляр до OX і спустивши на нього перпендикуляри з точок M і N, матимемо:

$$OP = MN \cos(OP, NM) = MN \cos(OP, OY) = y \sin \omega$$
$$OR = ON' \cos(OP, OX') = x' \sin \alpha,$$
$$PR = MN' \cos(OP, MN') = MN' \cos(OP, OY') = y \sin \beta.$$

Отже

$$y \sin \omega = x' \sin \alpha + y' \sin \beta.$$

Із цих загальних формул можна вивести як часткові (n° 2), як і ті, що ми маємо, переходячи від прямокутніх до скіснокутніх, або, навпаки, від скіснокутніх до прямокутніх, або — наостанку — від прямокутніх до прямокутніх.

4. Вихідні осі прямокутні. Тоді $\omega = \frac{\pi}{2}$, формули матимуть вигляд:

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \beta,$$
$$y = x' \sin \alpha + y' \sin \beta.$$

5. Нові осі прямокутні:

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2},$$

$$\omega - \beta = \omega - \alpha - \frac{\pi}{2},$$

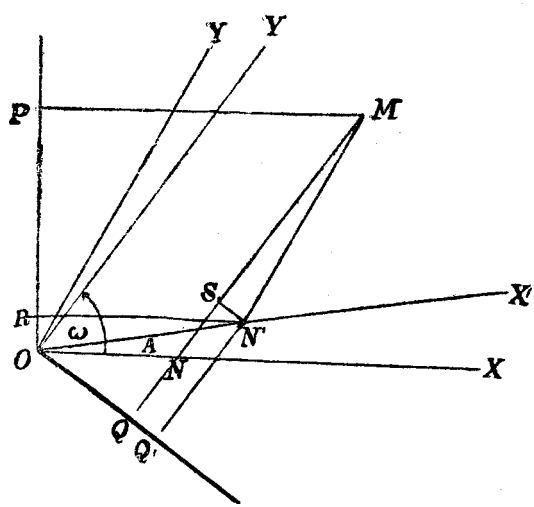

Рис. 30.

$$x \sin \omega = x' \sin(\omega - \alpha) - y' \cos(\omega - \alpha),$$
$$y \sin \omega = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

6. Якщо наостанку і старі і нові осі прямокутні, то ми матимемо:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \text{ як і раніш.}$$

§ 9. Полярні координати

Положення точки на площині можна ще визначити: 1) її віддаллю від якоїсь початкової точки і 2) кутом тої прямої, що злучає дану точку з початком, з якимсь визначеним напрямом, утвореним прямою, проведеною через початкову точку.

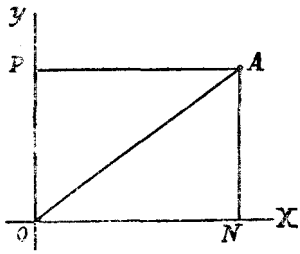

Рис. 31.

Початкова точка зветься *полюс*, пряма—*полярна вісь*, а сама система координат — *полярна система*; віддаль точки від полюса зветься *полярний радіюс*, а кут — *полярний кут*; позначмо їх r θ.

Хай полюс — точка O — є початок прямокутньої системи координат, а полярна вісь є вісь x-ів, тоді в трикутнику AON (рис. 31)

$$\angle AON = \theta.\ AO = r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ і } \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

Навпаки,

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta.$$

Кут θ вважаємо за висхідний у напрямі, протилежному рухові годинникової стрілки, радіюси r вважаємо за додатні. Вводячи ці значіння в загальне рівнання прямої, дістанемо:

$$r(A\cos\theta + B\sin\theta) + C = 0$$

Звідси
$$r = -\frac{C}{A\cos\theta + B\sin\theta}$$

Рівнання прямої в полярних координатах. Якщо рівнання прямої взяти в нормальному вигляді, то матимемо:

$$r(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha(\sin\theta) = p$$

Звідси
$$r = \frac{p}{(\cos\theta - \alpha)}.$$

РОЗДІЛ V

Коло

§ 10. Рівнання кола

Ми вже бачили, що в прямокутніх координатах рівнання кола з радіюсом r і з центром у точці (a, b) як кривої, усі точки якої лежать на віддалі r від центра (a, b) буде

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$$

або, розімкнувши дужки:

$$x^2+y^2-2ax-2by+$$
$$+a^2+b^2-r^2=0.$$

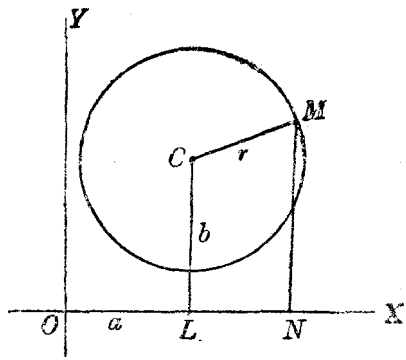

Рис. 32.

Рівнання кола в скіснокутніх координатах буде:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+$$
$$+2(x-a)(y-b)\cos\omega-r^2=0.$$

Порівнюючи із загальним рівнанням другого степеня щодо x і y:

$$Ax+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

помічаємо, що останнє визначатиме коло за умови, що

$$A=C, \quad B=0$$

в разі прямокутніх осей і

$$A=C, \quad B=A\cos\omega$$

в разі скіснокутніх. Між п'ятьма відношеннями коефіцієнтів є, таким чином, два співвідношення, отже, довільних

коефіцієнтів залишається три: загальне рівнання кола сходить на вигляд:

$$x^2+y^2+2xy\cos\omega+2Dx+2Ey+F=0$$

в скіснокутніх, а в прямокутніх координатах воно буде:

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Зв'язок між коефіцієнтами D, E, F з геометричними елементами, що визначають коло, координатами центра та радіюсом, — такий:

$$D=-a, \quad E=-b, \quad F=a^2+b^2-r^2$$

Отже

$$r^2=D^2+E^2-F$$

Звідси, якщо

$$F-D^2-E^2>0,$$

для r^2 дістанемо від'ємне значіння, і рівнання тоді дійсного кола не визначає, якщо

$$F-D^2-E^2=0,$$

то рівнання сходить на

$$(x+D)^2+(y+E)^2=0,$$

тобто воно справджується лише одною дійсною точкою $(-D, -E)$.

А що при цьому

$$r^2=D^2+E^2-F,$$

то можна сказати, що це є коло радіюса $=0$.

Наостанку, дійсне коло матимемо при

$$F-D^2-E^2<0.$$

Розгляньмо деякі окремі випадки. Якщо $a=r$, $b=0$, рівнання матиме вигляд:

$$x^2+y^2=2rx.$$

Якщо $a=0$, $b=r$, то в цьому разі коло проходить через початок, а центр лежить на одній з осей. Якщо початок

координат припадає на центр, то рівнання кола матиме вигляд:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

Зазначмо, що це рівнання не зміняється, коли повернути осі на кут α. Справді, вносячи в рівнання кола

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \qquad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

матимемо;

$$(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)^2 + (x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)^2 - r^2 \equiv x'^2 (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + 2y'x'(-\cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) + y'^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - r^2 \equiv x'^2 + y'^2 - r^2.$$

§ 11. Геометричне значіння лівої частини рівнання кола

Якщо візьмемо точку M поза колом, то її віддаль від центра $M'C > r$, і тоді $M'C^2 > r^2$ (див. рис. 33),

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2, \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 > 0.$$

на самому колі

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0,$$

а в середині кола

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 < 0.$$

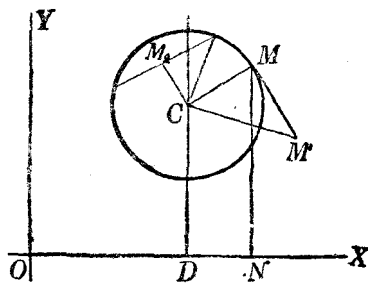

Рис. 33.

Отже, коло поділяється площиною на дві частини, внутрішню, де лежить центр і де для координат довільної точки ліва частина рівнання кола стає від'ємною, і зовнішню, де для координат довільної точки ліва частина рівнання кола стає додатною.

Цю величину зветься степенем (puissance, Potenz) точки відносно кола.

Легко помітити її геометричне значіння; для точки поза колом це є квадрат катета прямокутнього трикутника, що за гіпотенузу має $M'C$ (рис. 33) і один катет $= r$. Такий прямокутній трикутник утворюється дотичною до кола, проведеною із точки M, тобто $\triangle CM'M$, отже, степень

точки, що лежить поза колом, дорівнює квадратові дотичної, проведеної до кола з цієї точки. А якщо точка M лежить у середині кола, то навпаки

$$r^2 - [(x-a)^2 + (y-b)^2]$$

можна розглядати, як катет прямокутнього трикутника, що за другий катет має M_2C, а за гіпотенузу r. Такий трикутник дістанемо, встановивши в M_2 (рис. 33) перпендикуляр до M_2C аж до перетину з колом, тому степень точки, що лежить у середині кола, дорівнює взятому з мінусом квадратові півхорди, перпендикулярної до прямої, що злучає точку з центром.

§ 12. Діяметр. Дотична даного напряму

Задача. Знайти точки перетину прямої

$$y = mx + k$$

з колом

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

Ці два рівнання треба розв'язати вкупі; виключивши y, маємо:

$$x^2 + (mx + k)^2 - r^2 = 0$$

або

$$x^2(1 + m^2) + 2mkx + k^2 - r^2 = 0.$$

Звідси

$$x = -\frac{mk}{1+m^2} \pm \frac{1}{1+m^2}\sqrt{m^2k^2 - (1+m^2)(k^2 - r^2)},$$

тобто

$$x = -\frac{mk}{1+m^2} \pm \frac{1}{1+m^2}\sqrt{-k^2 + r^2(1+m^2)}.$$

Отже, дійсні значіння для абсциси точки перетину одержуємо, коли

$$k^2 \leqslant r^2(1+m^2).$$

Якщо $k^2 < r^2(1+m^2)$, то маємо два дійсні значіння для абсцис точки перетину, тобто дві такі точки.

За властивостями коренів квадратового рівняння сума коренів

$$x_1 + x_2 = -\frac{2mk}{1+m^2}.$$

Звідси координати середини хорди:

$$x = -\frac{mk}{1+m^2}, \quad y = -\frac{m^2k}{1+m^2} + k = \frac{k}{1+m^2}$$

(за рівнанням прямої).

Узявши відношення, виключаємо k:

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{m} \quad \text{або} \quad my + x = 0.$$

Отже, геометричне місце середини паралельних хорд є пряма, що проходить через центр кола перпендикулярно до хорд, що в елементарній геометрії формулюється так: радіюс, перпендикулярний до хорди, поділяє її навпіл.

Якщо

$$k^2 = r^2(1+m^2), \quad \text{тобто} \quad k = \pm r\sqrt{1+m^2},$$

два корені рівні, то дві точки перетину прямої з колом зливаються, і січна стає дотичною. Отже, ми дістанемо рівнання дотичної даного напряму m:

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}.$$

Паралельно даному напрямові можна провести до кола дві дотичні.

§ 13. Дотична до кола в даній його точці

Щоб дістати рівнання дотичної до кола, можна скористатись її властивістю, що вона утворює прямий кут з радіюсом, проведеним у точку дотику. Це дає два способи дістати рівнання дотичної.

1. Як пряма, проведена до радіюсу,

$$Y = \frac{y}{x}X,$$

що проходить із центра (0, 0) до точки дотику (x, y), яка лежить на колі $x^2+y^2-r^2=0$, вона має рівнання:

$$Y-y=-\frac{x}{y}(X-x)$$

або

$$xX+yY-(y^2+x^2)=0,$$

що за допомогою рівнання кола сходить на вигляд:

$$Xx+Yy-r^2=0.$$

2. Хай M' є будь-яка точка дотичної; з прямокутнього трикутника $M'CM$ [(рис. 33) (вважати центр кола в початку координат для даного випадку:)]

$$\overline{M'C}^2=\overline{MM'}^2+\overline{MC}^2,$$

або в координатних символах:

$$X^2+Y^2=(X-x)^2+(Y-y)^2+r^2;$$

розмикаючи дужки і віднімаючи від обох частин рівности по X^2+Y^2, матимемо:

$$0=-2(Xx+Yy)+x^2+y^2+r^2$$

або за допомогою рівнання кола:

$$0=-2(Xx+Yy)+2r^2,$$

а, поділивши на -2, остаточно маємо:

$$0=Xx+Yy-r^2$$

§ 14. Загальне означення дотичної

Виводячи рівнання дотичної до кола, ми спирались на характеристичну для неї властивість, тому цей спосіб (за виключенням того, яким ми знайшли дотичну, паралельну до даної прямої) годиться лише для кола. Дамо тут—і це треба буде для подальшого — загальне означення дотичної. Хай маємо криву лінію і на цій дві точки M (x, y) і M' (x', y). Для зручности позначимо $x'-x=\Delta x$, $y'-y=\Delta y$, так що $x'=x+\Delta x$, $y'=y+\Delta y$. Рівнання січної MM'

$$Y-y=\frac{y'-y}{x'-x}(X-x)$$

або, підставивши наші позначення:

$$Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x)$$

Коли точка M', рухаючись по кривій, наближається до M', січна також переміщується, обертаючись навколо точки M. Коли точка M', пройшовши через усі можливі проміжні положення, зіллється з точкою M, січна може також зайняти якесь **гранічне** положення. Якщо таке граничне положення є, то ми говоримо, що це є дотична до кривої в точці M.

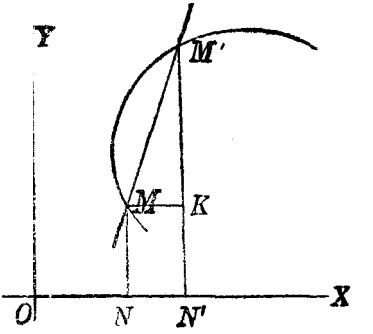

Рис. 34.

Аналітично це означає, що ми шукаємо

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{limite}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Якщо ця границя, limite є, то її звуть **похідною** від y по x (незалежному змінному).

Якщо дано криву, то це значить дано закон, за яким можна для кожного значіння x знайти відповідне значіння y, інакше: відома залежність, що її символічно визначено:

$$y = f(x).$$

Двом значінням x та $x + \Delta x$ відповідають два значіння y:

$$f(x) \quad \text{і} \quad f(x + \Delta x).$$

Похідна є границя (ліміт) відношення приросту функції до приросту незалежної змінної:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

У диференціяльному численні вказується умови, коли може бути похідна, і правила знаходити її, коли вона існує. Ми тут для кожного окремого випадку перетворюватимемо відношення $\frac{y' - y}{x' - x}$ так, щоб можна було дійти до границі $x' = x$, $y' = y$.

Застосовання до кола. Для кола для обох точок M' і M маємо:

$$x'^2+y'^2=r^2, \quad x^2+y^2=r^2,$$

і таким чином

$$x'^2-x^2=-y'^2+y^2$$

тобто

$$(x'-x)(x'+x)=-(y'-y)(y'+y),$$

$$\frac{y'-y}{x'-x}=-\frac{x'+x}{y'+y}.$$

Звідси

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2x+\Delta x}{2y+\Delta y}.$$

Переходячи до границі, ми маємо $\Delta x=0$ і $\Delta y=0$. Отже,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

Остаточно рівнання дотичної до кола матиме вигляд:

$$Y-y=-\frac{x}{y}(X-x)$$

що перетворюється до попереднього вигляду.

Примітка. Ми вивели рівнання дотичної до кола з центром у початку координат; перетворенням координат можна поширити це на випадок кола з центром у точці (a, b). Справді, припустивши

$$x'=x-a, \quad y'=y-b,$$

зведемо рівнання

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$$

до вигляду

$$x'^2+y'^2-r^2=0;$$

дотична до цього кола, за доведеним, визначиться рівнанням:

$$X'x'+Y'y'-r^2=0$$

Переходячи до попереднього (зворотний перехід), матимемо:

$$(X-a)(x-a)+(Y-b)(y-b)-r^2=0$$

§ 15

Задача. Провести дотичну до кола з точки, що лежить не на ньому. Точніш було б сказати, що треба до кола провести дотичну **із зовнішньої** точки, бо геометрично очевидно, що через точку, що лежить у колі, не можна провести пряму, що матиме з колом лише одну спільну точку. Проте, цю властивість, що її доводять в елементарній геометрії, ми тут дістанемо, як результат підрахунку.

Міркуємо так. Якщо дано точку (x_1, y_1), що не лежить на колі, то рівнання дотичної, що проходить через цю точку, є

$$Xx + Yy - r^2 = 0,$$

і воно справджується, якщо підставити $X = x_1$, $Y = y_1$

$$xx_1 + yy_1 - r^2 = 0 \qquad (a)$$

Крім того, точка дотику (x, y) лежить на колі, отже

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \qquad (b)$$

Розв'язуючи вкупі цю систему рівнань, матимемо дві системи значінь (x, y) координат точки дотику.

Залишається вирахувати їх і з'ясувати, за яких умов вони дійсні і за яких уявні. Одна з двох координат x_1. y_1 відмінна від 0 (якщо ми взяли точку за центр кола початок координат). Можна припустити, що $y_1 \neq 0$. Помноживши рівнання кола на y_1^2 і замінивши yy_1 на $r^2 - xx_1$, матимемо:

$$y^2_1 (x^2 - r^2) + (r^2 - xx_1)^2 = 0$$

або

$$x^2 (x_1^2 - r^2) - 2r^2 x_1 x + r^2 (r^2 - y_1^2) = 0.$$

Звідси

$$x = \frac{r^2 x_1 \pm \sqrt{r^4 x_1^2 + r^2 (y_1^2 - r^2)(x_1^2 + y_1^2)}}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Вираз під радикалом можна спростити. Він

$$= r^2 [r^2 x_1^2 + y_1^2 (x_1^2 + y_1^2) - r^2 (x_1^2 + y_1^2)] = r^2 y_1^2 (x_1^2 + y_1^2 - r^2).$$

Отже

$$x = \frac{r^2 x_1 \pm r y_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}{x_1^2 + y_1^2}$$

Але ми бачили, що для точки (x_1, y_1) у середині кола

$$x_1^2 + y_1^2 - r^2 < 0$$

на колі 0 і поза колом > 0. Отож, якщо точка (x_1, y_1) в середині кола, то обидва значіння x, а, значить, і y, будуть уявні, — дотичну до кола і з неї провести не можна. Якщо точка (x_1, y_1) лежить на колі, корені x,— рівні, дві точки дотику зливаються в одну точку (x_1, y_1), і, якщо точка (x_1, y_1) лежить поза колом, із неї можна до кола провести дві дотичні.

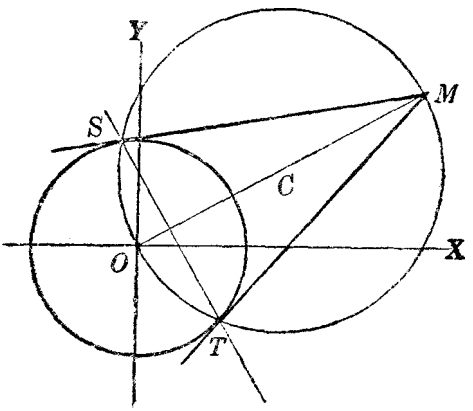

Рис. 35.

Віднімемо рівняння (a), (b) одне з одного; одержимо рівняння:

$$xx_1 + y^2 - yy_1 = 0,$$

яке, очевидно, справджують ті значіння x і y, що справджують і обидва перші: це є рівняння кола

$$\left(x - \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{4},$$

збудованого на прямій, що злучає точку (x_1, y_1) з центром кола, як на діяметрі. Ми одержали, таким чином, відоме з елементарної геометрії побудовання дотичної до кола із зовнішньої точки (рис. 35). Якщо точка (x_1, y_1) лежить у середині кола, то це коло лежить цілком у другому колі і його не перетинає.

§ 16. Поляра

Розв'язати сукупно рівняння (a), (b) це—з геометричного боку—однаково, що знайти точки перетину ліній, виражених кожним з двох даних рівнань. Друге—є рівняння кола, а перше

$$xx_1 + yy_1 - r^2 = 0$$

є рівняння першого степеня і зовнішнім виглядом на-

гадує рівнання дотичної. Ця пряма перетинає коло в точках дотику шуканих дотичних, і тому її можна назвати хордою притику. Але вона існує і тоді, коли точка лежить у середині кола і дійсних точок дотику немає; справді, тоді перпендикуляр на неї з початку (центра кола) $= \frac{r^2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} > r$

пряма цілком лежить поза колом. Наостанку, якщо (x_1, y_1) лежить на колі, то вона зливається з дотичною. Цю пряму звуть полярою точки (x_1, y_1) відносно кола

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Кожній точці площини належить цілком визначена пряма, як поляра (винятком буде лише початок координата (0, 0), бо йому відповідає рівнання:

$$0.x + 0.y - r^2 = 0,$$

що є символ прямої, що відрізає безконечно великі відтинки на осях безконечно віддаленої прямої).

Навпаки, для кожної прямої

$$Ax + By + C = 0$$

можна знайти точку, для якої вона буде полярою відносно обраного кола. Ця точка зветься полюс прямої. Її координати дістанемо, утотожнюючи рівнання прямої з рівнанням поляри якоїсь точки ξ, η:

$$\frac{\xi}{A} = \frac{\eta}{B} = -\frac{r^2}{C}$$

тобто

$$\xi = -r^2 \frac{A}{C}, \quad \eta = -r^2 \frac{B}{C}$$

У попередньому ми дійшли до поняття поляри аналітично, розв'язуючи задачу проведення дотичних із зовнішньої точки. Але ми можемо дати й суто-геометричне означення.

Хай дано точку M (x_1, y_1) (рис. 36). Якщо проведемо через неї січну, що зустріне коло в точках A, B, а поляру в точці N, то N є гармонійно спряжена M відносно A, B, тобто:

$$\frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN} = -1$$

Таким чином, поляра точки M є геометричне місце точок, гармонійно спряжених із точкою M на всіх проведених через M січних відносно точок їх зустрічі з колом.

Щоб довести, візьмім рівнання кола в загальному вигляді

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0.$$

Досить показати це відносно довільної точки січної, напр., осі x-ів, обравши на ній точку $M\equiv(x_1,\ 0)$. Поляра M:

$$(x-a)(x_1-a)-$$
$$-b(y-b)-r^2=0$$

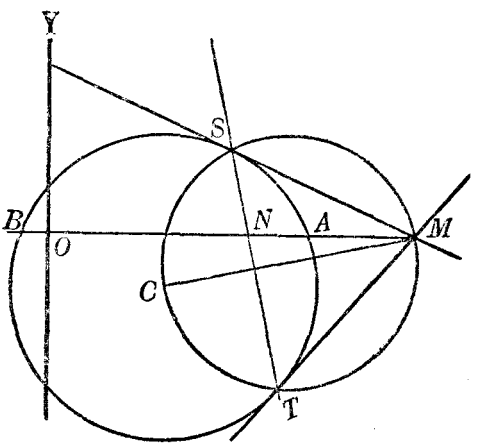

Рис. 36.

зустрічає вісь x-ів у точці N з абсцисою

$$x'=a+\frac{r^2-b^2}{x_1-a}$$

а коло в точках A, B, що мають абсциси

$$x=a\pm\sqrt{r^2-b^2}.$$

Звідси

$$\frac{AM}{BM}=\frac{x_1-a-\sqrt{r^2-b^2}}{x_1-a+\sqrt{r^2-b^2}},$$

$$\frac{AN}{BN}=\frac{\dfrac{r^2-b^2}{x_1-a}-\sqrt{r^2-b^2}}{\dfrac{r^2-b^2}{x_1-a}+\sqrt{r^2-b^2}}=\frac{-\dfrac{\sqrt{r^2-b^2}}{x_1-a}(x_1-a-\sqrt{r^2-b^2})}{\dfrac{\sqrt{r^2-b^2}}{x_1-a}(x_1-a+\sqrt{r^2-b^2}}$$

Отже

$$\frac{AM}{BM}=-\frac{AN}{BN},$$

це й треба було довести.

Влучно суто геометрично доводить це De la Hire (Sections Coniques p. 1685, кн. 1, 2).

$\triangle CA_1B_1=\triangle CBB_1$ (рис. 37).

Звідси

$$A_1B_1 = B_1B, \text{ також і } A_2B_2 = BB_2.$$

Тому:

$$\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1B}{BB_2} = \frac{AA_1}{AA_2}$$

або

$$(PA_1\,AA_2) = \frac{PA_1}{PA_2} : \frac{AA_1}{AA_2} = -1.$$

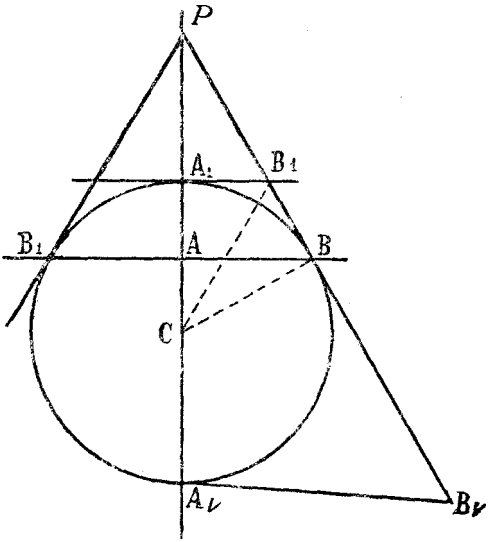

Рис. 37.

§ 17. Властивість поляр

I. Якщо точка (x_2, y_2) лежить на полярі точки (x_1, y_1), то і точка (x_1, y_1) лежить на полярі точки (x_2, y_2).

Умовою, щоб точка (x_2, y_2) лежала на полярі

$$Xx_1 + Yy_1 - r_2 = 0$$

буде

$$x_2x_1 + y_2y_1 - r^2 = 0;$$

але це є в той же час і умова, щоб точка (x_1, y_1) лежала на полярі

$$Xx_2 + Yy_2 - r^2 = 0$$

точки (x_2, y_2).

II. Хай дано дві точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2). Їхні поляри

$$Xx_1 + Yy_1 - r^2 = 0,$$
$$Xx_2 + Yy_2 - r^2 = 0;$$

точка P перетину цих поляр має координати

$$X = \frac{r^2(y_2 - y_1)}{x_1y_2 - y_1x_2}$$

$$Y = \frac{r^2(x_1 - x_2)}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

Рівнання прямої, що злучає M_1 і M_2, є

$$\frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{X - x_1}{x_2 - x_1}$$

або

$$X(y_2 - y_1) - Y(x_2 - x_1) + y_1 x_2 - x_1 y_2 = 0;$$

за попереднім координати полюса цієї прямої є

$$X = -r^2 \frac{y_2 - y_1}{y_1 x_2 - x_1 y_2}, \quad Y = -r^2 \frac{x - x_2}{y_1 x_2 - x_1 y_2},$$

тобто полюс є точка P. Отже, перетин поляр двох точок M_1 і M_2 є полюс прямої, що проходить через ці точки.

III. Візьмім на прямій $M_1 M_2$ якусь точку M'; її координати є (§ 3):

$$x = \frac{m x_2 - n x_1}{m - n}$$

$$y = \frac{m y_2 - n y_1}{m - n}.$$

Рівнання поляри цієї точки буде:

$$X \frac{m x_2 - n x_1}{m - n} + Y \frac{m y_2 - n y_1}{m - n} - r^2 = 0,$$

або

$$m(X x_2 + Y y_2 - r^2) = n(X x_1 + Y y_1 - r^2) = 0;$$

таким чином, поляра точки M' проходить через P або інакше:

Поляри всіх точок прямої проходять через полюс цієї прямої.

Це можна зформулювати й інакше:

Коли точка переміщається по прямій, тоді її поляра обертається навколо полюса цієї прямої.

IV. Взаємно-полярні трикутники. Можна збудувати для даної фігури, напр., трикутника інший, такий, що його боки будуть полярами вершин першого, а його вершини—полюсами боків (першого $\triangle$-ка).

Справді, якщо візьмемо три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) і напишемо рівнання їхніх поляр:

$$Xx_1 + Yy_1 - r^2 = 0,$$
$$Xx_2 + Yy_2 - r^2 = 0,$$
$$Xx_3 + Yy_3 - r^2 = 0,$$

то перетини цих прямих, тобто вершини другого трикутника будуть полюсами прямих, що злучають дані точки, або — боки першого трикутника полярами вершин другого. Взаємне відношення двох трикутників цілком симетричне. А взагалі — трикутник і йому взаємний відмінні.

V. Автополярні трикутники. Однак можна збудувати — і навіть безліч — таких трикутників, що кожна їхня вершина буде полюсом протилежного боку, і тому бік буде полярою протилежної вершини.

Для цього можна взяти довільну точку (x_1, y_1) і на її полярі

$$Xx_1 + Yy_1 - r^2 = 0$$

теж довільно — іншу точку (x_2, y_2) так, що

$$x_1x_2 + y_2y_1 - r^2 = 0$$

За властивістю і поляра точки (x_2, y_2) пройде через точку (x_1y_1). Вона перетне поляру точки (x_3, y_3) в якійсь точці (x_3, y_3), яка за II буде полюсом прямої, що злучає точки (x_1y_1) і (x_2y_2).

Можна було б виходити і з довільної прямої

$$Ax + By + C = 0 \qquad (a)$$

і через її полюс (ξ, η) провести довільну пряму

$$A'x + B'y + C' = 0 \qquad (a')$$

таку, що її полюс (ξ_1, η_1) лежить на прямій (a); пряма, що злучає (ξ, η) з (ξ_1, η_1), має за полюс точку перетину (a) і (a').

VI. Метода взаємних поляр. Побудовання взаємних полярних трикутників, а також подвійний спосіб діставати автополярні трикутники, — це є нескладні приклади методи перетворення фігур, що базуються на теорії полюсів і поляр; їх звуть методою взаємних поляр.

Кожну фігуру, що складається з прямих і точок, можна перетворити на іншу фігуру, таку, що всякій її точці відповідатиме пряма — поляра точки, а прямій відповідатиме точка — її полюс відносно основного кола.

Надзвичайно цікаво те, що таким чином можна перетворювати не лише окремі точки й прямі, а й суцільні лінії. Справді, уявім собі якусь криву лінію. Двом безконечно близьким її точкам відповідають дві безконечно близькі прямі, як — поляри, і їхня точка перетину буде полюсом тої прямої, що злучає дві взяті точки. Ця пряма буде дотичною до першої кривої, і коли ми поступінно переходитимемо від одної точки кривої до сусідньої і т. д. поляри, поступінно зміняючись, визначатимуть у послідовному перетині також безперервну послідовність точок, що утворюють іншу криву, і цю останню можна уявити собі, як сукупність полюсів прямих — дотичних до першої кривої.

Для ілюстрації знайдемо взаємну поляру кола

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$$

відносно іншого кола

$$x^2+y^2-r^2=0$$

Дотична до першого кола

$$(X-a)(x-a)+(Y-b)(y-b)-R^2=0,$$

або

$$(x-a)X+(y-b)Y-[a(x-a)+b(y-b)+R^2]=0$$

Координати її полюса визначаться за попереднім

$$\frac{\xi}{x-a}=\frac{\eta}{y-b}=\frac{-r^2}{[a(x-a)+b(y-b)+R^2]}$$

тобто

$$\xi=\frac{-r^2(x-a)}{a(x-a)+b(y-b)+R^2},\quad \eta=\frac{-r^2(y-b)}{a(x-a)+b(y-b)+R^2}.$$

Щоб дістати співвідношення, що пов'язує ξ і η, коли x і y приймають усі значіння, що справджують рівнання першого кола, ми помічаємо, що, піднісши до квадрату й додаючи, матимемо:

$$\xi^2+\eta^2=\frac{r^4[(x-a)^2+(y-b^2)]}{[a(x-a)+b(y-b)+R^2]^2}=$$
$$=\frac{r^4R^2}{[a(x-a)+b(y-b)+R^2]^2},$$

а, з другого боку, помножаючи ξ, η відповідно на a і b й додаючи, матимемо:

$$a\xi+b\eta=\frac{r^2[a(x-a)+b(y-b)]}{[a(x-a)+b(y-b)+R^2]},$$

і тому

$$a\xi+b\eta-r^2=\frac{-r^2R^2}{[a(x-a)+b(y-b)+R^2]}.$$

Порівнюючи два попередні вирази, дістанемо:

$$R^2(\xi^2+\eta^2)=(a\xi+b\eta-r^2)^2.$$

Це є рівнання другого степеня відносно ξ, η. Воно визначає коло лише за

$$a=b=0,$$

а для інших значінь a і b воно визначає якусь криву другого порядку—еліпсу, гіперболю чи параболю, які ми вивчатимемо в подальшому.

§ 18. Система двох кіл

Точки перетину. Радикальна вісь. Хай дано два кола:

$K\equiv x^2+y^2-2ax-2by+C=0$, де $C=a^2+b^2-r^2$,

$K'\equiv x^2+y^2-2a'x-2b'y+C'=0.$

Точки, спільні цим двом рівнанням, справджують і рівнання

$$K-K'\equiv 2(a'-a)x+2(b'-b)y+C-C'=0.$$

Це рівнання—першого степеня—визначає пряму лінію, яка існуватиме і в тому разі, коли два кола зовсім не перетинаються. Точки цієї прямої мають ту властивість, що

для них результати підставляння в ліву частину обох рівнань рівні один одному, тобто рівні степені відносно обох кіл. Це лінії рівних степенів (за термінологією Я. Штайнера), або радикальна вісь двох кіл. Якщо кола перетинаються, то вона проходить через їхні точки перетину. Її напрям

$$\left(m = -\frac{a' - a}{b' - b}\right)$$

той самий, що й перпендикуляра до лінії центрів

$$\frac{x - a}{a' - a} = \frac{y - b}{b' - b}$$

(на рис. 38 кола II і IV). Якщо кола дотикаються, то ця лінія, проходячи через їхню спільну точку, перпендикулярно до радіюсів, проведених у точку дотику (радіюси в цьому випадку припадають на лінію центрів), буде спільною дотичною обох кіл (на рис. кола II і III). Якщо кола не перетинаються, то їхня радикальна вісь усе ж залишається дійсною прямою, перпендикулярною до лінії центрів (на рис. кола I і III).

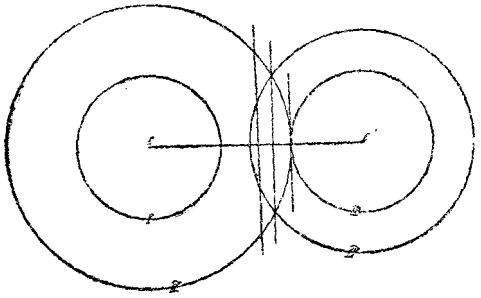

Рис. 38.

Приклад I. Умова дотику двох кіл

$$(a' - a)^2 + (b' - b)^2 = (r' \pm r)^2.$$

Верхній знак відповідає зовнішньому дотикові, а нижній внутрішньому. Ми приходимо до тієї самої умови, якщо виразимо, що точка дотику лежить на лінії центрів, і тому віддаль поміж центрами дорівнює сумі чи ріжниці радіюсів.

Приклад II. Якщо дано ще й третє коло, то ми можемо будувати радикальну вісь 1-го і 2-го, 1-го і 3-го, 2-го і 3-го

Точка перетину перших двох осей така, що степені її відносно всіх трьох кіл будуть рівні. Отже, вона належить і третій радикальній осі. Можна перевірити це легко за допомогою підрахунку. Зветься ця точка радикальним центром 3-х кіл (див. рис. 39).

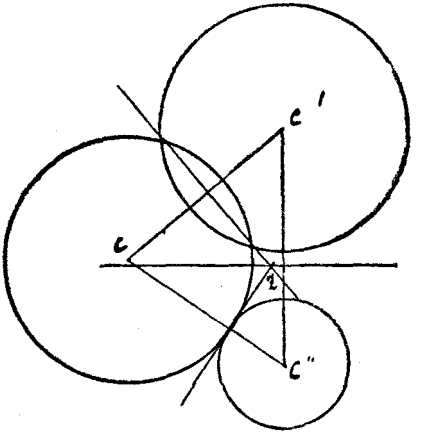

Рис. 39.

Приклад III. Два рівнання другого степеня відносно x і y мають взагалі чотири системи спільних розв'язок. Для двох кіл ми знайшли, однак, лише дві точки перетину; щоб знайти інші, помічаємо, що, коли ми звели рівнання до однорідности відносно координат, увівши замість x і y їхнє відношення до одиниці довжини z, а саме: $\frac{x}{z}$ і $\frac{y}{z}$, то їхні рівнання матимуть вигляд (після множення на z^2):

$$x^2+y^2-z(2ax+2by+cz)=0,$$
$$x^2+y^2-z(2a'x+2b'y+c'z)=0,$$

рівнання, що привело нас до радикальної осі, власне є

$$z[2(a'-a)x+2(b'-b)y+(c'-c)z]=0$$

Радикальна вісь визначається другим чинником, щождо першого, то він теж призводить до спільних двом колам точок, бо обидва рівнання зводяться при цьому до

$$x^2+y^2=0,$$

але $z=0$ (тобто $1=0$) визначає безконечно віддалену пряму, яка з колом — точкою

$$x^2+y^2=0$$

перетинається в двох уявних точках. Ці останні можна одержати ще й так: коло — точку

$$x^2+y^2=0$$

можна розглядати, як сукупність двох уявних прямих

$$(x+iy)(x-iy)=0,$$

що перетинаються в дійсній точці (0, 0) і спільні для всіх кіл точки — це точки перетину цих прямих з безконечно віддаленою прямою. Ці точки звуться **циклічними точками на безконечності**, а прямі — **ізотропними прямими**.

Курйозна та властивість ізотропної прямої, що вона **сама собі перпендикулярна**. Справді, її кутовий коефіцієнт $m=\pm\sqrt{-1}$ є корінь рівнання

$$m^2+1=0.$$

Отже,

$$(\pm\sqrt{-1})^2=-1,$$

тобто ізотропна пряма вдовольняє умову перпендикулярности самої до себе.

Якщо два кола концентричні, тобто

$$a'=a \quad \text{і} \quad b'=b, \quad \text{а} \quad C'\neq C$$

то радикальна вісь має рівнання

$$C'-C=0$$

тобто обертається на безконечно віддалену пряму, і всі чотири точки перетину зливаються з циклічними точками на безконечності, і кожна з них буде злиттям двох точок перетину, тобто точкою стичности. Таким чином, усі концентричні кола мають подвійну стичність у циклічних точках, а безконечно віддалена пряма є їхня спільна хорда.

В'язка кіл. Поняття, зв'язані з поняттям про перетин двох кіл, припускають висвітлення з іншого погляду. Якщо з двох рівнань:

$$K\equiv(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$$
$$K'\equiv(x-a')^2+(y-b')^2-r^2=0$$

складемо третє

$$\lambda K + \mu K' = 0,$$

то його можна звести до вигляду:

$$(\lambda + \mu)(x^2 + y^2) - 2(\lambda a + \mu a')x - 2(\lambda b + \mu b')y - (\lambda r^2 + \mu r'^2) = 0.$$

Отже воно визначає, говорячи взагалі, коло з координатами центра

$$\frac{\lambda a + \mu a'}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda b + \mu b'}{\lambda + \mu}$$

Таким чином, ∞^1 кіл, що ми їх дістаємо при всіляких значіннях відношення $\frac{\lambda}{\mu}$, мають центри на лінії центрів даних кіл.

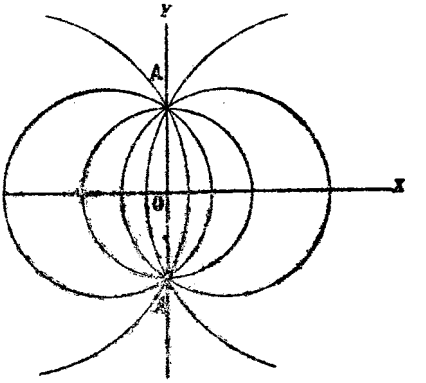

Рис. 40.

Вони утворюють в'язку кіл. Серед кіл в'язки є одно, що відповідає значінню $\frac{\lambda}{\mu} = -1$ $(\lambda + \mu = 0)$, і воно зводиться до прямої—границі кола, що його центр відійшов на безконечність; ця пряма і є радикальна вісь. Залежно від того, чи будуть точки перетину даних кіл (чи кіл з радикальною віссю) дійсними й різними, злитими чи уявними, розрізняємо три типи в'язок, — інтуїтивно — цілком відмінних одна від одної.

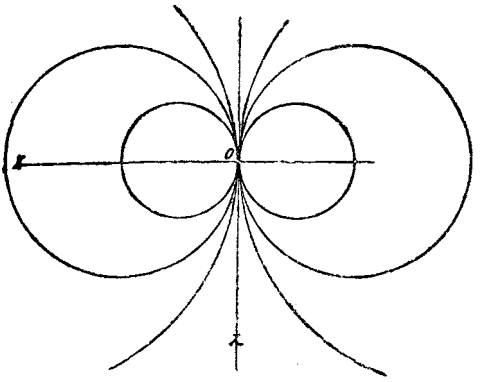

Рис. 41.

Якщо рівнання зведемо до вигляду

$$\left(x - \frac{\lambda a + \mu a'}{\lambda + \mu}\right)^2 + \left(y - \frac{\lambda b + \mu b'}{\lambda + \mu}\right)^2 =$$

$$= \frac{\lambda^2(r^2 - a^2 - b^2) - 2\lambda\mu(aa' + bb') + \mu^2(r'^2 - a'^2 - b'^2)}{(\lambda + \mu)^2}$$

то помітимо, що є два значіння відношення $\frac{\lambda}{\mu}$ — дійсних і різних, злитих чи уявних, за яких відповідні кола в'язки обертаються в точки. Ці дві точки звуться граничними точками в'язки (на рис. 42 A і A'). Умову, щоб точки були дійсні, досить важко визначити в такому вигляді. Для спрощення приймаємо радикальну вісь за вісь y-ів ($x=0$) і лінію центра за вісь x-ів. Тоді рівнання кіл

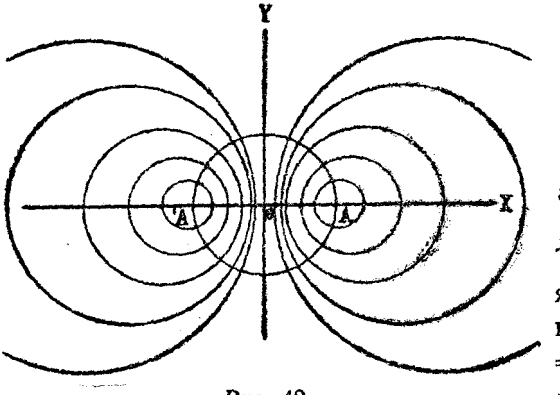

Рис. 42.

$$(x-a)^2+y^2-r^2+ \\ +2\lambda x=0$$

або

$$x^2+y^2+2kx\pm\delta^2=0,$$

якщо позначимо змінний параметр $\lambda-a=k$ і стале $a^2-r^2=\pm\delta^2$.

Для кіл з дійсними точками перетину $a^2-r^2-\delta^2$, а для кіл, що дотикаються, $a^2-r^2=\delta^2=0$; для в'язки з уявними точками перетину $a^2-r^2=+\delta^2$.

Звівши рівнання до вигляду

$$(x+k)^2+y^2\pm\delta^2-k^2=0,$$

помічаємо, що умова $-k^2\pm\delta^2=0$ дає за верхнього знака дійсне значіння для $k=\pm\delta$, а за $\delta=0$ і $k=0$ і за нижнього знака k — уявне: $k=\pm\delta i$.

Отже, граничні точки дійсні за умови $a^2-r^2<0$, тобто в тому разі, коли в'язка має уявні точки перетину, уявні,— коли в'язка має дійсні точки перетину і вони зливаються у в'язці стичних кіл з їхньою точкою стичности.

Віддаль найближчої до радикальної осі точки кола від цієї осі дорівнює:

$$k-\sqrt{k^2\pm\delta^2}=\frac{\pm\delta^2}{k+\sqrt{k^2\pm\delta^2}}$$

Із збільшенням k ця віддаль зменшується, і, коли k дорівнює $\pm\infty$, віддаль обертається в нуль: радикальна вісь являє собою граничне коло в'язки, коли центр віддаляється на безконечність.

Кут перетину двох кіл. Одна з теорем „Евклідових початків", що нині зникла з наших підручників елементарної геометрії, стверджує, що не можна через точку дотику провести пряму так, щоб вона не зустрічала кола і лежала поміж ним і дотичною; інакше кут поміж колом і дотичною в точці дотику менший за будь-яку конечну величину, і тому його треба вважати за рівний нулеві. Виходить, що за кут поміж двома колами треба вважати кут поміж дотичними до цих кіл в їхній точці перетину. До такого погляду призводить і уявлення про дотичну, як граничне положення січної, що злучає дві безконечно близькі точки кривої, і тому вона включає безконечно малу частину — „елемент" кривої, яким визначається її напрям у точці дотику.

Звідси кут двох кіл

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0,$$
$$(x-a')^2+(y-b')^2-r^2=0,$$

що їхні дотичні визначаються рівнаннями:

$$(x-a)(X-a)+(y-b)(Y-b)-r^2=0,$$
$$(x-a')(X-a')+(y-b')(Y-b')-r^2=0,$$

обчисляємо за формулою

$$\operatorname{tg} v=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha'}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'},$$

де

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{x-a}{y-b},\quad \operatorname{tg}\alpha'=-\frac{x-a'}{y-b'},$$

таким чином

$$\operatorname{tg} v=\frac{(y-b)(x-a')-(y-b')(x-a)}{(x-a)(x-a')+(y-b)(y-b')}$$

цей вираз можна перетворити. Чисельник

$$=x(b'-b)-y(a'-a)-ab'+a'b,$$

а знаменник можна перетворити за допомогою рівнання даних кіл, що для їхньої точки перетину обчисляємо $\operatorname{tg} v$. Якщо знаменник позначимо D, тобто

$$D = (x - a)(x - a') + (y - b)(y - b'),$$

то, віднімаючи

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2,$$

знайдемо:

$$D - r^2 = (x - a)(a - a') + (y - b)(b - b'),$$

а, віднімаючи

$$r'^2 = (x - a')^2 + (y - b')^2,$$

знайдемо:

$$D - r'^2 = (x - a')(a' - a) + (y - b')(b' - b).$$

Додаючи ці два рівнання, матимемо:

$$2D - r^2 - r'^2 = (a' - a)(a - a') + (b' - b)(b - b'),$$

тобто

$$2D = r^2 + r'^2 - (a - a')^2 - (b - b')^2.$$

Отже,

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} v = \frac{x(b' - b) - y(a' - a) - ab' + ba'}{r^2 + r'^2 - (a - a')^2 - (b - b')^2}.$$

Два кола ортогональні, тобто перетинаються під прямим кутом, якщо

$$r^2 + r'^2 = (a - a')^2 + (b - b')^2.$$

Це можна було б дістати і суто-геометрично. Якщо кола перетинаються під прямим кутом, то дотична до першого перпендикулярна з дотичною до другого і, таким чином, зливається з радіюсом другого кола, проведеним у точку дотику, тобто проходить через центр другого кола, а дотична до другого — проходить через центр першого. Отже, два центри і точка перетину утворюють трикутник, прямокутній при останній точці, і тому квадрат віддалі поміж центрами дорівнює сумі квадратів радіюсів.

Спільна дотична двох кіл.

Задача. Проведіть спільну дотичну до двох даних кіл:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0 \quad \text{і} \quad (x-a')^2+(y-b')^2-r'^2=0.$$

Рівнання дотичних до кожного кола відповідно в точках (x, y) і (x', y') визначається рівнаннями:

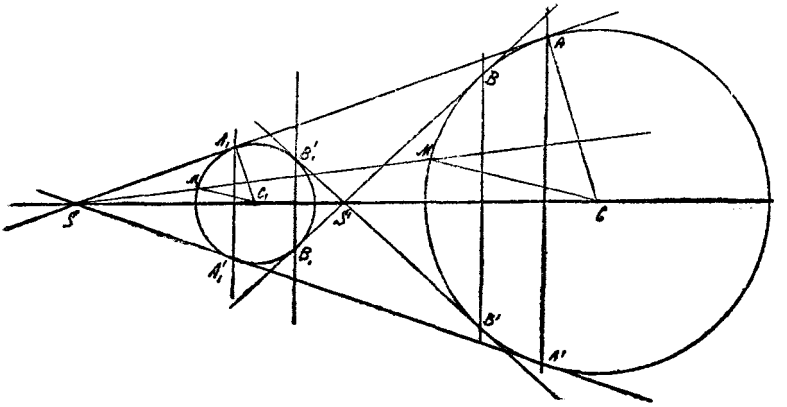

Рис. 43.

$$(x-a)(X-a)+(y-b)(Y-b)=r^2$$

і

$$(x'-a')(X-a')+(y'-b')(Y-b')=r'^2$$

Поділивши перше на r, а друге на r' і поклавши

$$\frac{x-a}{r}=\cos\alpha, \quad \frac{y-b}{r}=\sin\alpha,$$

де α є кут радіюса, проведеного в точку дотику з віссю x-ів

$$\cos\alpha'=\frac{x'-a'}{r'}, \quad \sin\alpha'=\frac{y'-b'}{r'}$$

де α' є такий саме кут для другого кола, зведемо рівнання до вигляду:

$$(X-a)\cos\alpha+(Y-b)\sin\alpha=r,$$

$$(X-a')\cos\alpha'+(Y-b')\sin\alpha'=r''$$

Щоб ці два рівнання визначали ту саму пряму, перш за все треба, щоб

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'},$$

звідси має бути:

$$\sin\alpha' \cos\alpha - \sin\alpha \cos\alpha' = 0,$$

тобто

$$\sin(\alpha' - \alpha) = 0,$$

отже

$$\alpha' - \alpha = 0, \quad \text{або } \alpha' - \alpha = \pi.$$

Для першого випадку

$$\cos\alpha' = \cos\alpha \quad \text{і} \quad \sin\alpha' = \sin\alpha,$$

так що спільне значіння двох попередніх відношень буде $+1$.

Для другого випадку

$$\cos\alpha' = -\cos\alpha \quad \text{і} \quad \sin\alpha' = -\sin\alpha,$$

спільне значіння двох відношень є -1.

Кожний з цих випадків розглянемо окремо.

Спочатку розглянемо випадок, коли $\alpha = \alpha'$ і

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = +1$$

У цьому разі рівнання обертається на такі:

$$(X - \alpha)\cos\alpha + (Y - b)\sin\alpha = r,$$
$$(X - \alpha')\cos\alpha + (Y - b')\sin\alpha = r',$$

а що вони визначають ту саму пряму, то ріжниця поміж другим рівнанням і першим неодмінно обернеться в нуль, тобто

$$(a - a')\cos\alpha + (b - b')\sin\alpha = r' - r.$$

Це й є друга умова. Повертаючись знову до значінь $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$, знайдемо:

$$(a - a')\frac{x - a}{r} + (b - b')\frac{y - b}{r} = r'' - r.$$

Цю умову вдовольняють координати точок дотику із спільними дотичними першого кола. Помноживши його на r, матимемо:

$$(a-a')(x-a)+(b-b')(y-b)=r(r'-r)$$

Для другого кола ми одержимо, заміняючи $\cos a$ і $\sin a$ на

$$\frac{x-a'}{r'} \text{ і } \frac{y-b}{r'},$$

$$(x-a')(a-a')+(y-b')(b-b')=r'(r'-r).$$

У другому випадку $\alpha'=\alpha+\pi$, $\cos a=-\cos\alpha'$, $\sin\alpha=-\sin\alpha'$, тобто дістанемо аналогічним порядком:

$$(x-a)(a'-a)+(y-b)(b'-b)=r(r'+r)$$

і

$$-(x-a')(a'-a)-(y-b')(b'-b)=r'(r'+r),$$

як рівнання хорд дотику першого й другого кіл з другою парою спільних дотичних. А що точка перетину дотичних є полюс хорди дотиків, то спільні дотичні двох кіл перетинаються в точці, що буде полюсом першої хорди відносно першого кола і другої хорди відносно другого кола (за кожного з двох випадків).

Полюс прямої,

$$(a-a')(x-a)+(b-b')(y-b)=r(r'-r)$$

дістанемо, порівнюючи це рівнання поляри

$$(\widehat{x}-a)(X-a)+(\widehat{y}-b)(Y-b)=r^2,$$

відносно першого кола; $\widehat{x}$ і $\widehat{y}$ — координати полюса Маємо:

$$\frac{\widehat{x}-a}{(a-a')}=\frac{\widehat{y}-b}{b-b'}=\frac{r}{r'-r};$$

перші два відношення показують, що шукана точка лежить на лінії центрів, а координати

$$\widehat{x}=a+\frac{r(a-a')}{r'-r}=\frac{ar'-a'r}{r'-r}$$

і

$$\widehat{y}=b+\frac{r(b-b')}{r'-r}=\frac{br'-b'r}{r'-r}.$$

Для другого кола дістанемо:

$$\frac{\widehat{x}' - a'}{a - a'} = \frac{\widehat{y}' - b'}{b' - b'} = \frac{r'}{r' - r}.$$

Звідси:

$$\widehat{x}' = \frac{ar' - a'r}{r' - r} \text{ і } \widehat{y}' = \frac{br' - b'r}{r' - r}$$

Отже, для хорд дотиків обох кіл полюс справді той самий. Цей полюс є точка перетину спільних дотичних (має назву центр подібности, при чому в нашому разі зовнішній центр подібности). З рівнань для випадку $a' = a + \pi$, дістанемо і другий центр подібности — внутрішній. Маємо:

$$\frac{\widehat{x} - a}{a' - a} = \frac{\widehat{y} - b}{b' - b} = \frac{r}{r' - r}$$

Звідси видно, що й він лежить на лінії центрів

$$\widehat{x} = \frac{ar' + a'r}{r + r'} \text{ і } y = \frac{br' + b'r}{r + r'}.$$

Ці назви з'ясовується з такої властивости цих точок.

Хай S є зовнішній центр подібности (рис. 43), A і A_1— точки дотику спільної дотичної з першим і другим колом, C і C_1—їхні центри. Трикутник SAC і трикутник SA_1C_1 прямокутні при A і A_1, і тому вони з паралельними боками CA і C_1A_1; вони подібні, тому

$$\frac{SC}{CA} = \frac{SC_1}{C_1A_1}.$$

Якщо тепер через S проведемо довільну січну SM_1M, що зустрічає перше коло в точці M, друге у відповідній точці M_1, то за попереднім

$$\frac{SC}{CM} = \frac{SC_1}{C_1M_1} \qquad (a)$$

бо

$$MC = AC = r, \qquad M_1C_1 = A_1C_1 = r'$$

отже:

$$\angle SCM = \angle SC_1M_1, \quad MC \parallel M_1C_1$$

і

$$\frac{SM}{MC} = \frac{SM_1}{M_1C_1}.$$

Навпаки, провівши $MC \parallel M_1C_1$, маємо на підставі того ж співвідношення рівність (a), і тому

$$\triangle SMC \sim \triangle SM_1C_1,$$

тобто точки S, M і M_1 лежать на одній прямій.

Це призводить до такого побудовання спільних дотичних: проводимо в обох колах паралельні радіюси; злучаємо їхні кінці; у перетині з лінією в центрі матимемо центр подібности зовнішній або внутрішній. Якщо провести з нього дотичні до одного з кіл, то вони будуть дотичними і до другого.

Інакше можна побудувати, користуючися з того факту, що зовнішні спільні дотичні паралельні до тих дотичних, що проведені з центра меншого кола до кола, описаного з центра більшого радіюсом $r - r'$ (якщо $r > r'$). Тому, знайшовши поляру точки (a', b') відносно кола

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - (r-r')^2 = 0, \qquad (c)$$

тобто

$$(a'-a)(x-a) + (b'-b)(y-b) - (r-r')^2 = 0,$$

знайдемо точки перетину її з колом (c) і, сполучивши їх із центром (a, b), продовжуємо до перетину з першим колом. У перетині матимемо точки дотику з ним спільних зовнішніх дотичних.

Таким чином, для збудовання внутрішніх спільних дотичних шукаємо поляру точки (a, b) відносно кола

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - (r+r')^2 = 0$$

і точки перетину її з цим колом злучаємо з центром (a, b). Перетин радіюсів з першим колом дає точки дотику внутрішніх спільних дотичних.

§ 19. Визначення кола за даними умовами

У загальному рівнанні кола $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ три довільні коефіцієнти A, B, C, або дві координати центра і радіюс. Треба три умови, щоб визначити коло цілком. Якщо дано радіюс, то одна умова

$$C-A^2-B^2=-r^2.$$

Якщо дано центр, то, значить, дано дві його координати — дві умови, і треба ще одну умову, щоб визначити коло.

Якщо дано точку, яка мусить лежати на колі, то центр дає одно співвідношення між коефіцієнтами:

$$x_1^2+y_1^2+2Ax_1+2By_1+C=0,$$

тобто одну умову; тому цими трьома умовами коло визначено цілком.

Задача. Через дані три точки провести коло.

Маємо три умови — три співвідношення поміж коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} x_1^2+y_1^2+2Ax_1+2By_1+C&=0,\\ x_2^2+y_2^2+2Ax_2+2By_2+C&=0,\\ x_3^2+y_3^2+2Ax_3+2By_3+C&=0. \end{aligned}$$

Узявши ріжницю другого і першого, третього і першого, матимемо:

$$\left.\begin{aligned} 2A(x_2-x_1)+2B(y_2-y_1)+x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2&=0\\ 2A(x_3-x_1)+2B(y_3-y_1)+x_3^2-x_1^2+y_3^2-y_1^2&=0 \end{aligned}\right\}. \quad (a)$$

Написавши їх у вигляді:

$$(x_2-x_1)\left(A+\frac{x_1-x_2}{2}\right)+(y_2-y_1)\left(B+\frac{y_1+y_2}{2}\right)=0,$$

$$(x_3-x_1)\left(A+\frac{x_1-x_3}{2}\right)+(y_3-y_1)\left(B+\frac{y_1-y_3}{2}\right)=0$$

і згадавши, що A і B — це взяті з оберненим знаком координати центра, помічаємо, що ці рівнання визначають, що

центр кола, яке проходить через три дані точки, як точка, що лежить на рівній віддалі від їх усіх, лежить на перетині прямих, проведених через середину відтинків, що злучають дані точки перпендикулярно до них, тобто приходимо до відомого побудовання центра кола, проведеного через три дані точки.

Розв'язуючи рівнання (a) сумісно, одержимо значіння A і B, в знаменнику яких стоїть вираз:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \qquad (b)$$

Цей вираз не дорівнює нулеві, якщо три точки не лежать на одній прямій.

Рівнання шуканого кола можна написати у вигляді детермінанта:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Справді, це рівнання справджується координатами кожної з трьох точок, і це є коло. Якщо (b) обертається на нуль, дістанемо пряму.

Якщо є потреба розв'язувати задачі щодо кола в скіснокутніх координатах, то треба виходити з рівнання:

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2Ax + 2By + C = 0.$$

Так, рівнання кола, описаного навколо трикутника, утвореного прямими

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

коли кут поміж осями є θ, напишеться:

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - ax - by = 0.$$

Друга елементарна умова, що визначає коло, це та, що воно дотикається до даної прямої. Нижче ми виведемо умову дотику прямої

$$ux + vy + w = 0$$

з кривою, заданою загальним рівнанням другого порядку А тепер лише виразимо, що ця пряма зустрічає коло

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$$

в двох злитих точках. Хай $v \neq 0$. Множимо рівнання кола на v^2 і заміняємо vy на $-(ux+w)$. Одержимо рівнання:

$$x^2(u^2+v^2)-2x(Av^2+Buv+uw)+Cv^2-2Bwv+w^2=0,$$

що має рівні корені за такої умови:

$$(u^2+v^2)(Cv^2+2Bwv+w^2)=(Av^2-Buv+uw)^2$$

Це і є шукана умова. Вона є другого степеня відносно A, B, C.

Приклад. Треба провести коло через дві дані точки так, щоб воно дотикалось до даної прямої

$$ux+vy+w=0.$$

Хай віддаль поміж двома даними точками дорівнює $2c$; приймемо пряму, що їх злучає, за вісь x-ів, а перпендикуляр до середини—за вісь y-ків і хай η є ордината центра. Рівнання набирає вигляду:

$$x^2+y^2-2\eta y+C=0,$$

і C визначиться з умови

$$c^2+C=0.$$

тобто

$$x^2+y^2-2\eta y-c^2=0.$$

Для η знаходимо квадратове рівнання:

$$u^2(w+\eta v)^2+(u^2+v^2)(c^2v^2-2\eta vw-w^2)=0$$

дістанемо два кола, що проходять через дві дані точки до дотичної.

Умова дотику двох кіл, щоб точка дотику лежала на лінії центрів, або щоб віддаль центрів дорівнювала сумі чи ріжниці радіюсів. Якщо ξ, η, ρ є координати центра і радіюс шуканого кола, a, b, r — теж для даного кола, то матимемо:

$$(\xi-a)^2+(\eta-b)^2=(r\pm\rho)^2.$$

Задача 2. Через дві дані точки проведіть коло, щоб воно дотикалось до даного кола

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0.$$

Вибравши ту саму систему координат, що і в попередньому прикладі, матимемо для рівняння шуканого кола

$$x^2+y^2-2\eta y=c^2,$$

в якому η визначається рівнанням:

$$a^2+(\eta-b)^2=(r+\rho)^2.$$

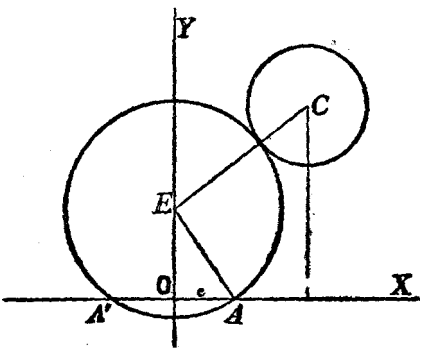

Рис. 44.

Ми можемо обмежитися розглядом тільки цього рівняння, що відповідає випадкові зовнішнього дотику, бо відповідно до внутрішнього дотику одержимо рівняння, яке відрізняється лише знаком при ρ, і тому воно має додатними коренями від'ємні корені першого.

Друге рівняння, що його треба для визначення η і ρ, дістанемо з умови, що коло проходить через дані точки:

$$\eta^2+c^2=\rho^2.$$

За його допомогою перше рівняння набирає вигляду:

$$a^2+b^2-c^2-2\eta b=r^2+2\rho r.$$

Звідси:

$$\eta=\frac{a^2+b^2-c^2-r^2}{2b}-\frac{r}{b}\rho.$$

Вставивши в одне з рівнань, матимемо квадратове рівняння для ρ

$$0=\rho^2-\frac{r(a^2+b^2-c^2-r^2)}{r^2-b^2}\rho+\frac{4c^2b^2+(a^2+b^2-c^2-r^2)^2}{4(r^2-b^2)}.$$

Відповідно до двох коренів цього рівняння матимемо

два розв'язки. Додатнім кореням відповідатиме випадок зовнішнього дотику, а від'ємним — внутрішнього.

Задача 3. Через дану точку проведіть коло, дотичне до двох даних кіл.

Хай дано точку (a'', b''), дані кола

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0,$$
$$(x-a')^2+(y-b')-r^2=0.$$

Шукане коло

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-\rho^2=0.$$

Умови дотику

$$(\xi-a)^2+(\eta-b)-(r\pm\rho)^2=0,$$
$$(\xi-a')^2+(\eta-b')-(r'\pm\rho)^2=0.$$

Умова проходження кола через дану точку (a'', b''):

$$(\xi-a'')^2+(\eta-b'')^2-\rho^2=0.$$

Віднімаючи останнє рівняння з двох перших, дістанемо два лінійні відносно ξ, η, ρ рівняння і одно — квадратове. Разом матимемо два розв'язки. З усіх можливих комбінацій знаків буде чотири:

$$\begin{array}{ccc} + + & \text{і} & - - \\ + - & \text{і} & - +. \end{array}$$

Ці випадки групуються попарно так, що додатні корені одного кола відповідають від'ємним кореням другого. Тому маємо лише дві системи рівнань з двома розв'язками кожну, а разом чотири кола, дотичні до двох даних кіл, і всі вони проходитимуть через дану точку.

Задача 4 (Аполлонієва). Збудуйте коло, дотичне до трьох даних кіл.

Хай

$$K_i\equiv(x-a_i)^2+(y-b_i)^2-r_i^2=0 \qquad (i=1,2,3) \qquad (1)$$

рівнання трьох даних кіл, а

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-R^2=0 \qquad (2)$$

рівнання шуканого. З того, що точка дотику двох кіл лежить на лінії їхніх центрів, випливає, що

$$(\xi - a_i)^2 + (\eta - b_i)^2 = R \pm r_i)^2 \tag{3}$$

або

$$(\xi - a_i)^2 + (\eta - b_i)^2 - r_i^2 = R^2 \pm 2Rr_i,$$

тобто

$$K_i = R^2 \pm 2Rr_i.$$

Подвійний знак відповідає зовнішньому і внутрішньому дотикові. Візьмімо будь-яку комбінацію знаків, наприклад, усі $+$.

Із трьох рівнань

$$(\xi - a_i)^2 + (\eta - b_i)^2 - r_i^2 = R^2 + 2Rr_i$$

можна знайти три невідомі ξ, η і R. Цей розв'язок можна впорядкувати так: складаємо два рівнання першого степеня для ξ, η і R:

$$\left.\begin{aligned} K_2 - K_1 &= 2R(r_2 - r_1) \\ K_3 - K_1 &= 2R(r_3 - r_1) \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

звідси:

$$\frac{K_2 - K_1}{r_2 - r_1} = \frac{K_3 - K_1}{r_3 - r_1} = 2R. \tag{5}$$

Два перші співвідношення показують, що шукане коло має центр на прямій

$$\frac{K_2 - K_1}{r_2 - r_1} = \frac{K_3 - K_1}{r_3 - r_1},$$

що проходить через радикальний центр трьох кіл. Щоб визначити ξ, η, треба ще одну умову. Виключаючи R, можна скласти рівнання:

$$4K_i = \frac{K_2 - K_1}{r_2 - r_1}\left(\frac{K_2 - K_1}{r_2 - r_1} \pm 4r_i\right),$$

але це не буде рівнання кола.

Аналітичний розв'язок ми дістанемо, звичайно, досить просто, якщо рівнання (4) розв'язати відносно ξ і η і підставити в одне з рівнань (3); одержимо рівнання другого

степеня, тобто матимемо два розв'язки. Отже, як комбінацій знаків буде вісім, то здавалося б, що й розв'язків повинно бути $2.8=16$. А справді всього розв'язків менше удвоє.

Дійсно, розв'язки можуть одержуватися додатні і від'ємні; але, якщо замінити R на $-R$, то замість $K_i=R^2+2Kr_i$ дістанемо $K_i=R^2-2Rr$, тобто все зводиться до зміни знаку при r_i.

Таким чином, якщо візьмемо комбінацію

$$K_1=R^2+2Rr_1,$$
$$K_2=R^2+2Rr_2,$$
$$K_3=R^2+2Rr_3,$$

то заміна R на $-R$ рівноважна переходу до комбінації

$$K_i=R^2-2Rr_i.$$

Розв'язки одної системи зв'язані з розв'язком другої так, що додатнім кореням одної системи відповідають від'ємні корені другої.

Суто-геометричний розв'язок одержимо простіше, якщо розшукуватимемо точку дотику шуканого кола з будь-яким із даних, наприклад, із $K_1=0$, що — для простоти — хай буде $x^2+y^2-r^2=0$. Точка дотику справджуватиме вже й це рівнання. Координати центра справджують рівнання:

$$\left.\begin{aligned} K_1-K_2&=2R(r_1-r_2)\\ K_1-K_3&=2R(r_1-r_3)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

і зв'язані з координатами точки дотику співвідношеннями:

$$\xi=\frac{x(R+r_1)}{r_1},\quad \eta=\frac{y(R+r_1)}{r_1} \tag{7}$$

Вводимо (7) у (6):

$$\frac{R+r_1}{r_1}(K_1-K_2)+\frac{R}{r_1}(a_2^2+b_2^2+r_1^2-r_2^2)=2R(r_1-r_2),$$

або

$$(R+r_1)(K_1-K_2)=R\left[(r_1-r_2)^2-a_2^2-b_2^2\right].$$

Так само:

$$(R+r_1)(K_1-K_3)=R[(r_1-r_3)^2-a_3^2-b_3^2]$$

Отже:

$$\frac{K_1-K_2}{(r_1-r_2)^2-a_2^2-b_2^2}=\frac{K_1-K_3}{(r_1-r_3)^2-a_3^2-b_3^2}$$

Це є пряма, що проходить через точку перетину хорди дотиків спільних дотичних кіл K_1 і K_2 з хордою дотиків спільних дотичних кіл K_1 і K_3. Крім того, вона проходить і через радикальний центр трьох кіл.

Розглянута раніше задача проведення кола, дотичного до двох даних кіл, якщо перше проходить і через дану точку, є окремий випадок останньої задачі, а саме, коли радіюс одного з трьох даних кіл дорівнюватиме, наприклад, $k_2=0$. Тоді — для такого кола — точки внутрішнього й зовнішнього дотиків зливаються, і число можливих розв'язків зменшується удвоє (дорівнює 4). Якщо ще одне коло зводиться до точки, наприклад, $r_1=0$, то число розв'язків знову зменшиться удвоє і дорівнюватиме 2. Наостанок, якщо і останнє коло обертається на точку, одержимо $\frac{2}{2}=1$ розв'язок, — одно коло проходить через три дані точки.

§ 20. Інверсія

Уявімо собі систему полярних координат r, θ і перейдімо від точки з координатами (r, θ) до другої точки (r', θ') за умовою:

$$\theta'=\theta, \quad r'.r=k^2.$$

На кожному радіюсі, що виходить із полюса, помічаємо точку, що її віддаль від полюса обернено-пропорціональна віддалі від центра перетворюваної точки.

У прямокутніх координатах, що їхній початок зливається з полюсом (він тепер відограє ролю центра інверсії), зв'язок поміж координатами (x, y) точки перетво-

рюваної і (x', y') точки перетвореної одержимо з таких співвідношень:

$$x = r\cos\theta = \frac{k^2}{r'} = \cos\theta = \frac{k^2 r' \cos\theta'}{r^2} = \frac{k^2 x'}{x'^2 + y'^2}$$

так само:

$$y = r\sin\theta = \frac{k^2}{r'}\sin\theta' = \frac{k^2 r' \sin\theta'}{r'^2} = \frac{k^2 y'}{x'^2 + y'^2}$$

звідси:

$$x^2 + y^2 = \frac{k^4}{x'^2 + y'^2}.$$

Навпаки:

$$x' = x : \frac{k^2}{x'^2 + y'^2} = x : \frac{x^2 + y^2}{k^2} = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}.$$

Так само:

$$y' = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Це перечислення має назву перечислення за допомогою обернених радіюсів або інверсії.

Коло з центром у центрі інверсії

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

перечислюється в концентричне коло

$$x'^2 + y'^2 - \frac{k^4}{a^2} = 0.$$

А коло, що не проходить через центр інверсії

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

$(C \neq 0)$ обертається в коло з рівнанням:

$$\frac{C}{k^2}(x'^2 + y'^2) + 2Ax' + 2By' + k^2 = 0$$

але, якщо перечислюване коло проходить через центр інверсії, то $C = 0$ і таке коло після перечислення обертається на пряму

$$Ax' + By' + \frac{k^2}{2} = 0.$$

Пряма лінія, що не проходить через центр інверсії

$$Ax + By + C = 0,$$

перечислюється на коло

$$\frac{C}{k^2}(x'^2+y'^2)+Ax'+By'=0$$

а лінія, що проходить через центр інверсії ($C=0$), перечислюється ня пряму

$$Ax'+By'=0.$$

Якщо розглядати пряму, як коло безконечно великого радіюса з центром на безконечності, то можна сказати: інверсія кожне коло перечислює знову на коло.

Співвідношення інверсії можна встановити між двома площинами так: уявімо сферу (кулю) і дві дотичні до неї паралельні площини, хай O, O' є їхні точки дотику і $\frac{k}{2}$ — радіюс сфери, так що $\overline{OO'}=k$. Кожну точку M першої площини злучаємо з протилежним кінцем O' діяметра. Пряма $O'M$ зустрічає поверхню сфери в точці M_1; цю точку злучаємо з O і OM_1, продовживши до перетину з другою площиною в точці M'.

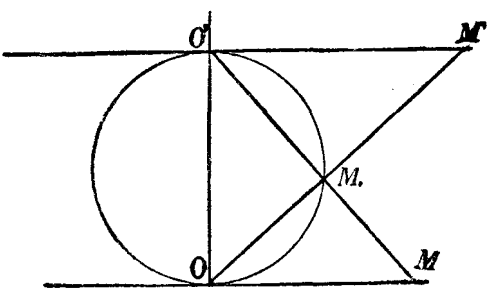

Рис. 45.

Тоді на підставі подібности трикутників

$$\triangle OO'M \sim \triangle O'OM'$$

маємо:

$$\frac{OM}{OO'}=\frac{OO'}{O'M'}$$

звідси:

$$\overline{OM}\,.\,\overline{O'M'}=\overline{OO'}^2=k^2.$$

Якщо в обох площинах уявити систему прямокутніх осей з початком в O і O', паралельних поміж собою, то лінії OM і $O'M'$ відрізатимуть на осях OX і $O'X''$ однакові кути (OM і $O'M'$ лежать на площині, перпендикулярній до обох даних). Таким чином, між полярними координатами

(r, θ) і (r', θ') точок є зв'язок $rr' = k^2$ і $\theta = \theta'$. Звідси для прямокутніх координат одержимо, як і раніш,

$$x = \frac{k^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{k^2 y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Наостанку можна покласти, що площини припадають одна на одну через паралельне перенесення другої площини до злиття з першою так, щоб O' припало на O і осі координат $Y'OX'$ злилися з YOX. Можна зробити висновок, що інверсія встановляє таке перечислення: точки (x, y), що лежать у колі

$$x^2 + y^2 = k^2$$

(коло інверсії) перечислюються на точки, що лежать поза цим колом. Точки, що лежать поза колом, відбиваються, навпаки, в середині кола, а якщо M' є відбиток точки M, то й, навпаки, M' є відбиток точки M. (Точки, що лежать на самому колі інверсії, не зміняють свого положення). При цьому вони лежать на одному з діяметрів. Вони гармонійно супряжені відносно кінців діяметра. Справді, якщо взяти точку M на осі x-ів, то чотири точки

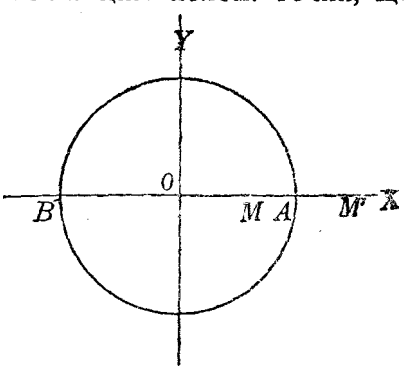

Рис. 46.

$$M \equiv (x, 0), \; M' \equiv \left(x' = \frac{k^2}{x}, 0\right), \; A \equiv (k, 0) \text{ і } B \equiv (-k, 0)$$

мають гармонійне відношення:

$$\frac{AM}{BM} : \frac{AM'}{BM'} = \frac{x-k}{x+k} : \frac{x'-k}{x'+k},$$

тобто:

$$\frac{x-k}{x+k} : \frac{\frac{k^2}{x} - k}{\frac{k^2}{x} + k} = -1$$

РОЗДІЛ VI

Криві 2-го порядку. Загальна теорія

§ 21. Загальні зауваження

Криві, що ми їх вивчатимемо в подальшому курсі, визначаються в прямокутніх (а також і в скіснокутніх) координатах рівнання 2-го степеня:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Їх називають криві другого порядку, розуміючи — взагалі — під порядком кривої число її точок перетину з довільною прямою.

Справді, якщо дано якусь пряму

$$y = \mu x + b, \qquad (2)$$

то вона перетнеться з кривою, визначеною рівнанням (1) у точках, що їхні координати можна визначити, розв'язуючи вкупі рівнання (1) і (2). Абсциси точок перетину визначаться рівнанням:

$$(A + 2B\mu + C\mu^2)x^2 + 2[b(B + C\mu) + D + E\mu]x + Cb^2 + 2Eb + \\ + F = 0.$$

Це рівнання другого степеня відносно x і, таким чином, одержимо **дві** точки перетину кривої (1) з прямою (2).

Криві ці називають звичайно **конічними перерізами**, бо їх можна мати, перерізаючи прямий (чи косий) круговий конус площиною (див. далі розд. X). Можна було б і безпосередньо пересвідчитися в цьому, складаючи рівнання перерізів прямого кругового конусу площиною, що утворює той чи той кут з його віссю. Добираючи належним чином осі координат у площині перерізу, можна

дістати рівнання трьох типів конічних перерізів, — еліпсу, гіперболю й параболю. Однак не будемо йти цим шляхом.

Задача курсу аналітичної геометрії — показати, як, маючи рівнання кривої, можна вивчати всі її властивості. Цього краще досягнемо, коли ми досліджуватимемо рівнання (1) й покажемо, які криві воно зображає за різних значень п'ятьох його параметрів, тобто відношень п'ятьох його коефіцієнтів до шостого.

Однак спочатку корисно показати дві загальні задачі, що призводять до таких кривих, що визначається в прямокутніх координатах рівнанням 2-го степеня.

Перша задача належить до визначення кривих, як геометричного місця точок, віддаль яких від даної точки (названої фокусом) і від даної прямої (названої директрисою) перебуває в даному відношенні.

Якщо (a, b) є дана точка, $y = mx + h$ — рівнання даної прямої і e — дане відношення, то висловлена умова призводить до рівности:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} : \pm \frac{y - mx\,h}{\sqrt{1+m^2}} = e$$

або

$$(x-a)^2+(y-b)^2 - \frac{e^2}{1+m^2}(y-mx-h)^2 = 0,$$

тобто до рівнання, що після розімкнення дужок зведеться до (1) і також має п'ять параметрів: a, b, m, h і e.

Друга задача — так зване проєктивне визначення кривих 2-го порядку, як геометричного місця точок перетину відповідних променів двох проєктивних в'язок, що не перебувають у перспективному положенні.

Дві в'язки прямих

$$Ax + By + C + \lambda(A'x + B'y + C') = 0$$

або коротше:

$$P + \lambda Q = 0$$

і

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda'(A'_1x + B'_1y + C'_1) = 0$$

або

$$P' + \lambda' Q' = 0,$$

перебувають у проєктивній відповідності, якщо кожному променеві першого відповідає один і лише один промінь другого, і, навпаки, кожному променеві другого відповідає один і лише один промінь першого. Таким чином, λ і λ_1 зв'язані рівнанням першого степеня відносно λ і λ':

$$\mathbf{A}\lambda\lambda' + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}\lambda' + \mathbf{D} = 0$$

або

$$\lambda' = -\frac{\mathbf{B}\lambda + \mathbf{D}}{\mathbf{A}\lambda + \mathbf{C}} \quad \text{і} \quad \lambda = -\frac{\mathbf{C}\lambda' + \mathbf{D}}{\mathbf{A}\lambda' + \mathbf{B}}$$

Але координати точки першого променя дають:

$$\lambda = -\frac{Ax + By + C}{A'x + B'y + C'} = -\frac{P}{Q}, \tag{5}$$

а координати другого променя

$$\lambda' = -\frac{A_1x + B_1y + C_1}{A'_1x + B'_1y + C'_1} = -\frac{P'}{Q'}. \tag{5'}$$

У точці перетину x, y дають у цих формулах λ і λ' такі значіння, що вони справджують рівнання (4), і, таким чином,

$$\mathbf{A}PP' - \mathbf{B}PQ' - \mathbf{C}P'Q + \mathbf{D}QQ' = 0$$

є рівнання, що його справджують координати всіх точок перетину відповідних променів в'язок (3) і (3'), що перебувають у відповідності, встановлюваній рівнанням (4). Отже, це й є рівнання шуканого геометричного місця. Заміняючи P, Q, P', Q' на їхні значіння і впорядковуючи за степенями x і y, одержимо рівнання 2-го степеня; коефіцієнти цього рівнання визначають довільні коефіцієнти рівнання в'язок (3) і проєктивної відповідности (4).

Ми можемо, таким чином, сказати: геометричне місце точок перетину відповідних променів двох проєктивних в'язок є крива 2-го порядку.

§ 22. Дослідження загального рівнання 2-го степеня

1. Умова, за якої крива розпадається на пару прямих. Рівнання 2-го степеня між Декартовими координатами x і y точки на площині

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

визначає коло в тому разі, якщо (за прямокутніх осей) $A=C$, $B=0$ (за скіснокутніх осей $A=C$, $B=A\cos\theta$). Очевидно, що за деяких випадків воно може визначати й пару прямих, якщо $D=E=F=0$; тоді

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$$

визначає пару прямих, що проходять через початок, бо, поклавши $y=mx$, ми задовольнимо рівнання, якщо m є корінь рівнання

$$A+2Bm+Cm^2=0.$$

Якщо це рівнання має дійсні корені (повинно бути тоді $B^2-AC>0$), то матимемо пару перетятих прямих; за $B^2-4AC=0$ прямі зливаються, а за $B^2-AC<0$ обидві прямі — уявні. Взагалі упевнитись, що дане рівнання 2-го степеня розпадається на пару прямих, можна, звичайно, способом невизначених коефіцієнтів, утотожнюючи (1) з добутком

$$(\alpha x+\beta y+\gamma)(\alpha' x+\beta' y+\gamma')=0.$$

Проте, простіше так:

1. Хай один із коефіцієнтів A чи C не дорівнює нулеві. Тоді можна помножити ліву частину (1) на A (чи C).

$$A^2x^2+2BAxy+2ADx\equiv(Ax+By+D)^2-B^2y^2-2DBy-D^2,$$

(1) матиме вигляд:

$$(Ax+By+D)^2+(AC-B^2)y^2+2(AE-BD)y+AF-D^2.$$

Щоб рівнання розпадалось на два чинники, останні три члени повинні бути точним квадратом, тобто має бути:

$$(AC-B^2)(AF-D^2)=(AE-BD)^2$$

або, розімкнувши дужки,

$$A^2CF - AB^2F - ACD^2 - B^2D^2 = A^2E^2 - 2A.E.B.D + B^2D^2.$$

Перенісши всі члени в ліву частину, після зведення помічаємо, що A виходить спільним чинником:

$$A[A(CF - E^2) + B(DE - BF) + D(BE - CD)] = 0.$$

Але A за умовою не дорівнює 0, і тому для того, щоби многочлен (1) розпадався на два чинники, повинен обернутися в нуль вираз у дужках; його можна подати детермінантом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Залишається нерозгляненим той випадок, коли одночасно $A = C = 0$ і коли (1) зводиться до вигляду:

$$2Bxy + 2Dx + 2Ey + Fy + F = 0. \qquad (7)$$

Цей випадок можна звести на попередній, повернувши координатні осі на 45°, за допомогою формул перетворення:

$$x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \; y = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \quad \text{і — отже —} \; xy = \frac{x'^2 - y'^2}{2}$$

Проте, простіше дослідити безпосередньо (7), де вже $B \neq 0$. Винісши x за дужки, бачимо, що

$$2x(By + D) + 2Ey + F = 0$$

може розпадатись на два чинники лише за умови

$$By + D = k(2Ey + F),$$

тобто, коли

$$\frac{B}{2E} = \frac{D}{F},$$

або

$$BF - 2ED = 0.$$

Але детермінант (6) за $A = C = 0$ обертається на

$$2BED - B^2F = B(2ED - BF)$$

а за $B \neq 0$ це та сама умова. Отже, умова, щоб (1) розпалося на два чинники і, таким чином, зображало пару прямих, є справді (6) за всіх випадків.

II. Рівнання (1) визначає один із конічних перерізів. Повернімось до рівнання (1):

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

покладаючи вже, що детермінант $\Delta \neq 0$.

Покажемо, що це рівнання визначає одну з трьох кривих: еліпсу, параболю чи гіперболю.

Хай $C \neq 0$. Якщо $A \neq 0$, то повернемо осі на 90°, — тоді $x = y'$, $y = x'$, — (залишаємо покищо випадок, коли $A = C = 0$). Переписавши (1) у вигляді:

$$Cy^2 + 2(Bx + E)y + Ax^2 + 2Dx + F = 0,$$

розв'язуємо відносно y:

$$y = -\frac{(Bx + E) \pm \sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}}{C},$$

де

$$M = B^2 - AC, \quad N = BE - DC, \quad P = E^2 - FC.$$

Для простоти можна, не обмежуючи загальности міркувань, прийняти, що система координат прямокутня (цього завжди можна досягти, спочатку перетворивши координати, не зміняючи степеня рівнання). Позначимо

$$\frac{\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}}{C} = Y$$

і, таким чином, зведемо рівнання до вигляду:

$$y = -\frac{Bx + E}{C} \pm Y.$$

Будуємо перш за все пряму

$$y = -\frac{Bx + E}{C}.$$

Точки кривої лежать симетрично до цієї прямої. Щоб із ординати прямої, що відповідає абсцисі x, одержати

ординату кривої (1), треба додати або відняти величину Y.

Лишається дослідити, які значіння може набирати Y. Для цього згадаймо властивість тричленів вигляду $Mx^2 + 2Nx + P$. Треба розрізняти випадки $M < 0$, $M > 0$ і, крім того, випадки дійсних, рівних чи уявних коренів рівнання

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0 . \qquad (8)$$

Якщо це рівнання має дійсні нерівні корені x' і x'' (тобто якщо $N^2 - MP > 0$), тричлен розпадається на добуток дійсних чинників

$$Mx^2 + 2Nx + P \equiv M(x - x')(x - x'') .$$

Якщо корені (8) рівні, тобто, якщо $N^2 - MP = 0$, маємо

$$Mx^2 + 2Nx + P = M(x - x')^2 .$$

Якщо, наостанку, корені (8) уявні, то за дійсних коефіцієнтів вони будуть супряжені:

$$x' = \alpha + \beta i; \quad x'' = \alpha - \beta i,$$

і тричлен стане у вигляді:

$$Mx^2 + 2Nx + P \equiv M[(x - \alpha)^2 + \beta^2].$$

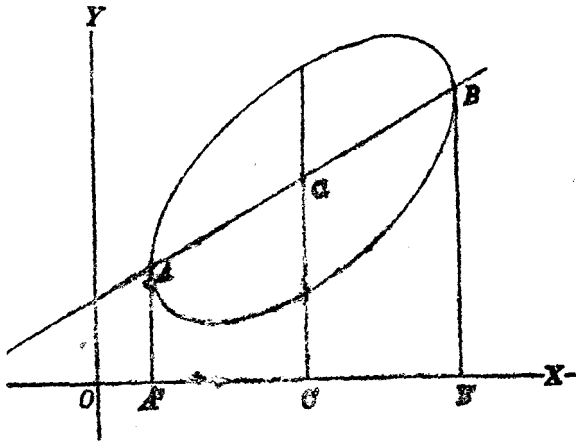

Рис. 47.

Після таких попередніх міркувань зручно розібрати різні випадки, що можуть виникнути з рівнання (1):

а) $M < 0$, тобто $B^2 - AC < 0$.

1. $N^2 - MP > 0$ — корені (8) дійсні

$$Y = \sqrt{M(x - x')(x - x'')}.$$

Y дійсне лише за $(x - x')(x - x'')$ від'ємного, тобто, коли x міститься між x' і x'' (хай $x' < x''$); повинно бути $x' < x < x''$.

Крива лежить між ординатами AA' і BB' і проходить через точки A і B, при чому найбільше значіння

$$M(x - x')(x - x'')$$

маємо, коли

$$x = \frac{x' - x''}{2}.$$

Усі точки кривої лежать на конечній віддалі від початку; крива замкнена — кожному значінню x у межах $x' \leqslant x \leqslant x''$ відповідає дійсне значіння Y, а тому два значіння y. Ця крива має назву е л і п с и.

2. $N_2 - MP = 0$. При цьому $Y = (x - x')\sqrt{M}$ є величина взагалі уявна; єдине дійсне значіння — коли $x = x' - Y = 0$

$$y = -\frac{Bx' + E}{C},$$

крива зводиться до точки, — випадок, аналогічний до кола з радіюсом $= 0$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0.$$

3. Якщо, наостанку, $M^2 - MP < 0$,

$$Y = \sqrt{M[(x - \alpha)^2 + \beta^2]},$$

де підрадикальна величина завжди від'ємна. Крива **у я в н а**, немає жадної дійсної точки, — аналогічно випадкові уявного кола

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + r^2 = 0,$$

b) $M > 0$.

1. $N^2 - MP > 0$;

$$Y = \sqrt{M(x - x')(x - x'')}.$$

Коли $x' < x < x''$, тоді під радикалом величина від'ємна, між AA' і BB'' ($OA' = x$, $OB' = x''$) немає точок кривої. A і B їй належать. Коли $x > x''$ і їхні значіння зростають, а Y теж зростає і може стати більше за всяку хоч яку велику величину; так само, коли x менший за x' і він спадає. Одержимо дві вітини кривої, що розходяться по обидві сторони AB від A ліворуч і від B праворуч і прямують до ∞. Ця крива є **гіперболя**.

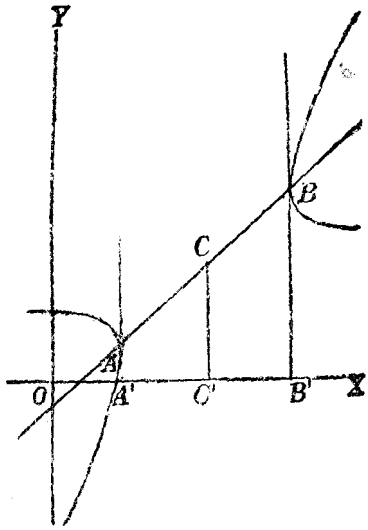

Рис. 48.

2. $N^2 - MP = 0$.

$$Y = (x - x')\sqrt{M} = \left(x + \frac{N}{M}\right)\sqrt{M}\,.$$

Y дійсне, маємо пару прямих, що перетинаються в точці

$$\left\{ x = -\frac{N}{M}, \quad y = -\frac{B\left(-\frac{M}{N}\right) + E}{C} \right\}$$

3. $N^2 - MP < 0$.

$$Y = \sqrt{M[(x - a)^2 + \beta^2]}$$

вираз завжди дійсний, тому що підрадикальна величина завжди додатня: кожному значінню x відповідає два дійсні значіння y. При цьому, коли $x = a$, $Y = \min.$, віддаль точки кривої від прямої

$$y = -\frac{Bx + E}{C},$$

що ми її відлічуємо по ординаті, буде найменша, а із змі-

ною x від α в той і другий бік, зростає і стає більша за всяку хоч яку величину, коли x хоч яке велике своєю абсолютною величиною. Крива теж гіперболя, але вона інакше розмістилась.

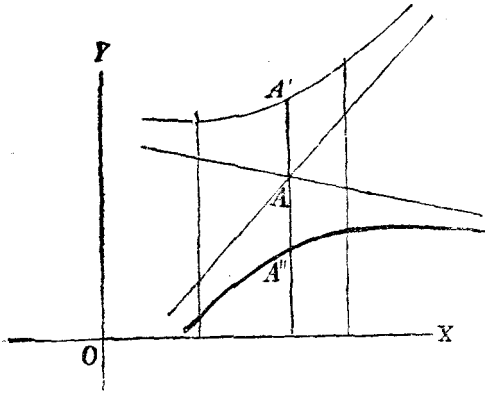

Рис. 49.

Докищо ми не звернули уваги на третій можливий випадок:

c) $M=0$;
$B^2-AC=0$

(при цьому члени 2-го степеня в (1) становлять точний квадрат).

Тут

$$Y=\sqrt{2Nx+P}.$$

Цей випадок підрозділимо також на три:

1. $N>0$,

$$Y=\sqrt{2N\left(x+\frac{P}{2N}\right)},$$

коли

$$x+\frac{P}{2N}>0,$$

Y дійсне. Значінь y два; вони зливаються в одно ($Y=0$), коли

$$x+\frac{P}{2N}=0.$$

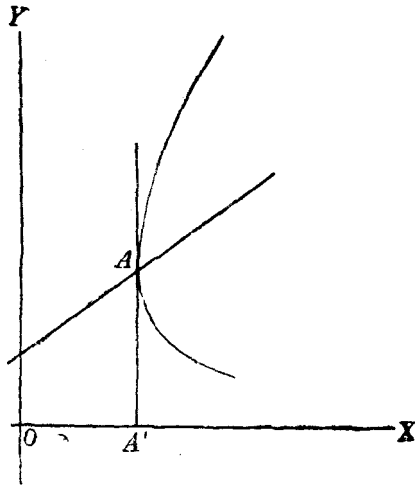

Рис. 50.

А коли

$$x+\frac{P}{2N}<0,$$

тоді немає дійсних точок, — крива вся міститься праворуч

від AA', при цьому Y безмежно зростає із зростанням x, тому вітини кривої розгалужуються. Крива парабола.

2. $N=0$, $Y=\sqrt{P}$ і $y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\sqrt{P}$ — пара паралельних прямих, коли $P>0$; вони зливаються, коли $P=0$, і уявні, коли $P<0$.

3. $N<0$. Вираз

$$Y=\sqrt{2N\left(x+\frac{P}{2N}\right)}$$

дійсний, коли

$$x+\frac{P}{2N}<0,$$

і обертається на 0 за

$$x=-\frac{P}{2N}$$

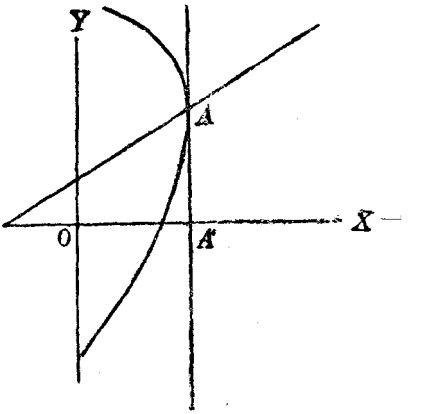

Рис. 51.

крива, аналогічна першому випадкові, але лежить вона ліворуч від прямої

$$x=-\frac{P}{2N}.$$

Це теж парабола.

Отже дійсних кривих ми одержали три типи: еліпсу, гіперболю й параболю.

Прямі одержани за таких співвідношень між коефіцієнтами:

1: $N^2-MP=0$,

тобто:

$$(BE-DC)^2-(B^2-AC)(E^2-FC)=2BEDC+D^2C^2+ACE^2+$$
$$+B^2FC-AFC^2=0.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0 \qquad (6)$$

за добавочної умови $M>0$ (тобто $B^2-AC>0$). Можна,

однак, помітити, що й за $M<0$ в цьому разі одержимо не лише дійсну точку, а й пару перетятих у ній прямих, але не дійсних, а уявних:

$$y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\left(x+\frac{N}{2M}\right)\sqrt{M}.$$

2. $M=0$, $N=0$, при цьому умова (6) знову справджується, бо $N^2-MP=0$ при $C\neq 0$ за умовою.

Прямі паралельні

$$y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\sqrt{P}\left\{\begin{array}{ll}\text{дійсні за} & P>0\\ \text{злиті за} & P=0\\ \text{уявні за} & P<0\end{array}\right\}$$

Ми не зачепили й досі той випадок $A=C=0$, коли (1) зводиться до вигляду:

$$2Bxy+2Dx+2Ey+F=$$

Тепер це рівнання відносно y ніби вже не квадратове, один із коренів обернувся на безконечність, як відомо із елементарної альґебри, а другий визначається рівнаннями:

$$y=-\frac{2Dx+F}{2Bx+2E}=-\frac{D}{B}+\frac{2DE-BF}{2B(Bx+E)};$$

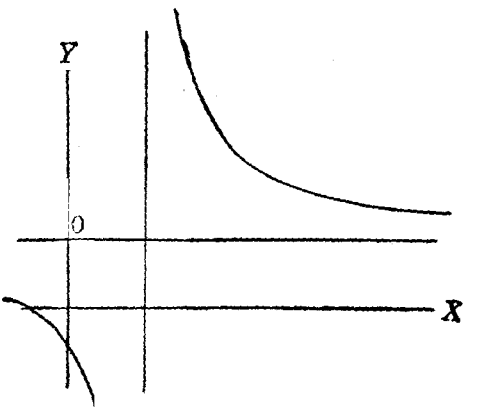

Рис. 52.

За $x=-\frac{E}{B}$, $y=\infty$ і зменшується із зростанням x до $-\frac{D}{B}$ за $x=\infty$; якщо $x<-\frac{E}{B}$, значіння y від'ємне і спадає своєю абсолютною величиною до $-\frac{D}{B}$ із зростанням абсолютної величини x. Це гіперболя (рівнобока). Прямі $y=-\frac{D}{B}$ і $x=-\frac{B}{E}$ паралельні до осей, і вони,

як побачимо, є її асимптоти (прямі, до яких крива безмежно наближається).

§ 23. Спрощення рівнання 2-го степеня

I. Випадок центральної кривої

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (1)$$

Покладаємо осі прямокутніми. Переносимо початок координат у точку (ξ, η). Рівнання (1) набирає вигляду:

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + x'f'_\xi + y'f'_\eta + f(\xi, \eta) = 0$$

де

$$f'_\xi = 2(A\xi + B\eta + D)$$
$$f'_\eta = 2(B\xi + C\eta + E)$$

Обираємо тепер ξ і η так, щоб члени з x' і y' зникли, тобто, щоб

$$f'_\xi = 0 \quad \text{і} \quad f'_\eta = 0$$

При цьому всі хорди, що проходять через новий початок, поділятимуться в ньому навпіл. Ця точка зветься центром кривої другого порядку.

Два лінійні рівнання:

$$\left\{ \begin{array}{l} A\xi + B\eta + D = 0 \\ B\xi + C\eta + E = 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

дають

$$\xi = -\frac{DC - BE}{AC - B^2},$$

$$\eta = -\frac{AE - BD}{AC - B^2}.$$

Значіння ξ і η одержуємо конечні лише за

$$AC - B^2 \neq 0$$

Тому розглянемо спочатку випадки

$$AC - B^2 \gtrless 0$$

При цьому $f(\xi, \eta)$ можна спростити:

$$\frac{1}{2}(\xi f'_\xi + \eta f'_\eta) \equiv A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + D\xi + E\eta;$$

якщо ξ, η справджують (9), то

$$f(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) - \frac{1}{2}(\xi f'_\xi + \eta f'_\eta) = D\xi + E\eta + F =$$

$$= \frac{1}{AC - B^2} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \qquad (10)$$

Рівнання (1) набирає, таким чином, вигляду:

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + \frac{1}{AC - B^2} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0. \qquad (1')$$

Якщо детермінант Δ обертається на 0, крива проходить через початок координат — центр кривої лежить на самій кривій — маємо пару прямих. Якщо ж $\Delta \neq 0$, то залежно від знака $AC - B^2$ матимемо еліпсу (дійсну чи уявну) або гіперболю.

Для подальших спрощень використаємо напрям осей: повернемо осі на кут α. Рівнання (1′) матиме вигляд:

$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + \frac{1}{AC - B^2} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0,$$

де

$$\left.\begin{aligned} A' &= A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha \\ C' &= A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha \\ B' &= (C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Перш за все помічаємо, що

$$A' + C' = A + C. \qquad (12)$$

Перетворюємо (11), вводячи sin і cos подвійної дуги за відомими формулами:

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \qquad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$A' = \frac{A+C}{2} + B\sin 2\alpha + \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha;$$

$$C' = \frac{A+C}{2} - B\sin 2\alpha - \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha;$$

$$B' = B\cos 2\alpha - \frac{A-C}{2}\sin 2\alpha$$

Звідси:

$$A'C' - B'^2 = \left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - \left(B\sin 2\alpha + \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha\right) -$$

$$-\left(B\cos 2\alpha - \frac{A-C}{2}\sin 2\alpha\right)^2 = \frac{(A+C)^2}{4} - B^2 - \frac{(A-C)^2}{4},$$

тобто:

$$A'C' - B'^2 = AC - B^2. \tag{13}$$

Отже два вирази, складені з коефіцієнтів (1),

$$A+C \quad \text{і} \quad AC - B^2$$

не зміняються, коли повертаємо прямокутні осі координат на довільний кут. Вони не зміняються і при перенесенні початку, бо тоді члени 2-го степеня, взагалі, не зміняються. Отож обидва ці вирази залишаються без зміни, коли переходимо від одної прямокутньої. Це є інваріянти для таких перетворень.

Виберемо тепер кут α так, щоб $B' = 0$, тобто

$$B\cos 2\alpha - \frac{A-C}{2}\sin 2\alpha = 0$$

а це дасть

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C} \tag{14}$$

За цієї умови α може мати два значіння, що розрізняються на $\frac{\pi}{2}$:

$$\alpha_0 \quad \text{і} \quad \alpha_0 + \frac{\pi}{2},$$

що відповідає тому, що з двох взаємно-перпендикулярних напрямів ми довільний можемо обрати за вісь x-ів, а тоді перпендикулярний йому беремо за вісь y-ків.

Формули (12) і (13) дають

$$A' + C' = A + C, \quad A'C' = AC - B^2,$$

тобто шукані коефіцієнти A', C' визначено їхньою сумою і добутком; таким чином, вони є корені квадратового рівнання

$$S^2 - (A + C)S + AC - B^2 = 0$$

або

$$\begin{vmatrix} A - S & B \\ B & C - S \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Його детермінант

$$(A + C)^2 - 4(AC - B^2) = (A - C)^2 + 4B^2 > 0,$$

і тому корені його дійсні.

II. Крива, що не має центра. Хай тепер

$$AC - B^2 = 0$$

або

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$$

Тоді рівнання

$$\begin{aligned} Ax + By + D &= 0 \\ Bx + Cy + E &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

зводяться до вигляду:

$$Ax + By + D = 0,$$

$$Ax + By + \frac{EA}{B} = 0.$$

Якщо

$$D = \frac{EA}{B},$$

тобто

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{C}=\frac{D}{E},$$

то два рівнання зводяться до одного, отже безліч точок (що лежать на прямій

$$Ax+By+D=0)$$

мають ту властивість, що—при перенесенні в них початку координат—у рівнанні зникають члени з першими степенями x і y. Якщо ж $BD-AE\neq 0$, то конечних значінь x і y, що справджуватимуть два рівнання, немає.

За обох цих випадків рівнання (1) зводиться до вигляду:

$$\frac{1}{A}(Ax+By)^2+2Dx+2Ey+F=0$$

(якщо покласти, що обидва коефіцієнти A і C не нулі,—інакше рівнання матиме лише один член 2-го степеня Ax^2 чи Cy^2).

Якщо

$$\frac{A}{B}=\frac{D}{E},\quad \frac{A}{D}=\frac{B}{E},$$

то і $Ax+By$ пропорціональне $Dx+Ey$, так що ліва частина рівнання 2-го степеня відносно $Ax+By$, і воно зображає пару паралельних прямих. (Очевидно при цьому $(6)=0$).

Якщо $AE-BD\neq 0$, то повернемо осі на кут α. Тоді

$$Ax+By=x'(A\cos\alpha+B\sin\alpha)+y'(-A\sin\alpha+B\cos\alpha).$$

Користуючися з того, що кут α довільний, покладаємо

$$A\cos\alpha+B\sin\alpha=0,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{A}{B}, \tag{16}$$

тобто

$$\sin\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \cos\alpha=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Знак обираємо так, щоб $\cos\alpha$ був додатній. Рівнання набирає вигляду

$$C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F=0$$

де

$$C' = \frac{1}{A}\left(-A\sin\alpha + B\cos\alpha\right)^2 = \frac{A^2+B^2}{A} = A + C.$$

$$D' = \pm\frac{BD - AE}{\sqrt{A^2+B^2}},\ E' = \pm\frac{AD + BE}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Початок координат докищо був довільний. Перенесемо тепер осі координат у точку (ξ, η) таку, щоб пропали члени з $2y'$ і вільний член (тобто переносимо початок у таку точку кривої, щоб зник член з першим степенем Y). Підставлення:

$$x' = X + \xi,\quad y' = Y + \eta$$

дасть

$$(A + C)\,Y^2 + 2D'X = 0,$$

при чому

$$(A + C)\eta + E' = 0,$$

звідси

$$\eta = -\frac{E'}{A + C},$$

$$(A + C)\eta^2 + 2D'\xi + 2E'\eta + F = 0$$

або за допомогою першого

$$E'\eta + 2D'\xi + F = 0$$

звідси:

$$\xi = \frac{-E'\eta - F}{2D'}$$

А що ми прийняли $BD - AE \neq 0$ і, крім того, $A + C \neq 0$ (інакше $AC - B^2 = -(A^2 + B^2) = 0$ дало б нам, що $A = B = C = 0$), то для ξ і η дістанемо значіння конечне і цілком визначене,

Ми бачимо, таким чином, що рівнання 2-го степеня

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

виражає пару прямих, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

Ці прямі перетинаються, коли $AC-B^2 \neq 0$, і паралельні, коли $AC-B^2=0$. Хай тепер $\Delta \neq 0$. Якщо $AC-B^2 \neq 0$, то воно зводиться до вигляду:

$$A'X^2+C'Y^2+F'=0,$$

де

$$A'+C'=A+C, \quad A'C'=AC-B^2 \text{ і } F'=\frac{\Delta}{AC-B^2}.$$

Треба розрізняти випадки, коли $AC-B^2<0$ і $AC-B^2>0$. За $AC-B^2>0$ A' і C' мають той самий знак.

Тому, поділяючи рівняння на F', матимемо:

$$\frac{A'}{F'}x^2+\frac{C'}{F'}y^2+1=0.$$

$\frac{A'}{F'}$ і $\frac{C'}{F'}$ мають однакові знаки.

1) Якщо вони додатні, то можна покласти їх рівними

$$\frac{1}{a^2} \text{ і } \frac{1}{b^2}.$$

Тоді рівняння матиме вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0.$$

Воно, очевидно, не справджується жадними дійсними значіннями x і y. Кажемо, що воно виражає уявну криву — уявну еліпсу.

2) Якщо вони від'ємні, то можна покласти

$$\frac{A'}{F'}=-\frac{1}{a^2} \text{ і } \frac{C'}{F'}=-\frac{1}{b^2},$$

матимемо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

крива має назву еліпси. Зокрема за $a=b$ матимемо коло.

3) Якщо $AC-B^2<0$, A і C мають різні знаки. Поділяючи на F', зведемо рівняння до вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1.$$

залежно від того, чи буде C' чи A' одного знаку з F'. Крива, виражена цим рівнанням, має назву гіперболі.

Якщо $a=b$, тоді її рівнання набирає вигляду:

$$x^2-y^2=a^2;$$

криву звуть рівнобічною гіперболею.

Це буде тоді, коли $A'=-C'$, тобто за

$$A'+C'=A+C=0.$$

Наостанку, за $AC-B^2=0$, рівнання, як ми бачили, зводиться до вигляду:

$$(A+C)y^2+2D'x=0,$$

тобто

$$y^2=\pm 2px.$$

Проте, якщо

$$\frac{2D'}{A+C}$$

додатнє, то можна зміняти напрям осі x-ів на прямопротилежний і вважати тому типовим для цього випадку рівнання

$$y^2=2px.$$

Ця крива зветься параболею.

Далі ми досліджуватимемо рівнання цих трьох типів кривих, але спочатку ми розглянемо кілька задач, що нам пізніше доведеться їх розв'язувати для кожної кривої окремо. Отже, ми спочатку дамо загальну методу їхнього розв'язку, а потім застосовуватимемо цей розв'язок до кожної кривої зокрема, тому — на бажання — можна відразу вивчати розділи про еліпсу, гіперболю й параболю, а вже після цього читати наступні параграфи.

§ 24. Основні задачі про криві 2-го порядку (центр, діяметр, осі, дотичні)

Спочатку проведемо те підставлення, що ми використовували в попередньому, а саме, підставимо в (1)

$$x=\xi+X,\quad y=\eta+Y,$$

матимемо:

$$AX^2+2BXY+CY^2+2X(A\xi+B\eta+D)+2Y(B\xi+C\eta+E+ \\ +f(\xi,\ \eta)=0, \qquad (17)$$

де

$$f(\xi,\ \eta)=A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2+2D\xi+2E\eta+F.$$

Уявімо тепер точку $S\equiv(\xi,\ \eta)$ і проведімо через неї пряму під кутом α до осі x-ів. Якщо x, y—координати якоїсь точки M, а ρ—її віддаль від S, тобто $\rho=MS$, то

$$x=\xi+\rho\cos\alpha,$$
$$y=\eta+\rho\sin\alpha.$$

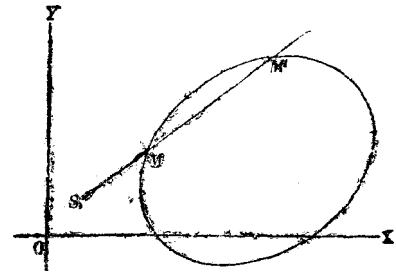

Рис. 53.

Якщо шукатимемо точки перетину прямої, проведеної через S з кривою (1), то задача зводиться за даних ξ, η і α до визначення ρ так, щоб (1) справджувалося. Підставляння те саме, що й раніш, лише треба взяти в (17)

$$X=\rho\cos\alpha \quad \text{і} \quad Y=\rho\sin\alpha.$$

Таким чином, матимемо:

$$\rho^2(A\cos^2\alpha+2B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha)+ \qquad (18) \\ +2\rho[A\xi+B\eta+D)\cos\alpha+(B\xi+C\eta+E)\sin\alpha]+f(\xi,\ \eta)=0.$$

Це рівнання квадратове відносно ρ і ввзначає — взагалі — два значіння ρ.

Відбираючи відповідно ξ, η і α, ми можемо вивести ряд висновків.

1. Геометричне значіння лівої частини рівнання (1). Хай S є точка, що не лежить на кривій, M і M'—точки зустрічі, проведеної через S, прямою з кривої. За властивістю коренів квадратового рівнання

$$\overline{SM}\,.\,\overline{SM'}=\frac{f(\xi,\ \eta)}{A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha}.$$

Отже, результат підставлення координат точки, що не лежить на кривій (1), у рівнання (1)

пропорціональний добуткові відтинків січної, а чинник пропорціональности залежить лише від напряму січної, а не від координат точки, з якою проведено січну.

2. Асимптотичні напрями. Як уже зазначалось, рівнання (18) визначає, взагалі, два значіння ρ, конечні і цілком визначені. Але є ще один напрям, за якого обертається в 0 коефіцієнт при ρ^2.

$$A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha = 0.$$

Для цих напрямів рівнання (18) обертається в рівнання першого степеня і один із його коренів обертається на безконечність. Пряма, проведена в одному з цих напрямів, зустрічає криву лише в одній конечно віддаленій точці.

Поділяючи на $\cos^2\alpha$, матимемо:

$$C.\operatorname{tg}^2\alpha + 2B\operatorname{tg}\alpha + A = 0. \tag{19}$$

Рівнання, що дає для $\operatorname{tg}\alpha$ два дійсні значіння за $B^2 - AC > 0$, тобто за $AC - B^2 < 0$; корені його рівні, якщо $AC - B^2 = 0$ і уявні за $AC - B^2 > 0$.

Таким чином, асимптотичні напрями дійсні, коли крива є гіперболя, уявні, коли — еліпса, а коли рівнання виражає параболю, то матимемо лише один напрям, такий, що паралельні до нього прямі зустрічають параболю лише в одній точці:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{B}{C} = -\frac{A}{B}. \tag{20}$$

3. Діяметр. Знайдемо геометричне місце середин паралельних хорд кривої 2-го порядку. Для цього, помітивши, що коли $S \equiv (\xi, \eta)$ є середина хорди, то SM і SM', — віддалі від неї точок зустрічі з кривою, рівні величиною і спрямовані в протилежні сторони; тому квадратове рівнання для ρ (18) буде неповне, тобто має бути:

$$(A\xi + B\eta + D)\cos\alpha + (B\xi + C\eta + E)\sin\alpha = 0,$$

або, якщо ввести кутовий коефіцієнт хорд $\operatorname{tg}\alpha = m$,

$$A\xi + B\eta + D + m(B\xi + C\eta + E) = 0. \tag{21}$$

Отже геометричне місце середин паралельних хорд є пряма лінія, її звуть діяметром кривої 2-го порядку.

У центральної кривої всі діяметри проходять через точку

$$\begin{aligned} A\xi + B\eta + D = 0, \\ B\xi + C\eta + E = 0; \end{aligned} \tag{9}$$

центр кривої є точка, що в ній усі хорди поділяються навпіл. Кутовий коефіцієнт діяметра

$$m' = -\frac{A + Bm}{B + Cm} \tag{22}$$

не залежить від m, якщо

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$$

і тоді він дорівнює

$$-\frac{A}{B} = -\frac{B}{C}. \qquad (16)\ \S\ 23$$

Усі діяметри параболі ($AC - B^2 = 0$) паралельні між собою.

Якщо $AC - B^2 \neq 0$, то, звільнившись у (22) від знаменників і переносячи всі члени в один бік, одержимо співвідношення для m' і m в неявному вигляді:

$$A + B(m + m') + Cmm' = 0 \tag{23}$$

Воно симетричне відносно m і m', і тому, якщо розв'язуємо його для m, то дістанемо

$$m = -\frac{A + Bm'}{B + Cm'}$$

тобто напрям хорд і діяметри зв'язані взаємно, а хорди, паралельні до діяметра, що поділяє навпіл дані хорди, мають діяметр, паралельний до них.

Такі напрями називаються **супряженими**, а самі діяметри — **супряжені діяметри**.

4. Осі. Супряжені діяметри, або краще—діяметр і хорди, що він поділяє навпіл, утворюють поміж собою різні кути. Можна поставити питання,—за яких умов вони взаємно перпендикулярні?

Тоді $m\,m' = -1$ і співвідношення поміж m і m' матиме вигляд:

$$A - B(m + m') - C = 0$$

тобто

$$m + m' = \frac{A - C}{B}$$

Але за $m\,m' = -1$

$$m + m' = m - \frac{1}{m} = -\frac{1 - m^2}{m}$$

таким чином:

$$\frac{2m}{1 - m^2} = \frac{2B}{C - A}$$

Але за $m = \operatorname{tg}\alpha$

$$\frac{2m}{1 - m^2} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Отже α—напрям хорд, перпендикулярних до відповідного діяметра, визначається умовою:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{C - A}$$

співвідношення, що вже ми мали при перетворенні рівнання 2-го степеня—(14) стор. 101.

Якщо крива параболя ($AC - B^2 = 0$), усі діяметри мають той самий напрям

$$m' = -\frac{A}{B} = \frac{B}{A},$$

(порівн. (16) стор. 103), а хорди, перпендикулярні до нього, напрямом

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{A} = \frac{C}{B}.$$

Діяметри, перпендикулярні до відповідних хорд, є осі симетрії кривої, — точки якої лежать попарно симетрично на рівних віддалях від такої осі.

Центральні криві мають по дві осі симетрії, що перетинаються в центрі — параболя має одну вісь симетрії. Осі симетрії кривої називають просто осями кривої. Задача спрощення рівнання (1) розв'язувалась (§ 23) піднесенням кривої до її осей симетрії (центральні криві), або до осей симетрії і перпендикуляра до неї в точці її перетину з кривої (параболя).

Рівнання осей кривої 2-го порядку.

Діяметр $f'_x + mf'_y = 0$ перпендикулярний до відповідних хорд, за умови

$$m \cdot \frac{A + Bm}{B + Cm} = +1,$$

або

$$Bm^2 + (A - C)m - B = 0.$$

Підставляючи сюди

$$m = -\frac{f'_x}{f'_y},$$

одержимо шукане рівнання у вигляді:

$$Bf'^2_x - (A - C)f'_x f'_y - Bf'^2_y = 0.$$

Можна одержати напрям осей кривої 2-го порядку способом, що ми його використовуватимемо пізніше для відшукування осей поверхень другого порядку.

Рівнання діяметра

$$(Ax + By + D)\cos\alpha + (Bx + Cy + E)\sin\alpha = 0$$

відповідно до хорд

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$$

буде тотожне з прямою

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + k = 0,$$

перпендикулярною до цих хорд. Отже

$$\frac{A\cos\alpha + B\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{B\cos\alpha + C\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

поділяючи 1-ше на $\cos\alpha$ і друге на $\sin\alpha$:

$$A + B\,\mathrm{tg}\,\alpha = C + B\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad \text{або} \quad A - C = B\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right) - \mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Звідси:

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2B}{A - C}\,.$$

Або, поклавши чинник пропорціональности $= S$:

$$\begin{aligned} A\cos\alpha + B\sin\alpha &= S\cos\alpha\,, \\ B\cos\alpha + C\sin\alpha &= S\sin\alpha\,, \end{aligned} \tag{a}$$

що можна переписати так:

$$\left.\begin{aligned} (A - S)\cos\alpha + B\sin\alpha &= 0 \\ B\cos\alpha + (C - S)\sin\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

рівнання будуть згідні, бо $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ не можуть одноразово бути $= 0$, і тому має бути

$$\begin{vmatrix} A - S & B \\ B & C - S \end{vmatrix} = 0\,. \tag{c}$$

Звідси:

$$S^2 - (A + C)\,S - B^2 = 0\,.$$

Помножаючи *b* (a) 1-ше на $\cos\alpha$ і 2-го на $\sin\alpha$ і додаючи, матимемо:

$$A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha + C\sin^2\alpha = S\,,$$

тобто S є значіння коефіцієнта при x^2.

Із рівнань (b) матимемо:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{S - A}{B} = \frac{B}{S - C}$$

(на підставі (c)).

Але за (c):

$$S_1 + S_2 = A + C, \quad S_1 S_2 = B^2$$

Звідси:

$$A - S_1 = S_2 - C, \quad \frac{B}{S_2} = \frac{S_1}{B}$$

Отже:

$$\frac{S_1 - A}{B} = -\frac{S_2 - C}{B} \text{ і } \operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Таким чином S_1 і S_2 є коефіцієнти при x^2 і y^2.

Точки зустрічі осей симетрії з кривою мають назву **вершин кривої**.

5. Дотична. Ми визначили дотичну, як границю січної, що її дві точки перетину з кривою зливаються. Для кривої 2-го порядку звідси одержимо, що дотична має з кривою лише одну спільну точку. Тому, якщо в рівнанні (18) приймемо, що (ξ, η) точка кривої (1), — так що $f(\xi, \eta) = 0$, то рівнання матиме вигляд:

$$(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)\rho^2 +$$
$$+ 2\rho[(A\xi + B\eta + D)\cos\alpha + (B\xi + C\eta + E)\sin\alpha] = 0,$$

Щоб і другий корінь цього рівнання обертався на 0, треба, щоб

$$(A\xi + B\eta + D)\cos\alpha + (B\xi + C\eta + E)\sin\alpha = 0.$$

Звідси кутовий коефіцієнт дотичної у (1) у точці її (ξ, η)

$$m' = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{A\xi + B\eta + D}{B\xi + C\eta + E}. \tag{24}$$

Тому рівнання дотичної напишеться

$$Y - \eta = -\frac{A\xi + B\eta + D}{B\xi + C\eta + E}(X - \xi),$$

або

$$(A\xi + B\eta + D)(X - \xi) + (B\xi + C\eta + E)(Y - \eta) = 0.$$

Вільний член можна перетворити за допомогою $f(\xi, \eta) = 0$. Справді, він дорівнює

$$= -[A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + D\xi + E\eta],$$

додаючи до цього

$$f(\xi, \eta) = A\xi^2 + 2B\eta\xi + C\eta^2 + 2D\xi + 2E\eta + F = 0,$$

матимемо, що вільний член

$$= D\xi + E\eta + F.$$

Отже рівнання дотичної остаточно зводиться до вигляду:

$$(A\xi + B\eta + D)X + (B\xi + C\eta + E)Y + D\xi + E\eta + F = 0. \quad (25)$$

Помічаємо, що рівнання симетричне відносно X, Y, з одного боку, і ξ, η — з другого; його можна записати

$$(AX + BY + D)\xi + (BX + CY + E)\eta + DX + EY + F = 0. \quad (25')$$

Помічаємо ще, що те саме рівнання можна дістати, виходячи із загального означення дотичної безпосередньо і розшукуючи за загальними правилами похідну неявної функції

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2(Ax + By + D)}{2(Bx + Cy + E)}.$$

Підставляючи в загальне рівнання дотичної,

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

матимемо те саме рівнання, що й раніш. Тільки тут ми позначили x, y — координати точки дотику.

Наостанку, можна дістати рівнання січної і, як його границю, рівнання дотичної з указаного вище виразу для відтинків січної

$$\overline{SM} \,.\, \overline{SM'} = \frac{f(X, Y)}{A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha}$$

де S є точка січної — з координатами X, Y. Справді,

$$\overline{SM}\cos\alpha = x_1 - X \qquad SM\sin\alpha = y_1 - Y$$
$$\overline{SM'}\cos\alpha = x_2 - X \qquad SM'\sin\alpha = y_2 - Y$$

і, таким чином, якщо звільнимося від їхніх знаменників, то матимемо:

$$\begin{aligned} f(X, Y) = A(x_1 - X)(x_2 - X) + \\ + B[(x_1 - X)(y_2 - Y) + (x_2 - X)(y_1 - Y)] + \\ + C(y_1 - Y)(y_2 - Y). \end{aligned} \quad (26)$$

Це рівнання січної, — бо члени 2-го степеня у X, Y праворуч і ліворуч взаємно знищуються, і рівнання справджується за $X = x_1$ і $Y = y_1$ і за $X = x_2$, $Y = y_2$.

Якщо покладемо $x_1 = x_2 = x$ і $y_1 = y_2 = y$, то матимемо рівнання дотичної

$$f(X, Y) \equiv AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = \\ = A(X-x)^2 + 2B(X-x)(Y-y) + C(Y-y)^2. \quad (27)$$

Розімкнувши дужки і зводячи, матимемо (25). Треба лише пам'ятати, що координати x, y справджують рівнання (1):

$$f(x, y) = 0.$$

Останній спосіб виводити рівнання дотичної можна застосовувати до всякої кривої, заданої альґебричним рівнанням поміж x і y.

§ 25. Дотична з даної точки. Поляра і полюс

Задача. Через дану точку проведіть до кривої 2-го порядку (1) дотичну.

Невідомі координати x, y точки дотику мусять справджувати рівнання (1):

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 5Ey + F = 0. \quad (1)$$

Крім того, дотична в цій точці повинна проходити через дану точку (x_1, y_1). Тому, підставляючи $X = x_1$, $Y = y_1$ в рівнання дотичної (25′), обернемо його на тотожність:

$$(Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + Cy_1 + E)y + \\ + Dx_1 + Ey_1 + F = 0. \quad (28)$$

Ці два рівнання, якщо розв'яжемо їх укупі, і дадуть шукані координати точок дотику доточних, що проходять через дану точку. Їх маємо, таким чином, дві.

Геометрично сумісний розв'язок рівнань (1) і (28) зводиться до знаходження точок перетину ліній, виражених цими рівнаннями, тобто—в даному разі—кривої 2-го порядку, вираженої рівнанням (1), і лінії, вираженої рівнанням (28). Це рівнання 1-го порядку відносно x, y, і тому це пряма. Якщо дана точка лежить на самій кривій (1), то ця пряма зливається з дотичною і зустрічає криву в двох злитих точках. За інших випадків вона перетинається у двох

різних точках, дійсних чи уявних, і, таким чином, вона є хорда стичности дотичних, що проходять через дану точку.

Кожній точці площини відповідає цілком визначена пряма (28). Початкові координат належить пряма

$$Dx+Ey+F=0.$$

Виняток буде для центра кривої, бо для нього це рівнання обертається на

$$Dx_0+Ey_0+F=0,$$

де x_0 і y_0 є координати центра.

Можна сказати, що центрові відповідає безконечно віддалена пряма.

Пряма (28) має назву поляри точки (x_1, y_1) відносно кривої (1).

І, навпаки, для кожної прямої

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

можна знайти точку, що для неї ця пряма буде полярою відносно кривої (1). Справді, для цього пряма повинна бути тотожньою з прямою (28) за відповідних значінь x_1, y_1, що й дає для визначення x_1, y_1 рівнання:

$$\frac{Ax_1+By_1+D}{\alpha}=\frac{Bx_1+Cy_1+E}{\beta}=\frac{Dx_1+Ey_1+F}{\gamma}$$

або:

$$\begin{aligned} Ax_1+By_1+D&=\sigma.\alpha \\ Bx_1+Cy_1+E&=\sigma.\beta \\ Dx_1+Ey_1+F&=\sigma.\gamma. \end{aligned} \tag{29}$$

Ця точка зветься полюсом прямої $\alpha x+\beta y+\gamma=0$.

Саме рівнання дотичної, проведеної до кривої (1) із точки (x_1, y_1) можна одержати так. Якщо (x_1, y_1) дана точка і (x, y) будь-яка точка на дотичній, то всяка третя точка прямої, що злучає перші дві (тобто тої самої дотичної), має координати

$$\frac{mx_1-nx}{m-n}, \frac{my_1-ny}{m-n}.$$

Виразимо, що ця точка належить кривій (1)

$$A\left(\frac{mx_1-nx}{m-n}\right)^2+2B\left(\frac{mx_1-nx}{m-n}\right)\left(\frac{my_1-ny}{m-n}\right)+$$
$$+C\left(\frac{my_1-ny}{m-n}\right)^2+\ldots\ldots=0.$$

або, помноживши на $(m-n)^2$:

$$\begin{gathered}m^2(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F)-\\-2mn[x(Ax_1+By_1+D)+y(Bx_1+Cy_1+E)+\\+(Dx_1+Ey_1+F)]+\\+n^2[Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F]=0,\end{gathered}$$

або, подаючи це в скороченому вигляді:

$$\begin{gathered}m^2f(x_1,\ y_1)-2mn[x(Ax_1+By_1+D)+y(Bx_1+Cy_1+E)+\\+(Dx_1+Ey_1+E)]+n^2f(x_1,\ y)=0.\end{gathered}$$

Якщо пряма дотикається до кривої (1), то вона зустрічає її у двох злитих точках, і тому це останнє рівнання повинно мати два рівні корені, тобто мусить бути

$$\begin{gathered}f(x_1,\ y_1)\,.\,f(x,\ y)=\\=[x(Ax_1+By_1+D)+y(Bx_1+Cy_1+E)+\\+Dx_1+Ey_1+F]^2\end{gathered}\qquad(30)$$

Отаке співвідношення, що його за даних x_1, y_1 повинні справджувати координати кожної точки, що проходять через $(x_1,\ y_1)$ дотичних до (1). Воно 2-го степеня відносно x, y. Отже це і є рівнання сукупности цих двох дотичних.

Умову, щоб дана пряма дотикалась кривої (1), дістанемо, виразивши, що дві точки перетину прямої з кривою зливаються, і тому рівнання, яке ми дістанемо, виключаючи одну із координат, має рівні корені.

У більш симетричному вигляді ми дістанемо це саме рівнання, якщо використаємо рівнання дотичної до кривої (1) і утотожнимо його з рівнанням даної прямої

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0.$$

Для цього треба, щоб було

$$\frac{Ax+By+D}{\alpha}=\frac{Bx+Cy+E}{\beta}=\frac{Dx+Ey+F}{\gamma}$$

або, вводячи чинник пропорціональности:

$$\begin{aligned} Ax+By+D&=\sigma\alpha \\ Bx+Cy+E&=\sigma\beta \\ Dx+Ey+F&=\sigma\gamma \end{aligned} \tag{29}$$

Крім того, координати, що фігурують тут, є точки дотику, вони мають справджувати і рівнання прямої:

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0.$$

Виключаючи з чотирьох рівнань x, y і σ, матимемо, як умову їхньої згідности

$$0=\begin{vmatrix} A & B & D & \alpha \\ B & C & E & \beta \\ D & E & F & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} \tag{31}$$

Це є шукана умова дотику прямої з кривою (1).

Якщо впорядкувати (31) за степенями α, β і γ, то одержимо однорідне квадратове рівнання, що його справджуватимуть коефіцієнти рівнань усіх прямих, дотичних до (1).

Якщо помітимо, що ці коефіцієнти можна вважати за координати прямої (так звані танґенціяльні координати), то це є рівнання кривої (1) танґенціяльних координат. Справді, якщо в тому рівнання α, β, γ вважати за змінні, то воно виділяє з усіх можливих прямих площини

$$\alpha x+By+\gamma=0,$$

ті, що дотикаються до кривої (1), тобто проходять через дві безконечно близькі точки кривої. Безконечно мала хорда, що злучає ці точки, належить однаково і дотичній і кривій, вона є, таким чином, границею многокутників, з безконечно малими боками. Пряма, дотична до кривої, переміщується так, що послідовно дотуляється до кривої, зливаючись з нею повз безконечно малого прямолінійного

„елемента“ — вона, як кажуть, „огинає“ криву (обгортка кривої).

Хай тепер дано точку (x_1, y_1); прямі, що проходить через неї, мають такі α, β, γ, що справджують рівнання

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0.$$

Прямі, що вдовольняють це рівнання і рівнання (31), є дотичні до кривої (1), що проходять через точку (x_1, y_1). Їх дві.

Клясою кривої зветься, взагалі, число дотичних, що їх можна провести до кривої з тої точки, що на цій кривій не лежить. Із попереднього випливає: крива другого порядку є крива другої кляси.

РОЗДІЛ VII

Еліпса

§ 26. Вигляд і форма

Крива, визначена рівнанням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{32}$$

не може мати точок з абсцисами, своєю абсолютною величиною більшими за a, або, щоб ордината своєю абсолютною величиною була більша за b. Крім того, коли $x=\pm a$, тоді має бути $y=0$, а коли $y=\pm b$, тоді $x=0$. Останні чотири точки звуться вершинами кривої, а віддаль двох перших, тобто $2a$, і двох останніх, тобто $2b$, зветься осями. Звичайно покладають, що $a>b$ (інакше можна було б повернути осі на 90°), і тоді $2a$ — більша вісь, що йде віссю x-ів, а $2b$ — мала вісь, що йде віссю y-ків.

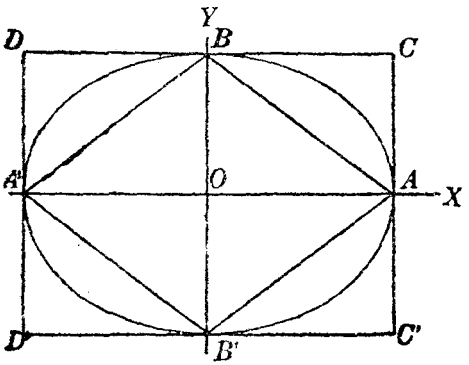

Рис. 54.

Якщо на осях відкласти від початку по осі OX відтинки OA і OA', що дорівнюватимуть a, і по осі y-ків — відтинки OB і OB', що дорівнюють b, то, провівши через A і A' прямі, паралельні до осі OY, а через B і B' — прямі, паралельні — OX, пересвідчимось, що крива замкнута у здобутому таким чином прямокутнику $D'DCC'$.

Вона складається з чотирьох симетричних часток, бо рівнання не зміняється, якщо замінити x на $-x$, або y на $-y$

Злучивши A і A' з B і B', бачимо, що точки кривої лежатимуть вище ламаної $A'BA$ і нижче ламаної $A'B'A$.

Справді, для дуги BA

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{(a-x)(a+x)}$$

а для прямої BA:

$$y=\frac{b}{a}(a-x)=\frac{b}{a}\sqrt{(a-x)(a-x)}$$

Ордината кривої, очевидно, більша за відцовідну ординату прямої BA, бо чинник $\sqrt{a+x}$ більший за $\sqrt{a-x}$ при $0<x<a$.

Симетрія кривої відносно обох осей координат дозволяє поширити висновок і на три інші дуги.

Якщо перенесемо вільний член ліворуч, то матимемо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Якщо підставимо координати точки, що не лежить на еліпсі, то матимемо результат, відмінний від 0. Крім того, якщо точка лежить у середині еліпси, то x (чи y) буде менше за відповідних x чи y точки на еліпсі, а тому результат матимемо від'ємний; якщо ж візьмемо точку поза еліпсою, то x (чи y) будуть більші, ніж для відповідної точки на еліпсі, і результат підставлення матимемо додатний.

§ 27. Діяметр

Візьмімо ряд паралельних прямих

$$y=mx+k$$

Від одної точки до другої зміняється лише k. Знайдемо точки перетину прямої з еліпсою. Абсциси точок перетину визначається рівнанням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+k)^2}{b^2}-1=0$$

або

$$x^2(b^2+a^2m^2)+2mka^2x+a^2(k^2-b^2)=0,$$

за властивістю коренів квадратового рівнання

$$x_1+x_2=-\frac{mka^2}{b^2+a^2m^2}$$

Отже координати середини хорди будуть

$$X=-\frac{mka^2}{b^2+a^2m^2};\quad Y=-\frac{mka^2}{b^2+a^2m^2}\cdot m+k$$

або

$$Y=\frac{b^2k}{b^2+a^2m^2}$$

Зміняючи k, матимемо різні точки; проте, всі вони є точки середин паралельних хорд, що мають напрям m. Виключаючи k, матимемо співвідношення, що його вдовольняють усі ці точки, тобто рівнання їхнього геометричного місця. Для цього досить узяти відношення

$$\frac{Y}{X}=-\frac{b^2}{a^2m}.$$

Отже в еліпсі (1) геометричне місце середин паралельних хорд є пряма

$$Y=-\frac{b^2}{a^2m}X, \tag{33}$$

що проходить через початок. Кутовий коефіцієнт діяметра

$$m'=-\frac{b^2}{a^2m}$$

і тому

$$mm'=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{34}$$

Звідси, навпаки

$$m=-\frac{b^2}{a^2m'}$$

Отож, напрями m і m' зв'язані співвідношенням (34), тому вони супряжені в тому розумінні, що хорди, паралельні одному напрямові, мають діяметр, паралельний іншому. Дві прямі, що проходять через початок і таким чином зв'язані, звуться супряженими діяметрами.

Початок координат для еліпси (32) є точка, що через неї проходять усі діяметри і в ній поділяються навпіл усі ті хорди, що через неї проходять. Це є центр еліпси.

Якщо $b \neq a$, то супряжені діяметри не перпендикулярні поміж собою. Однак є одна пара взаємно-перпендикулярних супряжених діяметрів,—а саме, коли $m = 0$, $m' = \infty$, а також, коли $m' = 0$ і $m = \infty$: осі є пара супряжених діяметрів взаємно перпендикулярних.

§ 28. Дотична до еліпси

Пряма

$$y = mx + k$$

дотикається до еліпси, якщо дві її точки перетину з еліпсою зливаються. Але тоді рівнання, що визначає абсциси точок перетину, повинні мати рівні корені. Отож, має бути:

$$(b^2 + a^2m^2)\ a^2(k^2 - b^2) = m^2k^2a''$$

або

$$a^2b^2k^2 - a^2b^2(b^2 + a^2m^2) = 0\,.$$

Отже мусить бути

$$k^2 = b^2 + a^2m^2\,,$$

і пряма

$$y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2} \tag{35}$$

дотикається до еліпси.

Дотичну до еліпси в даній її точці (x_1, y_1) можна одержати із щойно виведеного рівнання дотичної даного напряму. Справді, пряма

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

буде за попереднім дотичною, якщо

$$y_1 - mx_1 = \pm\sqrt{b^2 + a^2m^2}.$$

Щоб визначити звідси m, піднесемо обидві частини рівности до квадрату й перенесемо всі члени праворуч:

$$m^2(a^2 - x_1^2) + 2mx_1y_1 + b^2 - y_1^2 = 0,$$

але з рівнання еліпси

$$a^2 - x_1^2 = \frac{a^2y_1^2}{b^2}$$

$$b^2 - y_1^2 = \frac{b^2x_1^2}{a^2}$$

Отже рівнання набирає вигляду:

$$\frac{a^2m^2y_1^2}{b^2} + 2mx_1y_1 + \frac{b^2x_1^2}{a^2} = 0$$

тобто

$$\left(\frac{amy_1}{b} + \frac{bx_1}{a}\right)^2 = 0$$

і таким чином

$$m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

Рівнання дотичної тому напишеться:

$$Y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(X - x_1).$$

Помноживши на $\frac{y_1}{b^2}$, перенесемо всі члени в один бік:

$$\frac{Yy_1}{b^2} + \frac{Xx_1}{a^2} - \left(\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2}\right) = 0,$$

або за допомогою рівнання еліпси:

$$\frac{Xx_1}{a^2} + \frac{Yy_1}{b^2} - 1 = 0 \qquad (36)$$

Це саме рівнання можна, звичайно, одержати і із загального рівнання дотичної:

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x).$$

Справді, похідна неявної функції y, визначеної рівнанням (1):

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2x}{a^2}:\frac{2y}{b^2}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

Проте, не використовуючи навіть теореми про похідну неявної функції, можна знайти безпосередньо, переходячи до границі, як у § 14, для кола:

$$\lim_{x'\to x}\frac{y'-y}{x'-x}=-\frac{b^2(x'+x)}{a^2(y'+y)},$$

підставивши матимемо те саме рівнання, що й раніш.

§ 29. Дотична із зовнішньої точки. Поляра

Задача. Проведіть дотичну до еліпси (1) через точку (x_1, y_1), що на ній не лежить. Хай дано точку (x_1, y_1) не на еліпсі і треба провести через цю точку до еліпси дотичні.

Прямі, що проходять через точку x_1, y_1

$$y-y_1=m(x-x_1),\ \text{або:}\ y=mx+(y_1-mx_1), \qquad (a)$$

будуть до еліпси (1) дотичними, якщо рівнання

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{[mx+(y_1-mx_1)]^2}{b^2}-1=0$$

або

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)+\left(\frac{2m(y_1-mx_1)}{b^2}x+\frac{(y_1-mx_1)^2}{b^2}-1=0 \qquad (b)$$

має рівні корені, тобто за умови

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{(y_1-mx_1)^2}{b^2}-1\right)=\frac{m^2(y_1-mx_1)^2}{b^4} \qquad (c)$$

Розімкнувши в останньому дужки і звівши, матимемо:

$$\frac{1}{a^2}\frac{(y_1-mx_1)^2}{b^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}=0.$$

або

$$(y_1 - mx_1)^2 - (b^2 + am^2) = 0; \qquad (d)$$

впорядковуючи за степенями m, ми матимемо квадратове рівнання для m:

$$y_1^2 - b^2 - 2mx_1y_1 + m^2(x_1^2 - a^2) = 0 \qquad (d')$$

— через точку (x_1, y_1) можна провести дві дотичні. Умова для їхніх коефіцієнтів:

$$m = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{x_1^2 y_1^2 - (x_1^2 - a^2)(y_1^2 - b^2)}}{x_1^2 - a^2},$$

що після зведення дає

$$m = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2}}{x_1^2 - a^2}$$

дві дотичні дійсні, якщо точка поза еліпсою, уявні, — коли вона в середині еліпси, і злиті, коли (x_1, y_1) на самій еліпсі.

Координати самих точок дотику матимемо з рівнання (b) (воно обертається в точний квадрат).

$$\xi = -\frac{m(y_1 - mx_1)}{b^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)} = -\frac{ma^2(y_1 - mx_1)}{b^2 + a^2m^2},$$

а відповідно

$$y = m\xi + (y_1 - mx_1) = (y_1 - mx_1)\left[-\frac{m^2a^2}{b^2 + a^2m^2} + 1\right] =$$
$$= \frac{(y_1 - mx_1)b^2}{b^2 + a^2m^2};$$

розглядаючи ці значіння ξ і η, помічаємо, що

$$\frac{\xi x_1}{a^2} = \frac{-mx_1(y_1 - mx_1)}{b^2 + a^2m^2}; \quad \frac{yy_1}{b^2} = \frac{y_1(y_1 - mx_1)}{b^2 + a^2m^2},$$

отже

$$\frac{\xi x_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{(y_1 - mx_1)^2}{b^2 + a^2m^2},$$

тобто за (d)

$$\frac{\xi x_1}{a^2}+\frac{\eta y_1}{b^2}=1 \qquad (e)$$

для обох точок дотику дотичних, що їх проведено через точку (x_1, y_1). Ці точки лежать на еліпсі, лежать і на прямій (e). Вони будуть дійсними, коли точка поза еліпсою, вони зливаються з (x_1, y_1), коли (x_1, y_1) на еліпсі, і тоді (e) буде дотичною.

Однак ми могли б дійти до рівнання (e) і простіш, міркуючи так. Шукаємо точку дотику. Невідомі координати її справджують рівнання еліпси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad (32)$$

і, крім того, рівнання дотичної в цій точці справджується координатами точки (x_1, y_1):

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1=0 \qquad (37)$$

Сумісний розв'язок двох рівнань дає шукані координати. Геометричне значіння цього те, що ми шукаємо точки перетину еліпси з прямою (37), що має назву поляри точки (x_1, y_1).

Як і для кола, поляра збігається з дотичною, якщо точка (x_1, y_1) лежить на еліпсі. Якщо рівнання еліпси помножимо на $\frac{y_1^2}{b^2}$ (це можливо за $y_1 \neq 0$) і замінимо $\frac{yy_1}{b^2}$ із рівнання поляри, то матимемо квадратове рівнання

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)-2\frac{xx_1}{a^2}+1-\frac{y_1^2}{b^2},$$

що матиме дійсні корені за умови

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\left(1-\frac{y_1^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)>0$$

або

$$\frac{y_1^2}{b^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)>0$$

тобто, якщо точка (x_1, y_1) лежить поза еліпсою. Якщо ж дана точка лежить у середині еліпси, корені будуть уявні, а поляра еліпси не перетинає.

Кожній точці належить цілком визначена пряма, як її поляра. Лише початкові—центрові еліпси—належить пряма, виражена неможливим рівнанням:

$$0 \cdot \frac{x}{a^2} + 0 \cdot \frac{y}{b^2} - 1 = 0,$$

у цьому разі говорять: поляра центра є безконечно віддалена пряма.

І, навпаки, для кожної прямої можна знайти таку точку (полюс), що для неї пряма буде полярою.

Справді, якщо дана пряма

$$Ax + By + C = 0,$$

то, утотожнюючи її з полярою точки (x_1, y_1), знайдемо:

$$\frac{x_1^2}{a^2 A} = \frac{y_1}{b^2 B} = \frac{-1}{C},$$

тобто полюс прямої має координати:

$$x_1 = -a^2 \frac{A}{C}, \quad y_1 = -b^2 \frac{B}{C}.$$

Властивості поляр.

1. Якщо дано дві точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) і друга лежить на полярі першої, то і перша лежить на полярі другої, бо за умовою

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} - 1 = 0.$$

2. Якщо дано дві точки (x_1, y_1) (x_2, y_2), то полюс прямої, що їх злучає, є точка перетину їхніх поляр.

3, Якщо точка описує пряму, то її поляра обертається навколо полюса цієї прямої.

Ці теореми доводиться так само, як і відповідні властивості для кола.

§ 30. Еліпса, як проєкція кола

Порівнюємо еліпсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad (32)$$

з колом

$$x^2+y^2-a^2=0 \qquad (32')$$

що його рівнання можна написати так:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-1=0$$

Це коло має з еліпсою спільний центр, а більша вісь еліпси буде і діяметром кола. Розв'язуючи (32) відносно y, матимемо:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Розв'язуючи (32') відносно y, матимемо:

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

Звідси: ординати еліпси (32) і кола (32') відносяться, як мала вісь (32) відноситься до великої. Тому можна, позначивши φ кут, що його косинус $=\frac{b}{a}$ (це є дійсний кут, бо $\frac{b}{a}<1$), маємо:

$$y_{\text{еліпси}}=y_{\text{кола}}\cos\varphi$$

Тому ординати еліпси можна розглядати, як катети прямокутніх трикутників, що їхні гіпотенузи — це є відповідні ординати кола, а прилежний кут — φ, тобто можна розглядати ординати еліпси, як проєкції ординат кола, що має більшу вісь еліпси за діяметр і лежить у площині, яка з площиною еліпси утворює кут φ $\left(\arccos\frac{b}{a}\right)$. Можна тому сказати: коло з радіюсом a проєктуємо ортогонально на площину, що проходить через центр його і утворює з його

площиною кут φ $\left(\cos\varphi = \frac{b}{a}\right)$. У проєкції матимемо еліпсу, що її більша вісь дорівнює діяметрові кола, а мала вісь $= 2a\cos\varphi = 2a \cdot \frac{b}{a} = 2b$; підошви перпендикулярів, спущених із точок кола, лежать на еліпсі.

Якщо, навпаки, проєктуватимемо еліпсу з осями $2a$ і $2b$ на площину, що проходить через його малу вісь і утворює з його площиною той самий кут φ $\left(\cos\varphi = \frac{b}{a}\right)$, то в проєкції одержимо коло з радіюсом $= b$.

Справді, x із (32)

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2};$$

помножаючи це на $\frac{b}{a}$, матимемо:

$$x_1 = \pm\sqrt{b^2 - y^2}$$

тобто

$$x_1^2 + y^2 = b^2. \qquad (32'')$$

Помічаючи, що, коли накривати площину кола (32) площиною еліпси, обертаючи навкруги прямої перетину двох площин, то точки кола пересуватимуться в площинах, перпендикулярних до осі обертання, і тому їхні проєкції переміщатимуться повз відповідних ординат, і, таким чином, точки кола (32) і еліпси (32′), що мають спільні абсциси і лежать у різних площинах, після злиття лежатимуть на одній ординаті, тобто знову матимуть спільну абсцису.

Щодо кола (32″), то зауважимо, що його зводимо в площину еліпси, обертаючи навколо малої осі останнього і точки кола і еліпси, що мали до обертання однакові ординати і після злиття цих площин, матимуть ті самі ординати.

Звідси можна будувати еліпсу за точками, якщо дано її півосі a, b $(b < a)$. Із точки, обраної за центр, радіюсами a і b обводимо коло. Провівши будь-який радіюс (під кутом t), що зустрічає менше коло в точці M', а більше — в M'', ма-

тимемо, що відповідна точка еліпси має ту саму абсцису, що M'', і ту саму ординату, що і M'.

Тому, провівши $PM' \parallel OX$ і $M''N \parallel OY$, в їх перетині матимемо точку M еліпси (32).

Справді, для точки M (рис. 55)

$$ON = x = OM'' \cos t = a \cos t,$$
$$MN = OP = y = OM' \sin t = b \sin t,$$

отже

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

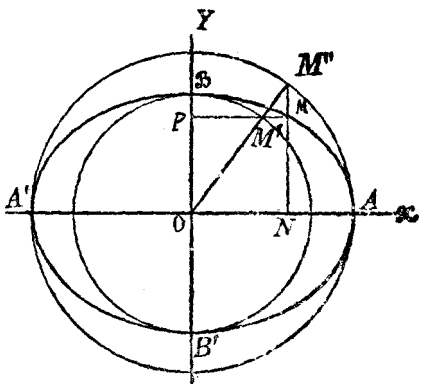

Рис. 55.

Побудовання дотичної в точці еліпси можна також зробити, якщо еліпсу розглядати, як проекцію кола (рис. 56). Тим способом, що й раніш, будуємо точку M на еліпсі і проведемо в ній дотичну. Для цього, помітивши, що дотична до еліпси в точці M проекція точки M' є проекція дотичної до кола в точці M''. Ця остання, перпендикулярна до OM'' у точці M'', зустрічає більшу вісь еліпси (вісь обертання) у точці T. Ця точка належить і дотичній на еліпсі, і вона є сама своєю проекцією. Злучивши M і T, матимемо дотичну еліпси.

Не зупиняючись на інших побудованнях, укажемо лише, як зазначеним способом можна збудувати діяметр, супряжений з даним. Зауважимо для цього, що проекція C' точки C, що поділяє даний відтинок AB в даному відношенні $\frac{m}{n}$, поділяє також у тому самому відношенні і проекцію $A'B'$ цього відтинку на будь-яку площину; справді, через паралельність перпендикулярних до одної площини прямих AA', BB', CC' матимемо:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C}{C'B}$$

Тому пара супряжених діяметрів, як прямих, що кожна з них поділяє навпіл хорди, паралельні одна одній, мусить бути проєкцією пари супряжених діяметрів кола, тобто пари

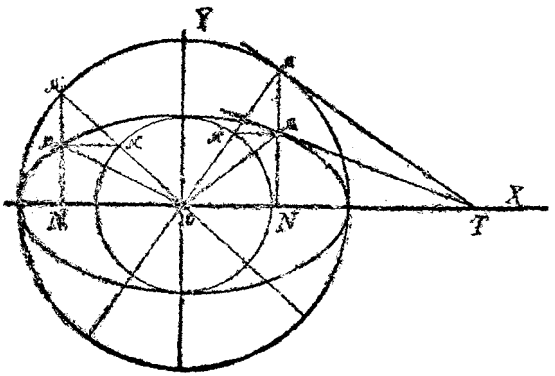

Рис. 56.

двох його взаємно-перпендикулярних діяметрів. Тому, побудувавши перпендикуляр OM''_1 до OM'' (M'' відповідає в колі точці M), будуємо точку еліпси M_1, що відповідає точці M''_1, і тоді OM і OM_1 і є пара супряжених діяметрів.

§ 31. Властивості супряжених діяметрів

Розглядаючи еліпсу, як проєкцію кола, легко одержати метричні співвідношення, що зв'язують довжини супряжених півдіяметрів (вони є теж проєкції супряжених півдіяметрів кола).

Хай x, y, a' є координати кінця й довжина одного, а x', y' і b — координати кінця й довжина другого діяметра.

За попереднім

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$
$$x' = a\cos t', \; y' = b\sin t'$$

і

$$t' = t + \frac{\pi}{2}$$

тобто

$$x' = -a\sin t, \; y' = b\cos t$$

Звідси

$$a'^2 = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t,$$
$$b'^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$$

і

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \tag{33}$$

Отож:

I. Сума квадратів двох супряжених півдіяметрів є величина стала і дорівнює вона сумі квадратів півосей (перша Аполлонієва теорема).

Далі, якщо α є кут першого півдіяметра з OX і β — кут другого, то

$$x = a' \cos \alpha, \quad y = a' \sin \alpha,$$
$$x' = b' \cos \beta, \quad y' = b' \sin \beta,$$
$$-x'y + y'x = a'b' \sin (\beta - \alpha)$$

але, з другого боку

$$-x'y + y'x = a \cos t \,.\, b \cos t \cdot$$
$$-(-a \sin t)\, b \sin t = ab$$

Отже:

$$a'b' \sin (\beta - \alpha) = ab, \tag{34}$$

тобто:

II. Площа прямокутника, збудованого на двох супряжених півдіяметрах, є величина стала, і дорівнює вона площі прямокутника, збудованого на осях. (Друга Аполлонієва теорема).

Звідси можна вивести величину рівних супряжених діяметрів.

Справді, якщо a' дорівнює b', то за I-ою Аполлонієвою теоремою

$$2a'^2 = a^2 + b^2$$

і

$$a' = b' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \tag{35}$$

Крім того, через симетричність кривої рівні діяметри рівно похилені до додатного і від'ємного напрямів осі x-ів, а тому,

$$\beta = \pi - \alpha \quad \text{і} \quad \beta - \alpha = \pi - 2\alpha.$$

Отже, за II-ою Аполлонієвою теоремою

$$a'^2 \sin 2\alpha = ab$$

а тому

$$\sin 2\alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \tag{36}$$

Еліпса, віднесена до двох супряжених діяметрів. Якщо два супряжені діяметри обрати за осі координат і тому центр знову за початок координат, то в рівнанні кривої не буде не лише членів 1-го степеня, а і членів з $x'y'$, бо кожному значінню x' (відповідно і y') відповідатимуть два значіння y' (відповідно x'), і вони будуть рівні величиною, а протилежні знаками. Таким чином, рівнання матиме вигляд:

$$Ax'^2 + By'^2 = 1$$

А що за $y' = 0$, $x' = \pm a'$ і за $x' = 0$, $y' = \pm b$, то рівнання остаточно набирає вигляду:

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1 \tag{37}$$

Зокрема, якщо взяти за осі систему рівних супряжених діяметрів, то рівнання буде:

$$x'^2 + y'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

але вже осі координат не прямокутні:

$$\sin \omega = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

Зв'язок діяметра з дотичною. Якщо точку дотику (x_1, y_1) злучити з центром, то діяметр, супряжений з цим напрямом

$$m = \frac{y_1}{x_1},$$

матиме кутовий коефіцієнт

$$m' = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

але це є кутовий коефіцієнт дотичної в (x_1, y_1). Отже, дотична є паралельна до діяметра, супряженого з проведеним у точку дотику.

§ 32. Нормаля

Діяметр, проведений в колі у точку дотику, є перпендикулярний до дотичної. В еліпсі це взагалі не буває (а лише при вершинах). Перпендикуляр до дотичної в точці дотику має рівнання

$$Y-y=\frac{a^2y}{b^2x}(X-x)$$

або

$$\frac{b^2(Y-y)}{y}=\frac{a^2(X-x)}{x}$$

або ще інакше:

$$\frac{b^2Y}{y}+\frac{a^2X}{x}=-b^2+a^2, \tag{38}$$

він не проходить через початок, якщо $a \neq b$ і зветься нормалею. Точки зустрічі нормалі з віссю x-ів мають абсцису

$$X=x-\frac{b^2}{a^2}x=x\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2x, \tag{39}$$

якщо позначити

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$$

(див. далі).

Звідси квадрат довжини нормалі

$$N^2=y^2+(x-e^2x)^2=y^2+x^2(1-e^2)^2=$$
$$=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)+\frac{b^4}{a_4}x^2=b^2-\frac{b^2e^2x^2}{a^2}x^2=$$
$$=\frac{b^2}{a^2}(a^2-e^2x^2)=\frac{b^2}{a^2}(a-ex)(a+ex)$$

§ 33. Фокуси еліпси і їхні властивості

Означення. З вершини малої осі обведемо дугу радіюсом, рівним більшій півосі a. Він перетинає більшу вісь еліпси у двох точках F і F', що лежать на віддалі $c=\sqrt{a^2-b^2}$ від центра, і, таким чином, вони мають координати $(\pm c, 0)$.

Ці точки мають ту властивість, що віддаль від кожної з них до точок еліпси виражається лінійно абсцисою точки.

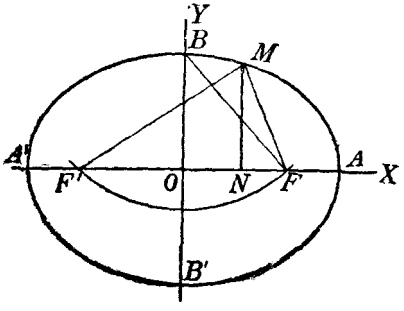

Рис. 57.

Справді

$$\overline{FM}^2 = (x-c)^2 + y^2,$$

але за рівнанням еліпси

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2;$$

таким чином

$$\overline{FM}^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 =$$

$$= x^2\frac{a^2-b^2}{a^2} - 2cx + a^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = \left(\frac{cx}{a} - a\right)^2$$

бо

$$1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} \quad \text{і} \quad c^2 + b^2 = a^2$$

звідси

$$FM = \pm\left(\frac{cx}{a} - a\right)$$

Перед усім виразом треба взяти такий знак, щоб FM було додатним. Але $x < a$, $\frac{c}{a} < 1$, тому треба взяти знак — і

$$FM' = a - \frac{cx}{a} \tag{40}$$

Відношення

$$\frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

має назву ексцентриситету еліпси; його позначають e

Коли б ви взяли інший фокус $F' = (-c, 0)$, то мали б

$$F'M^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = \left(\frac{cx}{a} + a\right)^2$$

і

$$F'M = a + ex. \tag{40'}$$

Звідси випливає визначна властивість еліпси:

I. Сума фокальних радіюсів-векторів є величина стала, і вона дорівнює більшій осі еліпси, бо, справді, додаючи маємо:

$$\overline{FM} + \overline{F'M} = 2a. \tag{41}$$

Цю властивість можна використати, щоб визначити криву. Справді, якщо візьмемо точки

$$F \equiv (+c,\ 0) \quad \text{і} \quad F' \equiv (-c,\ 0)$$

і виразимо, що

$$\overline{FM} + \overline{F'M} = 2a,$$

то матимемо:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

або

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Підносячи до квадрату, матимемо:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \\ + (x-c)^2 + y^2$$

або після зведення й скорочення на 4:

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Підносячи ще раз до квадрату, матимемо:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

або

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

За $a > c$ можна покласти $a^2 - c^2 = b^2$, і дійдемо до рівнання

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

II. Фокальні радіюси-вектори однаково похилені до дотичної. Інакше: нормаля поділяє

кут поміж фокальними радіюсами-векторами навпіл. Треба довести, що в трикутнику $F'MF$ нормаля MS є бісектриса. Але за попереднім $OS = e^2x$.

Звідси:

$$F'S = c + e^2x = ae + e^2x = c(a + ex)$$
$$FS = c - e^2x = ae - e^2x = c(a - ex)$$

І таким чином

$$\frac{F'S}{FS} = \frac{a + ex}{a - ex} = \frac{F'M}{FM}$$

Це й показує за відомою теоремою елементарної геометрії, MS є бісектриса кута. Ця властивість з'ясовує назву

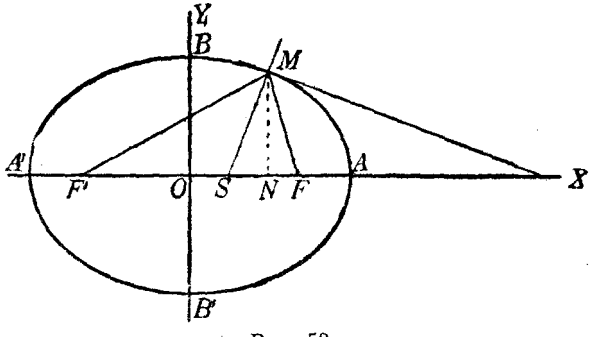

Рис. 58.

фокусів: промені, що виходять з одного фокуса і видбиті кривою, сходяться в другому фокусі.

III. Добуток перпендикулярів, спущених із фокусів на дотичну, є величина стала, і дорівнює вона квадратові малої півосі.

Перпендикуляри ці спускається в одному напрямі, тому їхній добуток додатний. Якщо основи перпендикулярів позначимо K і K', то

$$\overline{FK}.F'K' = \left(\frac{+\frac{cx}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}\right) \cdot \left(\frac{-\frac{cx}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b}}}\right) = \frac{1 - \frac{c^2x^2}{a^4}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$$

Знаменник за допомогою рівнання еліпси зводиться до вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{1}{b^2}-\frac{x^2}{x^2b^4}(a^2-b^2)=$$
$$=\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{c^2x^2}{a^4}\right)$$

Таким чином

$$\overline{FK}.\overline{F'K'}=b^2$$

IV. Віддаль точки від уявного фокуса $(0, \pm ci)$

$$d^2=x^2+(y\mp ci)^2=y^2-c^2\mp 2yci+a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)=$$
$$=a^2-c^2+y^2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\mp 2ciy=$$
$$=b^2\mp 2ciy-\frac{c^2y^2}{b^2}=\left(b\mp\frac{c}{b}iy\right)^2$$

$b\mp iy$ є лінійна функція ординат лише з уявними коефіцієнтами.

(Ger. Ann. 8. 1817—18 (317—321) Sur une méthode analytique pour la recherche des foyers des sections coniques).

§ 34. Директриса

Поляра фокуса $(\pm ae, 0)$ є пряма $\frac{X}{a^2}(\pm ae)-1=0$, тобто $X=\pm\frac{a}{e}$, тобто поляра фокуса F $(ae, 0)$ є пряма $X=\frac{a}{e}$, а фокуса $F'\equiv(-ae, 0)$ — пряма $X=-\frac{a}{e}$ Легко помітити, що $\frac{a}{e}>a$, бо $e<1$. Ця пряма має назву директриси.

Основна властивість еліпси щодо фокуса і директриси:

V. Відношення віддалей точки еліпси від фокуса і від відповідної директриси є вели-

чина стала, і дорівнює вона ексцентриситетові еліпси.

Справді, $FM = a - ex$ (див. вище), а перпендикуляр із M на директрису

$$DM = \frac{a}{e} - x = \frac{1}{e}(e - ex)$$

Звідси

$$\frac{FM}{DM} = e \tag{42}$$

Також і для 2-го фокуса: $F' \equiv (-c, 0)$, що йому відповідає директриса

$$X = -\frac{a}{e}$$

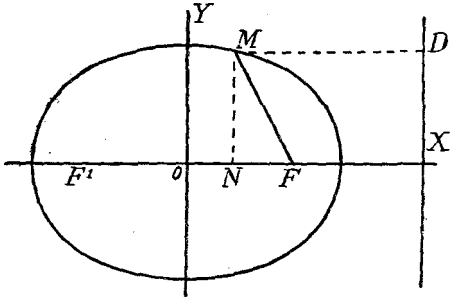

Рис. 59.

Маємо

$$F'M = a + ex$$

$$MD' = \frac{a}{e} + x$$

Звідси знову

$$\frac{F'M}{MD'} = e \tag{42'}$$

Отже і, навпаки, геометричне місце точок, що їх віддалі від даної точки і від даної прямої перебувають у даному відношенні e (менше від одиниці), є еліпса.

Справді, якщо (ξ, η) є дана точка і $y = mx + h$ — дана пряма, то шукане геометричне місце має, як ми бачили, рівняння:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - \frac{e^2(y - mx - h)^2}{1 + m^2} = 0.$$

У цьому рівнанні члени 2-го степеня

$$x^2\left(1 - e^2\frac{m^2}{1+m^2}\right) + 2e^2\frac{m}{1+m^2}xy + y^2\left(1 - \frac{e^2}{1+m^2}\right)$$

і

$$AC - B^2 \equiv \left(1 - \frac{e^2m^2}{1+m^2}\right)\left(1 - \frac{e^2}{1+m^2}\right) - \frac{m^2e^4}{1+m^2} = 1 - e^2 > 0$$

за умови, коли $e < 1$.

§ 35. Напрямне коло

Властивість I дозволяє дати таке побудовання еліпси за допомогою кола, обведеного з фокусів радіюсом, що дорівнює більшій осі; це коло зветься **напрямне коло**.

Продовжимо один із фокальних радіюсів, наприклад, $F'M$ і відкладемо на ньому $MG = FM$.

Через те, що

$$F'M + FM = 2a,$$

матимемо

$$F'G = 2a.$$

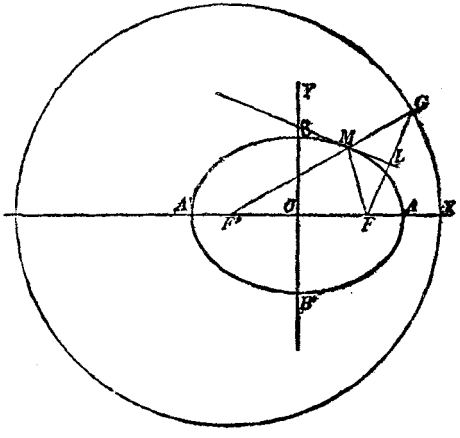

Рис. 60.

Збудована таким чином точка G лежить на колі, обведеному з фокуса радіюсом $= 2a$. І, навпаки, на кожному радіюсі напрямного кола знайдемо точку еліпси, збудувавши рівнораменний трикутник з основою, що дорівнює віддалі точки G від другого фокуса F (бо $FM = MG$). Для цього, як відомо, треба FG поділити навпіл і в середній точці L встановити перпендикуляр до $F'G$. Перетин цього перпендикуляра з $F'G$ і є шукана точка M еліпси.

Крім того, через те що кути ML з $F'M$ і FM, тобто $\angle FML$ і $\angle F'ML'$, вертикальний кутові LMG, будуть рівні, то ML є **дотична до еліпси в точці** M.

§ 36. Полярне рівнання еліпси, віднесеної до фокуса і осі

Візьмімо фокус за полюс полярної системи координат, а більшу вісь еліпси — в напрямі від фокуса до вершини — за полярну вісь. Тоді фокальний радіюс-вектор буде і полярним радіюсом-вектором, а його кут з указаним напрямом осі буде полярним кутом. Зв'язок з Декартовими координатами виразиться рівністю:

$$r = a - ex$$

але з $\triangle MFN$

$$ae - x = r\cos(\pi - \theta)$$

тобто

$$x - ae = r\cos\theta$$

Щоб дістати рівнання в координатах (r, θ), треба лише виключити x. Матимемо:

$$r = a - e(r\cos\theta + ae)$$

тобто

$$r(1 + e\cos\theta) = a(1 - e^2)$$

Позначивши праву частину літерою p (ця стала зветься параметром еліпси), матимемо, що полярне рівнання буде таке:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}. \tag{43}$$

Стала величина

$$p = a(1 - e^2) = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} \tag{44}$$

Легко помітити, що p є величина фокальної півхорди, перпендикулярної до осі еліпси. Справді, покладаючи в рівнання (32) $x = \pm c$, матимемо:

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = b^2\frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2},$$

і тому

$$y_c = \pm\frac{b^2}{a} = \pm p.$$

РОЗДІЛ VIII

Гіперболя

§ 37. Вигляд і форма гіперболі

Крива, що визначається рівнанням

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad (45)$$

зустрічає вісь x-ів у точках ($x=\pm a$, $y=0$), а вісь y-ків не зустрічає зовсім,—бо за $x=0$ маємо $y^2=-b^2$.

Точки ($\pm a$, 0) звуться **вершинами**: гіперболя має дві вершини; пряма, що злучає ці вершини, зветься поперечною віссю гіперболі; віддаль між вершинами $=2a$.

Вісь y-ків, перпендикулярна до поперечної осі гіперболі, як і остання, є вісь симетрії кривої. Вона має назву **уявної осі** гіперболі. Щоб ясніш уявити вигляд кривої, розв'яжемо (1) відносно y:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

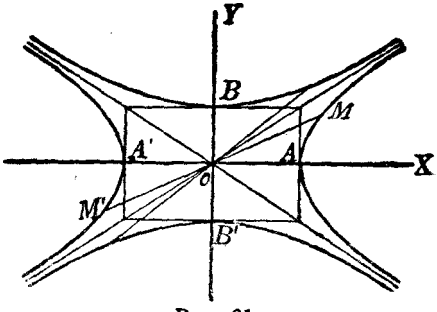

Рис. 61.

За $x^2<a^2$, тобто за $-a<x<+a$, для y матимемо значіння уявні: у смузі поміж $x=-a$ і $x=+a$ немає жадної точки кривої. Навпаки, кожному значінню $x^2>a^2$ відповідає два значіння y, — тобто дві точки кривої, і вони симетричні до осі x-ів і тим більш віддалені від осі, що більше x.

Крім цього, завжди

$$x^2-a^2>y^2,$$

тобто ордината кривої залишається своєю абсолютною величиною менша за відповідну ординату прямої

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Природно порівняти ці ординати: їхня різниця

$$\frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) \cdot \left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{b(x - x^2 + a^2)}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

спадає із зростанням x, і, коли x іде до границі $= \infty$, вона прямує до 0.

Прямі

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

мають назву асимптот кривої, — крива наближається до них асимптотично, тобто не перетинає їх і не зливається з ними, а безконечно до них наближається.

За цих даних можна тепер побудувати наближено дуги кривої, провівши їх через A і A' в середині кутів, утворених асимптотами, у вигляді дуг, що їх опуклість напрямлена до асимптот.

Підставивши в тричлен $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ координати тої точки, що не лежить на кривій, подивімось, який знак матиме результат підставлення. Якщо $x^2 < a^2$, то результат буде від'ємний. А коли $x^2 > a^2$, наприклад, $x < a$, на одній ординаті візьмемо три точки: одну на самій кривій, одну ближче до поперечної осі і одну далі від неї. Для точки кривої результат підставлення дорівнює нулеві; для точки, що лежить ближче до осі, результат буде додатний (бо від'ємник став менший). І, наостанку, для точки, більш віддаленої від осі, навпаки, результат буде від'ємний. Підсумовуючи це, можна сказати: результат підставлення координат точки, що лежить у тій із двох частин, на які крива розподіляє площину, де лежить центр кривої, — буде від'ємний, а для точок, що лежать у другій частині, — він додатний.

На рис. 61 ми покладали $a > b$. Розгляньмо тепер криву

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

або

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Це знову таки гіперболя, що має ті самі осі і ті самі асимптоти, але тільки поперечна вісь першої править за уявну вісь другої, а уявна вісь першої править за поперечну вісь другої; у цьому разі крива лежить в додаткових кутах асимптот і має вершини $(0, \pm b)$. Вона зветься відносно першої **супряженою гіперболею**. Зручніше їх розглянути вкупі.

Гіперболя і її супряжена припадають одна на одну при оберті на 90°, якщо $a = b$. Тоді рівнання першої

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

а рівнання другої

$$y^2 - x^2 = a^2;$$

такі гіперболі звуться рівнобічними.

Асимптоти рівнобічної гіперболі взаємно перпендикулярні.

Справді, їхні рівнання

$$x - y = 0 \quad \text{і} \quad x + y = 0$$

Шукаємо перетин гіперболі з прямою $y = mx$, що проходить через початок — центр кривої. Абсциси точок перетину визначаєтьcя рівнанням:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) = 1, \quad x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2m^2}$$

Вони дійсні за $b^2 - a^2m^2 > 0$, тобто за $m^2 < \frac{b^2}{a^2}$, і уявні, коли $m^2 > \frac{b^2}{x^2}$.

І, навпаки, супряжену гіперболю зустрічають ті прямі, що для них

$$m^2 > \frac{b^2}{a^2},$$

і не зустрічають ті, для яких

$$m^2 < \frac{b^2}{a^2}$$

Прямі, що проходять через початок — центр гіперболі, зустрічають або дану гіперболю, або супряжену гіперболю.

Якщо повернемо осі координат на 45°, то рівнання рівнобічної гіперболі після підставлення

$$x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

набирає вигляду:

$$2x'y' = a^2 \text{ і } x'y' = \frac{1}{2} a^2$$

До такого ж вигляду зводиться і рівнання гіперболі, віднесеної до асимптот — взагалі, лише координатні осі не будуть прямокутніми.

У формулах перечислення покладемо $\omega = \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a},$$

при чому

$$\sin \alpha = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Таким чином

$$x = \frac{a(x' + y')}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b(-x' + y')}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

і

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{(x' + y')^2 - (x' + y')^2}{a^2 + b^2} = \frac{4x'y'}{a^2 + b^2}$$

так що рівнання матиме вигляд:

$$x'y' = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

де кут між осями θ визначається з того, що

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

§ 38. Дотична до гіперболі

Пряма, проведена через точку (x, y)

$$Y - y = m\ (X - x)$$

буде дотичною, якщо дві точки її перетину з кривою зливаються. Вносячи значіння y у рівнання (45), матимемо:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{1}{q^2}(mX + y - mx)^2 - 1 = 0$$

або

$$X^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) - \frac{2(y-mx)m}{b^2}X - \frac{(y-mx)^2}{b^2} - 1 = 0$$

Це рівнання має рівні корені за умови:

$$-\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)\left(1 + \frac{(y-mx)^2}{b^2}\right) = \frac{m^2(y-mx)^2}{b^4}$$

або

$$-\frac{1}{a^2} - \frac{(y-mx)^2}{a^2b^2} + \frac{m^2}{b^2} = 0$$

$$0 = \frac{m^2}{b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{2mxy}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Заміняючи за рівнанням гіперболі (45)

$$1 - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{y^2}{b^2} \quad \text{і} \quad 1 + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}$$

знайдемо:

$$0 = -\frac{m^2y^2}{b^4} + \frac{2mxy}{a^2b^2} - \frac{x^2}{a^4}$$

тобто

$$0 = -\left(\frac{my}{b^2} - \frac{x}{a^2}\right)^2$$

і

$$m = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

Той самий результат одержимо, якщо за правилами диференціяльного числення безпосередньо знайдемо:

$$m = \frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

У даному випадку

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

і

$$\frac{2yy'}{b^2} = \frac{2x}{a^2}$$

звідси

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

і рівнання дотичної

$$Y - y = \frac{b^2 x}{a^2 y}(X - x)$$

або

$$\frac{y(Y - y)}{b^2} = \frac{x(X - x)}{a^2}$$

За допомогою рівнання гіперболі воно спрощується:

$$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

і остаточно матиме вигляд

$$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1 \qquad (47)$$

де x, y є координати точки дотику.

Дотичні, паралельні даній прямій. Якщо напрям дотичної дано, то в рівнанні

$$y = mx + k$$

кутовий коефіцієнт m відомий, і треба визначити k так, щоб дві точки перетину прямої з кривою зливались. Для цього рівнання, що визначає абсцису точок перетину,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx + k)^2}{b^2} = 1$$

тобто

$$X^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}\right)-\frac{2mkx}{b^2}-\frac{k^2}{b^2}-1=0$$

повинно мати рівні корені, тобто

$$-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}\right)\left(1+\frac{k^2}{b^2}\right)=\frac{m^2k^2}{b^2}$$

або

$$\frac{m^2}{b^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{k^2}{a^2b^2}=0$$

це дасть

$$k^2=a^2m^2-b^2,$$
$$k=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

Рівняння дотичної даного напряму, що характеризуємо кутовим коефіцієнтом m, буде:

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2} \tag{48}$$

Під радикалом одержимо додатну величину, тобто $a^2m^2-b^2>0$, якщо $m^2>\frac{b^2}{a^2}$, тобто $m>\frac{b}{a}$ або $m<-\frac{b}{a}$

Дотичну до гіперболі, що проходить паралельно прямій $y=mx$, можна провести лише в тому разі, якщо ця пряма лежить не в тому куті асимптот, у якому розташована сама крива. Якщо $m^2=\frac{b^2}{a^2}$, то дотична зливається з асимптотою.

§ 39. Дотична з точки, що лежить на гіперболі. Поляра

Задача. Проведіть дотичну до гіперболі через точку (x_1, y_1), що не лежить на самій гіперболі.

Якщо дотична в точці (x, y) гіперболі проходить через точку (x_1, y_1), то координати останньої справджують рівняння дотичної (47). Це дає умову

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1 \tag{49}$$

Крім того, точка лежить на гіперболі, а тому

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Розв'язуючи ці два рівнання вкупі, матимемо дві системи значінь (x, y), і ввни справджують і перше і друге рівнання. Вони є координати точок перетину ліній, виражених цими рівнаннями. гіперболі і прямої (49); ця пряма зветься полярою точки (x_1, y_1) відносно гіперболі.

Якщо помножимо рівнання (1) на $\frac{y_1^2}{b^2}$ і замінимо $\frac{yy_1}{b^2}$ за рівнанням поляри на $\frac{xx_1}{a^2}-1$, то для x дістанемо квадратове рівнання

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{x_1^2}{a^2}\right)-\frac{2xx_1}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1=0$$

Щоб його корені були дійсні, треба, щоб

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\left(1+\frac{y_1^2}{b^2}\right)\left(\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{x_1^2}{a^2}\right)>0$$

або

$$\frac{y_1^2}{b^2}\left(\frac{y_1^2}{b_2}-\frac{x_1^2}{a^2}+1\right)>0$$

тобто

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1<0$$

Таким чином, до гіперболі можна провести дотичну лише з точок тої частини площини, де лежить центр кривої. Кожній точці, крім центра гіперболі (0,0), належить цілком визначена пряма, як її поляра, і, навпаки, кожній прямій належить відносно гіперболі цілком визначена точка, що зветься полюсом прямої. Для цієї точки пряма є поляра відносно гіперболі. Якщо пряма має рівнання $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, то полюс має координати:

$$\frac{x_1}{a^2\alpha}=\frac{y_1}{-b^2\beta}=\frac{1}{-\gamma}$$

Властивості поляри щодо гіперболі аналогічні властивостям поляр відносно еліпси.

1. Якщо точка A лежить на полярі точки B, то і точка B лежить на полярі точки A. Справді, якщо (x_1, y_1) і (x_2, y_2) є координати цих точок, то і перша і друга умови дають те саме співвідношення поміж координатами:

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} - \frac{y_1 y_2}{b^2} = 1$$

2. Якщо точка A переміщується повз прямої, то її поляра обертається навколо полюса прямої.

3. Полюс прямої, що злучає дві точки, є точка перетину поляр у цих точках.

Ці властивості є висновки з того, що рівнання поляри лінійне відносно координат полюса.

§ 40. Діяметр

Якщо візьмемо пряму

$$y = mx + k$$

то абсциси точок перетину її з гіперболею

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

визначається, як ми бачили й раніш, рівнанням

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) - \frac{2mkx}{b^2} - \left(\frac{k^2}{b^2} + 1\right) = 0$$

За властивістю коренів квадратового рівнання

$$x_1 + x_2 = \frac{2mk}{b^2} : \left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) = \frac{2ma^2k}{b^2 - a^2m^2}$$

Абсциса середини хорди тому є

$$\xi = \frac{ma^2k}{b^2 - a^2m^2}$$

а відповідна ордината за рівнанням прямої:

$$\eta = \frac{ma^2k}{b^2 - a^2m^2} \cdot m + k = \frac{b^2k}{b^2 - a^2m^2}$$

Взявши відношення $\eta : \xi$, бачимо, що k зникає, і таким чином, хоч яке було б k

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{b^2}{ma^2},$$

то це рівнання геометричного місця всіх цих точок. Отже, геометричне місце середин паралельних поміж собою хорд з кутовим коефіцієнтом m є пряма

$$\eta = \frac{b^2}{a^2 m}\xi \tag{50}$$

що проходить через початок координат — центр гіперболі. Ця пряма зветься діяметром.

Кутові коефіцієнти m і m' хорд і відповідного їм діяметра, таким чином, зв'язані співвідношенням:

$$mm' = \frac{b^2}{a^2} \tag{51}$$

Це співвідношення симетричне відносно m і m' і тому тим хордам, що мають кутові коефіцієнти m', відповідає діяметр з кутовим коефіцієнтом m; справді,

$$\frac{b^2}{a^2 m'} = \frac{b^2}{a^2 \cdot \frac{b^2}{a^2 m}} = m.$$

Такі два напрями зветься супряженими, а самі діяметри називають супряженими діяметрами.

А що добуток mm' додатний, то обидва супряжені діяметри лежать в одному куті координат (або осей). До цього, якщо $m < \frac{b}{a}$, то $m' > \frac{b}{a}$, і навпаки. Порівнюючи це з попереднім (стор. 145), бачимо, що з двох супряжених діяметрів один зустрічає дану гіперболю (45), а другий — її супряжену.

Якщо назвемо a' і b' довжини двох супряжених діяметрів, x, y і x', y' координати їхніх кінців, тобто

$$a'^2 = x^2 + y^2, \quad b'^2 = x'^2 + y'^2$$

то

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = -1$$

і, крім того, за умовою супряжености, в якій замінимо $m=\frac{y}{x}$ $m'=\frac{y'}{x'}$:

$$\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=0$$

З останнього рівнання випливає:

$$\frac{x}{a}:\frac{y'}{b}=\frac{y}{b}:\frac{x'}{a}$$

Спільний знаменник двох останніх відношень t визначимо, підставляючи

$$\frac{x}{a}=t\frac{y'}{b} \text{ і } \frac{y}{b}=t\frac{x'}{a}$$

у рівнання гіперболі (45):

$$t^2\left(\frac{y'^2}{b^2}-\frac{x'^2}{a^2}\right)=1$$

звідки, на підставі рівнання супряженої гіперболі

$$t^2=1,\ t=\pm 1$$

Отже

$$\frac{x}{a}=\pm\frac{y'}{b};\ \frac{y}{b}=\pm\frac{x'}{a}$$

знаки беремо або обидва верхні, або обидва нижні. Таким чином,

$$a'^2=x^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=e^2x^2-b^2$$

якщо позначимо

$$a^2+b^2=a^2e^2$$

(e зветься ексцентриситетом гіперболі). Так само

$$b'^2=y'^2+a^2\left(\frac{y'^2}{b^2}-1\right)=\frac{a^2+b^2}{a^2}y'^2-a^2=$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-a^2=e^2x^2-a^2.$$

Звідси:

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2 \qquad (52)$$

1. Різниця квадратів двох супряжених півдіяметрів є величина стала, і дорівнює вона різниці квадратів півосей.

Складемо далі вираз подвоєної площі трикутника, утвореного двома супряженими півдіяметрами

$$2\triangle = \pm(xy' - yx')$$

заміняючи y' і x' на їхні значіння

$$y' = \pm\frac{b}{a}x, \quad x' = \frac{a}{b}y$$

матимемо:

$$xy' - yx' = \pm\left(\frac{b}{a}x^2 - \frac{a}{b}y^2\right) = \pm ab\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = \pm ab. \quad (53)$$

II. Площа трикутника, збудованого на двох супряжених півдіяметрах, є величина стала, і дорівнює вона площі трикутника, збудованого на осях.

Гіперболя, піднесена до двох супряжених діяметрів. Приймаючи пару супряжених діяметрів за координатні осі, зводимо рівнання до вигляду:

$$Ax'^2 + By'^2 = 1$$

бо в кожному x' (y') повинно відповідати два значіння y' (x'), рівні величиною і протилежні знаком.

Супряжена гіперболя матиме рівнання

$$Ax'^2 + B'^2 = -1$$

і як діяметр $y' = 0$ зустрічає першу в точці (a', 0), а діяметр $x' = 0$ зустрічає другу в точці (0, b'), то $Aa'^2 = 1$ $Bb'^2 = -1$, і рівнання матиме вигляд;

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

Зв'язок діяметра з дотичною. Проведімо пряму

$$Y = \frac{y}{x}X \quad (54)$$

Супряжений діяметр має кутовий коефіцієнт

$$\frac{b^2}{a^2\frac{y}{x}}=\frac{b^2x}{a^2y}$$

той саме, що й дотична у точці (x, y): дотична паралельна діяметрові, супряженому з проведеним у точку дотику.

§ 41. Нормаля

Перпендикуляр до дотичної в точці її дотику зветься нормалею. Її рівнання

$$Y-y=-\frac{a^2y}{b^2x}(X-x)$$

або

$$\frac{a^2(X-x)}{x}=-\frac{b^2(Y-y)}{y} \tag{55}$$

Вона зустрічає вісь OX у точці з абсцисою

$$ON=x+\frac{b^2}{a^2}x=\frac{a^2+b^2}{a^2}x=e^2x,$$

якщо ввести те саме позначення

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}=e^2.$$

§ 42. Фокуси гіперболі і їхні властивості

Обведімо з центра радіюсом $c=\sqrt{a^2+b^2}$ коло, що перетинає осі в 4-х точках. Дві точки F і F' $(\pm c, 0)$, що лежать на поперечній осі, правлять за фокуси гіперболі

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{45}$$

а інші дві є фокуси супряженої гіперболі.

I. Віддаль точки (x, y) гіперболі від фокуса є лінійна функція абсциси. Справді,

$$\overline{FM}^2=(x-c)^2+y^2=x^2-2cx+a^2+b^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2=$$

$$=\frac{c^2x^2}{a^2}-2cx+a^2=\left(\frac{cx}{a}-a\right)^2$$

якщо позначимо $\frac{c}{a}=e$ (див. вище, стор. 153) і, добуваючи корінь:

$$FM=\pm(ex-a). \qquad (56)$$

Тут $e>1$ і $x>a$ в правій вітині, $x<-a$ в лівій, тому для правої вітини

$$FM=ex-a, \quad (56)$$

а для лівої

$$FM=a-ex. \quad (56')$$

Для другого фокуса

$$\overline{F'M}^2=(x+c)^2+y^2=$$
$$=(ex+a)^2,$$

звідси

$$\overline{F'M}=\pm(ex^2+a).$$

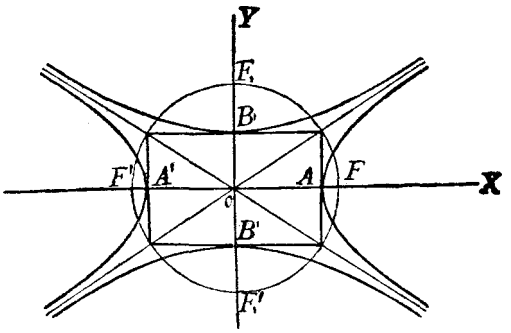

Рис. 62.

Верхній знак беремо для правої вітини, а нижній—для лівої,

Звідси для правої вітини

$$\overline{F'M}-\overline{FM}=2a, \qquad (57)$$

а для лівої

$$\overline{FM}-\overline{F'M}=2a. \qquad (57')$$

II. У гіперболі різниця віддалей точки від двох її фокусів є величина стала, і дорівнює вона—абсолютною величиною поперечній осі

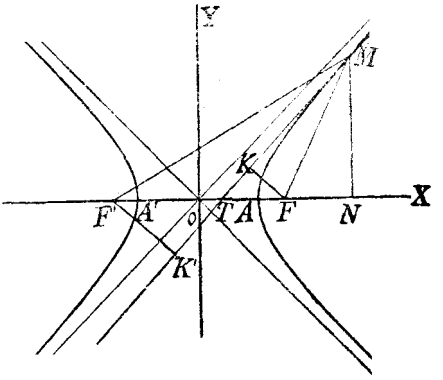

Рис. 63.

III. Добуток перпендикулярів із фокусів на дотичну до гіперболі є величина стала, від'ємна і дорівнює $-b^2$

Перпендикуляр із фокуса $F \equiv (+c, 0)$ дорівнює

$$FK = -\frac{\frac{cx}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$$

а із фокуса $F' \equiv (-c, 0)$

$$F'K = -\frac{-\frac{cx}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$$

Помічаючи, що з рівнання гіперболі

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = \frac{1}{b^2}\left(\frac{c^2x^2}{a^4} - 1\right)$$

знаходимо звідси, що добуток

$$\overline{FK} \cdot \overline{F'K'} = \frac{1 - \frac{c^2x^2}{a^4}}{b^2\left(\frac{c^2x^2}{a^4} - 1\right)} = -b^2 \qquad (58)$$

IV. Дотична до гіперболі поділяє навпіл кут між фокальними радіюсами-векторами.

Справді, $OT = \frac{a^2}{x}$ (рис. 63), а віддаль $F'F$ точка T поділяє на частки $F'T = c + \frac{a^2}{x} = \frac{a}{x}(a + ex)$ і $TF = c - \frac{a^2}{x} = \frac{a}{x}(-a + ex)$. Їхнє відношення і дорівнює відношенню прилежних боків $F'M = a + ex$ і $FM = -a + ex$, і тому MT є бісектриса кута $F'MF$, що і треба було довести.

§ 43. Директриса

Поляра фокуса є пряма, перпендикулярна до поперечної осі: $\frac{aex}{a^2} - 1 = 0$, або $x = \frac{a}{e}$; вона зустрічає вісь у точці, що лежить між вершиною і центром (ексцентриситет $e > 1$).

V. Відношення віддалей точки гіперболі від фокуса і від директриси є величина стала і дорівнює вона ексцентриситетові гіперболі.

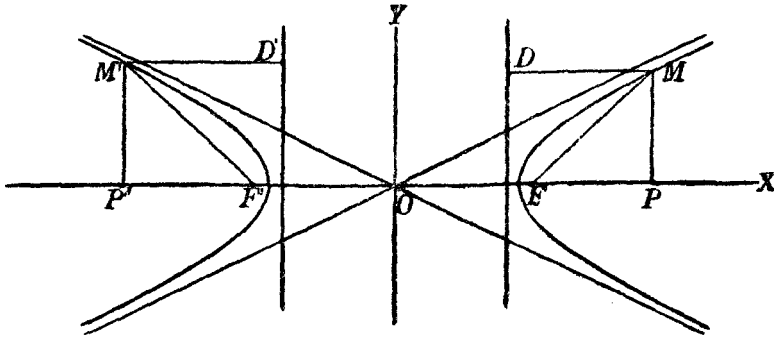

Рис. 64.

Справді, віддаль MD точки M від директриси дорівнює $X-\frac{a}{e}$ для правої вітини, тобто дорівнює $\frac{FM}{e}$, а для лівої $\frac{a}{e}+x$, тобто $\frac{F'M}{e}$

§ 44. Полярне рівнання гіперболі

Якщо запровадимо і для гіперболі позначення $\frac{b^2}{a}=p$, то, взявши фокус за полюс, а поперечну вісь — від фокуса до вершини — за полярну вісь, матимемо

$$r=ex-a,$$

а із трикутника FMP:

$$x-ae=-r\cos\theta$$

Виключаючи x, матимемо

$$r=ae^2-a-re\cos\theta=p-re\cos\theta$$

бо

$$ae^2-a=\frac{a^2+b^2}{a}-a=\frac{b^2}{a}=p$$

Звідси

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta} \qquad (59)$$

Для точки лівої вітини так само ми дістали б

$$r = a - ex, \quad -x + ae = r\cos\theta$$

або

$$r = a - ae^2 + re\cos\theta$$

тобто

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

Якщо ми замінимо тут θ на $\theta + \pi$ і замість r візьмемо r, то знову матимемо:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Стала p зветься параметром гіперболі. Вона виражає величину фокальної півхорди, перпендикулярної до осі гіперболі, — тобто величину ординати, що відповідає значінню c абсциси.

Справді, підставляючи в (45) $x = c$, знайдемо:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

звідси:

$$y^2 = b^2\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) = b^2\,\frac{a^2 + b^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2} = p^2$$

РОЗДІЛ IX

Параболя

§ 45. Вигляд і форма параболі

Крива, виражена рівнанням

$$y^2 = 2p.x \tag{60}$$

вся лежить (якщо $p > 0$) праворуч від осі y-ків, там, де x-и додатні. Із зростанням абсциси x ордината y безмежно збільшується, кожному додатному значінню x відповідає два значіння y

$$y = \pm\sqrt{2px}$$

рівні своєю абсолютною величиною, а протилежні знаком. А що y є середня геометрична між абсцисою x і сталою довжиною $2p$, то, відклавши на осі x-ів від O ліворуч довжину $OF = 2p$ і збудувавши на $PO + ON = 2p + x$, як на діяметрі кола, матимемо в перетині їх з віссю OY довжини OQ, OQ'. Ці довжини є ординати відповідних точок параболі, і, таким чином, будуємо скільки завгодно пар точок кривої: M і M_1, M' і M'_1; злучивши їх безперервною лінією, матимемо криву, що має одну вітину, а її дуги лежать вище і нижче осі OX.

Але ці дуги цілком іншого типу, ніж дуги гіперболі, бо немає жадної прямої такої, що до неї дуга параболі наближалася б безмежно.

Справді, не може бути прямої, паралельної осі x-ів $y = k$, такої, щоб

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{2px} - k) = 0$$

а також не може бути прямої $y = mx + k$ такої, щоб

$$\lim (\sqrt{2px} - mx - k) = 0$$

або (це однаково)

$$\lim\left(\sqrt{2px}-mx\right)=k,$$ — конечній величині,

бо

$$\sqrt{2px}-mx=\sqrt{x}\left(\sqrt{2p}-m\sqrt{x}\right),$$

не може бути

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2}-m\sqrt{x}\right)=0.$$

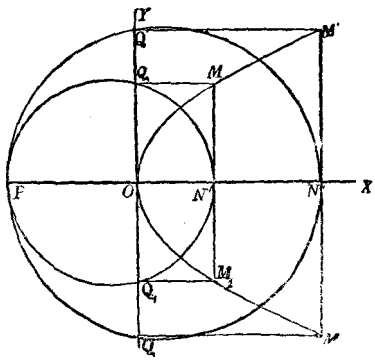

Рис. 65.

§ 46. Дотична до параболі

а) Дотична даного напряму. Пряма $y=mx+k$ дотикається до параболі, якщо рівняння для абсцис точок перетину

$$(mx+k)^2-2px=0$$

має рівні корені, тобто, коли

$$(mk-p)^2=m^2k^2$$

або

$$p^2-2mpk=0$$

звідси

$$k=\frac{p}{2m}$$

Отже, у параболі є лише одна дотична з кутовим коефіцієнтом m, а саме

$$y=mx+\frac{p}{2m} \tag{61}$$

b) Дотична в даній точці (x, y) параболі. Утотожнюючи пряму

$$Y-y=m(X-x)$$

з щойно одержаною дотичною, маємо:

$$\frac{p}{2m}=y-mx,$$

або за допомогою рівнання параболі:

$$\frac{p}{2m} = y - m \cdot \frac{y^2}{2p}$$

а помноживши на $2mp$

$$p^2 - 2mpy + m^2y^2 = 0$$

тобто

$$(p - my)^2 = 0$$

звідси

$$m = \frac{p}{y}$$

Отже, шукана дотична має рівнання

$$Y - y = \frac{p}{y}(X - x) \qquad (62)$$

Це рівнання можна спростити, якщо помножимо обидві його частини на y, а вільний член перечислимо за допомогою рівнання параболі:

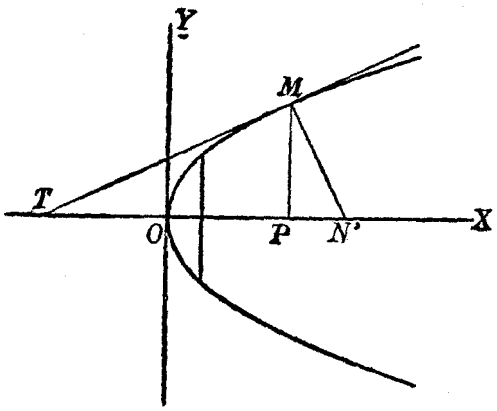

Рис. 66.

$$yY - pX = y^2 - px = px$$

отже

$$yY = p\ (X - x) \qquad (62')$$

є остаточний вигляд рівнання дотичної до параболі.

Ми безпосередньо дійдемо до рівнання дотичної, знаходячи за правилами диференціяльного числення похідну; з $y^2 = 2p'x$ маємо:

$$yy' = p, \qquad (63)$$

звідси $y' = \frac{p}{y}$, — це й є кутовий коефіцієнт дотичної до параболі.

Рівнання (63) виражає одну визначну властивість параболі. Проведімо нормалю в точці M (тобто перпендикуляр до дотичної в точці її дотику); вона зустріне вісь OX у точці N. $\angle PMN = \alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha = y'$. З $\triangle PMN$: $PN = MP.\operatorname{tg}\alpha$, тобто $PN = yy'$ або за (63): $PN = p$.

Віддаль поміж точкою зустрічі нормалі з віссю параболі і підошвою перпендикуляра з точки на вісь (так звана піднормаля) має у всіх точках параболі ту саму величину p. Коротше: у параболі піднормаля стала. Рівнання нормалі:

$$Y - y = \frac{y}{p}(X - x)$$

§ 47. Дотична із зовнішньої точки. Поляра

Задача. Проведіть дотичну з точки (x_1, y_1), що не лежить на параболі.

Шукана точка дотику лежить на параболі

$$y^2 - 2px = 0 \tag{60}$$

а дотична до неї проходить через (x_1, y_1), тобто

$$yy_1 - p(x + x_1) = 0 \tag{64}$$

Отже, шукані точки дотику — це є точки перетину параболі (60) з прямою (64), що її звуть полярою точки (x_1, y_1) відносно параболі (60).

Цих точок дві. Їхні абсциси визначається з рівнання

$$p^2(x + x_1)^2 - 2py_1^2x = 0$$

або

$$px^2 - 2x(y_1^2 - px_1) + px_1^2 = 0$$

Ці абсциси дійсні, якщо

$$(y_1^2 - px_1)^2 - p^2x_1^2 > 0$$

тобто, коли

$$y_1^2(y_1^2 - 2px_1) > 0$$

Але $y_1^2 - 2px_1 > 0$, якщо точка лежить поза параболею, тобто далі від осі, ніж точка параболі, що має ту саму абсцису.

Отже, з точки поза параболею можна провести до неї дві дотичні.

Кожній точці належить цілком визначена пряма, як поляра. І, навпаки, для кожної прямої

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

можна знайти таку точку, що для неї ця пряма буде полярою відносно параболі (60), і ця точка має назву полюса.

Має бути

$$\frac{y_1}{\beta} = \frac{-p}{\alpha} = \frac{-px_1}{\gamma},$$

звідси:

$$x_1 = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad y_1 = -p\frac{\beta}{\alpha} \tag{65}$$

Властивості поляр і полюсів відносно параболі ті ж самі, що і властивості поляр і полюсів відносно еліпси і гіперболі.

§ 48. Діяметр

Візьмімо ряд паралельних прямих $y = mx + k$ і визначмо координати середин хорд, вирізуваних на них параболею (60). Абсциси точок перетину визначаються рівнанням:

$$(mx + k)^2 - 2px = 0$$

За властивістю квадратового рівнання абсциса середини хорд

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{mk - p}{m^2} = \frac{p}{m^2} - \frac{k}{m}$$

а ордината

$$\eta = m\left(\frac{p}{m^2} - \frac{k}{m}\right) + k = \frac{p}{m}$$

Отже, всі ті середини хорд мають ту саму ординату, — тобто вони лежать на прямій

$$\eta = \frac{p}{m}, \tag{66}$$

що і є шукане геометричне місце; вона зветься діяметром.

Усі діяметри параболі паралельні між собою.

З них діяметр, перпендикулярний до відповідної хорди ($m=\infty$) $y=0$, має назву осі параболі. Це є її вісь симетрії кривої. Точка зустрічі осі з параболею (0, 0) зветься вершиною параболі.

Проведімо через точку (x, y) діяметр. Його рівнання $X=y$, якщо порівняти з (66), то воно дасть для напряму відповідних хорд: $m=\frac{p}{y}$; але це є напрям дотичної в точці (x, y).

Отже, дотична паралельна до тих хорд, що їх поділяє навпіл діяметр, проведений через точку дотику.

Якщо, таким чином, за осі взяти дотичну й діяметр, то рівнання не буде мати вільного члена, і кожному значінню x' відповідатимуть два значіння y', рівні величиною. Крім того, для x' від'ємних y' — уявний. Це свідчить, що рівнання не має y' в першому степені, а x' лише в першому, тобто воно має вигляд

$$y'^2-2p'x'=0$$

§ 49. Фокус

Точка $F\equiv\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ має ту властивість, що

1) Віддаль F від точки кривої є лінійна функція абсциси.

Справді

$$\overline{FM}^2=y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=2px+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

або

$$FM=x+\frac{p}{2},$$

знак беремо $+$, бо MF і x додатні. Ця точка має назву фокуса параболі.

Поляра фокуса відносно параболі є пряма $x=-\frac{p}{2}$, вона зветься директрисою.

2) **Віддаль точки параболі від фокуса і від директриси рівні,** — справді, і перша і друга віддалі дорівнюють $x+\frac{p}{2}$

3) **Дотична утворює з фокальним радіюсом-вектором і з діяметром, проведеним у точку дотику, рівні кути.** Справді, дотична

$$Yy-p(X+x)=0$$

зустрічає вісь у точці T; ця точка має абсцису $-x$; таким чином

$$TF=x+\frac{p}{2}=MF$$

і трикутник TMF рівнораменний, а тому $\angle MTF=\angle TMF$, а кут дотичної з діяметром дорівнює $\angle MTF$, як кути відповідні.

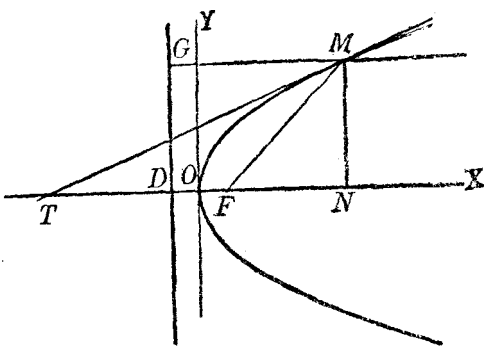

Рис. 67.

Полярне рівнання параболі. Взявши F за полюс полярної системи і спрямувавши полярну вісь від фокуса до вершини параболі, матимемо:

$$r=x+\frac{p}{2},\quad x-\frac{p}{2}=-r\cos\theta$$

тобто

$$r+r\cos\theta=p$$

а звідси і дістанемо полярне рівнання параболі у вигляді

$$r=\frac{p}{1+\cos\theta}$$

РОЗДІЛ X

Загальні властивості конічних перерізів

§ 50. Параболя, як границя еліпси й гіперболі

Розглядаючи кожну з трьох кривих окремо, ми упевнились, що всі криві мають ту властивість, що відношення віддалей їх точок від фокуса і від директриси є величина стала, і дорівнює вона ексцентриситетові кривої, тобто вона менша, ніж одиниця, для еліпси і дорівнює одиниці для параболі, а більша за одиницю для гіперболі.

І, навпаки, ми вже бачили, що геометричне місце тих точок, що їхні віддалі від даної точки (α, β) і від даної прямої $y = mx + k$ мають дане відношення e, виражається рівнанням:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - e^2 \frac{(y - mx - h)^2}{1+m^2} = 0$$

Воно виражає еліпсу, гіперболю чи параболю, залежно від того, чи буде добуток коефіцієнтів при x і y більший, менший, чи рівний квадратові половини коефіцієнта при x, y,— тобто залежно від значіння

$$\left(1 - \frac{e^2m^2}{1+m^2}\right)\left(1 - \frac{e^2}{1+m^2}\right) - \frac{e^4m^2}{(1+m^2)} = 1 - e^2,$$

а саме, чи буде $e < 1$, чи воно > 1, чи $= 1$.

Також і полярне рівнання відносно фокуса й осі буде те саме для всіх трьох кривих,—а саме рівнання

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

виражає еліпсу з $e < 1$, гіперболю за $e > 1$ і параболю за $e = 1$.

Параболя для обох випадків має характер переходового випадку від еліпси до гіперболі. І ми можемо, справді, розглядати її, як граничний випадок, з одного боку, для еліпс, а з другого — для гіперболь, що їхні осі — цілком визначено — безмежно зростають.

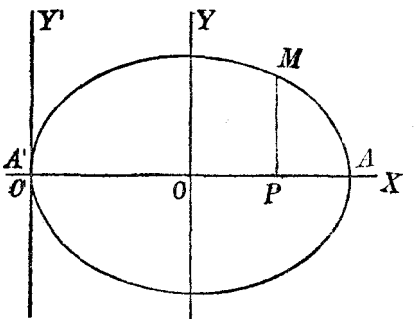

Рис. 68.

Для цього перенесімо в еліпсі початок координат у вершину $A' = (-a, 0)$, залишивши вісь x-ів попередню. Формули перечислення

$$x = x' - a;\ y = y'$$

Рівнання матиме вигляд:

$$\frac{(x'-a)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0$$

або, якщо розв'язати його відносно y'^2, то

$$y'^2 = 2\frac{b^2}{a}x' - \frac{b^2}{a^2}x'^2.$$

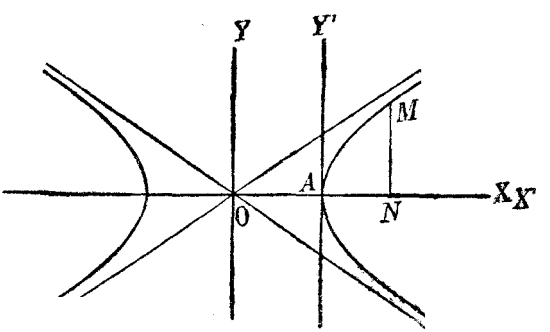

Рис. 69.

Введімо замість $\frac{b^2}{a}$ параметр p. Матимемо

$$y'^2 = 2px' - \frac{p}{a}x'^2$$

подібно до цього, переносячи в гіперболі початок координат у точку $(+a, 0)$ і залишаючи вісь x-ів попередню, дістанемо формули перечислення

$$x = x' + a, \; y = y'$$

і рівнання гіперболі набирає вигляду:

$$\frac{(x' + a)^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

або, розв'язавши відносно y'^2 і позначивши $\frac{b^2}{a} = p$

$$y'^2 = 2px' + \frac{p}{a} x'^2$$

Якщо уявимо собі, що розміри більшої осі еліпси й поперечної осі гіперболі зростають безмежно, а мала й уявна осі також зростають, але так, що p, тобто відношення $\frac{b^2}{a}$ зберігає конечне значіння, то, переходячи до границі, обидва рівнання перечисляються в те саме граничне рівнання

$$y'^2 = 2px',$$

тобто рівнання параболі, що має ту саму вершину, вісь і параметр.

Отже, параболю можна розглядати, як границю еліпси і гіперболі.

З цього погляду стають ясними ті властивості параболі, що на перший погляд відхиляються від властивостей еліпси й гіперболі.

Справді, всі діяметри еліпси й гіперболі проходять через центр. Із зростанням a до безконечности віддаль від вершини до центра безмежно зростає, а центр по осі віддаляється в безконечність; діяметри, і далі проходячи через нього (центр), матимуть з віссю спільну, безконечно віддалену точку, тобто вони стають паралельними до осі,—отже у параболі всі діяметри паралельні.

Дотичні у еліпси утворюють рівні кути з фокальними радіюсами-векторами. Із зростанням a в граничному положенні другий фокус (при нашому розположенні — правий) віддаляється в безконечність по осі, а відповідний фокаль-

ний радіюс-вектор стає паралельним до осі, і, таким чином, він зливається з відповідним діяметром: у параболі дотична утворює рівні кути з фокальним радіюсом-вектором і діяметром.

Далі, ексцентриситет

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

для еліпси і

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

для гіперболі. Обидва вирази можна подати так:

$$e = \sqrt{1 \pm \frac{p}{a}}$$

У граничному положенні, коли $a = \infty$, а p — конечне, ексцентриситет p набирає значіння, рівне одиниці, а у формулах, де e фігурує, для параболі треба підставити це його значіння. Таким чином, приходимо до полярного рівнання параболі, до рівнання відносно фокуса і директриси:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \frac{(y - mx - h)^2}{1 + m^2} = 0$$

для параболі віддалі від фокуса і від директриси рівні одна одній.

Рівнання, що ми їх одержуємо для трьох конічних перерізів, беручи вісь кривої за вісь x-ів, а вершину за початок координат,

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \quad \text{еліпса,}$$

$$y^2 = 2px \quad \text{параболя,}$$

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 \quad \text{гіперболя}$$

мають цікаве геометричне значіння: вони виражають, що в параболі ордината є бік квадрата, рівновеликого прямокутникові, що має дану основу $2p$ і висотою абсцису (параболічне побудовання), для еліпси квадрат, збудований на ординаті, менший від прямокутника, збудованого на сталій довжині $2p$, як основі, і з висотою, що дорівнює абсцисі, на

площу, що має стале відношення $2p : 2a$ до площі квадрата, збудованого на абсцисі (еліптичне побудовання); для гіперболі той самий квадрат ординати перевищує на ту саме площу аналогічний прямокутник (гіперболічне побудовання).

Це пляніметричне побудовання трьох кривих другого порядку було відоме ще давнім грекам, так само, як і стереометричне побудовання у зв'язку з конусом.

1. Побудування параболі. Рівнання

$$y^2 = 2px.$$

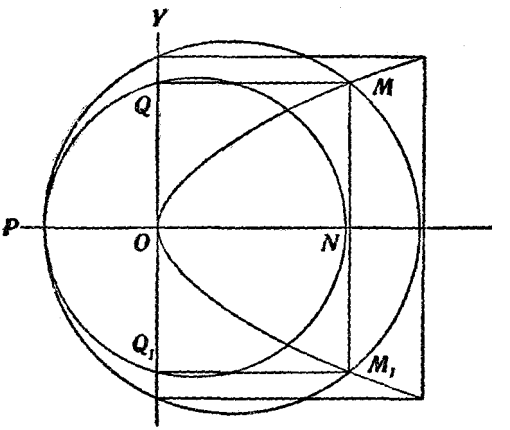

Рис. 70.

Відкладаючи від O ліворуч $PO = 2p$ і беручи довільне $ON = x$ на PN, як на діяметрі, будуємо коло, в перетині його з віссю Y-ів одержимо точки Q і Q_1, так що

$$\overline{OQ}^2 = \overline{PO} \cdot \overline{ON} \text{ і } \overline{OQ_1}^2 = \overline{PO} \cdot \overline{ON},$$

точки M і M_1, що мають абсцису $ON = x$ і ординати MN і M_1N, належать параболі.

2. Побудування еліпси

$$y^2 = 2px - \frac{d}{a}x^2 \qquad \begin{array}{l} AB = 2p, \\ AL = 2a. \end{array}$$

На боці $2p$ треба збудувати прямокутник з недостачею так, щоб його боки відносились, як $p : a$.

На LB точка H така, що $QH \parallel AL$ і $H\Delta \perp AL$,

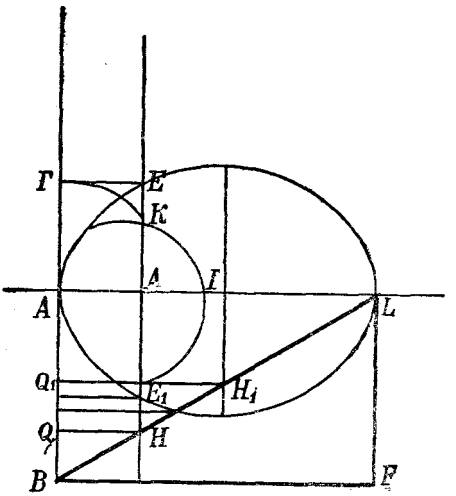

Рис. 71.

$$AQH\Delta = \overline{AГ}^2$$

що й дає точки еліпси E і симетричної до неї E_1 Зручніш, звичайно, збудувати лише H і звідси шукати квадрат $AГ$, рівновеликий прямокутникові $AQH\Delta$.

Для цього відкладаємо на AL $AI = AQ$, на AI, як на діяметрі описуємо коло. $\Delta E \perp AL$ зустрічає його в K. $AГ = AK$ це й є шукані точки.

3. Побудування гіперболі. Для гіперболі

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 =$$

$$= x\left(2p + \frac{p}{a}x\right)$$

Відкладаючи $A_1A = 2a$ ліворуч, $AB = 2p$ відкладаємо вниз. На діягоналі A_1H беремо довільну точку $H\Delta$:

$$A\Delta = x;$$

$$A\Theta = 2p + \frac{p}{a}x.$$

$AI = A\Theta$. На AI описують коло, як на діяметрі, що його перетинає

$\Delta E \perp AA_1$ в K,

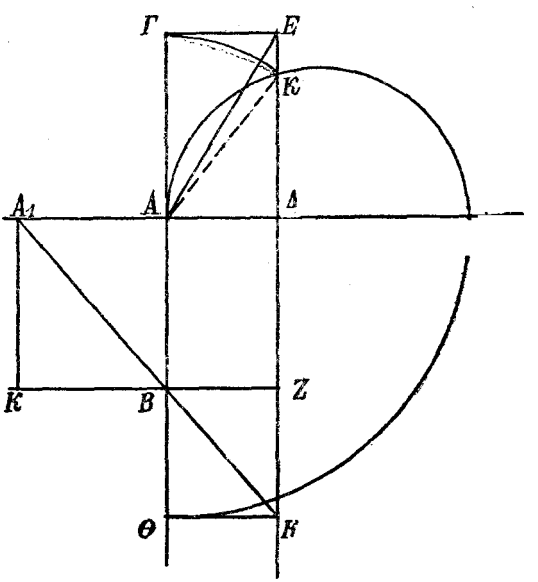

Рис. 72.

$$AГ = AK$$

це й є шукані точки

$$AГ^2 = \overline{AK}^2 = AI.AД$$

$$y^2 = \left(2p + \frac{p}{a}x\right)x$$

§ 51. Плоскі перерізи прямого кругового конусу

Візьмімо прямий круговий конус. Перетинаючи його площинами, перпендикулярними до його осі, дістанемо в перерізі круги. Перетинаючи площинами, що проходять через вершину, дістанемо або дві дійсні прямі — творчі конусу, або дві злиті прямі, — якщо площина дотикається до конусу, — або лише одну точку — вершину конусу, якщо площина зустрічає всі творчі конусу лише в його вершині. В останньому разі для одноманітности говоримо, що площина перетинає конус по двох уявних прямих.

Якщо ж перетинатимемо конус іншими площинами, тоді дістанемо в перерізі нові лінії. Ці лінії власне і носять назву конічних перерізів. Вони є трьох типів: 1) Кут (найменший) січної площини з віссю конусу більший за половину кута розхилу конусу (і менший чи дорівнює прямому). Січна площина зустрічає всі творчі конусу по один бік від вершини і в таких точках, що віддалені на конечній віддалі від вершини (тип еліпси, граничний випадок — коло). 2) Кут січної площини менший за половину кута розхилу конусу (і більший чи дорівнює нулеві); площина зустрічає обидві поли конусу. Крива складається з двох вітин (тип гіперболі; граничний випадок — пара прямих, якщо січна проходить через вершину). 3) (Переходовий випадок). Січна площина паралельна до одної з творчих конусу. Площина зустрічає всі творчі по один бік від вершини, але точки зустрічі січної площини з тою творчою, що паралельно віддаляється на безконечність. Крива має лише одну вітину, що віддаляється в безконечність (тип параболі).

Виведімо рівнання цих кривих.

Хай площина рисунка проходить через вісь конусу й перетинає конус по двох творчих ABC і $A'B'C'$ (рис. 73).

1. Хай січна площина перпендикулярна до площини нашого рисунка, перетинає конус по кривій AMB' (на рис. нанесено в проекції передню її половину), а площина рисунка по лінії AB', що утворює з віссю конусу кут $\beta > \alpha$ (2α — кут розхилу конусу). Проведімо ще перерізи площинами, перпендикулярними до осі, через точки B', A і будь-яку точку M кривої перерізу,—що перетинає площину рисунка по лініях BB', PQ і AA', і другу — січну площину по прямій MN.

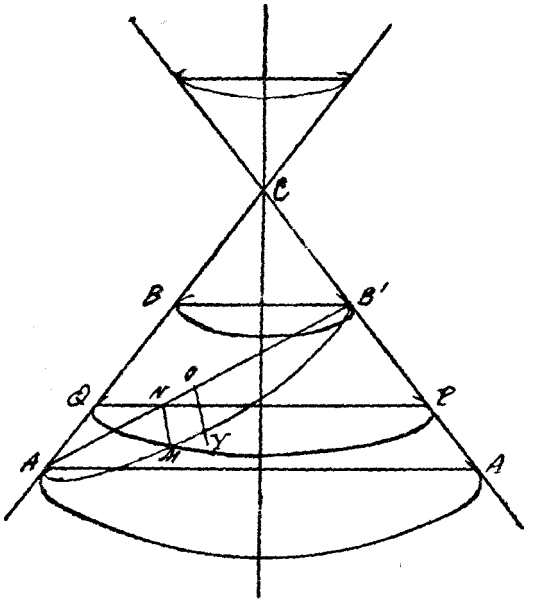

Рис. 73.

З подібности трикутників $\triangle AQN$ і $\triangle ABB'$ маємо:

$$\frac{AN}{QN} = \frac{AB'}{BB'}$$

А з подібностей трикутників $\triangle NB'P$ і $\triangle AB'A'$ маємо:

$$\frac{NB'}{NP} = \frac{AB'}{AA'}$$

Перемноживши матимемо:

$$\frac{\overline{AN} \cdot \overline{NB'}}{\overline{QN} \cdot \overline{NP}} = \frac{\overline{AB'}^2}{\overline{BB'}\ \overline{AA'}}$$

Але в колі QMP за відомою теоремою:

$$\overline{QN} \cdot \overline{NP} = \overline{NM}^2$$

Таким чином, виведене нами співвідношення набирає вигляду:

$$\frac{\overline{AN}\cdot\overline{NB'}}{\overline{NM}^2}=\frac{\overline{AB'}^2}{\overline{BB'}\cdot\overline{AA'}}(=\text{const.}).$$

Це й є рівнання кривої, лише докищо виражене в геометричній формі (так його й дав Аполлоній).

Виразимо в координатних символах, взявши за вісь x-ів пряму AB', а за вісь y-ів перпендикуляр до AB' у середині O.

Тоді $ON=x$, $NM=y$.

Якщо позначимо $AB'=2a$, то $NA=OA-ON=a-x$ $B'N=B'O+ON=a+x$.

Якщо позначимо ще і $\overline{BB'}\cdot\overline{AA'}=4b^2$, то одержане співвідношення можна переписати так:

$$\frac{(a-x)\ (a+x)}{y^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

або

$$\frac{a^2-x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$$

і остаточно

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

2. Хай січна площина перерізає площину рисунка по прямій AB, що зустрічає вісь під якимсь кутом $\beta<\alpha$ (півкута розхилу конусу), а творчі конусу, що лежать у площині рисунка. в точках B і A (рис. 74).

Через A, B і будь-яку точку M, що лежить на лінії перерізу, проводимо площини, перпендикулярні до осі конусу; ці площини перетнуть конус кругами AA', BB', PMQ.

З подібности трикутників $\triangle QNB$ і $\triangle A'AB$ матимемо:

$$\frac{\overline{QN}}{\overline{NB}}=\frac{\overline{A'A}}{\overline{AB}}$$

А з подібности $\triangle NAP$ і $\triangle BAB'$ матимемо:

$$\frac{\overline{NP}}{\overline{NA}}=\frac{\overline{B'B}}{\overline{AB}}$$

Перемноживши ці дві пропорції, матимемо:

$$\frac{\overline{ON}\cdot\overline{NP}}{\overline{NB}\cdot\overline{NA}}=\frac{\overline{A'A}\cdot\overline{B'B}}{\overline{AB}^2}$$

Але за відомою властивістю для кіл маємо в колі PMQ

$$\overline{QN}\cdot\overline{NP}=\overline{NM}^2$$

Отже, наша рівність набирає вигляду:

$$\frac{\overline{NM}^2}{\overline{NB}\cdot\overline{NA}}=\frac{\overline{A'A}\cdot\overline{B'B}}{\overline{AB}^2}(=\text{const.})$$

Виразимо це співвідношення в координатних символах.

У площині перерізу візьмімо систему координат. За осі координатні візьмімо: AB — за вісь x-ів і перпендикуляр до AB із середини O відтинку AB за вісь y-ів. Хай

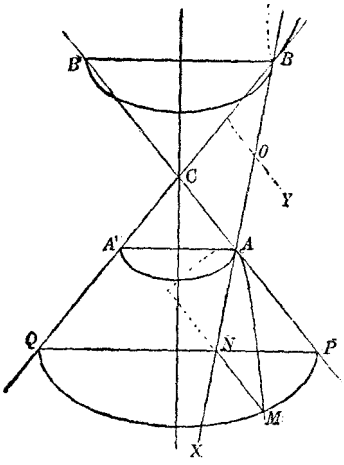

Рис. 74.

$$\overline{AB}=2a \quad \text{і} \quad \overline{A'A}\cdot\overline{B'B}=4b^2$$

тоді

$$NM=y,\quad NB=a+x,\quad NA=x-a,$$

виведене співвідношення набирає вигляду:

$$\frac{y^2}{x^2-a^2}=\frac{4b^2}{4a^2}$$

або

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2-a^2}{a^2}$$

і остаточно

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Те саме співвідношення поміж x і y одержимо, взявши точку M на перетині площини з другою полою конусу.

3. Січна площина паралельна творчій. Хай вона перетинає площину рисунка по лінії $AN \parallel A'C$ творчої. З подібности трикутників NAP і $A'CA$ маємо:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NP}}=\frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}}$$

а що $A'A = QN$ через паралельність CQ і AN, то, поділяючи обидві частини на $QN = AA'$,

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{QN} \cdot \overline{NP}} = \frac{CA'}{AA'^2}$$

але за відомою властивістю кола

$$\overline{QN} \cdot \overline{NP} = \overline{NM}^2$$

і тому

$$\frac{AN}{\overline{NM}^2} = \frac{CA'}{\overline{AA'}^2} = \text{const.}$$

Візьмімо тепер у січній площині таку систему координат: за вісь x-ів беремо пряму AN, а за вісь y-ів — перпендикуляр до неї в точці A.

Тоді

$$\overline{AN} = x,$$
$$\overline{NM} = y;$$

стале відношення

$$\frac{\overline{AA'}^2}{CA'} = 2\overline{AA'} \sin \alpha,$$

де α є половина кута розхилу конусу. Позначимо це відношення $2p$. Тоді рівнання набирає вигляду:

$$\frac{x}{y^2} = \frac{1}{2p},$$

або

$$y^2 = 2px.$$

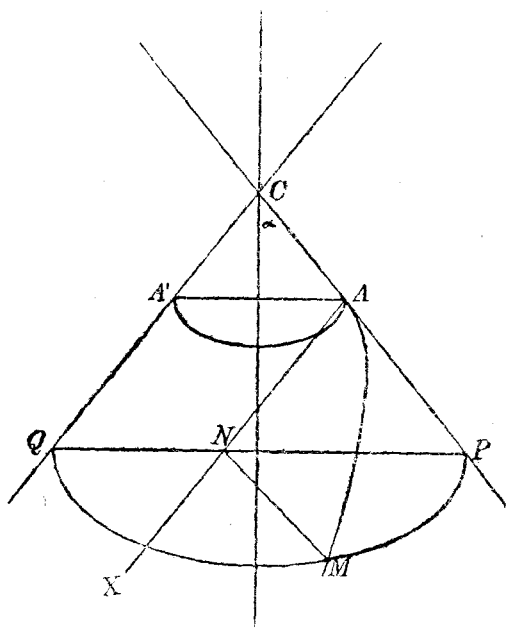

Рис. 75.

Описане побудовання вказує, що три криві другого порядку можна розглядати, як центральні проєкції кола: злучаючи всі точки кола з якоюсь точкою простору, можна здобутий конус так перерізати площиною, що в перерізі дістанемо плоскі криві: еліпсу, гіперболю чи параболю.

Тут за основу взято прямий круговий конус. Проте, можна було б розглядати і косий круговий конус. Цей результат ми використаємо, вивчаючи аналітичну геометрію в просторі. А саме ми покажемо, що перший-ліпший конус другого порядку (що має за основу якусь криву 2-го порядку), можна — і при тому подвійним образом — розглядати, як косий круговий конус.

Виявляється, що із суто-геометричного погляду всі три криві другого порядку споріднені. Тому можна поставити питання, чи не можна схарактеризувати з одного погляду й суто-геометрично різність цих кривих, тобто, крім аналітичного критерію (знак $AC - B^2$), встановити геометричний критерій (який, звичайно, може бути лише геометричною інтерпретацією аналітичного критерію).

Можна, справді, вважати за такий критерій відношення кривих до безконечно віддаленої прямої

Ввівши (1) однорідні координати $\frac{x}{z}$ і $\frac{y}{z}$ замість x, y, перепишемо рівнання, помноживши на z^2, у вигляді:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + z(2Dx + 2Ey + Fz) = 0$$

З безконечно віддаленою прямою

$$z = 0$$

ця крива перетинається в точках, що їх визначається системою рівнань:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0, \quad z = 0$$

Але перше з них виражає пару прямих. Ці прямі уявні для еліпси, дійсні для гіперболі і злиті для параболі. Тому можна сказати: криві другого порядку мають з безконечно віддаленою прямою або дві дійсні спільні точки (тип гіперболі), або дві уявні (тип еліпси), або дві злиті, тобто дотикаються безконечно віддаленої прямої (тип параболі).

Зокрема коло з числа еліпс відзначається тим, що його дві спільні з безконечно віддаленою прямою точки це є так звані циклічні точки на безконечності

$$x^2 + y^2 = 0, \quad z = 0$$

РОЗДІЛ XI

Визначення конічних перерізів за даними умовами

§ 52.

Загальне рівнання 2-го степеня

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \equiv 0 \qquad (1)$$

має шість коефіцієнтів. Але воно не зміниться, якщо на один із них (відмінний від нуля) поділити, бо після ділення на $k \neq 0$ нове рівнання

$$\frac{1}{k}\left(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F\right) = 0$$

справджується тими самими значіннями x, y, що і вихідне (1). Тому, довільних коефіцієнтів у рівнанні (1) буде лише п'ять.

Ці коефіцієнти можна зміняти за нашим добором, щоб крива виповнювала ті чи ті поставлені нами умови. Так, якщо крива має проходити через початок координат, то її рівнання повинно справджуватися підставленням $x = 0$ $y = 0$, тобто повинно бути

$$F = 0.$$

Взагалі, якщо дано, що точка (x_1, y_1) має лежати на кривій, або що крива має проходити через точку (x_1, y_1), то підставлення в (1) координаті точки обертатиме рівнання на тотожність, — тобто коефіцієнти A, B... F мають бути такі, що

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2Dx_1 + 2Fy_1 + F = 0 \qquad 2$$

За невизначених коефіцієнтів це дає співвідношення поміж коефіцієнтами таке, що воно справджується для

того, щоб крива проходила через дану точку (x_1, y_1). Цією умовою вилучаємо з усієї сукупности кривих, визначуваних рівнанням (1), ті криві, що їхні коефіцієнти в їхніх рівнаннях підлягають сказаній умові, тобто ті, що проходять через дану точку. Таких кривих є ще безліч, бо, якщо за допомогою (2) один із коефіцієнтів виразимо через інші, то залишається ще чотири довільні коефіцієнти, якими можна орудувати, щоб вони виповнювали ще й інші якісь умови.

Такі умови, що, подібно наведеним, призводять до одного рівнання поміж коефіцієнтами, є прості умови, — протиставляючи їх складним умовам, що призводять більш ніж до одного співвідношення поміж коефіцієнтами.

Наприклад, умова, щоб центр кривої містився в даній точці (ξ, η), призводить, як ми бачили й раніш, до двох рівнань:

$$A\xi + B\eta + D = 0$$
$$A\xi + C\eta + E = 0$$

що їх ми мали раніш, але тепер вони мають іншу вартість: тоді було дано коефіцієнти A, B, C, D, E, і ми шукали з цих рівнань значіння ξ, η, а тепер, навпаки, дано значіння ξ, η, і ми шукаємо ті значіння коефіцієнтів A, B, C, D, E, за яких ці рівнання справджуються, тобто ті криві, що для них ці співвідношення мають місце.

Простою умовою є також умова, щоб дана пряма

$$ux + vy + w = 0$$

дотикались до кривої другого степеня. Як ми бачили й раніш (стор. 25), цю умову у вигляді детермінанта можна подати так:

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Якщо розвинути цей детермінант за степенями буков u, v, w, то він перепишеться

$$\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta uw + 2\varepsilon vw + \varphi w^2 = 0, \qquad (4)$$

де α, β,... φ є мінори детермінанта кривої

$$\Delta = \begin{matrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{matrix}$$

саме:

$$\alpha = CF - E^2, \quad \beta = ED - BF, \quad \gamma = AF - D^2, \quad \delta = BE - CD,$$
$$\varepsilon = BD - AE, \quad \varphi = AC - B^2.$$

Отже, ця умова, відмінно від (2), є другого степеня відносно коефіцієнтів A, B... F

Та можна задати для визначення кривої й інші умови. Можна поставити умову, щоб крива була певного типу:

Якщо ми шукаємо параболю, то має бути $AC - B^2 = 0$.

Якщо шукаємо коло, то треба, щоб $A = C$, $B = A \cos \omega$, де ω є кут поміж осями, і тому $B = 0$, коли осі прямокутні.

Якщо шукаємо рівнобічну гіперболю, то в наведеному рівнанні коефіцієнти при x^2 і y^2 повинні бути рівні своєю величиною і протилежні знаком:

$$A' + C' = 0 \text{ за } A' + C' = A + C$$

отже, повинно бути

$$A + C = 0$$

До цієї умови дійдемо також, помітивши, що в рівнобічній гіперболі асимптоти взаємно-перпендикулярні, і тому рівнання, що визначає їх напрям

$$A + 2Bm + Cm^2 = 0$$

матиме корені m_1, m_2 такі, що $m_1 m_2 = -1$, тобто

$$\frac{A}{C} = -1 \quad \text{або } A + C = 0$$

Якщо є потреба знайти пару прямих, то треба, щоб

$$\begin{matrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{matrix} = 0$$

Не зупиняючись докищо на інших умовах, що їх повинна задовольняти шукана крива, візьмімо лише той випадок, коли дано точки й дотичні.

Через те, що в загальному рівнанні (1) є п'ять довільних параметрів, то, щоб їх цілком визначити, треба мати 5 умов, тобто, якщо говорити про завдання точок, то п'ять точок цілком визначають криву 2-го порядку. А що всі умовні рівнання лінійні відносно невідомих, то п'ять точок визначають лише одну криву другого порядку.

До цього, однак, треба зазначити, що дані точки не можуть лежати по три на одній прямій. Якщо три точки лежать на одній прямій, то крива другого порядку складається з цієї прямої і другої прямої, що проходить через останні дві точки. Склавши їхнє рівнання й перемноживши, матимемо шукане рівнання. Якщо чотири точки лежать на одній прямій, то можна додати довільну пряму, що проходить через п'яту точку, і рівнання матиме ще один довільний параметр. Якщо, наостанку, всі п'ять точок лежать на одній прямій, то, помножаючи її рівнання на довільний тричлен $A'x+B'y+C'$, матимемо рівнання, що справджуватиме поставлені умови. Відкидаючи ці випадки, ми маємо при п'ятьох даних точках п'ять лінійних рівнань між п'ятьма невідомими A, B... F і, таким чином, маємо: через п'ять точок можна, взагалі, провести лише одну криву другого порядку.

Якщо дано чотири точки, що через них має проходити крива, і вона повинна дотикатися ще й до даної прямої, то, щоб визначити коефіцієнти її рівнання, маємо чотири рівнання лінійні і одно рівнання другого степеня. Розв'язуючи їх укупі, одержимо дві системи значінь для коефіцієнтів (1): чотири точки і одна дотична визначають дві криві другого порядку.

Якщо дано три точки і дві прямі, то кривих другого порядку, що проходять через дані точки і дотикаються до даних прямих, дістанемо чотири, бо коефіцієнти визначається трьома рівнаннями першого степеня і двома рівнаннями другого, а вони мають чотири системи розв'язок.

Аналогічно можна було б сподіватись, що кривих другого порядку, що проходять через дві дані точки, таких,

що дотикались до трьох даних прямих, буде 8, а кривих, що проходять через одну дану точку і дотикаються до 4 даних прямих — 16, і тому 5 даних прямих дотикається до 32 кривих. І, справді, їхнє число буде значно менше. Це залежить від того, що в умові дотику прямої до кривої 2-го порядку коефіцієнтами увіходять мінори детермінанта

$$\Delta = \begin{matrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{matrix}$$

За властивістю взаємних детермінантів детермінант, складений із цих мінорів

$$\Delta' = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varphi \end{matrix} = \Delta^2 \qquad (5)$$

Справді, розвиваючи Δ за елементами, наприклад, першого рядка, матимемо:

$$\Delta = A\alpha + B\beta + D\delta$$

і тому

$$\begin{aligned} B\alpha + C\beta + E\delta &= 0 \\ D\alpha + E\beta + F\delta &= 0 \end{aligned} \qquad (6_1)$$

бо ліві частини двох останніх рівнань є детермінанти

$$\begin{matrix} B & C & E \\ B & C & E \\ D & E & F \end{matrix} \quad \text{і} \quad \begin{matrix} D & E & F \\ B & C & E \\ D & E & F \end{matrix}$$

такі, що в них 2 рядки рівні, і тому вони дорівнюють нулеві

Так само

$$\begin{aligned} A\beta + B\gamma + D\varepsilon &= 0 \\ B\beta + C\gamma + E\varepsilon &= \Delta \\ D\beta + E\gamma + F\varepsilon &= 0 \end{aligned} \qquad (6_2)$$

$$\begin{aligned} A\delta + B\varepsilon + D\varphi &= 0 \\ B\delta + C\varepsilon + E\varphi &= 0 \\ D\delta + E\varepsilon + F\varphi &= \Delta. \end{aligned} \qquad (6_3)$$

Тому, якщо перемножимо детермінанти Δ і Δ', то

$$\Delta\Delta' = \begin{matrix} A\alpha + B\beta + D\delta, & B\alpha + C\beta + E\delta, & D\alpha + E\beta + F\delta \\ A\beta + B\gamma + D\varepsilon, & B\beta + C\gamma + E\varepsilon, & D\beta + E\gamma + F\varepsilon \\ A\delta + B\varepsilon + D\varphi, & B\delta + C\varepsilon + E\varphi, & D\delta + E\varepsilon + F\varphi \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{matrix} = \Delta^2.$$

Далі, з виписаних рівнань ми можемо і навпаки виразити, — A, B.... F через α, β,... φ. Справді, рівнання 1, 4 і 7 тобто:

$$A\alpha + B\beta + D\delta = \Delta,$$
$$A\beta + B\gamma + D\varepsilon = 0,$$
$$A\delta + B\varepsilon + D\varphi = 0$$

дають:

$$A = \frac{1}{\Delta'} \begin{vmatrix} \Delta & \beta & \delta \\ 0 & \gamma & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varphi \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{\Delta'}(\gamma\varphi - \varepsilon^2) = \frac{\varphi\gamma - \varepsilon^2}{\Delta}, \qquad (7_1)$$

$$B = \frac{\delta\varepsilon - \beta\varphi}{\Delta}, \quad (7_2) \qquad D = \frac{\beta\varepsilon - \gamma\delta}{\Delta} \qquad (7_3)$$

Розв'язуючи сумісно 2-е, 5-е і 8-е, тобто

$$B\alpha + C\beta + E\delta = 0,$$
$$B\beta + C\gamma + E\varepsilon = \Delta,$$
$$B\delta + C\varepsilon + E\varphi = 0,$$

знайдемо:

$$C = \frac{1}{\Delta}(\alpha\varphi - \delta^2), \qquad (7_4) \qquad E = \frac{1}{\Delta}(\beta\delta - \alpha\varepsilon) \qquad (7_5)$$

Наостанку, з трьох останніх рівнань матимемо;

$$F = \frac{1}{\Delta}(\alpha\gamma - \beta^2) \qquad (7_6)$$

Отже, якщо відомо α, β, γ, δ, ε, φ, то знайдемо аж до чинника $\frac{1}{\Delta}$ і коефіцієнти рівнання (1). Тому, якщо дано 5 прямих, що до них дотикається шукана крива, то умова (4),

взята у вигляді (4), справджується всіма п'ятьма даними прямими, і, отже, маємо п'ять рівнань вигляду (4); розв'язуючи їх відносно α, β,... φ, дістанемо єдину систему значінь їхніх відношень до одного з них, а тому, як і вказувалось, знайдемо єдину систему значінь для A, B,... F. Таким чином, до п'ятьох даних прямих дотикається один конічний переріз.

Зауважмо, що поміж виразом (1) за допомогою α, β,... φ і виразом (4) є точнісінька аналогія, а тому, вносячи в (1) значіння (7_1)... (7_6), можна записати це рівнання у вигляді детермінанта

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta & x \\ \beta & \gamma & \varepsilon & y \\ \delta & \varepsilon & \varphi & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad 8$$

Це рівнання 2-го степеня відносно α, β,... φ. Тому, якщо дано одну точку і чотири дотичні, то ми маємо одне рівнання типу (8) 2-го степеня відносно α... φ і чотири — вигляду (4), лінійних відносно α, β,... φ. Для цих величин матимемо тому дві системи значінь, а, значить, і дві системи значінь A, B,... F. Отже, через одну точку проходять і до чотирьох прямих дотикаються два конічні перерізи.

Якщо дано дві точки і три дотичні, то маємо два рівнання (8) 2-го степеня і три рівнання 1-го степеня (4) відносно α, β,... φ; розв'язуючи їх, маємо чотири системи значінь. Тому, через дві точки проходять і дотикаються до трьох прямих чотири криві другого порядку.

Кола, як ми бачили, це є криві другого порядку, що проходять через дві, так звані, циклічні точки на безконечності. Тому, щоб визначити коло, можна задати або ще три точки, — тоді здобудемо одне коло, або дві точки і одну дотичну, — тоді матимемо два кола, або одну точку і дотичні 2 — тоді матимемо чотири кола, або, наостанку — три дотичні, тоді буде чотири кола, вписані в утворений трьома прямими трикутник (одне внутрішньо-вписане і три зовнішньо-вписані).

Параболя є крива, що дотикається до безконечно віддаленої прямої. Одна дотична уже таким чином дана, якщо сказано, що крива є параболя, і тому маємо:

дано 4 точки; можна провести 2 параболі
„ 3 „ і 1 дотична; можна провести 4 параболі
„ 2 „ і 2 „ „ „ 4 „
„ 1 „ і 3 „ „ „ 2 „
дано 4 дотичні; можна провести одну параболю.

Повертаємось тепер до деяких інших умов, що їними можна визначити криву другого порядку.

Якщо крива має дотикатися до даної прямої і в даній її точці, то, крім умови дотику, повинно бути справджено ще й умову, щоб крива проходила через дану точку. Таким чином, ця складна умова рівноважна двом простим. Але два рівнання, до яких ця складна умова зводиться, можна взяти в іншому вигляді. А саме: дану пряму (бо вона проходить через дану точку) (x_1, y_1), можна взяти у вигляді:

$$\lambda(x-x_1)+\mu(y-y_1)=0$$

Умова, щоб крива проходила через (x_1, y_1) є

$$f(x_1, y_1) \equiv Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F=0. \quad (2)$$

Залишається виразити, що кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює кутовому коефіцієнтові даної прямої

$$\frac{Ax_1+By_1+D}{\lambda}=\frac{Bx_1+Cy_1+E}{\mu} \quad (9)$$

Справді, ті рівнання, за допомогою яких ми вивели умову дотику, тепер, за відомих (x_1, y_1), можна написати:

$$Ax_1+By_1+D=\sigma\lambda,$$
$$Bx_1+Cy_1+E=\sigma\mu,$$
$$Dx_1+Ey_1+F=\sigma(-\lambda x_1-\mu y_1).$$

Виключаючи σ з двох перших рівнань, коли відомі x_1, y_1. матимемо (9), щождо третього, то його можна переписати, якщо помітимо, що за (2)

$$Dx_1+Ey_1+F=-(Ax_1^2+2B_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+Ey_1).$$

так:

$$-x_1(Ax_1+By_1+D)-y_1(Bx_1+Cy_1+E)=-\sigma(\lambda x_1+\mu y_1)$$

або, перенісши всі члени ліворуч,

$$[Ax_1+By_1+D-\sigma\lambda]\,x_1+[Bx_1+Cy_1+E-\sigma\mu]\,y_1=0\,.$$

Отже, на підставі (2) і перших двох рівнань, що зводяться до (9), це рівнання уже справджується.

Якщо дано напрям хорд і супряжений до них діяметр, то, взявши останній за вісь x-ів, а будь-яку пряму, паралельну до хорд, за вісь y-ків, можна одержати, що кожному значінню x відповідає два значіння y, рівні величиною й протилежні знаком. У рівнанні, тому, повинно не бути членів з 1-м степенем y, тобто $B=0=E$. І рівнання має лише три коефіцієнти; дана таким чином умова рівноважна двом простим умовам.

Якщо просто дано два супряжені напрями m і m', то це проста умова, бо вона дає лише одно співвідношення поміж коефіцієнтами

$$A+B(m+m')+Cmm'=0\,.$$

Але, якщо дано лише пару супряжених діяметрів, то, значить, крім цього, дано і координати центра. Всього маємо три умовні рівнання. Справді, взявши ці прямі за осі, зведемо рівнання кривої до вигляду:

$$A'x'^2+C'y'^2+F'=0\,,$$

де довільних залишається лише два коефіцієнти.

Умова буде проста також і тоді, коли задамо кут поміж асимптотами. Справді, цей кут визначається тангенсом

$$\operatorname{tg} v=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\,,$$

де

$$m_1m_2=\frac{A}{C}\quad\text{і}\quad m_1+m_2=-\frac{2B}{C}$$

тобто

$$m_1-m_2=\pm\frac{2}{C}\sqrt{B^2-AC}$$

і отже дана умова рівноважна одному співвідношенню поміж коефіцієнтами ($\operatorname{tg} v = k$)

$$(A+C)^2k^2 = 4(B^2 - AC).$$

Зокрема, коли $v = \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{k} = 0$, то ми дійдемо знову до $A + C = 0$, що є умовою для рівнобічних гіперболь.

Якщо дано напрями асимптот, то, взявши паралельні їм осі, зведемо рівнання до вигляду:

$$A'xy + D'x + E'y + F' = 0$$

а це теж рівноважно двом умовам.

Але, якщо дано самі асимптоти, то це рівноважно чотирьом умовам, бо, прийнявши ці асимптоти за осі, рівнання кривої зведемо до вигляду:

$$A'xy = F'$$

Якщо дано лише одну асимптоту, то рівнання зведеться до вигляду:

$$x(Ax + By + C) = k$$

а в ньому буде три параметри: одна асимптота рівноважна двом умовам, як дотична з відомою точкою дотику.

Якщо дано фокус, то в рівнанні

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - \frac{e^2(ny + mx + h)^2}{n^2 + m^2} = 0$$

залишається довільними три коефіцієнти

$$\frac{ne}{\sqrt{n^2+m^2}}, \quad \frac{me}{\sqrt{n^2+m^2}}, \quad \frac{he}{\sqrt{n^2+m^2}}$$

отже, задати фокус це однаково, що задати дві умови.

А якщо дано фокус і директрису, то невизначеним залишається лише ексцентриситет, таким чином, задати фокус і директрису це однаково, що задати чотири умови.

Якщо відомо одну директрису, то також залишається три параметри: дві координати фокуса та ексцентриситет, отже, задати директрису це однаково, що задати дві умови.

Взагалі можна сказати, що кожну визначену відносно кривої точку можна визначити рівнанням кривої, і тому її координати можна виразити коефіцієнтами цього рівнання. Отже, якщо координати такої точки дано, це дає два співвідношення поміж коефіцієнтами рівнання, а, значить, дає і дві умови.

Так само можна виразити коефіцієнтами рівнання два коефіцієнти, що фігурують у загальному рівнанні прямої. Якщо пряма зв'язана з кривою, тобто, якщо її цим дано, то це дає два співвідношення між коефіцієнтами кривої.

§ 53. В'язка кривих 2-го порядку

Якщо умов дано не досить для того, щоб визначити коефіцієнти, то матимемо не одну чи дві розв'язки, а безліч їх, і одержимо цілу систему конічних перерізів. На одному з нескладних випадків такого означення ми тепер і зупинимось.

Хай дано чотири точки A, B, C, D. Для певности припустімо, що вони всі не лежать по три на одній прямій. Відповідні окремі випадки ми потім розглянемо.

Ми можемо міркувати так. Чотирьох точок не досить, щоб визначити конічний переріз. Додамо будь-яку п'яту E. Здобудемо якийсь конічний переріз S_1. Візьмімо іншу точку F, що не лежить на S_1, за п'яту, — здобудемо другий конічний переріз S_2. Хай $S_1 = 0$ і $S_2 = 0$ їхні рівнання. Ці дві криві мають чотири спільні точки A, B, C, D і жадної іншої, бо інакше вони злилися б. Ми можемо скласти рівнання

$$kS_1 + lS_2 = 0, \tag{10}$$

де k і l є довільні сталі чинники. За всяких значінь $\frac{k}{l}$ це рівнання зображатиме криву 2-го порядку, що проходить через точки перетину кривих S_1 і S_2, тобто через точки A, B, C, D. Усі ці криві, таким чином, відповідатимуть умовам завдання. І, навпаки, уявімо собі будь-яку криву 2-го порядку S', що проходить через A, B, C, D. Візьмімо на ній будь-яку точку G. Підставляючи координати точки G у (10)

ми знайдемо $\frac{k}{l}$ так, щоб рівнання справджувалося. Одержане таким чином рівнання визначає криву, що проходить через точки A, B, C, D і G, і тому ця крива повинна злитись із S'. Отже, всі криві 2-го порядку, що проходять через чотири точки A, B, C, D, зображаються рівнанням (10). Сукупність їх зветься в'язкою конічних перерізів, і (10) є рівнання цієї в'язки. Точки A, B, C, D являють собою основу в'язки.

Конічні перерізи S_1 і S_2 взято спочатку цілком довільно, бо цілком довільно взято для визначення цих кривих їхні п'яті точки E і F. В'язку можна визначити за допомогою довільних двох конічних перерізів, що належать їй, напр., S' і S'',

$$S' \equiv k_1 S_1 + l_1 S_2 = 0,$$
$$S'' \equiv k_2 S_1 + l_2 S_2 = 0.$$

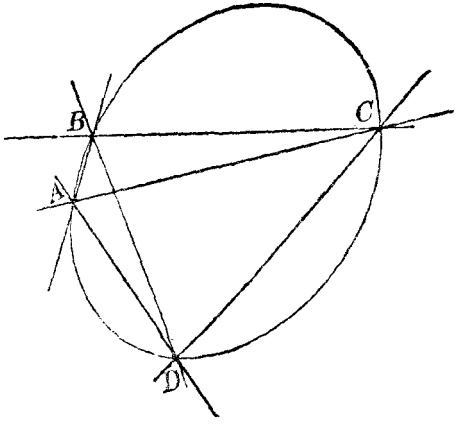

Рис. 76.

Щоб рівнання в'язки звести до вигляду $\varkappa S' + \lambda S'' = 0$, треба лише для даних k і l визначити $\varkappa$ і λ за умовою:

$$\varkappa k_1 + \lambda \varkappa_2 = \sigma k,$$
$$\varkappa k_1 + \lambda k_2 = \sigma l.$$

Зокрема можна за S' і S'' обрати дві пари прямих, що проходять через чотири дані точки. Їх буде три: AB і CD. AC і BD, AD і BC.

Ми одержимо відповідні значіння $\frac{k}{l}$ в (10), якщо складемо умову, щоб рівнання (10) виражало пару прямих:

$$\begin{vmatrix} kA_1 + lA_2 & kB_1 + lB_2 & kD_1 + lD_2 \\ kB_1 + lB_2 & kC_1 + lC_2 & kE_1 + lE_2 \\ kD_1 + lD_2 & kE_1 + lE_2 & kF_1 + lF_2 \end{vmatrix} = 0$$

Відносно $\frac{k}{l}$ це є рівнання 3-го степеня.

Однак простіш можна розв'язати цю задачу безпосередньо, користаючись прямими, що проходять через дані точки, і вживаючи так званої скороченої методи. Хай

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0 \quad \text{і} \quad \delta = 0,$$

рівнання прямих

$$AB, \quad CD, \; AC \quad \text{і} \quad BD$$

Для певности покладімо, що їх зведено до нормального вигляду, так що

$$\alpha \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

і т. д. Якщо дано чотири точки A, B, C, D, то за допомогою їхніх координат ми легко складемо всі ці рівнання. Добуток $\alpha\beta = 0$ зображатиме пару прямих AB, CD — це, значить, є теж крива 2-го порядку, що проходить через чотири точки. Так само $\gamma\delta = 0$ зображатиме пару прямих AC, BD.

Звідси

$$k\alpha\beta + l\gamma\delta = 0 \tag{11}$$

зображатиме в'язку кривих 2-го порядку, що мають за основу точки A, B, C, D, або обведених навколо чотирикутника $ABCD$.

Справді

A — точка перетину $\alpha = 0$, $\gamma = 0$,
B — „ „ $\alpha = 0$, $\delta = 0$,
C — „ „ $\beta = 0$, $\gamma = 0$,
D — „ „ $\beta = 0$, $\delta = 0$,

вони належать кривим (11), хоч би яке було відношення $\frac{k}{l}$

Примітка. Прямі можна задати рівнаннями не лише в нормальному вигляді і навіть не в прямокутніх координатах. Візьмімо, наприклад, дві з них за осі координат, так що координати точки A будуть $(0, 0)$ точки B — $(0, b)$, точки C — $(c, 0)$ і точки D — (a, d).

Рівнання прямої AB буде $x = 0$. Рівнання AC буде $y = 0$

Рівнання CD буде $\frac{x-c}{a-c} = \frac{y}{d}$, або $d(x-c) - (a-c)y = 0$

Рівнання BD буде $\frac{x}{a} = \frac{y-b}{d-b}$ або $(d-b)x - a(y-b) = 0$

Рівнання в'язки кривих 2-го порядку, обведених навколо $ABCD$ матиме вигляд:

$$kx\,[d\,(x-c)-(a-c)\,y]+ly\,[(d-b)\,x-a\,(y-b)]=0.$$

Зокрема, якщо $ABCD$ є паралелограм, так що координати D будуть $(c,\ b)$ і $a=c,\ d=b$, то матимемо:

$$bkx\,(x-a)-aly\,(y-b)=0$$

Якщо рівнання $\alpha=0$ і т. д. взято в нормальному вигляді, то легко формулювати геометричну властивість, виражену рівнанням (11).

Справді, тоді α, β, γ, δ виражають довжини перпендикулярів, спущених із точки $(x,\ y)$ на відповідні прямі, і тому, переписавши рівнання (11) у вигляді:

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}=-\frac{l}{k},$$

матимемо: в конічному перерізі, обведеному навколо чотирикутника відношення добутків перпендикулярів, спущених на протилежні боки чотирикутника, є величина стала.

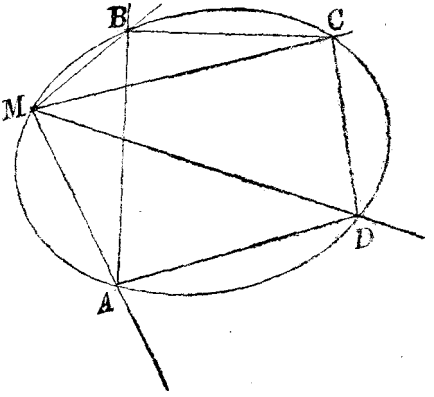

Рис. 77.

І, навпаки, геометричне місце точок, що спущені з них на протилежні боки чотирикутників перпендикуляри дають добуток із сталим відношенням до добутку перпендикулярів, спущених на два інші його боки,—є крива другого порядку, обведена навколо цього чотирикутника

Цю теорему можна перечислити в іншу, що виражає визначну властивість конічних перерізів. Візьмімо на кри-

вій, описаній навколо чотирикутника $ABCD$, будь-яку точку M і злучімо її з точками A, B, C, D.

Тоді

$$2 \triangle AMB = \alpha . \overline{AB} = \overline{AM} . \overline{BM} \sin AMB ,$$
$$2 \triangle CMD = \beta . \overline{DC} = \overline{CM} . \overline{DM} \sin CMD .$$

Звідси

$$\alpha\beta . \overline{AB} . \overline{DC} = \overline{AM} . \overline{BM} . \overline{CM} . \overline{DM} . \sin AMB . \sin CMD ; \quad (12)$$

так само, перемноживши рівності:

$$2 \triangle AMD = \gamma . \overline{AD} = \overline{AM} . \overline{DM} \sin AMD$$
$$2 \triangle BMC = \delta . \overline{BC} = \overline{BM} . \overline{CM} \sin BMC$$

матимемо:

$$\gamma\delta . \overline{AD} . \overline{BC} = \overline{AM} . \overline{BM} . \overline{CM} . \overline{DM} . \sin AMD . \sin BMC ; \quad (13)$$

взявши відношення (12) і (13), знайдемо:

$$\frac{\sin AMB . \sin CMD}{\sin AMD . \sin BMC} = \frac{\overline{AB} . \overline{CD}}{\overline{AD} . \overline{BC}} \cdot \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} .$$

Але права частина за попередньою теоремою

$$= -\frac{l}{k} \cdot \frac{\overline{AB} . \overline{CD}}{\overline{AD} . \overline{BC}}$$

тобто дорівнює тій самій величині, хоч би якою була точка M. А ліва частина — це є ангармонійне відношення чотирьох променів MA, MB, MC, MD. Отже, якщо назвемо його ангармонійним відношенням чотирьох точок конічного перерізу, то можна сказати: ангармонійне відношення чотирьох точок конічного перерізу є величина стала. Ми говорили про конічні перерізи, описані навколо чотирикутника $ABCD$. Але ми можемо на довільно взятому конічному перерізі обрати будь-які чотири точки і вважати, що вони утворюють чотирикутник.

Розгляньмо тепер граничний випадок, коли точки A і B, C і D попарно зливаються, так що прямі $\gamma = 0$ і $\delta = 0$ припадають одна на одну. Тоді рівнання (11) набирає вигляду:

$$k\alpha\beta + l\gamma^2 = 0 \quad (14)$$

Криві 2-го порядку, що мають таке рівнання, мають у точці A, B з прямою $\alpha=0$ дві злиті точки, тобто $\alpha=0$ є дотична до кривої (14) у точці A, $B \equiv (\alpha=0,\ \gamma=0)$.

Так само і пряма $\beta=0$ має з кривою (14) дві спільні злиті точки в C, $D \equiv (\beta=0,\ \gamma=0)$.

Отже, (14) є рівнання кривих 2-го порядку, що мають у точках їхнього перетину з $\gamma=0$ дотичні прямі $\alpha=0$ і $\beta=0$ за всякого значіння $\frac{e}{k}$: — криві (14) мають між собою подвійний дотик, а пряма $\gamma=0$ є їхня хорда дотиків.

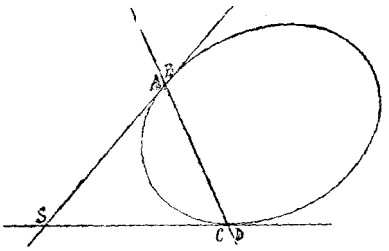

Рис. 78.

Якщо помітимо, що α, β, γ виражають перпендикуляри, спущені з точки (x, y) на відповідні прямі, то побачимо, що рівнання (14) виражає таку властивість кривих 2-г порядку:

Якщо візьмемо дві дотичні кривої 2-го порядку $\alpha=0$, $\beta=0$ і їхню хорду дотиків $\gamma=0$, то крива є геометричне місце точок таких, що добуток перпендикулярів, спущених із цих точок на дві дотичні, має стале відношення до квадрата перпендикуляра, спущеного на хорду дотиків.

§ 54. Паскалева і Бріяншонова теореми

Теорема 1. Якщо три конічні перерізи мають дві спільні точки, то три прямі, що злучають інші точки перетину кривих по дві, проходять усі через ту саму точку.

Справді, якщо $K=0$ є рівнання 1-ої кривої, то

$$K-k\alpha\beta=0, \quad K-k'\alpha\gamma=0$$

зображатимуть рівнання двох інших кривих, що проходять через дві точки перетину $K=0$ і $\alpha=0$.

Прямі, про які йде мова в теоремі, це

$$\beta=0,\ \gamma=0 \quad \text{і} \quad k\beta-k'\gamma=0$$

Остання пряма переходить через точку перетину двох перших.

Як висновок із цієї теорії, є славетна **Паскалева теорема**:

У шестикутнику, вписаному в конічний переріз, точки зустрічі протилежних хорд лежать на одній прямій. Хай $ABCDEF$ шестикутник, уписаний в K. За першою теоремою за три криві можна вважати: K і пари прямих AB і CD, AF і DE, що мають спільні точки A і D. Теорема I говорить тоді, що прямі BC, EF і пряма PM, що злучає точки перетину $(AB \,.\, DE)$ з $(CD \,.\, AF)$, тобто $P \equiv (AF, CD)$ і $M \equiv (AB, DE)$ проходить через одну точку. Якщо $H = (BC, EF)$, то значить, що P, M і H лежать на одній прямій, що і треба було довести.

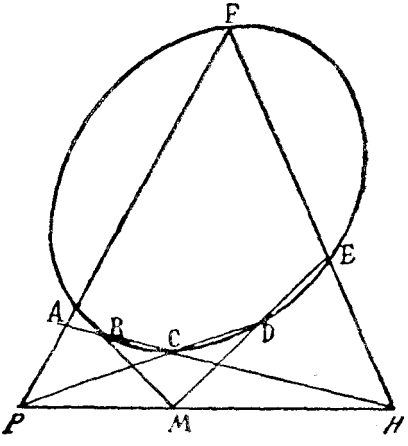

Рис. 79.

Висновок I. Теорема дає можливість збудувати скільки завгодно точок, якщо дано 5. Так само і дотичних.

Висновок II. У 4-кутнику $ABCD$, вписаному в конічний переріз, точки зустрічі протилежних боків і точки зустрічі дотичних з протилежних вершин лежать на одній прямій.

Висновок III. У трикутнику, вписаному в конічний переріз, точки зустрічі боків з дотичними із протилежних вершин лежать на одній прямій.

Бріяншонова теорема. У шестикутнику, вписаному в конічний переріз, три прямі, що злучають протилежні вершини, проходять через одну точку. (За принципом подвійности або за методою взаємних поляр це виводиться із Паскалевої теореми).

Можна розглядати шість точок

$$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$$

в такому порядку:

$$A_1\, B_2\, C_1\, A_2\, B_2\, C_2\, A_1,$$

що утворюють Паскалів шестикутник, і тоді, застосовуючи до нього Паскалеву теорему, матимемо, що три точки лежать на одній прямій. Проте, безумовно простіше, як це і робить Gruson, спроєктувати S в ∞. Тоді в'язка обертається в систему паралельних хорд, а прямі (A_1B_2, A_2B_1 і т. д.) перетинаються всі на супряженому хордам A_1A_2, B_1B_2... діяметрі.

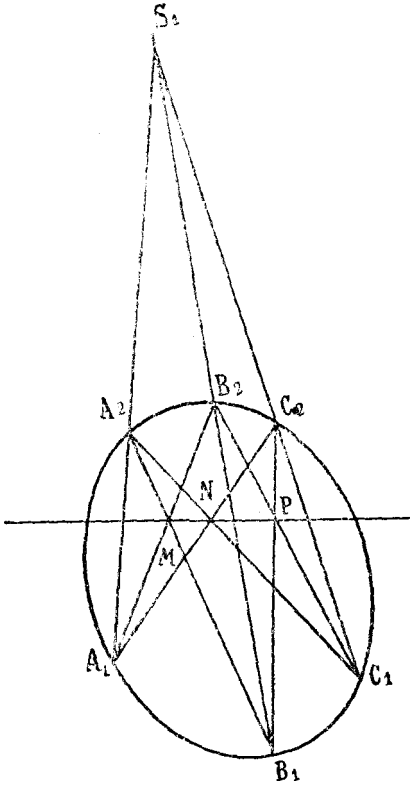

Рис. 80.

Справді, взявши напрями двох хорд супряжених діяметрів за осі:

Еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

A_1, A_2: (x_1', y') і (x_1', y_1');
B_1 (x_2', y_2'), $B_2=(x'_2, -y_2')$,

$$A_1B_2: \frac{X-x_1'}{x_2'-x_1'}=\frac{Y-y'}{-(y_2'+y_1')},$$

$$B_1A_2: \frac{X-x_1}{x_2-x_1'}=\frac{Y+y_1'}{y_2'+y_1'}$$

Точка перетину

$$Y+y_1'=-(Y-y_1'),$$

звідси $Y=0$.

Отже, можна висловити таку властивість супряжених діяметрів: якщо візьмемо дві паралельні хорди A_1A_2 і B_1B_2, то хорди A_1B_2 і A_2B_1 перетнуться на діяметрі, супряженому з хордами: A_1A_2 і B_1B_2.

§ 55. Метричні властивості в'язки конічних перерізів

У в'язці конічних перерізів

$$kS+lS'=0 \qquad (1)$$

де

$$S \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F, \quad S' = A'x^2 +$$

є одна рівнобічна гіперболя, або ∞.

Справді, умова, щоб (1) було рівнобічною гіперболею

$$k(A + C) + l(A' + C') = 0$$

або дасть

$$\frac{k}{l} = -\frac{A' + C'}{A + C},$$

якщо $A + C \neq 0$; якщо $A + C = 0$, $l = 0$. Якщо $A' + C' = 0$, то $k = 0$. А коли і $A + C = 0$ і $A' + C' = 0$, то всі (1) є рівнобічні гіперболі.

Відкидаючи цей випадок, ми можемо за S узяти цю рівнобічну гіперболю, а за осі координат асимптоти. Таким чином

$$S \equiv 2xy - a^2$$

Тепер (1) буде

$$lA'x^2 + 2(B' + k)xy + lC'y^2 + 2lD'A + 2lE'y + F' + ka^2 = 0.$$

Взявши $B' + k = 0$, одержимо криву

$$A'x^2 + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + \frac{F + B'a^2}{l} = 0$$

що її осі паралельні до асимптот гіперболі S. Візьмімо цю криву за S', тоді (1) остаточно матиме вигляд:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2kxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Крива в'язки (1) є параболя, якщо

$$AC - k^2 = 0, \text{ звідси:}$$

Параболь у в'язці (1) дві дійсні ($k = \pm\sqrt{AC}$), якщо $AC > 0$, тобто якщо S' є еліпса, і дві уявні, якщо $AC < 0$, тобто, якщо S' є гіперболя.

Koenigs [1]) вказує спрощення:

1) Геометричне місце центрів кривих в'язки (1):

$$Ax + ky + D = 0, \quad kx + Cy + E = 0$$
$$(Ax + D)x - (Cy + E)y = 0$$

[1]) Lecons de l'agrégation mathématique. Développements nouveaux sur la géométrie. P. 1892.

або

$$Ax^2 - Cy^2 + Dx - Ey = 0$$

шукане місце є гіперболя, коли $AC > 0$ і еліпса, коли $AC < 0$. Осі паралельні до осей координат (тобто до осей S') і центр:

$$\xi = -\frac{D}{2A}, \quad \eta = \frac{E}{2C}$$

$$A\left(\xi + \frac{D}{2A}\right)^2 - C\left(\eta + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C}$$

РОЗДІЛ XII

Колінеарні перетворення і перетворення подібности. Теорія кореляції

§ 56. Колінеарне (гомографічне) перетворення

Степінь альґебричного рівнання $f(x, y) = 0$ не зміняється, якщо ми замість змінних x і y введемо нові змінні X, Y, зв'язані з ними співвідношеннями:

$$X = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \qquad Y = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''} \tag{1}$$

лінійними дробовими, що мають спільний знаменник.

Рівнання (1) визначає колінеарне або гомографічне перетворення.

Така назва пояснюється тим, що це перетворення є найзагальніше, що переводить прямі лінії знову в прямі.

Справді, уявімо собі, що точка (X, Y) переводиться перетворенням

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y)$$

в точку (x, y) тієї ж площини. Пряма

$$AX + BY + C = 0$$

виходить з кривої

$$A\varphi(x, y) + B\psi(x, y) + C = 0.$$

Щоб ця остання теж була прямою, треба, щоб це рівнання множенням на деякий чинник зводилося до лінійного рівнання за цілком довільних A, B і C. Але для цього спільний знаменник φ і ψ, що залишається — після скоро-

чення на спільних чинників — чинником при C, повинен бути 1-го степеня щодо x і y, так само і чисельники, що залишаються, повинні бути лінійними щодо x і y.

Кожній точці (x, y) за перетворенням (1) належить певна точка (X, Y) — з конечними, взагалі, координатами.

Винятком будуть ті точки прямої

$$a''x + b''y + c'' = 0, \qquad 2)$$

що їм відповідають безконечно-великі значіння X і Y. У цьому разі пряма (2) при перетворенні відходить у безконечність

Розгляньмо умови, за яких — і навпаки — певній точці (X, Y) відповідає одна певна точка (x, y). Для цього зручно переписати (1) так:

$$\frac{X}{ax + by + c} = \frac{Y}{a'x + b'y + c'} = \frac{1}{a''x + b''y + c''} \qquad 1$$

і позначити спільне значіння трьох рівних відношень через ρ. Формули заміняться такими:

$$X = \rho(ax + by + c), \quad Y = \rho(a'x + b'y + c'),$$
$$1 = \rho(a''x + b''y + c'').$$

Три рівнання лінійні щодо ρx, ρy і ρ і дають цілком певні значіння для цих величин лише за умови:

$$\Delta = \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c' \end{matrix} \neq 0 \qquad (3)$$

Якщо мінор Δ, відповідний a, позначимо A, відповідний a' позначимо A' і т. д., тобто

$$A = b'c'' - c'b'', \; A' = b''c - bc'', \; A'' = bc' - cb' \text{ і т. д.}$$

то дістанемо:

$$\rho x = \frac{1}{\Delta} \begin{matrix} X & b & c \\ Y & b' & c' \\ 1 & b'' & e'' \end{matrix} = \frac{1}{\Delta}(AX + A'Y + A'')$$

так само:

$$\rho y = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & X & c \\ a' & Y & c' \\ a'' & 1 & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(BX + B'Y + B'') \qquad 4$$

і

$$\rho . 1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & b & X \\ a' & b' & Y \\ a'' & b'' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(CX + C'Y + C''),$$

або, виключаючи ρ:

$$x = \frac{AX + A'Y + A''}{CX + C'Y + C''}, \quad y = \frac{BX + B'Y + B''}{CX + C'Y + C''}. \qquad (4')$$

Безконечно-великі значіння x, y відповідають точкам прямої

$$CX + C'Y + C'' = 0 \qquad 5$$

Отже, в точки прямої (5) переходять безконечно-далекі точки площини.

Пряма

$$ux + vy + 1 = 0$$

від перетворення (1), тобто від заміни x, y на X, Y, переходить у пряму

$$uX + vY + 1 = 0$$

тобто в пряму:

$$u(ax + by + c) + v(a'x + b'y + c') + (a''x + b''y + c'') = 0$$

або

$$Ux + Vy + 1 = 0$$

де

$$U = \frac{au + a'v + a''}{cu + c'v + c''}, \quad V = \frac{bu + b'v + b''}{cu + c'v + c''}$$

Отже, пряма переходить знов у пряму

Пряма

$$a''x + b''y + c'' = 0$$

відходить у безконечність, а безконечно-далекі точки переходять у конечно-віддалену пряму

$$CX + C'Y + C'' = 0 \tag{5}$$

значить, безконечно-далекі точки від колінеарного перетворення перетворюються так, ніби вони теж складають пряму. Ось чому сукупності безконечно-далеких точок надається назва безконечно-далекої прямої.

Тому можна сказати: перетворення (1) переводить пряму (2) в безконечно-далеку пряму, а безконечно-далеку пряму в пряму (5).

Після цього можна сказати: перетворення (1), як і обернене йому (4'), кожну пряму площини перетворює знову в пряму лінію.

Можна зазначити, що й альґебрична крива порядку m, визначена рівнанням

$$f(x,\ y) = 0$$

після перетворення визначається рівнанням

$$f(X,\ Y) \equiv f\left(\frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''},\quad \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}\right) = 0$$

що, коли відкинути спільного знаменника, буде теж степеня m; порядок альґебричної кривої при колінеарному перетворенні не зміняється,—він є інваріянтний.

Чи всі точки й прямі площини зміняються при перетворенні (1)? Чи нема таких, що при цьому залишаються без зміни?

Щоб визначити такі інваріянтні точки колінеації, зручно звернутися до рівнання (1'). Справді, з рівнань (1') дістанемо при $X = x$, $Y = y$ рівнання:

$$x(a''x + b''y + c'') = ax + by + c$$
$$y(a''x + b''y + c'') = a'x + b'y + c'$$

що визначають дві гіперболі, які мають одну асимптоту, паралельну до прямої

$$a''x + b''y + c'' = 0$$

Асимптота кожної проходить через центр відповідної кривої. Тому з 4-х точок перетину цих гіперболь одна є спільна точка цих асимптот, яка є сторонній розв'язок, бо для одної асимптоти $a''x+b''y+c''=k$, а для другої $a''x+b''y+c''=k'$ і $k\neq k'$ взагалі. Тому рівнання (1′) цією точкою не вдовольняються, і залишається три розв'язки, три інваріянтні точки.

Якщо ж спільне значіння трьох відношень

$$\frac{X}{ax+by+c}=\frac{Y}{a'x+b'y+c'}=\frac{1}{a''x+b''y+c''}$$

позначимо $\frac{1}{\rho}$, то приходимо до рівнань:

$$\begin{aligned}\rho x&=ax+by+c,\\ \rho y&=a'x+b'y+c',\\ \rho&=a''x+b''y+c'',\end{aligned}\tag{6}$$

або

$$\begin{aligned}x(a-\rho)+by+c&=0\\ a'x+(b'-\rho)y+c'&=0\\ a''x+b''y+c''-\rho&=0\end{aligned}\tag{9'}$$

Три рівнання між x, y сумісні лише за умови

$$\begin{vmatrix}a-\rho & b & c\\ a' & b'-\rho & c'\\ a'' & b'' & c''-\rho\end{vmatrix}=0\tag{7}$$

Це рівнання 3-го степеня має три корені. Для кожного з них рівнання (6′) зводяться до двох незалежних і визначають аж до ρ систему значінь x, y,—тобто кожному кореневі рівнання (7) відповідає інваріянтна точка, а разом маємо взагалі три інваріянтні точки; прямі, що злучають їх, будуть інваріянтними прямими. Утворений ними трикутник зветься основним трикутником колінеації.

Якщо корені рівнання (7) дійсні і різні, маємо всі три вершини, а, значить, і всі три боки основного трикутника дійсні.

Якщо два корені рівнання (7) будуть уявні, то за дійсних коефіцієнтів $a^{(i)}$, $b^{(i)}$ і $c^{(i)}$ ці уявні корені будуть супря-

жені, а, значить, будуть супряжені і відповідні значіння x, y, z.

Але якщо

$$x_1 = \alpha + \beta i, \quad y_1 = \alpha' + \beta' i, \quad z_1 = \alpha'' + \beta'' i,$$

а

$$x_2 = \alpha - \beta i, \quad y_2 = \alpha' - \beta' i, \quad z_2 = \alpha'' - \beta'' i,$$

то можна знайти дійсну пряму

$$ux + vy + w = 0,$$

коефіцієнти рівнання якої вдовольняють умови:

$$u\alpha + v\alpha' + w\alpha'' = 0, \quad u\beta' + v\beta' + w\beta'' = 0,$$

і, значить, рівнання справджується координатами обох уявних інваріянтних точок. Ми дістаємо в цьому випадку одну дійсну інваріянтну пряму.

Ця дійсна інваріянтна точка і дійсна інваріянтна пряма будуть єдиними дійсними елементами основного трикутника колінеації, решта елементів уявні.

Якщо два корені рівнання (7) рівні, дві з трьох вершин основного трикутника колінеації зливаються в одну, також зливаються в одну і два боки основного трикутника, що злучають пристайні точки з 3-ю вершиною. Інваріянтна ж пряма, що злучала дві пристайні точки, займає якесь граничне положення, і основний трикутник колінеації зводиться до двох прямих, що їхня точка перетину є основна (подвійна) точка, а друга основна точка лежить на подвійній прямій.

Якщо нарешті всі три корені рівні, маємо одну основну точку і одну основну пряму, що через неї проходить.

Розглянені випадки припускають, що детермінант перетворення $\Delta \neq 0$. А якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

то рівнання

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \\ a''x + b''y + c'' &= 0 \end{aligned}$$

сумісні,—існує точка, що її координати визначаються будь-якими двома з цих рівнань, напр., 2-м і 3-м, і тоді вони виражаються через мінори матриці

$$\begin{Vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{Vmatrix}$$

для цієї точки вирази (1) для X і Y обертаються на $\frac{0}{0}$, і їй не відповідає певна точка, а кожну точку площини можна взяти за їй відповідну. Такі точки можна назвати основними або критичними (термін вживаний в теорії конексів).

Кожна пряма

$$u(ax+by+c)+v(a'x+b'y+c')+(a''x+b''y+c'')=0,$$

в яку переходить довільна пряма $(ux+vy+1=0)$ площини, проходить через основну точку.

Якщо це рівнання впорядкуємо за x, y, то маємо:

$$x(au+a'v+a'')+y(bu+b'v+b'')+cu+c'v+c''=0$$

За умови $\Delta=0$ рівнання

$$\begin{aligned} au+a'v+a''&=0 \\ bu+b'v+b''&=0 \\ cu+c'v+c''&=0 \end{aligned}$$

сумісні і визначають якусь пряму лінію, що її координати дістанемо, розв'язуючи будь-які два, напр., 3-е і 3-є

$$\frac{u}{a'b''-b'a''}=\frac{v}{a''b-b''a}=\frac{1}{ab'-ba'}$$

де знаменники — мінори матриці

$$\begin{matrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{matrix}$$

Цій прямій не відповідає жадна певна пряма, тобто будь-яку пряму площини можна вважати за колінеарно відповідну їй. Це основна (критична) пряма виродженої колінеації.

Основна точка і основна пряма взагалі не перебувають у злученім положенні (тобто основна точка не лежить взагалі на основній прямій), — це буває тільки за умови:

$$\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

що тотожньо не вдовольняється.

Таким чином колінеацію, відповідну $\Delta = 0$, можна характеризувати так: при $\Delta = 0$ рівнання (1) визначають перетворення, що переводить усі точки площини (крім основної) в точки одної прямої (основної), основна точка переходить у всі точки площини (тобто будь-яка точка площини, в тім числі і будь-яка точка основної прямої може вважатися за їй відповідну). Всі прямі площини переходять у прямі, що проходять через основну точку, за винятком основної прямої, яку можна вважати, що вона переходить у будь-яку пряму площини.

§ 57. Афінне перетворення

Цікавий окремий випадок колінеації

$$a'' = b'' = 0 \tag{9}$$

коли спільний знаменник X, Y стає величиною сталою і, значить, його можна прийняти за 1, так що

$$\rho X = ax + by + c, \qquad \rho Y = a'x + b'y + c,$$
$$\rho = c'' = 1$$

Точки з конечними координатами після перетворення мають знов конечні координати, точки з безконечно-великими координатами і після перетворення мають координати безконечно-великі, тобто коротше: безконечно-далека пряма після перетворення залишається безконечно-далекою прямою, або ще інакше: безконечно-далекі точки при цім перетворенні залишаються в спокої.

Таке перетворення носить назву афінного перетворення. Аналітично воно визначається як лінійне ціле.

В'язці паралельних прямих відповідає в цім перетворенні знов в'язка паралельних прямих.

Якщо всі точки кривої мають конечні координати, то і після перетворення крива не матиме безконечно-далеких точок,—тобто, наприклад, еліпса залишається еліпсою. Замкнена крива залишається замкненою.

Площі замкнених фігур після перетворення всі зміняються в тім самім відношенні. Досить показати це для трикутника. Хай дано три точки $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Вони перетворяться на (X_i, Y_i), де

$$X_i = ax_i + by_i + c,$$
$$Y_i = a'x_i + b'y_i + c'$$

подвійна площа перетвореного трикутника:

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax + by + c, & a'x + b'y + c', & 1 \\ ax_1 + by_1 + c, & a'x_1 + b'y_1 + c', & 1 \\ ax_2 + by_2 + c; & a'x_2 + b'y_2 + c', & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a(x_1 - x) + b(y_1 - y) & a'(x_1 - x) + b'(y_1 - y) \\ a(x_2 - x) + b(y_2 - y) & a'(x_2 - x) + b'(y_2 - y) \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix}$$

відношення двох площ—початкової і перетвореної є величина стала і рівна $(ab' - ba')$.

Зокрема може бути

$$ab' - ba' = 1. \tag{10}$$

Тоді маємо окремий випадок афінного перетворення і збереженням площ.

В останнім випадку віддаль між двома точками при прямокутній системі:

$$(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 = [a(x_1 - x) + b(y_1 - y)]^2 +$$
$$+ [a'(x_1 - x) + b'(y_1 - y)]^2 = (a^2 + a'^2)(x_1 - x)^2 +$$
$$+ 2(ab + a'b)(x_1 - x)(y_1 - y) + (b^2 - b'^2)(y_1 - y)^2$$

взагалі зміняється. А щоб і вона не змінилася, треба, щоб

$$a^2 + a'^2 = 1 \qquad ab + a'b' = 0 \qquad b^2 + b'^2 = 1 \tag{11}$$

це умови, що призводять до значінь

$$a = \cos\alpha = b', \quad b = \sin\alpha = -a'. \tag{12}$$

Ми приходимо таким чином до формул перетворення координат, що їх можна розуміти при незмінних осях, як рух у ній самій усієї площини, як незмінної фігури.

Якщо ж відкинемо припущення (10), то можна поставити питання, чи існують афінно-споріднені фігури, що в них не лише відношення відповідних площ, а й відношення відповідних відтинків були б сталі?

Для цього повинно бути

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 \quad ab + a'b' = 0 \tag{13}$$

називаючи спільне значіння двох частин 1-ої рівности через m^2, вдовольнимо їх, приймаючи

$$\begin{aligned} a &= m\cos\alpha \quad & a' &= m\sin\alpha \\ b &= -m\sin\alpha \quad & b' &= m\cos\alpha \end{aligned} \tag{14}$$

при цьому і

$$ab' - a'b = m^2. \tag{15}$$

Таке перетворення є злучення руху з перетворенням подібности. Воно визначається рівнаннями:

$$\begin{aligned} X &= m(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + c \\ Y &= m(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + c' \end{aligned} \tag{16}$$

і навпаки

$$\begin{aligned} x &= \frac{X-c}{m}\cos\alpha + \frac{Y-c'}{m}\sin\alpha, \\ y &= -\frac{X-c}{m}\sin\alpha + \frac{Y-c'}{m}\cos\alpha. \end{aligned} \tag{16_1}$$

Якщо зокрема $\alpha = 0$, маємо:

$$X = mx + c \quad Y = my + c' \tag{17}$$

навпаки

$$x = \frac{X-c}{m} \quad y = \frac{Y-c'}{m} \tag{17_1}$$

Фігури, що стоять між собою в такій відповідності, тобто такі, що координати відповідних точок зв'язані рівнанням (17), будуть фігури подібні і подібно розміщені.

Справді, при цьому напрями ліній не зміняються, а віддалі між відповідними точками зміняються в сталому відношенні.

§ 58. Застосування до кривих 2-го порядку

Якщо дві криві 2-го порядку

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (18)$$

$$A'x^2+2B'xy+C'y^2+2D'x+2E'y+F'=0 \qquad (18')$$

подібні і подібно розміщені, то, заміняючи в рівнанні 2-ої кривої x і y за формулами (17), дістанемо рівнання 1-е, тобто

$$A'(mx+c)^2+2B'(mx+c)(my+c')+C'(my+c')^2+$$
$$+2D'(mx+c)+2E'(my+c')+F'=0$$

Воно повинно бути тотожнім з (18). Утотожнюючи члени 2-го степеня, маємо:

$$A=A'm^2, \quad B=B'm^2, \quad C=C'm^2$$

тобто

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}$$

(коефіцієнти при членах 1-го степеня мають ще c і c').

У рівнаннях кривих другого порядку, подібних і подібно розміщених, коефіцієнти при членах 2-го степеня пропорціональні.

У загальному випадку, коли відповідні точки двох кривих зв'язані співвідношенням (16), підставляючи в (18') вирази x і y із (16), маємо, порівнюючи коефіцієнти при членах 2-го степеня:

$$m^2(A'\cos^2\alpha+2B'\cos\alpha\sin\alpha+C'\sin\alpha)=A,$$
$$m^2(A'\sin\alpha-2B'\cos\alpha\sin\alpha+C'\cos^2\alpha)=C,$$
$$m^2[(C'-A')\sin\alpha\cos\alpha+B'(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]=B$$

Згадуючи вирази інваріянтів (розд. VI), дістаємо·

$$m^2(A'+C')=A+C,$$
$$m^4(A'C'-B'^2)=AC-B^2$$

Звідси, у кривих 2-го порядку подібних, а подібно не розміщених, між коефіцієнтами членів 2-го степеня повинно існувати співвідношення:

$$\frac{AC-B^2}{(A+C)^2}=\frac{A'C'-B'^2}{(A'+C')^2}$$

§ 59. Теорія кореляції

Візьмімо загальне рівнання прямої

$$Ax+By+C=0.$$

Ми розглядаємо тут пряму, як геометричне місце точок. Якщо дано коефіцієнти A, B, C, то пряму цілком визначено. Надаючи їм усіляких значінь, діставатимемо різні прямі на площині. Отже, ці коефіцієнти цілком визначають пряму, а тому їх можна вважати за координати прямої. Теорія взаємних поляр дає можливість розглядати геометричні образи не лише, як геометричне місце точок, а і як утворені рухом прямої. Це перетворення кожну точку перетворює на пряму — її поляру — відносно якогось конічного перерізу.

Проте, таке перетворення можна зробити і незалежно від теорії поляр, і в цьому разі воно має назву корелятивного (або взаємного) перетворення.

Якщо маємо криву 2-го порядку

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0, \qquad (1)$$

то її дотична (або й поляра)

$$(ax+by+d)X+(bx+cy+e)Y+dx+cy+f=0 \qquad (2)$$

підпорядковує точці (x, y) пряму

$$ux+vy+w=0$$

якої u, v і w зв'язані з (2) співвідношеннями:

$$\rho u = ax + by + d,$$
$$\rho v = bx + cy + e,$$
$$\rho w = dx + ey + f.$$

Прилучаючи до цих трьох співвідношень рівнання

$$ux + vy + w = 0$$

виключаючи ρ, x, y із чотирьох рівнань, дістанемо умову дотику:

$$\begin{vmatrix} a & b & d & u \\ b & c & e & v \\ d & e & f & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0$$

що є рівнання кривої в танґенціяльних координатах.

Хай тепер є інша кореляція, що підпорядковує точці (x, y) прямої

$$(ax + by + c)\,X + (a'x + b'y + c')\,Y + (a''x + b''y + c'') = 0 \quad \text{(A)}$$

пряму

$$uX + vY + w = 0$$

Точки, що лежать на відповідних прямих, утворюють криву 2-го порядку.

$$(ax + by + c)\,x + (a'x + b'y + c')\,y + a''x + b''y + c'' = 0$$

або:

$$ax^2 + (b + a')\,xy + b'y^2 + (c + a')\,x + (c' + b'')\,y + c'' = 0. \quad (3)$$

Щоб дістати умову дотику, виключимо x, y, ρ з

$$\rho u = ax + by + c,$$
$$\rho v = a'x + b'y + c',$$
$$\rho w = a''x + b''y + c'',$$
$$0 = ux + vy + w.$$

Матимемо:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & u \\ a' & b' & c' & v \\ a'' & b'' & c'' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Це рівнання кривої 2-ої кляси, як обгортки прямої (u, v, w), що проходить через точку (x, y).

Криві (3) і (4) взагалі не зливаються.

Розгляньмо це, як задачу на обгортки.

Щоб розв'язати таку задачу, ми маємо співвідношення

$$\begin{array}{r|l} f(x, y, a, b) = 0 & f + \lambda\varphi = 0, \\ \varphi(a, b) = 0 & f'_a + \lambda\varphi'_a = 0 \\ & f'_b + \lambda\varphi'_b = 0 \end{array}$$

У нас ролю a, b відограють координати точки (x, y) тому:

$$aX + a'Y + a'' + \lambda\,[2ax + (b + a')\,y + c + a''] = 0$$
$$bX + b'Y + b'' + \lambda\,[(b + a')\,x + 2b'y + c' + b''] = 0$$

або

$$a(X + \lambda x) + a'(Y + \lambda y) + a''(1 + \lambda) + \lambda\rho u = 0 \qquad (3')$$
$$b(X + \lambda x) + b'(Y + \lambda y) + b''(1 + \lambda) + \lambda\rho v = 0 \qquad (4')$$

Та ще

$$u(X + \lambda x) + v(Y + \lambda y) + w(1 + \lambda) = 0 \qquad (6')$$

Множачи (3') і (4') на x і y і віднімаючи від (A), дістанемо:

$$cX + c'Y + c'' - \lambda\,[(2ax^2 + 2(b + a')\,xy + 2b'y^2 + (c + a'')\,x + \\ + (\lambda + b'')\,y] = 0\,.$$

З того, що (x, y) повинна лежати на кривій (3), випливає, що вираз у дужках дорівнює:

$$-(c + a'')\,x - (c' + b'')\,y - 2c''$$

і, отже, дійдемо до рівнання:

$$cX + c'Y + c'' + \lambda\,[(c + a'')\,x + (c' + b'')\,y + 2c''] = 0,$$

або до

$$c(X + \lambda x) + c'(Y + \lambda y) + c''(1 + \lambda) + \lambda\rho w = 0. \qquad (5')$$

Виключаємо з (3'), (4'), (5') і (6')

$$X + \lambda x, \quad Y + \lambda y, \quad 1 + \lambda \text{ і } \lambda\rho;$$

написавши умову згідности цих рівнань, матимемо знову (4) тобто:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & u \\ a' & b' & c' & v \\ a'' & b'' & c'' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0$$