ПЛАНИМЕТРІЯ

по системѣ Лежандра

для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ.

Составилъ

К. ГЕХЕЛЬ,

Докторъ математики въ Дерптѣ.

Дерптъ и Рига.

Изданіе типографіи Шнакенбурга.

1880.

Дозволено цензурою Дерптъ, 12. Апрѣля 1880 г.
Цензоръ П. ф. Руммелъ.

Предисловіе.

Многіе нѣмецкіе педагоги старались приспособить основанія Геометріи Лежандра къ употребленію въ школахъ и изъ всѣхъ ихъ К. Гехель, по отзыву знатоковъ дѣла, удачнѣе прочихъ выполнилъ эту задачу. Отбросивъ многія теоремы, составляющія скорѣе роскошь, чѣмъ необходимость при томъ количествѣ времени, которое назначается для Геометріи въ школахъ, онъ выбралъ самое существенное, чтобы сосредоточить на немъ все вниманіе учащагося. Простота и изящность нѣкоторыхъ новыхъ, упрощенныхъ и не встрѣчающихся въ нашихъ русскихъ руководствахъ къ Геометріи рѣшеній, сжатость и въ тоже время ясность изложенія составляютъ главныя достоинства этого учебника. Краткость изложенія даетъ возможность ученику схватить самую сущность и ходъ доказательства, и не развлекаетъ его массою послѣдовательныхъ выводовъ и слишкомъ частымъ повтореніемъ пройденнаго, — недостатокъ, которымъ страдаютъ многіе учебники. Всѣ повторенія здѣсь замѣнены ссылками. Этотъ учебникъ разпространенъ во многихъ училищахъ Германіи, а также введенъ въ употребленіе въ гимназіяхъ и другихъ учебныхъ заведеніяхъ Прибалтійскихъ Губерній.

Въ предлагаемый переводъ вошли нѣкоторыя измѣненія сравнительно съ послѣднимъ нѣмецкимъ изданіемъ. Вслѣдъ за выходомъ Планиметріи будетъ напечатана Стереометрія, а въ послѣдствіи будутъ переведены и остальныя сочиненія того же автора, *а именно:* Ариѳметика, Алгебра, плоская и сферическая Тригонометрія, Аналитическая Геометрія и Стереометрическія задачи, что составитъ полный курсъ математическихъ наукъ, преподаваемыхъ въ гимназіяхъ и соотвѣтствующихъ имъ другихъ учебныхъ заведеніяхъ.

РИГА, 7. Августа 1869.

В. Шиховъ.

Оглавленіе.

Объясненіе знаковъ.

$=$	означаетъ	равно.
$<$	„	менѣе.
$>$	„	бо́лѣе.
$\parallel$	„	параллельно.
$\#$	„	равно и параллельно.
$\backsim$	„	подобно.
$\cong$	„	равно и подобно.
$\angle$	„	уголъ.
$\perp$	„	перпендикулярно.
$\triangle$	„	треугольникъ.
$\smile$	„	дуга.

Введеніе.

§ **1.** 1) Геометрическимъ тѣломъ называется пространство, ограниченное со всѣхъ сторонъ и имѣющее длину, ширину и высоту (или глубину). Предѣлъ тѣла называется поверхностью, которая имѣетъ два измѣренія: длину и глубину. Предѣлъ поверхности есть линія, имѣющая только одну длину, а предѣлъ линіи — точка, не имѣющая никакого измѣренія.

Изученіе свойствъ тѣлъ, поверхностей и линій составляетъ предметъ Геометріи.

2) Прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками, а потому между двумя точками можно провести только одну прямую.

Линія, составленная изъ двухъ или нѣсколькихъ прямыхъ, не сливающихся въ одну прямую, называется ломаною. Линія, которая никакою своею частію не можетъ слиться съ прямою, называется кривою.

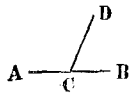
Двѣ ограниченныя прямыя называются равными, когда при наложеніи одной на другую сливаются оконечностями, а потому и всѣми промежуточными точками.

3) Поверхность называется плоскостью въ такомъ случаѣ, когда прямая, соединяющая двѣ произвольныя точки поверхности, совпадаетъ съ нею. Кривою поверхностю называется такая, которая никакою своею частію не совпадаетъ съ плоскостью.

4) Разсматриваніе свойствъ плоскости и различныхъ сочетаній линій и точекъ, находящихся въ одной плоскости, составляетъ первую часть Геометріи или Планиметрію.

§ **2.** 1) Если двѣ прямыя выходятъ изъ одной точки, то величина пространства, на которое онѣ отклоняются одна отъ другой, называется угломъ. Прямыя, образующія уголъ, называются его сторонами, а точка пересѣченія сторонъ — вершиною угла.

Величина угла не зависитъ отъ величины сторонъ, но отъ ихъ взаимнаго отклоненія. Два угла равны, если при наложеніи совпадаютъ своими вершинами и сторонами.



2) Если два угла ACD и BCD имѣютъ одну общую сторону CD, а двѣ другія стороны AC и BC составляютъ одну прямую, то такіе углы называются смежными.

Если смежные углы равны между собою, то каждый изъ нихъ называется прямымъ. Прямой уголъ будемъ означать буквою R.

Уголъ, который меньше прямаго, называется острымъ, а который больше прямаго, — тупымъ.

3) Если двѣ линіи образуютъ прямой уголъ, то онѣ называются перпендикулярными одна къ другой.

4) Двѣ прямыя при пересѣченія образуютъ 4 угла, изъ которыхъ каждые два противоположные называются вертикальными. Стороны одного изъ двухъ вертикальныхъ угловъ служатъ продолженіемъ сторонъ другаго. (На примѣръ въ § 5, 6 ∠ AEC и ∠ BED.)

5) Двѣ прямыя называются параллельными, если онѣ, находясь въ одной и той же плоскости, никогда не встрѣчаются, какъ бы ихъ ни продолжали.

§ 3. Аксіомы.

1) Цѣлое болѣе своей части и равно всѣмъ своимъ частямъ.

2) Двѣ величины, порознь равныя третьей, равны между собою.

3) Двѣ прямыя могутъ пересѣкаться въ одной только точкѣ; если же онѣ имѣютъ больше одной общей точки, то сливаются.

4) Чрезъ данную точку можно провести только одну прямую параллельно данной прямой.

I. Основныя предложенія.

§ 4. Всѣ прямые углы равны.

Если станемъ раздвигать стороны прямаго угла ABC до тѣхъ поръ, пока одна изъ нихъ (BC) сдѣлается продолженіемъ другой (BA), то получимъ уголъ ABD, котораго стороны BA и BD составятъ одну прямую. Изъ

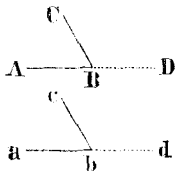
самаго опредѣленія прямаго угла (§ 2, 2) видно, что онъ равенъ половинѣ угла ABD, и такъ какъ всѣ углы, у которыхъ стороны составляютъ одну прямую, равны между собою, (§ 3, 4), то и всѣ прямые углы должны быть такъ же равны.

Прямой уголъ по причинѣ своей постоянной величины служитъ мѣрою всѣхъ остальныхъ угловъ. Онъ дѣлится на 90 равныхъ частей, называемыхъ градусами; каждый градусъ (1^0) дѣлится на 60 минутъ, а минута ($1'$) на 60 секундъ ($60''$).

§ 5. 1) Сумма двухъ смежныхъ угловъ ACE и ECB равна двумъ прямымъ.

Проведемъ изъ точки C линію $CD \perp AB$, тогда $ACE + ECB = ACD + DCE + ECB = ACD + DCB = 2R$.

2) Если два угла ABC и abc равны, то и ихъ смежные углы CBD и cbd равны.

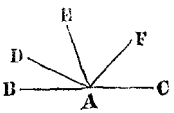


Такъ какъ $ABC + CBD = 2R = abc + cbd$, и $ABC = abc$, то и $CBD = cbd$.

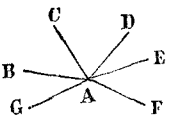
3) Изъ двухъ неравныхъ угловъ большій имѣетъ меньшій смежный уголъ и на оборотъ.

Если одинъ изъ смежныхъ угловъ острый, то другой тупой, и если одинъ прямой, то и другой прямой.

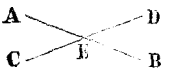
4) Сумма всѣхъ угловъ BAD, DAE..., лежащихъ по одну сторону прямой BC и имѣющихъ общую вершину въ точкѣ A, равна двумъ прямымъ, потому что сумма ихъ равна двумъ смежнымъ угламъ BAD и DAC.



5) Сумма угловъ BAC, CAD, DAE..., лежащихъ около точки A, равна четыремъ прямымъ. Стоитъ только провести чрезъ точку A произвольную прямую, тогда по каждую сторону прямой сумма угловъ равна 2R, слѣдовательно по обѣ стороны прямой, т. е. около точки A, эта сумма будетъ равняться 4R.

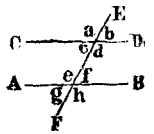


6) Вертикальные углы AEC и BED равны.



Такъ какъ $AEC + AED = 2R = BED + AED$ и $AED = AED$, то $AEC = BED$.

§ 6. Если двѣ прямыя линіи AB и CD (параллельныя или не параллельныя) пересѣкаются третьею EF, то при точкахъ пересѣченія образуется 8 угловъ, которые получаютъ особое названіе.



Четыре угла a, b, g, h *называются внѣшними*, а четыре угла c, d, e, f внутренними.

Два не смежные угла, лежащіе по одну сторону пересѣкающей прямой, изъ которыхъ *одинъ* внѣшній, а другой внутренній, называются соотвѣтствующими, напр. a, e; c, g; b, f; d, h.

Два внутренніе, не смежные угла, лежащіе по разнымъ сторонамъ сѣкущей, называются углами накрестъ лежащими. Таковы c, f; d, e.

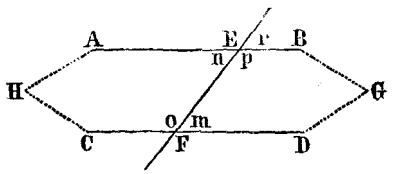
Два внутренніе по одну сторону сѣкущей лежащіе угла называются односторонними. Таковы c, e; d, f.

§ **7.** Двѣ линіи AB и CD, пересѣченныя третьею EF, параллельны,

1) если два накрестъ лежащіе угла (m = n) равны, или

2) если два соотвѣтствующіе угла (m = r) равны, или

3) если сумма двухъ одностороннихъ угловъ (n + o) равняется двумъ прямымъ.



1) Предположимъ, что AB и CD не параллельны, слѣд. по достаточномъ протяженіи пересѣкутся въ какой нибудь точкѣ G. Представимъ себѣ, что фигура EGF положена такъ по другую сторону линіи EF, что равные углы m и n, o и p покроютъ другъ друга, тогда линія FD пойдетъ по линіи EA, а линія EB по линіи FC, и потому линіи EA и FC должны встрѣтиться въ той точкѣ H, въ которую упадетъ точка G. Въ такомъ случаѣ двѣ прямыя AB и CD будутъ пересѣкаться въ двухъ точкахъ, что невозможно (§ 3, 3), и потому и предположеніе, что линіи AB и CD встрѣтятся, также невозможно, слѣд. эти линіи параллельны.

2) Если m = r, тогда и m = n (§ 5, 6), слѣд. AB ∥ CD.

3) Если n + o = 2 R, то найдемъ, такъ какъ и m + o = 2R, что m = n, слѣд. AB ∥ CD.

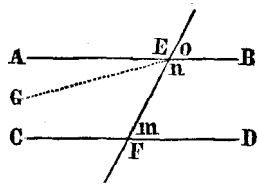
Слѣдствіе. Двѣ прямыя, перпендикулярныя къ одной и тойже прямой, параллельны между собою.

§ **8.** Если двѣ параллельныя AB и CD пересѣкаются третьею линіею EF, то

1) накрестъ лажащіе углы равны,

2) соотвѣствующіе углы равны,

3) сумма двухъ одностороннихъ угловъ равняется двумъ прямымъ.



1) Положимъ, что ∡ AEF не равенъ ∡ m, но болѣе его, такъ что часть GEF = m. Тогда линія GE ∥ CD (§ 7) и чрезъ точку E пройдутъ двѣ линіи AE и GE, параллельныя CD, что невозможно (§ 3, 4). По той же причинѣ ∡ AEF не можетъ быть меньше ∡ m, а потому ∡ AEF = m.

2) Такъ какъ ∡ AEF = m и въ то же время ∡ AEF = o, то и m = o.

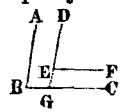
3) Такъ какъ o + n = 2 R и n = m, то и m + n = 2 R.

Слѣдствіе. Прямая линія, перпендикулярная къ одной изъ двухъ параллельныхъ, перпендикулярна и къ другой.

§ **9.** Если двѣ линіи параллельны третьей, то онѣ параллельны между собою.

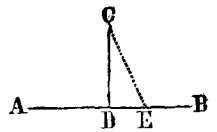
Если проведемъ перпендикуляръ къ третьей линіи, то онъ будетъ въ то же время перпендикуляромъ и къ каждой изъ остальныхъ линій (§ 8), слѣд. обѣ остальныя будетъ параллельны (§ 7).

§ **10.** Два угла ABC и DEF равны, если ихъ стороны параллельны и отверстія обращены въ одну и туже сторону.

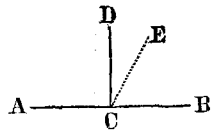


Продолжимъ сторону DE до пересѣченія со стороной BC въ точкѣ G тогда получимъ ∡ ABC = DGC = DEF (§ 8, 2).

§ **11.** Изъ данной точки C можно провести только одинъ перпендикуляръ къ линіи AB.



1) Точка C лежитъ внѣ прямой AB. Предположимъ, что кромѣ перпендикуляра CD изъ точки C опущенъ еще перпендикуляръ CE. Тогда CD и CE должны быть параллельны (§ 7); но онѣ пересѣкаются въ точкѣ C, слѣд. наше предположеніе невозможно.



2) Точка C лежитъ на прямой AB. Предположимъ, что чрезъ точку C проходятъ двѣ линіи CD и CE перпендикулярныя къ AB. Тогда ∡ DCB=R =ECB, что невозможно (§ 3, 1).

§ **12.** 1) Плоскою фигурою называется часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ линіями. Если фигура ограничена только прямыми, то она называется прямолинейною или многоугольникомъ, а сумма всѣхъ сторонъ периметромъ.

2) Прямыя линіи, ограничивающія многоугольникъ, образуютъ стороны, а точки пересѣченія двухъ смежныхъ сторонъ - вершины мно—ка. Двѣ смежныя стороны пересѣкаясь составляютъ внутренніе углы мно—ка. Уголъ, образованный стороною мно—ка и продолженіемъ прилежащей къ ней другой стороны, называется внѣшнимъ; онъ служитъ дополненіемъ до 2 R прилежащаго къ нему внутренняго угла мно—ка.

3) Прямая, соединяющая двѣ вершины мно—ка и не совпадающая съ одною изъ его сторонъ, называется діагональю.

4) Мно—къ называютъ равностороннимъ, когда всѣ стороны равны, и правильнымъ, когда кромѣ того и всѣ углы равны.

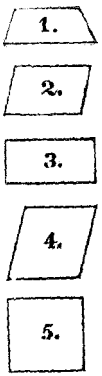
По числу угловъ (или сторонъ) мно—ки раздѣляются на треугольники, четыреугольники и т. д.

5) Треугольникъ называется равностороннимъ, если всѣ стороны его равны; равнобедреннымъ, если двѣ только стороны равны; разностороннимъ, если всѣ стороны различной величины.

Въ равнобедренномъ тре—кѣ обыкновенно сторону, не имѣющую себѣ равной, называютъ основаніемъ, а точку пересѣченія прочихъ сторонъ — вершиною.

6) Тре—къ называется прямоугольнымъ, тупоугольнымъ или остроугольнымъ, смотря по тому, имѣетъ ли онъ прямой или тупой уголъ или всѣ острые углы.

Въ прямоугольномъ тре—кѣ сторону, противолежащую прямому углу, называютъ гипотенузою, а двѣ другія стороны катетами.



7) Четыреугольникъ, въ которомъ только двѣ стороны параллельны, называется трапеціею (фиг. 1), а въ которомъ каждыя двѣ противолежащія стороны параллельны, параллелограмомъ (фиг. 2—5).

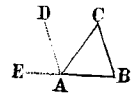
Параллелограмъ, имѣющій прямые углы, называется прямоугольникомъ (фиг. 3), имѣющій же равныя стороны, — ромбомъ (фиг. 4).

Параллелограмъ, въ которомъ всѣ углы прямые и всѣ стороны равны, называется квадратомъ (фиг. 5).

8) Плоскія фигуры называются равными ($\cong$), если они при наложеніи другъ на друга совпадаютъ всѣми своими частями.

Изъ этого слѣдуетъ, что въ равныхъ мно—кахъ стороны и углы одного мно—ка по одиначкѣ равны сторонамъ и угламъ другаго. Вершины равныхъ угловъ, также и стороны и діагонали, соединяющія вершины равныхъ угловъ, называются соотвѣтствующими.

§ 13. Сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ.



Если продолжимъ одну сторону BA тре—ка и проведемъ изъ A прямую AD ∥ BC, то ∠ B = DAE и ∠ C = DAC (§ 8), слѣд. ∠ CAE = B + C. Но такъ какъ ∠ CAE + ∠ BAC = 2 R, то и ∠ B + C + BAC = 2 R.

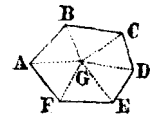
§ 14. Слѣдствія. 1) Внѣшній уголъ (CAE) тре—ка равенъ суммѣ внутреннихъ съ нимъ не смежныхъ угловъ, слѣд. онъ болѣе каждаго изъ послѣднихъ угловъ.

2) Если два угла одного тре—ка равны двумъ угламъ другаго, то и третій уголъ равенъ третьему.

3) Если тре—къ имѣетъ одинъ прямой или тупой уголъ, то остальные углы должны быть острыми.

4) Въ прямоугольномъ тре—кѣ каждый острый уголъ дополняетъ другой острый до прямаго.

§ 15. Сумма угловъ многоугольника равна двумъ прямымъ, умноженнымъ на число сторонъ, безъ четырехъ прямыхъ.



Означимъ число сторонъ мно—ка чрезъ n и проведемъ изъ точки G, внутри его произвольно взятой, прямыя къ вершинамъ всѣхъ угловъ. Тогда образуется n треугольниковъ, сумма угловъ коихъ равна 2 n R. Если мы отнимемъ 4 R около точки G, не принадлежащіе къ угламъ мно—ка, то останется $(2n-4)$ R.

§ 16. Слѣдствія. 1) Сумма угловъ въ четыреугольникѣ 4 R, въ пятиугольникѣ = 6 R, въ шестиугольникѣ = 8 R и т. д.

2) Если въ мно—кѣ всѣ углы равны, что бываетъ въ правильномъ мно—кѣ, то каждый уголъ равняется суммѣ всѣхъ угловъ, раздѣленной на число угловъ. Слѣд. каждый уголъ

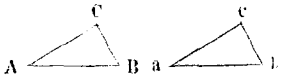
въ прав. n — угольникѣ $= \frac{2n-4}{n} = 2 - \frac{4}{n}$ R.

въ прямоугольникѣ $= \frac{4}{4} = 1$ R $= 90^0$

въ прав. 5 — угольникѣ $= \frac{6}{5}$ R $= 108^0$

въ прав. 6 — угольникѣ $= \frac{4}{3}$ R $= 120^0$ и т. д.

§ 17. (I). Два треугольника равны, если уголъ и двѣ прилежащія къ нему стороны одного равны порознь тѣмъ-же частямъ другаго.



Пусть $\angle A = a$, $AB = ab$, $AC = ac$. Наложимъ $\triangle abc$ на $\triangle ABC$ такъ, что бы точка a упала въ точку A, а линія ab на AB, тогда точка b упадетъ въ точку B, а по равенству угловъ $A = a$ и сторонъ $AC = ac$ точки c и C совпадутъ. Слѣд. стороны bc и BC совмѣстятся, а потому $\triangle abc \cong \triangle ABC$.

Слѣдствіе. Два прямоугольные тре—ка равны, если имѣютъ равные катеты.

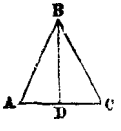
§ 18. (II.) Два треугольника равны, если сторона и два *прилежащіе къ ней угла одного тре—ка равны порознь тѣмъ—же* частямъ другаго. (Фиг. § 17).

Пусть $AB = ab$, $\angle A = a$, $\angle B = b$. Наложимъ сторону ab на AB такъ, чтобъ точка a упала въ A, и точка b въ B. Тогда по равенству угловъ стороны ac и bc примутъ направленія AC и BC. Но какъ двѣ прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ, то точка c упадетъ въ C и посему тре-ки совершенно совмѣстятся.

Слѣдствія. 1) Два тре—ка равны, если имѣютъ по равной сторонѣ и по два равные угла (§ 14, 2).

2) Прямоугольные тре—ки равны, если имѣютъ равныя гипотенузы и по равному острому углу, или по равному катету и по равному острому углу.

§ 19. 1) Если въ треугольникѣ двѣ стороны равны, то и противолежащіе имъ углы такъ же равны, и обратно, 2) если два угла равны, то и противолежащія имъ стороны равны.



1) Если $AB = BC$ и прямая BD дѣлитъ $\angle ABC$ пополамъ, тогда $\triangle ADB \cong CDB$ (§ 17), слѣд. $\angle A = C$.

2) Если $\angle A = C$, и прямая BD дѣлитъ $\angle ABC$ пополамъ, тогда $\triangle ABD \cong CBD$ (§ 18, 1), и потому $AB = BC$.

§ 20. Слѣдствія. 1) Въ равностороннемъ тре—кѣ всѣ углы равны, и потому каждый изъ нихъ $= \frac{2}{3} R = 60^0$.

2) Въ равнобедренномъ прямоугольномъ тре—кѣ каждый изъ острыхъ угловъ равенъ $\frac{1}{2} R = 45^0$.

3) Тре—къ, имѣющій равные углы, имѣетъ и равныя стороны.

§ 21. Если въ равнобедренномъ тре—кѣ проведенная изъ вершины линія выполняетъ одно изъ трехъ условій:

1) дѣлитъ уголъ при вершинѣ пополамъ, или

2) дѣлитъ основаніе пополамъ, или

3) перпендикулярна къ основанію, то она выполняетъ и оба остальныя условія (фиг. § 19).

Пусть въ $\triangle$ ABC сторона AB = CB, и потому $\measuredangle$ A = C,

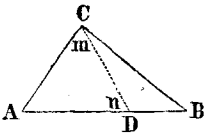
1) Если $\measuredangle$ ABD = CBD, то $\triangle$ ABD $\cong$ CBD по § 17 или § 18;

2) Если AD = CD, то $\triangle$ ABD $\cong$ CBD по § 17;

3) Если BD $\perp$ AC, то $\triangle$ ABD $\cong$ CBD по § 18, 1.

Изъ этого слѣдуетъ, что при каждомъ изъ нашихъ условій $\triangle$ ABD $\cong$ CBD, и потому въ одно и тоже время $\measuredangle$ ABD = CBD, AD = CD, BD $\perp$ AC.

§ **22.** Въ треугольникѣ ABC 1) бо́льшей сторонѣ противолежитъ бо́льшій уголъ, и обратно 2) бо́льшему углу противолежитъ бо́льшая сторона.



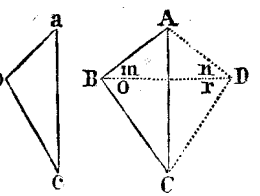
1) Если AB > AC, то и $\measuredangle$ ACB долженъ быть > B. Отложимъ на сторонѣ AB линію AD = AC, тогда въ равнобедренномъ $\triangle$ ACD будетъ $\measuredangle$ m = n (§ 19). Уголъ n, какъ внѣшній въ $\triangle$ CBD, болѣе угла B, потому и $\measuredangle$ m > B; слѣд. и $\measuredangle$ ACB > B.

2) Если $\measuredangle$ ACB > B, то и AB > AC. Если бы была сторона AB $\overline{\overline{<}}$ AC, то былъ бы и $\measuredangle$ ACB $\overline{\overline{<}}$ B (§ 19 и § 22, 1). Но такъ какъ это противорѣчитъ нашему условію, то AB > AC.

§ **23.** Слѣдствія. 1) Гипотенуза прямоугольнаго тре—ка есть самая большая изъ всѣхъ сторонъ.

2) Въ тупоугольномъ тре—кѣ сторона, противолежащая тупому углу, есть наибо́льшая.

§ **24.** (III.) Два треугольника равны, если всѣ стороны одного порознь равны сторонамъ другаго.



Пусть AB = ab, AC = ac, BC = bc. Приложимъ тре—ки другъ къ другу бо́льшими ихъ сторонами такъ, чтобы точки a и c упали въ точки A и C, а уголъ abc принялъ положеніе ADC. Если проведемъ BD, то въ равностороннихъ тре—кахъ BAD и BCD уголъ m = n и o = r (§ 19), слѣд. m + o = n + r, потому $\triangle$ ABC $\cong$ ADC $\cong$ abc (§17).

§ **25.** (IV.) Два треугольника равны, если двѣ стороны

и уголъ противолежащій бо́льшей изъ этихъ сторонъ одного соотвѣтственно равны тѣмъ-же частямъ другаго. (Фиг. § 24).

Пусть $ab = AB$, $ac = AC$, $\angle b = B$ и кромѣ того $ac > ab$ и $AC > AB$. Приложимъ оба тре—ка другъ къ другу такъ, чтобы бо́льшія изъ данныхъ сторонъ ac и AC совпали своими оконечностями, а уголъ abc принялъ положеніе ADC. Тогда $\angle ABC = ADC$ и $AB = AD$. Если проведемъ BD, то въ равностороннемъ $\triangle BAD$ уголъ $m = n$, слѣд. и $\angle ABC - m = \angle ADC - n$ или $o = r$, по этому въ $\triangle BCD$ сторона $BC = DC$ (§ 19, 2), то (§24) $\triangle ABC \cong ADC \cong abc$.

Если углы A и a, заключающіеся между равными сторонами, будутъ тупые, то прямая BD упадетъ по другую сторону вершины A, и вмѣсто вычитанія равныхъ угловъ изъ равныхъ придется употребить сложеніе.

Слѣдствіе. Два прямоугольные тре—ка равны, если имѣютъ равныя гипотенузы и по равному катету.

§ 26. Изъ доказанныхъ случаевъ равенства тре—ковъ слѣдуетъ, что тре—къ вполнѣ опредѣляется:

1) двумя сторонами и заключающимся между ними угломъ,
2) одною стороною и двумя углами,
3) тремя сторонами,
4) двумя сторонами и угломъ, противолежащимъ бо́льшей изъ этихъ сторонъ.

И такъ тре—къ опредѣляется тремя своими частями, въ числѣ которыхъ должна быть непремѣнно хотя одна сторона.

Такъ какъ въ прямоугольномъ тре—кѣ одинъ уголъ всегда извѣстенъ, то для опредѣленія прямоугольнаго тре—ка достаточно

1) двухъ катетовъ,
2) гипотенузы и остраго угла,
3) катета и остраго угла,
4) гипотенузы и катета.

§ 27. Сумма двухъ сторонъ треугольника всегда болѣе третьей.

Такъ какъ прямая AB есть кратчайшее разстояніе между точками A и B, то ломаная $ABC = AC + CB$ должна быть болѣе AB.

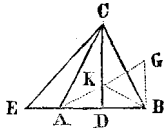
Изъ $AB < AC + CB$ слѣдуетъ, что $AB - AC < CB$, т. е. разность между двумя сторонами тре—ка меньше третьей его стороны.

§ **28.** Если изъ какой нибудь точки C, внѣ прямой EB, опустимъ на нее перпендикуляръ CD и проведемъ нѣсколько наклонныхъ CB, CA, CE . . ., то

1) перпендикуляръ короче всякой наклонной,

2) двѣ наклонныя CA и CB, равно удаленныя (DA = DB) отъ основанія (D) перпендикуляра, равны;

3) изъ двухъ наклонныхъ CA и CE болѣе удаленная отъ основанія (D) длиннѣе другой.



1) Въ тре—кахъ CAD и CED сторона CA > CD и CE > CD (§ 23, 1).

2) Если DA = DB, то △ CAD ≅ CBD (§ 17), слѣд. CA = CB,

3) Такъ какъ ∠ CAD острый, слѣд. ∠ CAE тупой, въ △ CEA сторона CE > CA (§ 23, 2).

§ **29.** Слѣдствія. 1) Изъ одной точки нельзя провести больше двухъ равныхъ линій къ данной прямой.

2) Кратчайшая изъ всѣхъ линій, проведенныхъ изъ точки C къ прямой EB, перпендикулярна къ этой послѣдней и служитъ мѣрою разстоянія точки C отъ прямой EB.

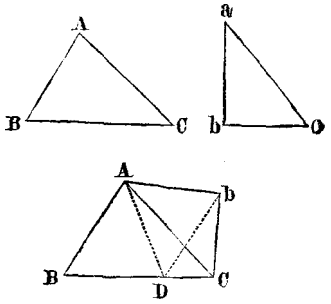
§ **30.** Если изъ средины прямой AB возставимъ къ ней перпендикуляръ DC, то 1) всякая точка C этого перпендикуляра будетъ равно удалена отъ концовъ прямой AB, напротивъ того 2) всякая точка G, взятая внѣ перпендикуляра, будетъ ближе къ тому концу его, съ которымъ она лежитъ по одну и ту-же сторону перпендикуляра. (Фиг. § 28.)

1) Такъ какъ AD = BD, то CA = CB (§ 28, 2).

2) Если проведутся AG, GB, KB, тогда KA = KB, и такъ какъ GK + KB > GB, то и GA > GB.

§ **31.** Если въ треугольникахъ ABC и abc двѣ стороны одного равны порознь двумъ сторонамъ другаго, а заключающіеся между ними углы не равны, то бо́льшему углу противолежитъ и бо́льшая сторона.

Если AB = ab, AC = ac, A > a, то BC > bc.

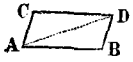


Приложимъ оба тре—ка другъ къ другу такъ, чтобъ стороны AC и ac совпали и $\triangle$ acb принялъ положеніе ACb. Если раздѣлимъ $\angle$ BAb пополамъ прямою AD и проведемъ bD, тогда $\triangle$ BAD $\cong$ bAD (§ 17), слѣдовательно BD = bD. Но такъ какъ въ $\triangle$ bCD bD + DC > bC, то и BD + DC > bC, т. е. BC > bc.

§ **32.** Если въ двухъ треугольникахъ двѣ стороны одного равны порознь двумъ сторонамъ другаго, а третьи стороны не равны, то бо́льшей сторонѣ противолежитъ и бо́льшій уголъ. (Фиг. § 31.) Если AB = ab, AC = ac, BC > bc, то A > a.

Положимъ, что $\angle$ A = a, тогда $\triangle$ ABC $\cong$ abc (§ 17), слѣд. BC = bc; а если положимъ, что $\angle$ A < a, тогда и сторона BC должна быть < bc. То и другое противорѣчитъ нашему условію, слѣд. $\angle$ A > a.

§ **33.** Въ параллелограмѣ ABCD противолежащія стороны и углы равны.



Если проведемъ діагональ AD, тогда $\triangle$ ABD $\cong$ DCA (§ 8 и § 18), слѣд. AB = CD, BD = AC, $\angle$ B = C и $\angle$ BAC = CDB.

Слѣдствія. 1) Діагональ дѣлитъ параллелограмъ на два равные тре—ка.

2) Параллельныя линіи, заключающіяся между двумя параллельными, равны.

3) Параллельныя линіи во всѣхъ своихъ частяхъ одинаково удалены другъ отъ друга.

§ **34.** Если въ четыреугольникѣ 1) каждыя двѣ противолежащія стороны равны, или 2) двѣ противолежащія стороны параллельны и равны, — тогда четыреугольникъ есть параллелограмъ. (Фиг. § 33.)

1) Если AB = CD и AC = BD, то $\triangle$ ABD $\cong$ DCA (§ 24), а потому $\angle$ ADB = DAC и $\angle$ BAD = CDA, слѣд. AC || BD и AB || CD.

2) Если AB # CD, тогда $\triangle$ ABD $\cong$ DCA (§ 17), а потому $\angle$ ADB = DAC, слѣд. AC || BD.

§ **35.** Въ параллелограмѣ ABDC діагонали дѣлятъ другъ друга пополамъ.

Такъ какъ $AC = BD$, $\measuredangle ACE = DBE$, $\measuredangle CAE = BDE$, то $\triangle ACE \cong DBE$, слѣд. $AE = DE$ и $CE = BE$.

§ **36.** Діагонали въ прямоугольникѣ равны, въ косоугольномъ параллелограмѣ неравны, въ ромбѣ и квадратѣ перпендикулярны другъ къ другу.

Доказательства слѣдуютъ изъ § 17, § 19 и § 31.

II. О кругѣ.

§ **37.** 1) Кругомъ называется плоская фигура, ограниченная кривою линіею, всѣ точки которой равно удалены отъ внутренней точки, называемой центромъ.

Кривая, ограничивающая кругъ, называется окружностью или круговою линіею.

Если въ плоскости обращается прямая линія около одной изъ ея точекъ, то всякая другая точка этой линіи опишетъ круговую линію.

2) Прямая, проведенная отъ центра круга къ точкѣ, лежащей на окружности, называется радіусомъ или полупоперечникомъ, а прямая, проходящая чрезъ центръ и ограниченная съ обѣихъ сторонъ окружностью, называется діаметромъ или поперечникомъ. Такъ какъ въ одномъ и томъ же кругѣ всѣ радіусы равны, то и всѣ діаметры, какъ двойные радіусы, должны быть равны между собою.

3) Всякая часть окружности называется дугою, а прямая, соединяющая ея оконечности, хордою. Каждой дугѣ соотвѣтствуетъ одна хорда, но каждой хордѣ-двѣ дуги, а именно тѣ, которыя имѣютъ общія съ хордою оконечности и взаимно дополняютъ другъ друга до цѣлой окружности.

4) Неограниченная прямая, проходящая чрезъ кругъ такъ, что одна часть лежитъ внутри, а другая внѣ круга, называется сѣкущею.

5) Если прямая имѣетъ только одну общую точку съ окружностью, то она называется касательною, а общая точка-точкою прикосновенія.

Два круга касаются, если ихъ окружности имѣютъ только одну общую точку.

6) Если уголъ образуется двумя радіусами и слѣд. имѣетъ вершину въ центрѣ круга, то его называютъ центральнымъ угломъ; если же уголъ убразуется двумя хордами, и вершина его находится на окружности, то онъ называется вписаннымъ угломъ.

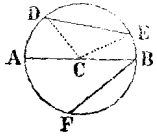
Центральные и вписанные углы опираются на соотвѣтствующую имъ дугу, т. е. на ту часть окружности, которая заключается между ихъ сторонами.

7) Часть круга, заключающаяся между дугою и двумя радіусами, проведенными къ оконечностямъ дуги, называется секторомъ или вырѣзкомъ, а часть круга, заключающаяся между дугою и ея хордою — сегментомъ или отрѣзкомъ.

8) Многоугольникъ вписанъ въ кругъ, если всѣ стороны его составляютъ хорды этого круга. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что кругъ описанъ около мно—ка.

Многоугольникъ описанъ около круга, если всѣ стороны его касательныя къ окружности. Въ такомъ случаѣ кругъ вписанъ въ мно—къ.

§ 38. Всякій діаметръ AB дѣлитъ кругъ и окружность на двѣ равныя части.



Представимъ себѣ, что фигура будетъ перегнута по линіи AB, тогда кривыя ADEB и AFB совпадутъ, потому что всѣ точки ихъ равно удалены отъ центра.

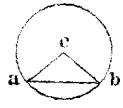
§ 39. Діаметръ AB болѣе всякой хорды DE (фиг. § 38.)

Если проведемъ радіусы CD и CE, тогда $DC + CE > DE$, слѣд. и $AB > DE$.

§ 40. Прямая линія можетъ пересѣкать окружность не болѣе какъ въ двухъ точкахъ.

Еслибы обѣ линіи имѣли болѣе двухъ общихъ точекъ, тогда мы могли бы отъ центра къ прямой провести болѣе двухъ равныхъ линій, что не возможно (§ 29.)

§ 41. Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ 1) равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги и хорды, и обратно, 2) равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равныя центральныя углы и хорды.



1) Если $\angle C = c$, то по равенству радіусовъ одинъ кругъ можно такъ наложить на другой, что точки A, B, C, совпадутъ съ точками a, b, c, а отъ того хорды и дуги, соотвѣтствующія угламъ C и c, сольются.

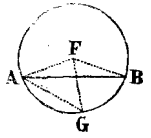
2) Если дуга $AB = ab$, то и хорды ихъ также равны и потому $\triangle ABC \cong abc$ (§ 24), слѣд. $\angle C = c$.

§ **42.** Слѣдствія. 1) Равныя хорды стягиваютъ равныя дуги, если обѣ дуги больше или обѣ дуги меньше полуокружности.

2) Равнымъ центральнымъ угламъ или равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равные секторы и сегменты.

3) Бо́льшему изъ двухъ центральныхъ угловъ соотвѣтствуетъ бо́льшая дуга и обратно, какъ видно изъ наложенія одной фигуры на другую.

§ **43.** Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ 1) бо́льшей дугѣ соотвѣтствуетъ бо́льшая хорда, и на оборотъ, 2) бо́льшей хордѣ соотвѣтствуетъ бо́льшая дуга, — если сравниваемыя дуги менѣе полуокружности.

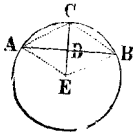


1) Пусть дуга AGB > AG. Если проведутся радіусы FA. FB. FG, тогда тре—ки AFB и AFG имѣютъ по двѣ равныя стороны, которыя образуютъ неравные углы, ∠ AFB > AFG; слѣд. AB > AG (§ 31).

2) Если AB > AG, тогда изъ тѣхъ же тре—ковъ слѣдуетъ, что ∠ AFB > AFG (§ 32), и потому дуга AGB > AG.

Если разсматриваемыя дуги болѣе полуокружности, то бо́льшей дугѣ соотвѣтствуетъ меньшая хорда.

§ **44.** Радіусъ EC, перпендикулярный къ хордѣ AB, дѣлитъ хорду и дугу ея ACB пополамъ.

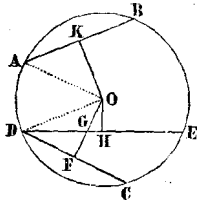


Такъ какъ △ ADE ≅ BDE (§ 25), то AD = BD, а потому AC = BC (§ 28, 2), слѣдовательно и дуга AC = BC (§ 42, 1).

§ **45.** Слѣдствія. 1) Центръ круга, средина хорды и средина ея дуги лежатъ на одной прямой, перпендикулярной къ хордѣ, такъ что прямая, проходящая чрезъ двѣ изъ этихъ точекъ, должна пройти и чрезъ третью.

2) Перпендикуляръ возставленный къ хордѣ въ срединѣ ея, пройдетъ чрезъ центръ круга и средину дуги, стягиваемой хордою.

§ **46.** 1) Равныя хорды AB и DC равно удалены отъ центра круга. 2) Изъ двухъ неравныхъ хордъ, AB и DE, бо́льшая DE ближе къ центру.



1) Возставимъ изъ срединъ хордъ AB и DC перпендикуляры KO и FO, и проведемъ радіусы OA и OD, тогда $\triangle AOK \cong DOF$ (§ 25), а потому $OK = OF$ (§ 29, 3).

2) Если $AB, < DE$, то и дуга $AB < DCE$ (§ 43, 2). Отложимъ на дугѣ DCE часть $DC = AB$, проведемъ хорду DC и опустимъ $OF \perp DC$ и $OH \perp DE$, тогда $OF > OG > OH$ (§ 28, 1), и такъ какъ $DC = AB$ (§ 41, 2), то и $OF = OK$, слѣд. $OK > OH$.

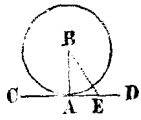
§ **47.** 1) Двѣ хорды AB и DC равны, если они равно удалены отъ центра круга. (§ 17 и § 44.)

2) Чѣмъ ме́нѣе разстояніе хорды отъ центра, тѣмъ болѣе хорда.

Если $OH < OK$, то должна быть $DE > AB$, потому что принимая $DE \gtreqless AB$ получимъ (§ 46) $OH \gtreqless OK$, что противно нашему условію.

§ **48.** 1) Прямая, перпендикулярная къ радіусу въ его конечной точкѣ, есть касательная къ окружности, и обратно;

2) Касательная перпендикулярна къ радіусу, проведенному чрезъ точку прикосновенія.



1) Если прямая $AD \perp AB$ въ точкѣ A, лежащей на окружности, то всякая другая точка, напр. E на прямой CD, отстоитъ далѣе отъ центра B, нежели A, потому что $BE > BA$ (§ 28, 1). Слѣд. CD, имѣя только одну точку, общую съ окружностью, будетъ касательною къ кругу.

2) Если CD касательная къ кругу въ точкѣ A, то всѣ другія точки ея находятся внѣ окружности; слѣд. разстояніе ихъ отъ центра болѣе нежели радіусъ BA, напр. $BE > BA$. Такъ какъ AB есть кратчайшее разстояніе центра B отъ CD, то $BA \perp CD$ (§ 29, 2).

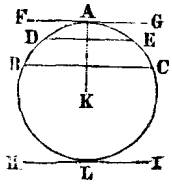
§ **49.** Слѣдствія. 1) Чрезъ данную точку окружности можно провести только одну касательную.

2) Перпендикуляръ, возставленный изъ точки прикосновенія къ касательной пройдетъ чрезъ центръ круга.

3) Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на касательную, пройдетъ чрезъ точку прикосновенія.

Доказательства выводятся изъ § 11.

§ 50. Дуги круга, заключающіяся между параллельными линіями, равны между собою.

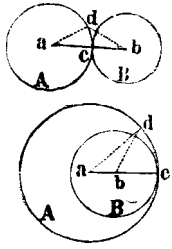


Если хорды BC и DE параллельны, то радіусъ KA, проведенный ⊥ BC, также будетъ ⊥ DE (§ 8 слѣд.), и потому ◡ AB = ◡ AC, ◡ AD = ◡ AE, слѣд. и ◡ BD = ◡ CE (§ 44).

Если касательная FG ∥ DE, то проведенный къ точкѣ прикосновенія радіусъ KA будетъ ⊥ FG и ⊥ DE, слѣд. ◡ DA = ◡ EA.

Если касательныя FG и HI параллельны, то проведя хорду BC ∥ FG по предъидущему, будемъ имѣть: ◡ BA = ◡ CA и ◡ BL = ◡ CL, слѣд. и ◡ ABL = ◡ ACL.

§ 51. Если разстояніе ab между центрами двухъ круговъ A и B равно суммѣ или разности ихъ радіусовъ, то окружности касаются соотвѣтственно извнѣ или внутри.



1) Если ab равна суммѣ радіусовъ ac и bc, то всякая точка d круга A, за исключеніемъ точки c, лежащей на прямой ab, находится внѣ круга B, потому что ad + bd > ac + bc, слѣд. bd > bc.

2) Если ab равна разности ac — bc, то всякая точка d круга A, за исключеніемъ точки c, находится внѣ круга B, потому что ab + bd > ad, но ad = ab + bc, слѣд. ab + bd > ab + bc или bd > bc.

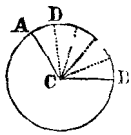
§ 52. Слѣдствія. 1) Если два круга соприкасаются, то ихъ центры и точка соприкосновенія лежатъ на одной прямой.

2) Два круга пересѣкутся, если разстояніе между центрами менѣе суммы, и болѣе разности ихъ радіусовъ.

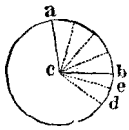
3) Всѣ круги, имѣющіе центры на одной прямой линіи и проходящіе чрезъ одну и туже точку этой прямой, соприкасаются въ этой точкѣ и имѣютъ въ ней общую касательную.

§ 53. Въ одномъ кругѣ или въ двухъ равныхъ кругахъ центральные углы ACB и acb относятся какъ дуги AB и ab, заключающіяся между ихъ сторонами.

Положимъ, что ∠ ACD можно отложить 5 разъ въ ∠ ACB и 4 раза въ ∠ acb. Такъ какъ равнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя



дуги (§ 41), то и ◡ AD отложится 5 разъ на ◡ AB и 4 раза на ◡ ab. Отсюда видно, что если углы относятся между собою какъ два цѣлыя числа, то и соотвѣтствующія имъ дуги будутъ относиться, какъ тѣже числа.



Каково бы ни было отношеніе между углами, во всякомъ случаѣ они будутъ относиться какъ дуги. Положимъ, что пропорція ∡ ACB : ∡ acb = AB : ab не существуетъ, а существуетъ пропорція

$$\measuredangle ACB : \measuredangle acb = AB : ad,$$

гдѣ ad > ab. Представимъ себѣ, что AB раздѣлена на столь малыя равныя части, что каждая изъ нихъ меньше дуги bd; тогда при наложеніи этихъ частей на дугу ad какая нибудь точка дѣленія e непремѣнно упадетъ между b и d. Такъ какъ AB и ae относятся какъ цѣлыя числа, то по предъидущему будемъ имѣть

$$\measuredangle ACB : \measuredangle ace = AB : ae.$$

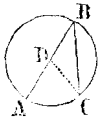
Изъ обѣихъ пропорцій получимъ

$$\measuredangle acb : \measuredangle ace = ad : ae,$$

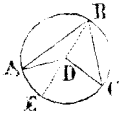
что не возможно, потому что acb < ace, а ad > ae. Точно такимъ же образомъ можно доказать, что четвертый членъ пропорціи не можетъ быть менѣе ab; слѣд. во всѣхъ случаяхъ существуетъ пропорція ∡ ACB : ∡ acb = AB : ab.

§ 54. Соотвѣтственно раздѣленію прямаго угла на 90 угловыхъ градусовъ и четверть окружности, лежащая между сторонами прямаго угла, дѣлится на 90 (слѣд. цѣлая окружность на 360) дуговыхъ градусовъ, каждый градусъ на 60 минутъ, а минута на 60 секундъ. Такъ какъ центральный уголъ заключаетъ въ себѣ столько угловыхъ градусовъ сколько его дуга дуговыхъ, то за мѣру угла принимается дуга, описанная произвольнымъ радіусомъ изъ вершины угла между его сторонами, что однакожъ всегда надобно принимать въ такомъ смыслѣ, что дуга, соотвѣтствующая углу, показываетъ, сколько угловыхъ градусовъ заключается въ углѣ.

§ 55. Вписанный уголъ ABC вдвое менѣе центральнаго угла, опирающагося на туже самую дугу.

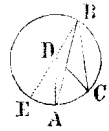


1) Если центръ D лежитъ на одной изъ сторонъ даннаго угла, то (§ 19) ∡ B = C и ∡ ADC = B + C = 2 B (§ 14, 1), слѣд. ∡ B = $\frac{1}{2}$ ADC.



2) Если D лежитъ внутри угла ABC, то проведя діаметръ BE имѣемъ ∡ ABE = $\frac{1}{2}$ ADE и ∡ CBE = $\frac{1}{2}$ CDE. слѣд. ∡ ABC = $\frac{1}{2}$ ADC.

3) Если D лежитъ внѣ угла ABC, то проведя діаметръ BE получимъ $\angle$ CBE $= \frac{1}{2}$ CDE и $\angle$ ABE $= \frac{1}{2}$ ADE, слѣд. CBE — ABE $= \frac{1}{2}$ (CDE — ADE) или $\angle$ ABC $= \frac{1}{2}$ ACD.



§ **56.** Слѣдствія. 1) Вписанный уголъ измѣряется половиною дуги, заключающейся между его сторонами.

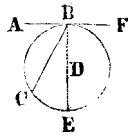
2) Всѣ углы, вписанные въ одномъ и томъ же кругѣ и опирающіеся на одну и туже или на равныя дуги, равны между собою.

3) Вписанный уголъ, опирающійся на полуокружность, есть прямой.

4) Во вписанномъ четыреугольникѣ сумма двухъ противолежащихъ угловъ равна двумъ прямымъ.

§ **57.** Уголъ ABC, образованный касательною и хордою, измѣряется половиною дуги BC, заключающейся между его сторонами.

Если проведемъ изъ точки прикосновенія діаметръ BE, тогда $\angle$ ABE измѣряется дугою $\frac{1}{2}$ BCE, а $\angle$ CBE дугою $\frac{1}{2}$ CE, слѣд. $\angle$ ABC = ABE — CBE будетъ измѣряться дугою $\frac{1}{2}$ (BCE — CE) $= \frac{1}{2}$ BC. — Подобнымъ образомъ мѣрою для тупаго угла CBF будетъ дуга $\frac{1}{2}$ CEB.



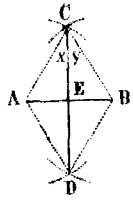
§ **58.** Уголъ BAC, образованный прямыми, пересѣкающимися внутри круга или внѣ его, измѣряется соотвѣтственно полусуммою или полуразностью дугъ, заключающихся между его сторонами, т. е. $\frac{1}{2}$ (BC $\pm$ ED).

Если провести изъ точки D хорду DC, тогда $\angle$ BAC $= \angle$ BDC $\pm \angle$ ECD (§ 14, 1). Такъ какъ $\angle$ BCD измѣряется дугою $\frac{1}{2}$ BC, а $\angle$ ECD дугою ED, то $\angle$ BAC измѣряется дугою $\frac{1}{2}$ (BC $\pm$ ED).

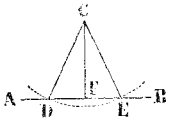
III. Задачи.

§ **59.** Раздѣлить прямую AB пополамъ.

Изъ концовъ A и B данной прямой опишемъ дуги, которыя пересѣкутся въ точкахъ C и D. Прямая CD раздѣлитъ данную линію AB въ точкѣ E пополамъ, потому что $\triangle$ ACD $\cong$ BCD (§ 24), слѣд. $\angle$ x = y и $\triangle$ ACE $\cong$ BCE, и потому AE = BE.

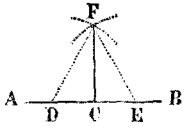


§ **60.** Изъ данной точки C, лежащей внѣ прямой AB, опустить на эту прямую перпендикуляръ.



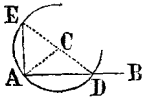
Изъ точки C опишемъ дугу, которая бы пересѣкла прямую AB въ точкахъ D и E. Раздѣлимъ DE пополамъ, тогда прямая CF, соединяющая данную точку съ точкою дѣленія, будетъ искомый перпендикуляръ; ибо $\triangle$ CDF $\cong$ CEF (§ 24), слѣд. $\measuredangle$ CFD = CFE.

§ **61.** Изъ данной точки C, лежащей на прямой AB, возставить къ ней перпендикуляръ.



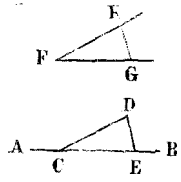
Возьмемъ двѣ точки D и E въ равномъ разстояніи отъ C, и опишемъ изъ нихъ дуги, пересѣкающіяся въ точкѣ F, тогда прямая CF будетъ искомый перпендикуляръ, потому что $\triangle$ CDF $\cong$ CEF (§ 24), а посему $\measuredangle$ FCD = FCE.

§ **62.** Изъ конца прямой AB возставить къ ней перпендикуляръ, не продолжая прямой.



Изъ произвольной точки C, внѣ прямой AB, опишемъ радіусомъ CA окружность, которая пройдетъ чрезъ точки A и D прямой AB. Если теперь проведемъ чрезъ D и C прямую, и соединимъ точку E пересѣченія ея съ окружностью съ точкою A, тогда EA будетъ требуемый перпендикуляръ. по тому что уголъ EAD прямой (§ 56, 3).

§ **63.** На прямой AB при данной точкѣ C отложить уголъ, равный данному углу F.



Изъ точки F опишемъ произвольнымъ радіусомъ дугу, которая пересѣчетъ стороны угла въ точкахъ G и K. Опишемъ изъ C тѣмъ же радіусомъ дугу. которая пересѣчетъ AB въ точкѣ E, и изъ E радіусомъ GK проведемъ вторую дугу, которая пересѣчетъ первую въ точкѣ D, тогда $\measuredangle$ ECD = $\measuredangle$ F, потому что $\triangle$ CDE $\cong$ FKG (§ 24).

§ **64.** Раздѣлить данную дугу или уголъ пополамъ (фиг. § 44).

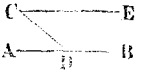
1) Чтобы раздѣлить дугу ACB пополамъ, должно изъ средины ея хорды AB возставить перпендикуляръ DC, тогда $\smile$ AC = $\smile$ BC (§ 45, 2).

2) Чтобы раздѣлить уголъ AEB пополамъ, опишемъ изъ вершины E дугу ACB, отыщемъ ея средину C и проведемъ CE, тогда $\measuredangle$ AEC = BEC (§ 41).

Слѣдствіе. Повторивъ подобное строеніе надъ каждою можно раздѣлить уголъ на 4, 8, 16, .. равныхъ частей. Но особами элементарной геометріи, т. е. только съ помощію линейки и циркуля, нельзя дѣлить произвольный уголъ на 3, 5, 6, 7, 9 ... равныхъ частей.

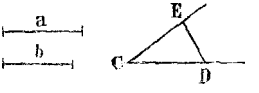
§ 65. Чрезъ данную точку C провести прямую, параллельную данной прямой AB.

Проведемъ чрезъ C прямую CD, пересѣкающую AB, и на ней при точкѣ C уголъ ECD равный CDA, сторона CE будетъ искомая параллельная линія (§ 7, 1).



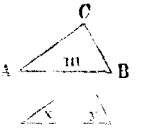
§ 66. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ a и b, и углу C, лежащему между ними.

На сторонахъ угла C отложимъ CD = a, CE = b и проведемъ DE; CDE будетъ искомый тре—къ.



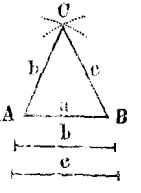
§ 67. Построить треугольникъ по данной сторонѣ m и прилежащимъ къ ней угламъ x и y.

Отложимъ на сторонѣ m при ея оконечностяхъ A = x и B = y. Если продолжимъ стороны этихъ сумма которыхъ должна быть < 2 R, то онѣ пересекутся въ точкѣ C и дадутъ требуемый тре—къ ABC.



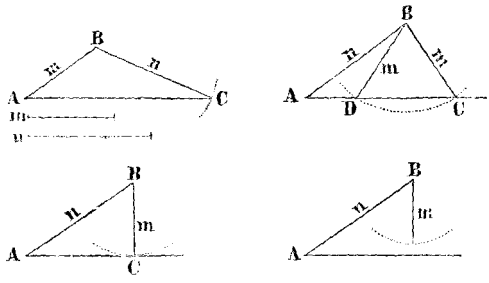
§ 68. Построить треугольникъ по даннымъ тремъ a, b, c.

Изъ оконечностей прямой a опишемъ радіусами пересѣкающіяся въ точкѣ C, и проведемъ AC и BC, тогда ABC будетъ искомый тре—къ.



§ 69. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ m и n, неравнымъ между собою, и углу A, противъ одной изъ этихъ сторонъ.

1) Если уголъ A противолежитъ бо́льшей сторонѣ n, то сдѣлаемъ, видно въ первой фигурѣ, одну сторону AB даннаго угла A рав-



ною m, и изъ точки B радіусомъ равнымъ n опишемъ дугу, которая пересѣчетъ другую сторону въ точкѣ C. Тре-къ ABC будетъ требуемый.

2) Если уголъ A противолежитъ меньшей сторонѣ m, то при построеніи тре—ка стоитъ только перемѣнить m на n. Смотря по величинѣ линіи m могутъ образоваться или два тре—ка ABD и ABC, удовлетворяющіе требованіямъ задачи, какъ во второй фигурѣ, или одинъ прямоугольный тре—къ, какъ въ третьей фигурѣ, гдѣ m равно перпендикуляру BC изъ B на линію AC, или наконецъ не образуется ни одного тре—ка, какъ въ четвертой фигурѣ, гдѣ m менѣе перпендикуляра BC.

§ 70. Найти центръ даннаго круга или данной дуги (фиг. § 71).

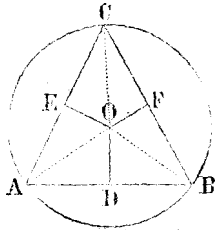
Возьмемъ на окружности или на дугѣ три произвольныя точки A, B, C, проведемъ хорды AB и BC и возставимъ изъ срединъ этихъ хордъ перпендикуляры DO и FO, тогда точка ихъ пересѣченія будетъ составить искомый центръ (§ 45, 2).

Слѣдствія. 1) То же самое построеніе служитъ рѣшеніемъ задачи: Провести окружность чрезъ три данныя точки A, B, C, не лежащія на одной прямой.

2) Чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести только одну окружность, потому что предъидущимъ рѣшеніемъ опредѣляется только одинъ центръ и одинъ радіусъ.

3) Двѣ окружности могутъ пересѣкаться только въ двухъ точкахъ.

§ 71. Описать окружность около даннаго треугольника ABC.

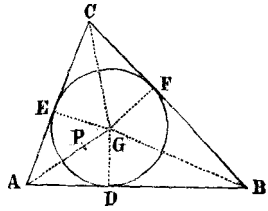


Возставленные изъ срединъ двухъ сторонъ тре—ка перпендикуляры DO и EO опредѣляютъ центръ O искомаго круга, потому что BO = AO = CO (§ 28, 2).

Слѣдствіе. Три перпендикуляра, возставленные изъ срединъ сторонъ тре—ка, пересѣкаются въ одной точкѣ, равно удаленной отъ трехъ вершинъ тре—ка.

Въ остроугольномъ тре—кѣ эта точка лежитъ внутри его, въ тупоугольномъ тре—кѣ внѣ его, а въ прямоугольномъ на гипотенузѣ (§ 56).

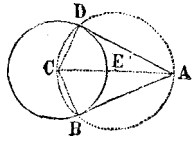
§ 72. Вписать кругъ въ данный треугольникъ ABC.



Если два угла A и B тре—ка раздѣлятся пополамъ прямыми AG и BG, то точка G пересѣченія ихъ будетъ центромъ, а разстояніе этой точки отъ какой-нибудь стороны тре—ка радіусомъ требуемаго тре—ка. — Если проведемъ $GD \perp AB$, $GE \perp AC$, $GF \perp BC$, тогда $\triangle ADG \cong AEG$ и $\triangle BDG \cong BFG$ (§ 18 2), слѣд. $GE = GD = GF$, а потому описанная изъ точки G радіусомъ GD окружность должна касаться сторонъ тре—ка.

Слѣдствіе. Три линіи, раздѣляющія углы тре—ка пополамъ, пересѣкаются въ одной точкѣ, равно удаленной отъ трехъ сторонъ тре—ка.

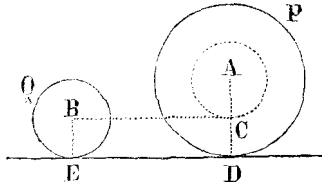
§ 73. Изъ точки A, лежащей внѣ круга, провести къ нему касательную.

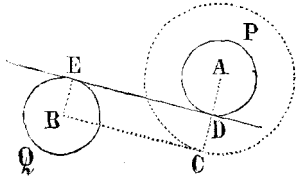


Соединимъ точку A съ центромъ C даннаго круга, и изъ средины E линіи AC опишемъ окружность, пересѣкающую данный кругъ въ точкахъ B и D, тогда прямыя AB и AD будутъ искомыми касательными. — Если проведемъ линіи CB и CD, то $\measuredangle ABC = R = ADC$ (§ 56, 3) слѣд. AB и AD касательныя.

Если двѣ касательныя круга пересѣкаются, то ихъ отрѣзки лежащіе между точкою пересѣченія и точками прикосновенія, равны между собою.

§ 74. Провести касательную къ двумъ даннымъ кругамъ P и Q.

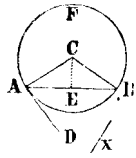




Если центры обоихъ круговъ должны лежать по одну сторону касательной, какъ въ первой фигурѣ, то изъ центра A бо́льшаго круга радіусомъ, равнымъ разности радіусовъ данныхъ круговъ, описывается воспомогательный кругъ. Если же центры должны лежать по разнымъ сторонамъ касательной, какъ во второй фигурѣ, то воспомогательный кругъ описывается изъ центра котораго нибудь круга радіусомъ, равнымъ суммѣ радіусовъ данныхъ круговъ. Далѣе въ обоихъ случаяхъ проведемъ изъ центра B касательную BC къ

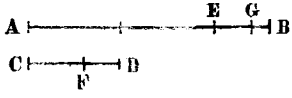
воспомогательному кругу, потомъ изъ центра A чрезъ точку касанія C прямую AD и наконецъ радіусъ BE ∥ CD. Соединивъ точки E и D, получимъ требуемую касательную. Такъ какъ BE ∥ CD и ∠ BCD = R (§ 48, 2), то BCDE есть прямоугольникъ, слѣд. DE должна быть касательною обоихъ круговъ (§ 48, 1).

§ 75. На данной линіи AB описать сегментъ, вмѣщающій данный уголъ x.



При точкѣ A на прямой AB отложимъ уголъ BAD = x, и проведемъ изъ A линію AC ⊥ AD, и изъ средины E прямой AB линію EC ⊥ AB. Точка пересѣченія C обоихъ перпендикуляровъ будетъ центромъ, а CA радіусомъ круга, въ которомъ сегментъ AFB есть искомый, потому что AD касательная и всѣ въ AFB вписанные углы, опирающіеся на концы линіи AB, равны углу BAD = x (§ 57).

§ 76. Найти отношеніе между двумя данными прямыми AB и CD.



Будемъ накладывать меньшую линію CD на бо́льшую AB столько разъ, сколько она умѣстится; положимъ что она отложилась 2 раза, и за тѣмъ получился еще остатокъ EB. Этотъ остатокъ будемъ накладывать на меньшую линію CD столько разъ, сколко это будетъ возможно, напр. одинъ разъ съ остаткомъ FD. Наложимъ потомъ второй остатокъ FD на первый EB, напр. одинъ разъ съ остаткомъ GB. Если наконецъ положимъ, что GB умѣстится на FD ровно 2 раза, тогда GB будетъ общею мѣрою между данными линіями AB и CD, отношеніе коихъ теперь легко можно опредѣлить.

$$FD = 2\,GB$$
$$EB = FD + GB = 3\,GB$$
$$CD = EB + FD = 5\,GB$$
$$AB = 2\,CD + EB = 13\,GB.$$

Такъ какъ GB содержится въ AB 13 разъ, а въ CD 5 разъ, то получимъ:

$AB : CD = 13 : 5$ или $AB = \frac{13}{5}\,CD$ и $CD = \frac{5}{13}\,AB$.

Здѣсь мы разсматривали случай, когда двѣ данныя линіи имѣютъ общую мѣру и потому называются соизмѣримыми. Но могутъ быть линіи, при которыхъ, сколько бы мы ни продолжали наложеніе послѣдовательныхъ остатковъ другъ на друга, никогда не получимъ такого остатка, который бы уложился въ предшествующемъ цѣлое число разъ. Такія линіи называются несоизмѣримыми, и отношеніе между ними

не можетъ быть выражено ни цѣлымъ числомъ, ни дробою, а есть величина ирраціональная. Но такъ какъ остатки будутъ становиться все менѣе и менѣе, то при достаточномъ продолженіи вышеизложеннаго пріема мы можемъ съ незначительною погрѣшностію отбросить послѣдній остатокъ и предшествующій ему принять за общую мѣру. Такимъ образомъ получимъ приближенное отношеніе, и оно тѣмъ точнѣе, чѣмъ далѣе будетъ продолженъ описанный пріемъ.

§ 77. Задачи безъ рѣшенія.

1) Чрезъ точку C, данную внѣ прямой AB, провести прямую, которая бы составила съ линіею AB уголъ, равный данному углу m.

2) Раздѣлить прямой уголъ на три равныя части.

3) Построить параллелограмъ, если даны двѣ смежныя стороны a и b, и уголъ m, заключающійся между ними.

4) Построить тре—къ по данной сторонѣ a, прилежащему ей углу x и противолежащему углу y.

5) Провести къ данному кругу двѣ касательныя, которыя бы пересѣклись подъ даннымъ угломъ m.

6) Построить равнобедренный тре—къ по данной высотѣ c и одной изъ равныхъ сторонъ b.

7) Построить ромбъ по даннымъ діагоналямъ.

8) На данной прямой AB найти точку, равно удаленную отъ данныхъ точекъ C и D, лежащихъ внѣ прямой.

9) Чрезъ точку A провести сѣкущую къ двумъ параллельнымъ BC и DE, такъ, чтобы часть сѣкущей, заключающаяся между этими параллельными, равнялась прямой m.

10) Построить прямоугольный тре—къ 1) по данной гипотенузѣ a, и одному катету b, 2) по данной гипотенузѣ a, и одному острому углу m.

11) Чрезъ точку A внутри угла BCD провести прямую такъ, чтобы она пересѣкла стороны угла въ равныхъ разстояніяхъ отъ его вершины.

12) Даны двѣ непараллельныя линіи, которыя не могутъ быть продолжены до пересѣченія по недостатку мѣста. Провести линію такъ, чтобы она по достаточномъ продолженіи дѣлила пополамъ образуемый этими прямыми уголъ.

13) Построить тре—къ по данному основанію a, высотѣ b, и углу m при вершинѣ.

14) Построить тре—къ по даннымъ отрѣзкамъ a и b основанія, и углу m при вершинѣ.

15) Въ прямоугольномъ тре—кѣ ABC вписать квадратъ, такъ чтобъ онъ имѣлъ съ тре—комъ одинъ общій уголъ, а вершина противолежащаго угла упала на гипотенузу AC.

16) Построить тре—къ по данной сторонѣ a, прилежащему къ ней углу m и суммѣ (или разности) прочихъ сторонъ.

17) Найти отношеніе между двумя данными углами.

18) Раздѣлить уголъ, равный двумъ прямымъ, въ три равныя части.

19) Между сторонами даннаго угла A провести прямую такъ, чтобы она была равна прямой m, а параллельна прямой n.

20) Построить равнобедренный тре—къ по данному периметру a и высотѣ b.

21) Построить тре—къ, котораго периметръ p и всѣ углы a, b, c даны.

22) Провести кругъ, который бы касался даннаго другаго круга A и данной прямой B въ точкѣ C.

23) Между сторонами даннаго угла A описать даннымъ радіусомъ r окружность, касающуюся сторонъ угла.

24) Описать окружность, которая бы прошла чрезъ данную точку d, и касалась данной прямой DF (или дуги B) въ данной точкѣ e.

25) Построить тре—къ по данной сторонѣ a, прилежащему углу m, и радіусу r вписаннаго круга.

26) Чрезъ точку A внѣ даннаго круга B провести сѣкущую такъ, чтобы внутренній ея отрѣзокъ равнялся прямой m.

27) Изъ точки A, лежащей на данной окружности, провести хорду такъ, чтобы она находилась отъ центра на разстояніи, равномъ прямой m.

28) Въ данномъ кругѣ провести хорду, равную линіи m, и параллельную къ линіи AB.

29) На прямой AB найти такую точку, чтобы прямыя, проведенныя изъ ней къ даннымъ двумъ точкамъ C и D, составили уголъ m.

30) Построить прямоугольный тре—къ 1) по данной гипотенузѣ a и суммѣ s катетовъ, 2) по данному периметру p и одному острому углу m.

31) Построить тре—къ по данному углу m, противолежащей ему сторонѣ a и суммѣ s прочихъ сторонъ.

32) Внутри даннаго тре—ка найти такую точку, чтобы три прямыя, проведенныя изъ ней къ вершинамъ тре—ка, образовали три равные угла около этой точки.

IV. Объ отношеніяхъ прямолинейныхъ фигуръ.

§ **78.** 1) Подъ площадью какой нибудь фигуры разумѣется часть плоскости, ограниченная сторонами фигуры.

2) Фигуры равновелики или равномѣрны, если онѣ имѣютъ равныя площади, независимо отъ ихъ вида, такъ что напр. тре—къ можетъ быть равновеликъ четыре-угольнику.

3) Двѣ прямолинейныя фигуры подобны, если ихъ углы порознь равны и одинаковымъ образомъ расположены, а соотвѣтствующія стороны пропорціональны. — Двѣ равныя фигуры всегда и равновелики и подобны, но двѣ подобныя фигуры могутъ быть и не равновелики.

Въ разныхъ кругахъ дуги, секторы и сегменты подобны, если они соотвѣтствуютъ равнымъ центральнымъ угламъ.

4) Въ тре—кѣ каждую сторону можно принять за его основаніе. Перпендикуляръ, опущенный изъ противолежащей вершины на основаніе или его продолженіе, называется высотою тре—ка.

Въ параллелограмѣ перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь его стороны на противолежащую, называютъ высотою, а обѣ стороны, перпендикулярныя къ высотѣ, принимаютъ за основанія.

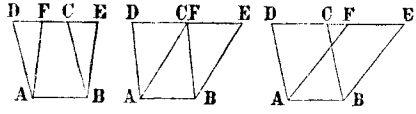
Въ трапеціахъ параллельныя стороны называются основаніями, а перпендикуляръ, опущенный отъ одного основанія на другое—высотою трапеціи.

5) Если изъ концовъ прямой линіи опустимъ перпендикуляры на другую линію, то часть второй линіи заключающаяся между перпендикулярами, называется проэкціею первой линіи на вторую. Въ томъ случаѣ, когда конецъ первой линіи лежитъ на второй, проэкціею будетъ разстояніе этого конца отъ основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ другаго конца.

6) Измѣрить какую нибудь фигуру значитъ опредѣлить, сколько разъ въ площади ея заключается другая извѣстная площадь, принятая за единицу мѣры. За эту единицу принимаютъ квадратъ, котораго сторона есть какая нибудь линейная мѣра, напр. футъ; въ такомъ случаѣ квадратъ называется квадратнымъ футомъ. Измѣреніе площади производится не чрезъ непосредственное наложеніе квадрата, а съ по-

мощію измѣренія линій, отъ которыхъ зависитъ величина площадей. Въ вычисленіе площади вмѣсто линій входятъ числа, такъ что подъ произведеніемъ двухъ линій нужно подразумѣвать произведеніе чиселъ, которыя показываютъ величину этихъ линій, выраженныхъ въ однѣхъ и тѣхъ же единицахъ длины.

§ 79. Параллелограмы ABCD и ABEF, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, равновелики.

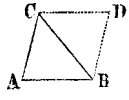


Оба параллелограма могутъ быть наложены другъ на друга такъ, что нижнія основанія совпадутъ, а верхнія составятъ одну прямую, при чемъ они могутъ принять три различныя положенія. Во всякомъ случаѣ AD = BC, и AF = BE (§ 33) и ∡ DAF = CBE (§ 10), а потому △ ADF ≅ BCE, слѣд.

ABCD = ABED — △ BCE = ABED — △ ADF = ABEF.

Слѣдствіе. Параллелограмъ равновеликъ прямоугольнику, имѣющему съ нимъ тоже основаніе и туже высоту.

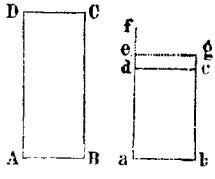
§ 80. Всякій треугольникъ ABC есть половина параллелограма, имѣющаго съ нимъ тоже основаніе и туже высоту.



Проведемъ изъ B и C прямыя BD ∥ AC и CD ∥ AB, тогда получимъ парал—мъ AD, имѣющій одинаковыя съ тре—комъ основаніе и высоту. Такъ какъ △ ABC ≅ DCB (§ 18), то △ ABC = $\frac{1}{2}$ AD.

Слѣдствіе. Треугольники, имѣющіе равныя основанія и высоты, равновелики.

§ 81. Два прямоугольника ABCD и abcd, имѣющіе равныя основанія AB и ab, относятся между собою какъ ихъ высоты AD и ad.



Если высоты AD и ad соизмѣримы, и ихъ общая мѣра содержится m разъ въ AD, и n разъ въ ad, тогда получимъ AD : ad = m : n. Представимъ себѣ, что чрезъ всѣ точки дѣленія, образовавшіяся отъ наложенія общей мѣры на высотахъ AD и ad, будутъ проведены линіи, параллелныя основанію, тогда ABCD раздѣлится на m, а abcd на n равныхъ прямо—ковъ (§ 79), такъ что ABCD : abcd = m : n. Изъ обѣихъ пропорцій слѣдуетъ, что ABCD : abcd = AD : ad.

Если высоты AD и ad несоизмѣримы, то все таки эта пропорція будетъ справедлива. Предположимъ, что

$$ABCD : abcd = AD : af,$$

гдѣ $af > ad$, и раздѣлимъ высоту AD на столько равныхъ частей, чтобы каждая изъ нихъ была меньше df. Если части эти станемъ откладывать по af, начиная отъ точки a, то одна точка дѣленія должна упасть между d и f. Проведя чрезъ e прямую $eg \parallel ab$, получимъ

$$ABCD : abge = AD : ae,$$

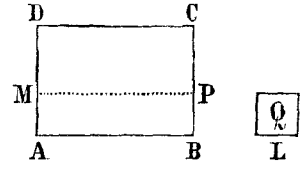
потому что высоты AD и ae соизмѣримы. Изъ обѣихъ пропорцій слѣдуетъ, что

$$abcd : abge = af : ae.$$

Но это невозможно, потому что $abcd < abge$, а $af > ae$. Равнымъ образомъ четвертый членъ пропорціи не можетъ быть меньше ad, а потому пропорція $ABCD : abcd = AD : ad$ всегда должна быть справедлива.

Слѣдствіе. Два прямоугольника, имѣющіе равныя высоты, относятся между собою какъ ихъ основанія, такъ какъ каждая изъ сторонъ прямо—ка можетъ быть принята за основаніе и за высоту.

§ 82. Площадь прямоугольника AC равняется произведенію его основанія на высоту, т. е. если какая нибудь линейная мѣра заключается въ основаніи m разъ, а въ высотѣ n разъ, то соотвѣтствующая квадратная мѣра будетъ заключаться въ прямоугольникѣ mn разъ.



Пусть линія L будетъ единицею линейной мѣры, а Q построенный на ней квадратъ. Положимъ, что L заключается m разъ въ AB, и n разъ въ AD, гдѣ m и n могутъ быть цѣлыя, дробныя или ирраціональныя числа. Если сдѣлаемъ $AM = L$ и проведемъ $MP \parallel AB$, то будемъ имѣть (§ 81).

$$AP : Q = AB : L = m : 1,$$

или $AP = mQ$. Точно также

$$AC : AP = AD : AM = n : 1,$$

слѣд. $AC = nAP = mn.\,Q$ или $\frac{AC}{Q} = mn$.

Если напр. основаніе будетъ составлять 5, а высота 3 фута, то прямо—къ равенъ 15 квадратнымъ футамъ.

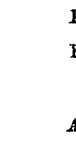
§ 83. Слѣдствія. 1) Площади прямо—ковъ относятся какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

2) Площадь квадрата равна второй степени числа, выражающаго длину его стороны.

3) Площадь параллелограма равна произведенію его основанія на высоту (§ 79, слѣд.)

4) Площадь треугольника равна половинѣ произведенія основанія на высоту (§ 80).

5) Треугольники, имѣющіе равныя основанія, относятся какъ высоты, а имѣющіе равныя высоты, какъ ихъ основанія.

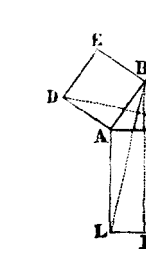


6) Квадратъ ACDE, построенный на суммѣ двухъ линій AB = a и BC = b, равенъ суммѣ квадратовъ AI и DI, построенныхъ на каждой изъ данныхъ линій, сложенной съ двойнымъ прямоугольникомъ BG, составленнымъ изъ тѣхъ же линій, соотвѣтственно алгебраическому выраженію

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

7) Квадратъ ABIF, построенный на разности двухъ линій AC = a и BC = b, равенъ суммѣ квадратовъ AD и DI, построенныхъ на каждой изъ данныхъ линій, безъ двойнаго прямоугольника BD, составленнаго изъ тѣхъ же линій, соотвѣтственно выраженію $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

§ 84. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ, т. е. AH = AE + CF. (Пиѳагоръ.)



Если проведемъ изъ вершины прямаго угла B прямую BK ⊥ AC и продолжимъ до точки I, потомъ проведемъ DC и BL, тогда △ DAC = ½ AE и △ BAL = ½ AI (§ 80). Такъ какъ ∠ DAC = BAL, AD = AB, AC = AL, то △ DAC ≅ BAL, т. е. ½ AE = ½ AI, слѣд. AE = AI. Такимъ же образомъ можно доказать, что CF = KH, слѣд. AI + KH = AH = AE + CF или $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

§ 85. Слѣдствія. 1) Квадратъ одного катета равенъ квадрату гипотенузы безъ квадрата другаго катета.

Означая гипотенузу чрезъ a, и катеты чрезъ b и c, имѣемъ

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad b^2 = a^2 - c^2, \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

2) Квадратъ гипотенузы относится къ квадрату одного катета, какъ гипотенуза къ своему отрѣзку, прилежащему къ этому катету.

Такъ какъ AE = AI и AH : AI = AC : AK (§ 81), то и AH : AE = AC : AK.

3) Квадраты катетовъ относятся какъ прилежащіе къ нимъ отрѣзки гипотенузы.

Такъ какъ $AE = AI$, $CF = HK$ и $AI : HK = AK : CK$, то и $AE : CF = AK : CK$.

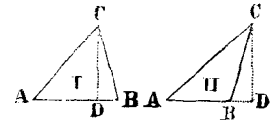
4) Квадратъ, построенный на діагонали другаго квадрата, вдое болѣе послѣдняго.

5) Діагональ квадрата несоизмѣрима съ стороною его.

Пусть a будетъ стороною, а d діагональю квадрата, то мы будемъ имѣть $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, и потому $\frac{d^2}{a^2} = 2$ или $\frac{d}{a} = \sqrt{2}$, слѣд. отношеніе между d и a ирраціональное.

§ **86.** Въ треугольникѣ ABC квадратъ какой либо стороны ($BC = a$), смотря по тому, противолежитъ ли она острому или тупому углу (A), равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ сторонъ ($AB = c$, $AC = b$), уменьшенной или увеличенной удвоеннымъ произведеніемъ одной изъ этихъ сторонъ (AB) и проэкціи ($AD = m$) на нее другой стороны (AC), т. е.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \mp 2AB.AD \text{ или } a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cm.$$

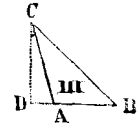


1) Если уголъ A острый, то перпендикуляръ CD можетъ упасть внутри или внѣ тре—ка, такъ что на первой фигурѣ $BD = c - m$, а на второй $BD = m - c$, слѣд. въ обоихъ случаяхъ $BD^2 = c^2 - 2cm + m^2$. Такъ какъ

$$a^2 = BD^2 + CD^2 = c^2 - 2cm + m^2 + CD^2,$$

но $CD^2 = b^2 - m^2$, то имѣемъ

$$a^2 = c^2 - 2cm + m^2 + b^2 - m^2 = b^2 + c^2 - 2cm.$$



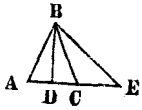
2) Если A тупой, то CD упадетъ внѣ тре—ка, такъ что $BD = c + m$, слѣд.

$$a^2 = CD^2 + (c + m)^2 = CD^2 + c^2 + 2cm + m^2,$$

но такъ какъ $CD^2 = b^2 - m^2$, то

$$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2cm + m^2 = b^2 + c^2 + 2cm.$$

§ **87.** Если въ тре-кѣ ABE соединимъ вершину B съ срединою C противолежащей стороны линіею BC, то сумма квадратовъ двухъ другихъ сторонъ будетъ равна удвоенному квадрату проведенной линіи и удвоенному квадрату половины раздѣленной стороны.



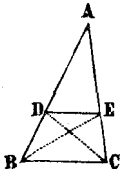
Проведя $BD \perp AE$ получимъ изъ тре—ковъ ABC и BEC

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC.\,DC$$
$$BE^2 = CE^2 + BC^2 + 2\,CE.\,DC.$$

Сложивъ эти уравненія и замѣтивъ, что $AC = CE$, получимъ

$$AB^2 + BE^2 = 2\,BC^2 + 2\,AC^2.$$

§ **88.** Линія DE, проведенная въ тре—кѣ ABC параллельно одной сторонѣ BC, дѣлитъ другія стороны на части пропорціональныя.



Если проведемъ CD и BE, то получимъ (§ 83, 5)

$$\triangle ADE : \triangle BED = AD : BD$$
$$\triangle ADE : \triangle CDE = AE : CE.$$

Такъ какъ $\triangle BED = \triangle CDE$ (§ 80, слѣд.), то

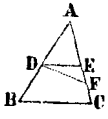
$$AD : BD = AE : CE.$$

Слѣдствіе. Выведенную пропорцію можно измѣнить такъ:

$AD + BD : BD = AE + CE : CE$, т. е. $AB : BD = AC : CE$.

$AD + BD : AD = AE + CE : AE$, т. е. $AB : AD = AC : AE$.

§ **89.** Линія DE, дѣляющая двѣ стороны тре—ка ABC на пропорціональныя части, параллельна третьей сторонѣ BC.

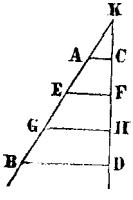


По нашему условію $AB : DB = AC : EC$. Положимъ, что DE не $\parallel BC$, тогда изъ точки D можно провести $DF \parallel BC$, такъ что (§ 88) будетъ

$$AB : DB = AC : FC.$$

По причинѣ равенства первыхъ трехъ членовъ обѣихъ пропорціи, должно бы быть $EC = FC$, что не возможно, слѣд. $DE \parallel BC$.

§ **90.** Двѣ прямыя AB и CD дѣлятся нѣсколькими параллельными AC, EF, GH . . . на пропорціональныя части.

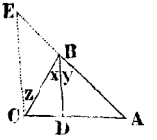


Если AB и CD пересѣкутся въ K, то (§ 88)

$$KE : KF = AE : CF, \text{ и}$$
$$KE : KF = EG : FH, \text{ слѣд.}$$
$$AE : CF = EG : FH.$$

Подобнымъ образомъ $EG : FH = GB : HD$.

§ **91.** Прямая BD, дѣлящая въ тре—кѣ ABC уголъ B пополамъ, дѣлитъ противолежащую сторону AC на части, пропорціональныя прилежащимъ сторонамъ тре—ка.



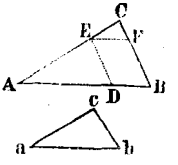
Если проведемъ CE ∥ BD и продолжимъ AB до пересѣченія съ CE въ точкѣ E, то (§ 88) будетъ

$$AD : DC = AB : BE.$$

Но такъ какъ ∡ z = x = y = E (§ 8), а потому (§ 19, 2), BE = BC, то и

$$AD : DC = AB : BC.$$

§ 92. (I.) Два треугольника подобны, если они имѣютъ по два равные угла. Если ∡ A = a, ∡ B = b, то △ ABC ∽ abc.



Уголъ C = c (§ 14, 2). Отложимъ AD = ab и проведемъ DE ∥ BC, тогда будетъ AD : AB = AE : AC (§ 88), или такъ какъ △ ADE ≅ abc (§ 18),

$$ab : AB = ac : AC.$$

Проведя изъ E прямую EF ∥ AB, получимъ AE : AC = BF : BC, и такъ какъ (§ 33) BF = DE = c, то и

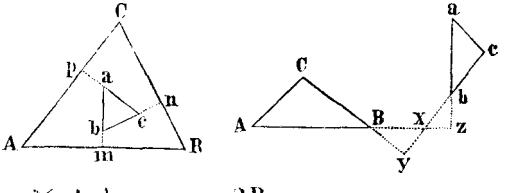
$$ac : AC = bc : BC,$$

слѣд. $ab : AB = ac : AC = bc : BC.$

Данные тре—ки подобны, потому что углы ихъ равны и стороны пропорціональны.

§ 93. Слѣдствія. 1) Два тре—ка подобны, если ихъ стороны попарно параллельны, потому что въ такомъ случаѣ ихъ углы равны (§ 10.)

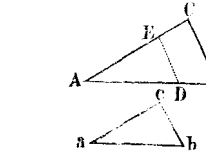
2) Два тре—ка ABC и abc подобны, если стороны одного попарно перпендикулярны къ сторонамъ другаго.



Пусть ab ⊥ AB, ac ⊥ AC, bc ⊥ BC. Если въ первой фигурѣ продолжимъ стороны тре—ка abc, тогда въ четыреугольникѣ Aamp сумма угловъ равна 4 R (§ 16), и такъ какъ ∡ p + m = 2R, то и ∡ A + pam = 2R, но такъ какъ и ∡ bac + pam = 2R, то ∡ A = bac. Точно также можно доказать, что ∡ B = abc, слѣд. △ ABC ∽ abc. — Продолженіемъ сторонъ одного тре—ка, можно также получать треугольники, какъ во второй фигурѣ. Такъ какъ △ Bxy ∽ bxz, слѣд. ∡ yBx = zbx, то и ∡ ABC = abc. Подобнымъ образомъ можно доказать, что ∡ A = a, откуда слѣдуетъ, что △ ABC ∽ abc.

3) Параллельныя или взаимно перпендикулярныя стороны двухъ подобныхъ тре—ковъ — соотвѣтствующія.

§ 94. (II.) Два тре—ка подобны, когда имѣютъ по равному углу, заключающемуся между пропорціональными сторонамъ.



Если $\measuredangle A = a$, и $AB : ab = AC : ac$, то $\triangle ABC \backsim abc$.

Отложимъ $AD = ab$ и $AE = ac$, тогда $\triangle ADE \cong abc$ (§ 17). Такъ какъ по условію $AB : ab = AC : ac$, то и $AB : AD = AC : AE$, слѣд. $DE \parallel BC$ (§ 89) и $\measuredangle B = ADE$, а потому (§ 92) $\triangle ABC \backsim ADE$ или $\triangle ABC \backsim abc$.

§ 95. (III.) Два тре—ка подобны, если ихъ стороны пропорціональны. Если $AB : ab = AC : ac = BC : bc$, то $\triangle ABC \backsim abc$. (Фиг. 1, § 94.)

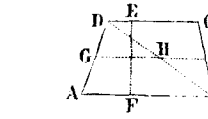
Отложимъ $AD = ab$ и $AE = ac$. тогда по условію будемъ имѣть $AB : AD = AC : AE$, слѣд. $\triangle ABC \backsim ADE$ (§ 94), а потому

$$AB : AD = BC : DE. \text{ Но такъ какъ}$$

$$AB : ab = BC : bc, \text{ и } AD = ab,$$

то и $DE = bc$, слѣд. $\triangle ADE \cong abc$ (§ 24), а посему и $\triangle ABC \backsim abc$.

§ 96. Площадь трапеціи ABCD равняется произведенію высоты EF на полусумму параллельныхъ сторонъ AB и CD или на линію GK, соединяющую средины непараллельныхъ сторонъ.

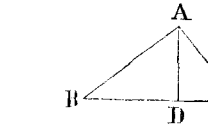


Проведемъ діагональ BD, тогда $\triangle ABD = \frac{1}{2} AB.\ EF$ и $\triangle BCD = \frac{1}{2} CD.\ EF$, слѣд.

$$ABCD = \frac{1}{2}\ (AB + CD).$$

Если точки G и K средины сторонъ AD и BC, то $GK \parallel AB$ и $\parallel DC$ (§ 89). Такъ какъ $\triangle ABD \backsim GHD$, и $\triangle CBD \backsim KBH$ (§ 92), то $GH = \frac{1}{2} AB$ и $KH = \frac{1}{2} CD$, слѣд. $GK = \frac{1}{2}(AB + CD)$ а посему и $ABCD = EF.GK$.

§ 97. Если изъ вершины прямаго угла тре—ка ABC опустимъ перпендикуляръ AD на гипотенузу, то 1) каждый катетъ будетъ среднею пропорціональною между гипотенузою и прилежащимъ къ нему отрѣзкомъ гипотенузы, 2) перпендикуляръ будетъ среднею пропорціональною между отрѣзками гипотенузы.



Тре—къ $ABC \backsim DBA$, потому что $\measuredangle B$ общій, а $\measuredangle BAC = R = ADB$; точно также $\triangle ABC \backsim DAC$, слѣд. и $\triangle DBA \backsim DAC$.

1) Такъ какъ $\triangle ABC \backsim DBA$ и $\triangle ABC \backsim DAC$, то будетъ

$$BC : AB = AB : BD \text{ и } BC : AC = AC : CD.$$

2) Такъ какъ $\triangle DBA \backsim DAC$, то $BD : AD = AD : CD$.

§ 98. Слѣдствіе. Если посредствомъ измѣренія какою нибудь единицею линейной мѣры найдено будетъ, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $BD = m$, $CD = n$, то получимъ

$$a : b = b : n, \text{ слѣд. } b^2 = an$$
$$a : c = c : m, \text{ слѣд. } c^2 = am,$$

а посему $b^2 + c^2 = a\,(m + n) = a^2$, слѣд.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

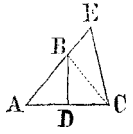
Такимъ образомъ зная двѣ стороны прямоугольнаго тре—ка можно опредѣлить третью сторону.

Прямоугольные тре—ки, которыхъ стороны измѣряются цѣлыми числами линейной мѣры, равно какъ и самыя числа, называются Пиѳагоровыми. Таковы числа 3, 4, 5 или 5, 12, 13 или 8, 15, 17 и т. д.

§ 99. Площади двухъ тре—ковъ ABD и AEC, имѣющія по равному углу A, относятся какъ произведенія ихъ сторонъ, заключающихъ этотъ уголъ.

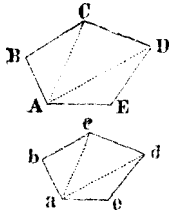
Если проведемъ BC, то (§ 83, 5) будетъ

$$\triangle ABC : \triangle ABD = AC : AD$$
$$\triangle AEC : \triangle ABC = AE : AB, \text{ слѣд.}$$
$$\triangle AEC : \triangle ABD = AC.AE : AD.AB$$



§ 100. 1) Два многоугольника подобны, если они состоятъ изъ равнаго числа подобныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ треугольниковъ. 2) Если два много—ка подобны, то ихъ можно раздѣлить на равное число подобныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ тре—ковъ.

1) Пусть $\triangle ABC \backsim abc$, $\triangle ACD \backsim acd$, $\triangle ADE \backsim ade$. Изъ этого условія слѣдуетъ, что углы обоихъ много—ковъ попарно равны, и такъ какъ $AB : ab = BC : bc$ $(= CA : ca)$ $= CD : cd$ $(= DA : da)$ $= DE : de \ldots$, то $ABCDE \backsim abcde$.

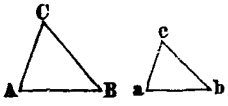


2) Если $ABCDE \backsim abcde$, то проведя изъ угловъ A и a діагонали, мы раздѣлимъ оба мно—ка на равное число тре—ковъ. Изъ подобія мно—ковъ слѣдуетъ, что $\measuredangle B = b$ и $AB : ab = BC : bc$, слѣд. $\triangle ABC \backsim abc$. Изъ подобія этихъ тре—ковъ слѣдуетъ

$\measuredangle BCA = bca$ и $BC : bc = CA : ca$, и такъ какъ
$\measuredangle BCD = bcd$ и $BC : bc = CD : cd$, то и
$\measuredangle ACD = acd$ и $CA : ca = CD : cd$,

слѣд. $\triangle ACD \backsim acd$. Подобнымъ образомъ $\triangle ADE \backsim ade$.

§ **101.** Площади подобныхъ тре—ковъ, а также и подобныхъ мно—ковъ, относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.



1) Если $\measuredangle A = a$, то (§ 99)

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{AB.AC.}{ab.ac}$$ Такъ какъ

$$\frac{AC}{ac} = \frac{AB,}{ab,}$$ то оказивается, что

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{AB.AB}{ab.ab} = \frac{AB^2}{ab^2}.$$

2) Если (фиг. § 100) $ABCDE \backsim abcde$, то изъ подобія отдѣльныхъ тре—ковъ выходитъ, что

$ABC : abc = AB^2 : ab^2$

$ACD : acd = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$

$ADE : ade = AE^2 : ae^2 = AB^2 : ab^2.$

Сложивъ всѣ эти тре—ки, получимъ

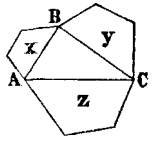
$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2.$

§ **102.** Периметры подобныхъ много—ковъ относятся какъ двѣ сходственныя стороны (Фиг. § 100).

Такъ какъ $AB : ab = BC : bc = CD : cd \ldots$, то и

$(AB + BC + CD \ldots) : (ab + bc + cd \ldots) = AB : ab.$

§ **103.** Если сходственныя стороны трехъ подобныхъ многоугольниковъ x, y, z, совмѣщаются со сторонами прямоугольнаго тре—ка ABC, то площадь мно—ка z, построеннаго на гипотенузѣ, равна суммѣ площадей двухъ прочихъ мно—ковъ x, y.



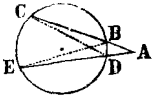
По § 101 $\frac{x}{z} = \frac{AB^2}{AC^2}$ и $\frac{y}{z} = \frac{BC^2}{AC^2}$.

Сложивъ эти два равенства, получимъ

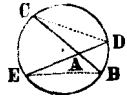
$$\frac{x + y}{z} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2.}$$

Но $AB^2 + BC^2 = AC^2$, слѣд. $x + y = z$.

§ **104.** Если двѣ прямыя, пересѣкающіеся въ точкѣ A, будутъ пересѣкаться кругомъ въ четырехъ точкахъ B, C, D, E, то разстоянія точки A отъ этихъ точекъ пересѣченія обратно пропорціональны, т. е. $AB : AD = AE : AC$.

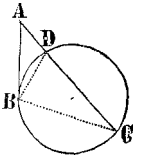


Точка A можетъ быть внѣ или внутри круга. Проведемъ BE и CD, тогда $\triangle ABE \backsim ADC$, потому что $\measuredangle A = A$ и $\measuredangle E = C$ (§ 56, 2); слѣдовательно



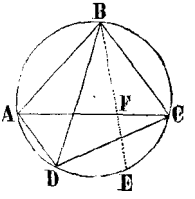
$AB : AD = AE : AC.$

§ **105.** Касательная AB есть средняя пропорціональная жду всею сѣкущею AC, проведенною изъ той же точки A, и ѣшнею ея частію AD.



Если проведемъ BC и BD, тогда $\triangle$ ABD $\backsim$ ABC, ому что $\measuredangle$ A = A и $\measuredangle$ ABD = C (§ 57 и § 56, 1); д. AC : AB = AB : AD.

§ **106.** Въ вписанномъ четыреугольникѣ ABCD произведеніе діагоналей равно суммѣ произведеній противолежащихъ сторонъ, т. е. AC . BD = AD . BC + AB . CD. (Птоломей.)



Отложимъ дугу CE = AD и проведемъ BE, тогда $\measuredangle$ ABD = CBE и $\measuredangle$ ADB = BCA (§ 56, 2), слѣд. $\triangle$ ABD $\backsim$ BCF, откуда

AD : CF = BD : BC или AD. BC = CF. BD.

Далѣе $\measuredangle$ ABE = DBC (ибо $\smile$ AE = $\smile$ CD), $\measuredangle$ BAC = BDC, слѣд. $\triangle$ ABF $\backsim$ DBC, откуда

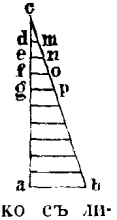
AB : BD = AF : CD или AB. CD = AF. BD.

Сложивъ оба равенства, получимъ

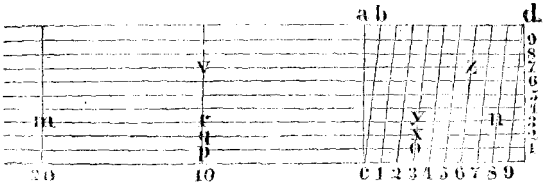
AD. BC + AB. CD = (CF + AF)BD = AC . BD.

Пиѳагорова теорема (§ 84) составляетъ только частный случай выведенной нами теоремы. Положимъ что ABCD прямоугольникъ, тогда AB = CD, AD = BC, AC = BD и тре—къ ABD прямоуголенъ при A, слѣд. полученное нами выше уравненіе приметъ видъ: $AD^2 + AB^2 = BD^2$.

§ **107.** *Для точнѣйшаго измѣренія прямой какого нибудь единицею длины употребляется* масштабъ. Употребленіе масштаба будетъ понятно изъ слѣдующаго. Возмемъ принятую за единицу линію ab и изъ ея конца возставимъ неопредѣленную прямую ac, на которой, начиная отъ точки a, отложимъ 10 равныхъ прямыхъ одна возлѣ другой до какой нибудь точки c, проведемъ прямую bc и изъ точекъ дѣленія прямой ac проведемъ параллельныя къ ab: dm en....., тогда видно, что $\triangle$ cdm $\backsim$ cab, а посему cd : ca = dm : ab, то есть 1 : 10 = dm : ab, слѣд. dm = $\frac{1}{10}$ ab. Подобнымъ же образомъ будетъ en = $\frac{2}{10}$ ab, fo = $\frac{3}{10}$ ab и т. д., такъ что эти параллельныя прямыя представляютъ десятыя части данной прямой ab. Чтобы найти сотыя части принятой единицы ab, нужно только съ линіей dm сдѣлать тоже, что мы сдѣлали съ ab. Построеніе масштаба производится такимъ образомъ. Берутъ прямоугольную линейку и откладываютъ на ея верхнемъ и нижнемъ основаніяхъ, начиная съ праваго конца, 10 разъ принятую единицу ab; положимъ, что она отложится на верху до



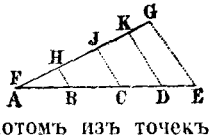
точки a и на низу до точки c; потомъ, начиная отъ точки a влѣво откладываютъ нѣсколько разъ линію ad и при каждимъ отложеніи изъ конца этой линіи опускаютъ перпендикуляръ на нижнее основаніе; потомъ вдоль линейки на равномъ разстояніи другъ отъ друга и отъ основаній линейки,



проводятся девять параллельныхъ основаніямъ линій 1, 2, 3 . . . . и наконецъ точки дѣленія верхняго основанія, заключающіяся между a и d, соединаются, какъ показано на чертежѣ, съ точками дѣленія нижняго основанія 1, 2, 3 . . . . . Тогда ясно, что $po = 13\frac{1}{10}\,ab$, $qx = 13\frac{2}{10}\,ab$; $ry = 13\frac{3}{10}\,ab$, $vz = 16\frac{7}{10}\,ab$. Если за единицу мѣры мы примемъ линію ad, то съ помощію этого масштаба можно измѣрять прямыя съ точностію до 0,01 принятой единицы. Тогда $mn = 2{,}83\,ad$, $vz = 1{,}67\,ad$ и. т. д.

V. Задачи.

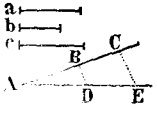
§ 108. Раздѣлить прямую AE на части, которыя относились бы какъ данныя линіи.



1) Проведемъ чрезъ конецъ A линіи AE неограниченную прямую FG, отложимъ на ней данныя линіи F, HI, IK, KG, соединимъ точки G и E, потомъ изъ точекъ K, I, H проведемъ линіи, параллельныя прямой GE, тогда части прямой AE будутъ относиться, какъ данныя линіи (§ 90).

2) Чтобы раздѣлить AE напр. на 4 равныя части, отложимъ на неограниченную прямую FG четыре равныя, произвольной величины, прямыя, соединимъ конецъ четвертой прямой съ E, и будемъ поступать какъ въ первомъ случаѣ.

§ 109. Къ тремъ даннымъ линіямъ a, b, c найти четвертую пропорціональную.

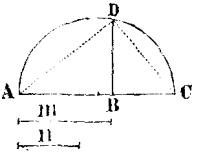


На сторонахъ произвольнаго угла A отложимъ $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$, проведемъ BD и изъ C линію $CE \parallel BD$, тогда DE будетъ искомая 4ая пропорціональная, потому что (§ 88) $AB : BC = AD : DE$ или $a : b = c : DE$.

§ 110. Найти среднюю пропорціональную между данными линіями m и n.

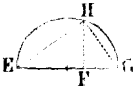
1) На неограниченной прямой откладываемъ $AB = m$, $BC = n$, и описываемъ на AC, какъ на діаметрѣ, полуокружность; тогда перпендикуляръ BD, возставленный изъ точки B къ AC и продолженный до окружности, будетъ искомая пропорціональная, потому что (§ 56, 3 и § 97, 2)

$$AB : BD = BD : BC \text{ или } m : BD = BD : n.$$



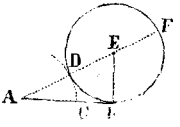
2) Можно также отложить на бо́льшей линіи $EG = m$ меньшую $EF = n$, потомъ на EG описать полуокружность и провести изъ F линію $FH \perp EG$, тогда хорда EH будетъ искомая пропорціональная, потому что (§ 97, 1)

$$EG : EH = EH : EF \text{ или } m : EH = EH : n.$$



§ 111. Раздѣлить данную линію AB въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, т. е. на такія двѣ части, что бы бо́льшая была среднею пропорціональною между всею линіею и ея меньшею частію.

Возставимъ на AB въ B перпендикуляръ $BE = \frac{1}{2} AB$, опишемъ изъ E окружность радіусомъ EB, проведемъ чрезъ точки A и E прямую AF и отсѣчемъ отъ AB часть $AC = AD$, тогда C будетъ искомая точка дѣленія. Такъ какъ AB есть касательная къ кругу, то (§ 105)

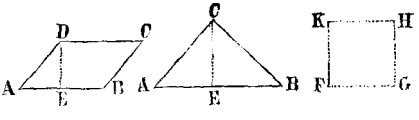


$$AF : AB = AB : AD, \text{ а потому}$$
$$AF - AB : AB = AB - AD : AD \text{ или}$$
$$AF - DF : AB = AB - AC : AC, \text{ т. е.}$$
$$AC : AB = BC : AC \text{ или } AB : AC = AC : BC.$$

Слѣдствіе. Сѣкущая AF въ точкѣ D дѣлится въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Такъ какъ $AB = DF$, то $AF : DF = DF : BD$.

§ 112. Данный параллелограмъ AC или тре—къ ABC обратить въ квадратъ.

1) Найдемъ среднюю пропорціональную FG между основаніемъ AB и высотою DE параллелограма, тогда квадратъ, построенный на FG будетъ равновеликъ параллелограму AC, потому что

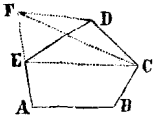


$$AB : FG = FG : DE \text{ или } AB . DE = FG^2.$$

2) Если возьмемъ среднюю пропорціональную FG между основаніемъ AB тре—ка ABC и половиною высоты CE, то она будетъ сторона искомаго квадрата, потому что

$$AB : FG = FG : \tfrac{1}{2} CE \text{ или } \tfrac{1}{2} CE . AB = FG^2.$$

§ 113. Данный много—къ ABCDE обратить въ треугольникъ.



Отрѣжемъ отъ много—ка діагональю CE тре—къ CDE и проведемъ изъ точки D прямую DF || CE до пересѣченія съ продолженіемъ стороны AE въ точкѣ F. Если проведемъ CF, то △ CDE = CFE (§ 80 слѣд.), и прикладывая къ каждому изъ этихъ тре—ковъ фигуру ABCE, получимъ ABCDE = ABCF. Точно также можно обратить четыреугольникъ ABCF въ тре—къ.

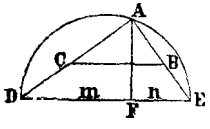
Такъ какъ всякій мно—къ можно обратить въ тре—къ, а всякій тре—къ въ квадратъ, то и всякій мно—къ можно обратить въ квадратъ.

§ 114. Построить квадратъ, равный суммѣ или разности двухъ данныхъ квадратовъ.

Построимъ прямоугольный тре—къ, у котораго въ 1омъ случаѣ оба катета, въ 2омъ гипотенуза и одинъ катетъ равнялись бы сторонамъ данныхъ квадратовъ, тогда квадратъ гипотенузы будетъ равенъ суммѣ, а квадратъ другого катета равенъ разности данныхъ квадратовъ (§ 85, 1).

Такимъ образомъ можно найти сумму произвольнаго числа квадратовъ или мно—ковъ.

§ 115. Построить квадратъ, который бы относился къ данному квадрату P^2, какъ линія m къ линіи n.



На прямой линіи возьмемъ DF = m и FE = n, опишемъ на DE полуокружность, возставимъ изъ точки F перпендикуляръ FA, проведемъ хорды AD и AE, отложимъ на AE или на ея продолженіи линію AB = P, сторонѣ даннаго квадрата, и проведемъ BC || ED, тогда AC, будетъ сторона искомаго квадрата. — Такъ какъ

$$AD : AE = AC : AB \text{ или } AD^2 : AE^2 = AC^2 : AB^2,$$

и (§ 85, 3) $AD^2 : AE^2 = m : n$, то и

$$AC^2 : AB^2 = m : n \text{ или } AC^2 : P^2 = m : n.$$

§ 116. На данной линіи ab построить много—къ, подобный данному много—ку ABCDE (Фиг, § 100).

Проведемъ діагонали AC и AD, отложимъ при точкѣ a уголъ bac = BAC, и при точкѣ b уголъ abc = ABC, тогда △ abc ∾ ABC. Точно также построимъ на ac тре—къ acd ∾ ACD и т. д., тогда abcde ∾ ABCDE (§ 100, 1).

§ 117. Построить много—къ, который бы былъ подобенъ данному много—ку P и равновеликъ данному квадрату N^2.

Обратимъ (§ 113) мно—къ P въ квадратъ M^2, и отъищемъ четвертую пропорціональную AB къ линіямъ M, N и одной изъ сторонъ ab мно—ка P. Если мы построимъ на AB мно—къ x, подобный данному P и при томъ такъ, чтобы ab и AB были сходственныя стороны, то мно—къ x будетъ требуемымъ. — Такъ какъ (§ 100)

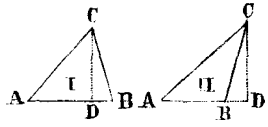
$P : x = ab^2 : AB^2$, и

$M : N = ab : AB$ или $M^2 : N^2 = ab^2 : AB^2$ то

$P : x = M^2 : N^2$. Но такъ какъ

$P = M^2$, то и $x = N^2$.

§ 118. По даннымъ тремъ сторонамъ $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, тре—ка ABC найти высоту CD и площадь F тре—ка.



Перпендикуляръ CD можетъ упасть внутри или внѣ тре—ка. Назовемъ въ обоихъ случаяхъ AD чрезъ m, тогда на первой фигурѣ $BD = c - m$, а на второй $BD = m - c$, слѣд. въ обоихъ случаяхъ $BD^2 = c^2 - 2cm + m^2$. Въ тре—кахъ ACD и BCD имѣемъ

$CD^2 = b^2 - m^2$, $CD^2 = a^2 - c^2 + 2cm - m^2$, слѣд.

$b^2 - m^2 = a^2 - c^2 + 2cm - m^2$, и потому

$m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$. Теперь найдемъ

$$CD^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}$$

$$CD = \frac{1}{2c}\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}$$

$$CD = \frac{1}{2c}\sqrt{[(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]}$$

$$CD = \frac{1}{2c}\sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}.$$

Такъ какъ $F = \frac{c}{2} CD$, то

$$\mathbf{F = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}}.$$

Если обозначимъ чрезъ s полусумму сторонъ тре—ка, то $a + b + c = 2s$, $b + c - a = 2(s - a)$, $a + c - b = 2(s - b)$, $a + b - c = 2(s - c)$, слѣд.

$$CD = \frac{2}{c}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

$$F = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Если $a = 36$, $b = 29$, $c = 25$ футъ, то найдемъ $CD = 28\frac{4}{5}$ футъ и $F = 360\square$ футъ.

§ 119. Задачи безъ рѣшенія.

1) Построить квадратъ, который былъ бы равновеликъ половинѣ даннаго квадрата.

2) Обратить данный квадратъ или данный треугольникъ въ равнобедренный треугольникъ.

3) Данный тре—къ ACD обратить въ другой тре—къ, который бы имѣлъ стороною линію m.

4) Чрезъ точку D внутри даннаго угла ABC провести между его сторонами прямую такъ, чтобы она раздѣлилась этою точкою пополамъ или въ отношеніи m : n.

5) Трапецію обратить въ параллелограмъ той же высоты.

6) Данный параллелограмъ ABCD обратить въ такой, который бы имѣлъ стороною данную линію a.

7) Раздѣлить треугольникъ на три равныя части, a) линіями, проведенными, изъ вершины какого нибудь угла, b) линіями, параллельными основанію.

8) Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ двѣ данныя точки C и D, и касался данной прямой AB.

9) Даны два подобные много—ка; построить много—къ подобный имъ и равный ихъ суммѣ или разности.

10) Въ данную полуокружность вписать квадратъ, такъ чтобы одна сторона его совпала съ діаметромъ.

11) Построить прямоугольникъ, равновеликій данному квадрату Q, такъ чтобы сумма или разность смежныхъ сторонъ прямоугольника была равна данной линіи AB.

12) Выразить отношеніе a) между двумя квадратами, построенными на линіяхъ m и n, b) между двумя прямоугольниками, стороны которыхъ m, n и p, q, — посредствомъ отношенія двухъ прямыхъ.

13) Построить два квадрата, которые бы относились одинъ къ другому какъ m : n.

14) Данный квадратъ обратить въ два равные квадрата.

15) Построить тре—къ, который бы былъ подобенъ данному тре—ку ABC и имѣлъ высоту a.

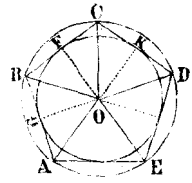
16) Найти площадь треугольника по данному периметру p и радіусу r круга вписаннаго.

17) Раздѣлить треугольникъ ABC на двѣ равновеликія части линіею, проходящею чрезъ данную точку D, лежащую на одной изъ его сторонъ.

18) Описать кругъ, который бы касался сторонъ даннаго угла ABC и проходилъ бы чрезъ точку D, лежащую внутри этого угла.

VI. О правильныхъ многоугольникахъ и измѣреніи круга.

§ **120.** 1) Около всякаго правильнаго мно—ка ABCDE можно описать кругъ. 2) Во всякій правильный мно—къ можно вписать кругъ.



1) Чрезъ три точки A, B, C, опишемъ кругъ, коего центръ будетъ O, проведемъ прямыя AO, BO, CO . . ., и опустимъ изъ O на стороны мно—ка перпендикуляры OF, OK . . . Такъ какъ AB = CD, BF = CF (§ 44), ∠ ABF = DCF, ∠ BFO = CFO, то четыреугольникъ ODCF ≅ OABF, слѣд. OD = OA и точка D будетъ лежать на окружности, проходящей чрезъ точки A, B, C. Точно также можно доказать, что и точка E лежитъ на той же окружности.

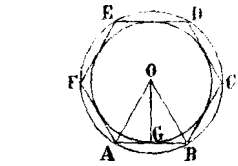
2) Всѣ стороны AB, BC, CD . . . какъ равныя хорды, равно удалены отъ центра O (§ 46), потому и кругъ, описанный изъ точки O радіусомъ OF коснется каждой стороны мно—ка.

Примѣчаніе. Точка o, общій центръ описаннаго и вписаннаго круга, можетъ быть разсматриваема какъ центръ мно—ка. Всѣ центральные углы AOB, BOC . . . мно—ка равны между собою. Въ правильномъ n—угольникѣ каждый изъ нихъ $= \frac{4}{n}$ R.

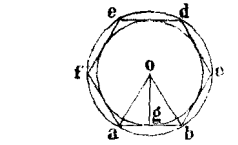
§ **121.** Площадь правильнаго мно—ка ABCDE рявняется половинѣ произведенія изъ его периметра на радіусъ круга вписаннаго (фиг. § 120).

Площадь каждаго изъ тре—ковъ AOB, BOC . . . равна половинѣ произведенія основанія на апоѳему правильнаго мно—ка, т. е. на радіусъ круга вписаннаго, на прим. △ AOB $= \frac{1}{2}$ AB.GO, слѣд. сумма всѣхъ тре—ковъ или площадь мно—ка ABCDE $= \frac{1}{2}$ (AB + BC + CD + DE + EA) GO.

§ **122.** 1) Правильные мно—ки ABCDEF и abcdef одинаковаго числа сторонъ подобны. 2) Въ двухъ такихъ мно—кахъ периметры относятся какъ радіусы круговъ вписанныхъ или описанныхъ, а площади какъ квадраты этихъ радіусовъ.



1) Углы такихъ мно—ковъ равны, потому что во всякомъ правильномъ n — угольникѣ каждый уголъ $= 2 - \frac{4}{n}$ R (§ 16, 2) т. е. зависитъ только отъ числа сторонъ; пропорціональность же сторонъ слѣдуетъ изъ того, что въ каждомъ мно—кѣ всѣ стороны равны, слѣд. мно—ки подобны (§ 78, 3).

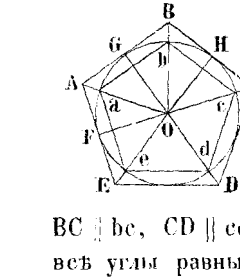


2) Обозначимъ периметры мно—ковъ чрезъ U и u; тогда (§ 102) U : u = AB : ab. Пусть AO и ao будутъ радіусы описанныхъ, GO и go радіусы вписанныхъ круговъ, то по равенству угловъ △ AOB ∾ aob и △ AOG ∾ aog, слѣд.

$$AB : ab = AO : ao = GO : go \text{ или}$$
$$U : u = AO : ao = GO : go.$$

Площади мно—ковъ относятся (§ 101) какъ $AB^2 : ab^2$, слѣд. и какъ $AO^2 : ao^2$ или $GO^2 : go^2$.

§ 123. 1) По данному правильному мно—ку вписанному описать около круга подобный ему мно—къ, и обратно, 2) по данному описанному мно—ку найти подобный ему вписанный мно—къ.



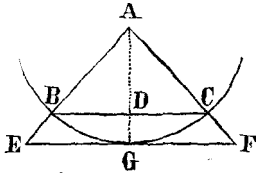
1) Пусть abcde будетъ данный вписанный мно—къ. Если чрезъ средины F, G, H . . . дугъ ae ab, ac . . . проведемъ касательныя AE, AB . . ., то онѣ образуютъ требуемый мно—къ ABCDE. — Прямая OG перпендикулярна къ AB и къ ab (§ 45, 1), слѣдовательно AB ∥ ab. Точно также и BC ∥ bc, CD ∥ cd и т. д. По этому въ много—какъ ABCDE и abcde всѣ углы равны. Изъ равенства тре—ковъ теперь легко доказать, что AB = BC = CD . . . Слѣдовательно мно—къ ABCDE правильный и имѣетъ одинаковое съ abcde число сторонъ, откуда ясно, что ABCDE ∾ abcde (§ 122, 1).

2) Если ABCDE будетъ правильный описанный мно—къ, то для полученія подобнаго ему вписаннаго мно—ка стоитъ только провести прямыя OA, OB, OC . . ., и соединить точки пересѣченія этихъ линій съ кругомъ. Полученный такимъ образомъ мно—къ abcde будетъ требуемый. Всѣ углы мно—ка abcde равны, потому что они измѣряются полусуммою равнаго числа равныхъ дугъ, а равенство сторонъ видно изъ равенства тре—ковъ aob, cob, и т. д.

Можно также получить вписанный мно—къ abcde, соединя точки касанія F, G, H и т. д.

Слѣдствіе. *Около даннаго круга можно описать всѣ правильные мно—ки, которые могутъ быть вписаны въ кругъ, и на оборотъ.*

§ **124.** По данному радіусу ($AB = r$) круга и сторонѣ ($BC = a$) правильнаго вписаннаго мно—ка вычислить сторону ($EF = A$) подобнаго ему мно—ка описаннаго.



Проведемъ $AG \perp EF$, тогда $BD = \frac{1}{2}a$, $EG = \frac{1}{2}A$, и

$$AD = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Изъ подобія тре—ковъ EAG и BAD слѣдуетъ

$$AD : BD = AG : EG \quad \text{или}$$

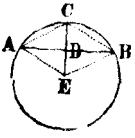
$$\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2} : \frac{1}{2}a = r : \frac{1}{2}A, \quad \text{слѣд.}$$

$$A = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

При $r = 1$ будемъ имѣть

$$A = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}.$$

§ **125.** По данному радіусу ($AE = r$) круга и сторонѣ ($AB = a$) вписаннаго правильнаго мно—ка вычислить сторону ($AC = b$) вписаннаго правильнаго же мно—ка, имѣющаго вдвое болѣе сторонъ.



Положимъ, что дуга AB раздѣлена въ точкѣ C пополамъ, тогда $AD = \frac{1}{2}a$ и линія AC ($= BC$) будетъ сторона b искомаго мно—ка. Изъ тре—ка ACD имѣемъ

$$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + CD^2 \quad \text{или}$$

$$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + (r - DE)^2,$$

$$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + r^2 - 2r \,.\, DE + DE^2.$$

Но $DE^2 = r^2 - \frac{1}{4}a^2$, слѣд. $DE = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$.

Вставивъ эту величину въ выраженіе b^2, получимъ

$$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2} + r^2 - \frac{1}{4}a^2, \quad \text{или}$$

$$b^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}, \quad \text{слѣдовательно}$$

$$b = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

§ **126.** Слѣдствія. 1) *Если* $r = 1$, *то*

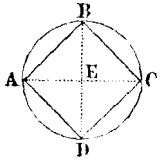
$$b = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$

2) Эта формула, рѣшенная относительно a, даетъ

$$a = b\sqrt{4 - b^2}.$$

Посредствомъ этого выраженія по данной сторонѣ вписаннаго мно—ка можно найти сторону вписаннаго же мно—ка, имѣющаго вдвое менѣе сторонъ.

§ 127. Въ кругѣ вписать правильные мно—ки, имѣющіе 4, 8, 16, . . . сторонъ.



Проведемъ два перпендикулярные діаметра AC и BD и соединимъ ихъ оконечности, тогда ABCD и будетъ требуемый квадратъ, потому что углы ABC, BCD . . . прямые (§ 56, 3), а стороны AB, BC . . . равны по ра равенству тре—ковъ ABE, CBE . . .

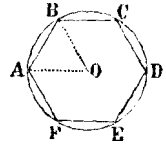
Раздѣлимъ пополамъ дуги AB, BC . . . и соединимъ точки дѣленія, тогда получимъ правильный 8—угольникъ. Если будемъ продолжать далѣе дѣленіе, то получимъ мно—ки, имѣющіе 16, 32 . . . сторонъ.

§ 128. Для выраженія стороны квадрата въ единицахъ радіуса круга описаннаго имѣемъ уравненіе $AB^2 = AE^2 + BE^2 = 2AE^2$, слѣд. $AB = AE\sqrt{2}$, и если радіусъ $AE = 1$, то $AB = \sqrt{2}$.

Если мы вставимъ въ формулу § 126, 1 вмѣсто a величину $\sqrt{2}$, то получимъ сторону 8—угольника вписаннаго, выраженную въ единицахъ радіуса, $= \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Вставивъ эту послѣднюю величину вмѣсто a въ туже самую формулу, получимъ сторону 16—угольника $= \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2})}}$ $= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

§ 129. Въ кругѣ вписать правильные мно—ки, имѣющіе 3, 6, 12, ... сторонъ.



Засѣчемъ на окружности 6 разъ хорду, равную радіусу AO, и соединимъ точки дѣленія A, B, C . . ., тогда получимъ правильный шестиугольникъ ABCDEF. Потому что въ равностороннемъ тре—кѣ AOB каждый уголъ равенъ $\frac{2}{3}R$ или $\frac{4}{6}R$, т. е. уголъ AOB измѣряется шестою частью цѣлой окружности, потому и радіусъ $AO = AB$ составляетъ хорду шестой части цѣлой окружности, слѣд. отложится на этой послѣдней 6 разъ. Всѣ углы ABC, BCD . . . . равны, какъ измѣряемые полусуммою равнаго числа равныхъ дугъ.

Если проведемъ линіи AC, CE, то получимъ правильный тре—къ. Хорда, соотвѣтствующая половинѣ дуги AB, будетъ сторона правильнаго 12—угольника и т. д.

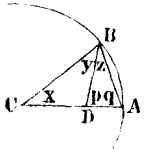
§ 130. Если принять радіусъ за единицу, то сторона 6—угольника вписаннаго $= 1$.

Положивъ $b = 1$ въ формулѣ § 126, 2, получимъ сторону прав. тре—ка вписаннаго $= \sqrt{3}$.

Положивъ $a = 1$ въ формулѣ § 126, 1, получимъ сторону прав. 12—угольника $= \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Если это послѣднее выраженіе вставимъ опять въ туже формулу вмѣсто a, то получимъ сторону прав. 24—угольника $= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.

§ 131. Въ кругѣ вписать правильные мно—ки, имѣющіе 5, 10, 20 . . . сторонъ.



Если раздѣлимъ радіусъ CA въ среднемъ и крайнемъ отношеніи въ точкѣ D и возмемъ хорду AB, равную бо́льшему отрѣзку CD, то AB будетъ сторона десятиугольника. Проведемъ CB и BD, тогда имѣемъ (§ 109)

$$AC : CD = CD : AD \text{ или}$$
$$AC : AB = AB : AD,$$

и такъ какъ тре—ки ABD и ACB кромѣ того имѣютъ уголъ q общій, то они подобны (§ 93), слѣд. $\measuredangle z = x$. Но какъ $\triangle$ ACB есть равнобедренный, то и въ $\triangle$ ABD должно быть $BD = AB = CD$, а посему $\measuredangle p = q$, $y = x = z$. Внѣшній уголъ $p = x + y = 2x$, слѣд. и $\measuredangle q = 2x$. Въ $\triangle$ ACB имѣемъ (§ 13)

$$x + y + z + q = 2R \text{ или}$$
$$x + x + x + 2x = 2R, \text{ т. е. } 5x = 2R,$$

слѣд. $x = \frac{2}{5}R = \frac{4}{10}R$. Изъ этого слѣдуетъ, что соотвѣтствующая углу x дуга AB есть $\frac{1}{10}$ цѣлой окружности и потому и AB будетъ хорда десятой части окружности.

Если въ правильномъ 10—угольникѣ соединимъ вершины чрезъ одну, то получимъ прав. 5—угольникъ. Чрезъ послѣдовательное же дѣленіе дугъ, стягиваемыхъ сторонами 10—угольника, получимъ мно—ки о 20, 40, 80 . . . . сторонахъ.

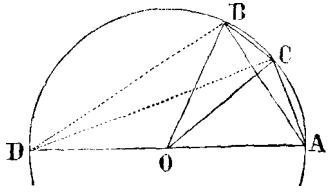
§ 132. Чтобы выразить сторону прав. 10—угольника въ единицахъ радіуса, стоитъ найти бо́льшій отрѣзокъ радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. Положивъ, что бо́льшій отрѣзокъ $= x$ и радіусъ $= 1$, получимъ пропорцію

$$1 - x : x = x : 1, \text{ откуда } x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Если мы вставимъ это выраженіе вмѣсто b въ формулу § 126, 2, то получимъ сторону прав. 5—угольника $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{4 - \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2}$, или

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

§ 133. Въ кругѣ вписать правильные мно—ки, имѣющіе 15, 30, 60 . . . сторонъ.



Засѣчемъ на кругѣ отъ точки A по одному и тому же направленію хорду AB, равную сторонѣ прав. 6—угольника, и хорду AC, равную сторонѣ прав. 10—угольника; тогда разность CD соотвѣтствующихъ дугъ равняется $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ цѣлой окружности, слѣд. хорда BC будетъ сторона прав. 15—угольника.

Дѣля дугу BC послѣдовательно пополамъ мы найдемъ стороны мно—ковъ, имѣющихъ 30, 60 . . . . сторонъ.

§ 134. Для выраженія стороны BC прав. 15—угольника въ единицахъ радіуса имѣемъ $AB=1$ и $AC=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (§ 132); и такъ какъ $\measuredangle ACD=ABD=R$, то (§ 84) получимъ

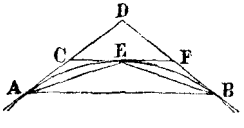
$$BD=\sqrt{3} \text{ и } CD=\sqrt{4-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

по § 105 $AD.BC+AC.BD=AB.CD$, т. е.

$$2.BC+\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3}=\tfrac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \text{ слѣд.}$$

$$BC=\tfrac{1}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3})=0,4158234.$$

§ 135. Съ умноженіемъ числа сторонъ периметръ вписаннаго прав. мно—ка увеличивается, а описаннаго умень- шается.

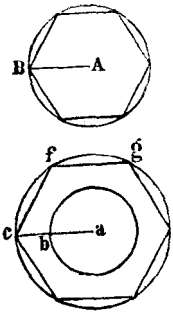


Пусть будетъ AB сторона какого—нибудь вписаннаго прав. мно—ка, а AE и BE стороны вписаннаго мно—ка двойнаго числа сторонъ, тогда $AE+BE>AB$, изъ чего слѣдуетъ, что периметръ втораго вписан. мн—ка болѣе периметра перваго. Далѣе, если AD и BD будетъ половины двухъ сторонъ описан. мн—ка, а CF сторона описан. мн—ка двойнаго числа сторонъ, то $CD+DF>CF$, слѣд. периметръ втораго описаннаго мн—ка менѣе периметра перваго

Такъ какъ съ умноженіемъ числа сторонъ вписанныхъ и описанныхъ мн—ковъ ихъ периметры все болѣе и болѣе приближаются къ окружности, то можно получить такіе два мн—ка, одинъ вписанный, а другой описанный, что разность ихъ периметровъ будетъ менѣе всякой данной величины, какъ бы мала она ни была. Слѣдовательно величина окружности, заключащейся между периметрами соотвѣтствующихъ вписанныхъ и описанныхъ мн—ковъ, еще менѣе будетъ различаться отъ периметра одного изъ этихъ мн—ковъ, нежели периметры самыхъ мн—ковъ между собою. Посему всегда возможно будетъ найти такой вписанный или описанный мн—къ, что разность между его периметромъ и окружностью будетъ менѣе всякой данной по произволу величины.

§ 136. Окружности круговъ относятся какъ ихъ радіусы или діаметры.

Периметръ вписаннаго мно—ка будетъ увеличиваться съ увеличеніемъ его сторонъ, между тѣмъ какъ периметръ описаннаго мно—ка въ томъ же случаѣ будетъ уменьшаться, но первый всегда менѣе, а второй болѣе окружности. Чрезъ послѣдовательное увеличеніе числа сторонъ одного изъ этихъ мно—ковъ величину его периметра можно такъ приблизить къ величинѣ окружности, что разность между ними можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины; потому кругъ можно разсматривать какъ правильный мно—къ съ безконечно большимъ числомъ безконечно малыхъ сторонъ. Если мы представимъ два круга какъ два правильные мно—ка одинаковаго числа сторонъ, то къ нимъ можно приложить теорему § 122, 2, а именно, что периметры правильныхъ мно—ковъ одинаковаго числа сторонъ относятся какъ радіусы круговъ вписанныхъ или описанныхъ, слѣд. и круги будутъ относиться какъ ихъ радіусы, или тоже самое, какъ ихъ діаметры.



Другое доказательство. Положимъ, что пропорція окр. AB : окр. ab = AB : ab не справедлива, а будетъ существовать пропорція

окр. AB : окр. ab = AB : ac,

гдѣ ac > ab. Впишемъ въ кругѣ радіуса ac прав. мно—къ по какому нибудь вышеописанному способу. Чрезъ послѣдовательное дѣленіе дугъ, стягиваемыхъ сторонами, можно наконецъ получить мно—къ съ такими малыми сторонами, что онъ не будетъ достигать круга ab. Обозначимъ периметръ этого мно—ка чрезъ p и впишемъ въ кругѣ AB подобный ему мно—къ, котораго периметръ назовемъ чрезъ P, тогда по § 122, 2 будемъ имѣть

P : p = AB : ac.

Изъ этихъ двухъ пропорцій слѣдуетъ, что

окр. AB : P = окр. ab : p,

что невозможно, потому что окр. AB > P, а окр. ab < p, слѣд. и наше предположеніе, что четвертый членъ пропорціи окр. AB : окр. ab = AB : ab болѣе ab, не возможно. Точно также можно доказать, что этотъ членъ не можетъ быть менѣе ab.

§ 137. Слѣдствіе. Дуги AB и ab разныхъ круговъ, соотвѣтствующія равнымъ центральнымъ угламъ, относятся какъ ихъ радіусы AO и ao (фиг. § 122).

По § 53 ∠ ACB : 4 R = дуга AB : окр. AO

и ∠ acb : 4 R = дуга ab : окр. ao,

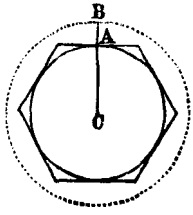
но такъ какъ $\angle$ AOB = aob, то

дуга AB : дуга ab = окр. AO : окр. ao = AO : ao.

§ 138. Площадь круга равна половинѣ произведенія окружности на радіусъ.

Если будемъ разсматривать кругъ какъ прав. мно—къ безчисленнаго множества безконечно малыхъ сторонъ, то предложеніе § 121, по которому площадь прав. мно—ка равняется половинѣ произведенія его периметра на радіусъ вписан. круга, можетъ быть примѣнено и къ самому кругу, коего площадь слѣд. будетъ равняться половинѣ произведенія окружности на радіусъ.

Другое доказательство.



Пусть $\frac{1}{2}$ AC $\times$ окр. CA не будетъ выраженіемъ площади круга CA, а мѣрою бо́льшаго круга CB, такъ что

$\frac{1}{2}$ AC $\times$ окр. CA = площ. кр. CB.

Опишемъ около круга CA прав. мно—къ съ такимъ числомъ сторонъ, чтобы онѣ не касались круга BC, и обозначимъ периметръ этого мно—ка чрезъ P, тогда площадь его будетъ равна $\frac{1}{2}$ AC $\times$ P. Такъ какъ окр. CA $<$ P, то

$\frac{1}{2}$ CA $\times$ окр. CA $<$ $\frac{1}{2}$ CA. P слѣд. и

площ. кр. CB $<$ $\frac{1}{2}$ CA $\times$ P,

т. е. площадь круга CB менѣе площади мно—ка, заключающагося внутри его, что невозможно, а потому не можетъ быть чтобы $\frac{1}{2}$ AC $\times$ окр.CA была больѣе площади круга CA. Подобнымъ образомъ можно доказать, что $\frac{1}{2}$ AC $\times$ окр. CA не можетъ быть меньше площади круга CA, а потому $\frac{1}{2}$ AC $\times$ окр. CA = площ. кр. CA.

§ 139. Площадь сектора AOB равняется половинѣ произведенія его дуги AB на радіусъ AO. (Фиг. § 129).

Такъ какъ секторъ относится къ площади круга, какъ его дуга къ цѣлой окружности, то мы имѣемъ

сект. AOB : $\frac{1}{2}$ AO $\times$ окр. OA = дуга AB : окр. OA,

слѣд. сект. AOB = $\frac{1}{2}$ AO $\times$ дуга AB.

§ 140. 1) Во всѣхъ кругахъ отношеніе окружности къ діаметру есть величина постоянная.

Означивъ окружности двухъ круговъ чрезъ P и p, и ихъ радіусы чрезъ R и r, будемъ имѣть (§ 136)

P : p = 2 R : 2 r, слѣд. и P : 2 R = p : 2 r.

2) Постоянное отношеніе окружности къ діаметру обозначается чрезъ π, такъ что, если p будетъ окружность какого нибудь круга, а r его радіусъ, то

$$\pi = \frac{p}{2r}.$$

3) Изъ сего слѣдуетъ формула

$$p = 2r\pi,$$

т. е. окружность круга равна удвоенному радіусу, умноженному на постоянную величину π.

4) Если діаметръ круга будетъ $= 1$, то окружность равна величинѣ π, потому что, вставивъ въ предъидущей формулѣ $2r = 1$, получимъ $p = \pi$.

5) Если обозначимъ чрезъ F площадь круга, чрезъ p его окружность, а чрезъ r радіусъ, то (§ 138) $F = \frac{1}{2}pr$. Но такъ какъ $p = 2r\pi$, то

$$F = r^2\pi,$$

т. е. площадь круга равняется квадрату радіуса, умноженному на постоянную величину π.

6) Если обозначимъ чрезъ d діаметръ круга и вставимъ въ предъидущую формулу вмѣсто r величину $\frac{1}{2}d$, то получимъ $F = \frac{1}{4}d^2\pi$.

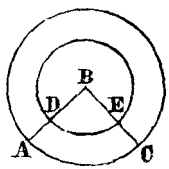
§ 141. Площади круговъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ или діаметровъ.

Если F и f будутъ площади двухъ круговъ, R и r ихъ радіусы, D и d діаметры, то

$$F = R^2\pi = \frac{1}{4}D^2\pi, \quad f = r^2\pi = \frac{1}{4}d^2\pi, \text{ слѣд.}$$

$$F : f = R^2 : r^2 = D^2 : d^2.$$

§ 142. Секторы ABC и DBE разныхъ круговъ, имѣющіе равные центральные углы, относятся какъ квадраты радіусовъ круговъ.



Такъ какъ $ABC : DBE = \frac{1}{4}AB \times AC : \frac{1}{4}DB \times DE$,

но $\smile AC : \smile DE = AB : DB$, то

$ABC : DBE = AB^2 : DB^2$.

§ 143. Найти приближенное отношеніе Π окружности къ діаметру.

Вычисляя послѣдовательно периметры вписанныхъ и описанныхъ прав. мно—ковъ все съ бо́льшимъ и бо́льшимъ числомъ сторонъ въ единицахъ радіуса, мы получимъ два ряда чиселъ, изъ которыхъ одни будутъ менѣе, а другія болѣе окружности. Съ увеличеніемъ числа сторонъ мно—ковъ

эти ряды сближаются все болѣе и болѣе. Если начнемъ съ прав. 6—угольника вписаннаго, то получимъ сторону его $a = 1$, а сторону описаннаго 6—угольника по § 124 $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Слѣдовательно периметръ вписан. 6—угольника $= 6$, а периметръ описан. 6—угольника $= \frac{12}{\sqrt{3}} = 6.9282\ldots$ Между этими двумя числами содержится величина окружности. Чтобы получить болѣе тѣсные предѣлы, перейдемъ къ мно—камъ о 12. 24 . . . сторонахъ. Пусть будутъ a', a'', a''' . . . стороны вписанныхъ 12, 24, 48 . . . угольниковъ, и A', A'', A''' . . . стороны соотвѣтствующихъ мно—ковъ описанныхъ. Если въ формулу § 125 вставимъ $a = 1$, тогда $a' = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, и когда эта величина будетъ вставлена въ формулу § 124, то получимъ $A' = \frac{2a'}{\sqrt{4 - a'^2}}$. Продолжая такимъ образомъ будемъ имѣть слѣдующую таблицу:

Стороны.		Периметры.
$a' = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$	$= 0{,}517638090205$	$12\,a' = 6{,}2116571$
$A' = \frac{2a'}{\sqrt{4 - a'^2}}$	$= 0{,}535898384826$	$12\,A' = 6{,}4307806$
$a'' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a'^2}}$	$= 0{,}261052384440$	$24\,a'' = 6{,}2652572$
$A'' = \frac{2a''}{\sqrt{4 - a''^2}}$	$= 0{,}263304995174$	$24\,A'' = 6.3193199$

Продолжая вычисленіе такимъ образомъ напр. до 12288—угольника, найдемъ, что периметръ вписан. 12288—ка $= 6.2831852$

периметръ описан. 12288—ка $= 6.2831854$.

Изъ этого видно, что разность между периметрами вписанныхъ и описанныхъ мно—ковъ становится менѣе и менѣе, такъ что периметры 12288—ка различаются между собою только двумя десяти—милліонными долями. Первыя семь цифръ 6.283185, общія обѣимъ числамъ, будутъ выражать самую окружность въ единицахъ радіуса. При этомъ ясно, что продолжая вычисленіе еще далѣе, мы могли бы опредѣлить величину окружности гораздо точнѣе.

Взявъ за окружность среднее ариѳметическое между периметрами 12228—угольниковъ вписанныхъ и описанныхъ, мы получимъ для ней 6,2831853. Такъ какъ мы приняли сторону вписаннаго 6—угольника или радіусъ круга $= 1$, то діаметръ круга $= 2$; слѣд. приблизительно $\pi = 6{,}2831853 : 2$, т. е.

$$\boldsymbol{\pi = 3{,}1415926}.$$

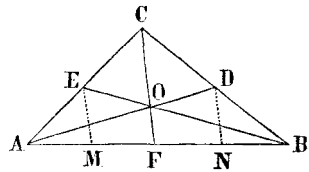
Архимедъ вычисливъ периметръ 96—угольника, нашелъ $\pi = \frac{22}{7}$. Болѣе точно отношеніе $\pi = \frac{355}{113}$. Въ новѣйшее время отношеніе π вычислено Клаусеномъ (въ Дерптѣ) съ точностію болѣе 500 десятичныхъ знаковъ.

§ 144. Задачи безъ рѣшенія.

1) Построить тре—къ по двумъ даннымъ сторонамъ a, b и перпендикуляру p, опущенному изъ конца первой изъ этихъ сторонъ на другую.

2) *Построить тре—къ по данному основанію* AB, *противолежащему* ему углу a, и отношенію m : n между другими сторонами.

3) Построить кругъ, площадь котораго равнялась бы площади, заключающейся между двумя данными концентрическими кругами.



4) Доказать, что три прямыя AD, BE, CF, соединяющія вершины тре—ка ABC съ срединами противолежащихъ сторонъ, пересѣкаются въ одной и той же точкѣ O, удаленной отъ каждой вершины на $\frac{2}{3}$ линіи, соотвѣтствующей вершинѣ.

5) *Раздѣлить данный треугольникъ на четыре равныя* ($\cong$) треугольника.

6) Данъ кругъ, радіусъ котораго R, и внутри круга дана точка A. Описать радіусомъ r окружность, которая проходила бы чрезъ точку A и касалась даннаго круга изнутри.

7) *Найти отношеніе между гипотенузою прямоугольнаго тре—ка и* прямою, соединяющею ея средину съ вершиною прямаго угла.

8) Въ данный секторъ вписать кругъ.

9) Описать кругъ радіусомъ r такъ, чтобы онъ отсѣкалъ отъ сторонъ даннаго угла a хорды, равныя линіи m.

10) На окружности даны двѣ точки A, B. Найти на ней третью точку x, которой разстоянія отъ двухъ первыхъ относились бы какъ m : n.

11) Радіусомъ R описать окружность такъ, чтобы она отстояла отъ точки A на разстояніе m, и отъ точки B на разстояніе n.

12) Внутри тре—ка найти точку, чтобы прямыя, проведенныя отъ ней къ вершинамъ угловъ раздѣлили тре—къ на три равновеликіе тре—ка.

13) Найти на данной прямой AB точку, чтобы проведенная изъ ней касательная къ данному кругу равнялась линіи m.

14) На данной линіи AB построить четыреугольникъ, равновеликій данному.

15) Превратить прямоугольникъ, имѣющій стороны a, b, въ другой прямоугольникъ, котораго стороны относились бы между собою какъ m : n.

16) Раздѣлить тре—къ пополамъ линіею, перпендикулярною къ одной изъ его сторонъ.

17) Построить тре—къ по данному углу a, прилежащей къ нему сторонѣ AB и перпендикуляру p, опущенному изъ вершины данного угла на противолежащую сторону.

18) Построить тре—къ по данному углу a и перпендикулярамъ m и n, опущеннымъ изъ концовъ прилежащихъ къ нему сторонъ другъ на друга.

19) Радіусомъ r описать окружность такъ, чтобы она отстояла отъ данной точки P на разстояніе p, и отсѣкала отъ данной линіи AB хорду m.

20) Секторъ, котораго центральный уголь прямой, превратить въ полукругъ.

21) Построить прямоугольный тре—къ, котораго гипотенуза равнялась бы линіи m, а площадь — квадрату p^2.

22) Построить тре—къ по данной сторонѣ a, и перпендикулярамъ m и n, опущеннымъ изъ ея концовъ на противолежащія стороны.

23) Чрезъ точку A привести прямую, которая бы отрѣзала въ данномъ кругѣ дугу, b вмѣщающую уголъ m.

24) Изъ точки A данной окружности провести такую хорду, чтобы соотвѣтствующій ей центральный уголь былъ равенъ углу a.

25) Построить прямоугольный тре—къ по данной гипотенузѣ m и условію, чтобы одинъ изъ острыхъ угловъ былъ вдвое болѣе другаго.

26) По данной суммѣ S двухъ смежныхъ сторонъ построить прямоугольникъ, равновеликій данному квадрату m^2.

27) Разносторонній треугольникъ превратить въ равносторонній.

28) Въ данный тре—къ вписать квадратъ

29) Построить тре—къ по тремъ перпендикулярамъ a, b, c, опущеннымъ изъ вершинъ тре—ка на противолежащія стороны.

30) Изъ точки A провести къ данной окружности сѣкущую такъ, чтобы она раздѣлилась окружностью пополамъ.

31) Изъ точки A (фиг. § 111) провести къ данной окружности сѣкущую (AF) такъ, чтобы она раздѣлилась окружностью въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и именно хорда (DF) была бо́льшая часть раздѣленной линіи AF.

32) Данъ уголъ ABC и внутри его точка M. На сторонѣ AC найти точку, равно отстоящую отъ стороны AB и данной точки M.

33) Провести линію, которая бы отсѣкала отъ двухъ данныхъ окружностей дуги, вмѣщающія первая уголь m, а вторая уголъ n.

СТЕРЕОМЕТРІЯ

по системѣ Лежандра

для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ.

Составилъ

К. ГЕХЕЛЬ,

Докторъ математики въ Дерптѣ.

2. изданіе.

Дерптъ и Рига.

Изданіе типографіи Шнакенбурга.

1880.

Дозволено цензурою Дерптъ, 12. Апрѣля 1880 г.
Цензоръ П. ф. Руммелъ.

Оглавленіе.

I. О прямыхъ линіяхъ и плоскостяхъ въ пространствѣ.

§ **145.** 1) Стереометрія разсматриваетъ различныя сочетанія плоскостей и линій въ пространствѣ, изучаетъ геометрическія тѣла и поверхности и даетъ способы ихъ измѣренія.

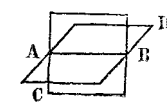
2) Провести плоскость чрезъ данную прямую значитъ провести плоскость такъ, чтобы съ нею вполнѣ совпала данная прямая.

Если прямая имѣетъ съ плоскостью только одну общую точку, а всѣми остальными точками лежитъ внѣ плоскости, то говорятъ, что прямая пересѣкаетъ плоскость.

Если прямая линія пересѣкаетъ плоскость и перпендикулярна къ всѣмъ прямымъ, проведеннымъ въ этой плоскости чрезъ точку пересѣченія, то она называется перпендикуляромъ къ плоскости, а плоскость перпендикулярна къ прямой линіи.

Прямая линія и плоскость параллельны, если онѣ при произвольномъ продолженіи въ обѣ стороны не пересѣкаются; точно такъ же и двѣ плоскости параллельны, если не пересѣкаются, сколько бы онѣ не были продолжены.

3) Двѣ прямыя, лежащія въ одной плоскости, всегда параллельны, если при произвольномъ продолженіи не встрѣчаются. Но въ пространствѣ двѣ прямыя могутъ имѣть такое положеніе, что не встрѣчаются при призвольномъ продолженіи, а всетаки не параллельны. Положимъ что двѣ плоскости C и D проходятъ чрезъ прямую AB, и что изъ двухъ какихъ нибудь точекъ этой прямой возставлены къ ней перпендикуляры AC и BD, одинъ въ плоскости C, другой въ



плоскости D; эти перпендикуляры не будутъ параллельны между собою, но и не пересѣкутся.

§ **146.** Чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести только одну плоскость; слѣдовательно положеніе плоскости совершенно опредѣляется тремя точками, не лежащими на одной прямой.

Положимъ, что двѣ точки будутъ соединены прямою, чрезъ которую проведена плоскость. Обращая около прямой, какъ около неподвижной оси, эту плоскость, мы ей можемъ дать безконечно большое число различныхъ положеній. Возмемъ гдѣ нибудь внѣ прямой еще точку и будемъ вращать плоскость до тѣхъ поръ, пока она не пройдетъ и чрезъ эту точку, тогда отъ малѣйшаго вращенія плоскость должна оставить взятую нами третью точку, слѣдовательно положеніе плоскости, проходящей чрезъ три данныя точки, не лежащія на одной прямой, неизмѣнно, и всѣ плоскости, проходящія чрезъ три общія точки, сольются.

§ **147.** 1) Чрезъ двѣ пересѣкающіяся или параллельныя прямыя можно провести только одну плоскость, потому что всѣ плоскости, проходящія чрезъ двѣ такія линіи, будутъ имѣть три общія точки, не лежащія на одной прямой, и потому совмѣщаются.

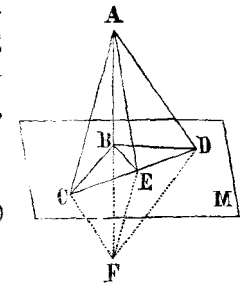
2) Чрезъ данную точку въ пространствѣ можно провести только одну линію параллельную данной прямой.

3) Чрезъ четыре или болѣе точки можно провести или только одну плоскость или ни одной.

§ **148.** Пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линія.

Если бы между точками, общими той и другой плоскости, были три не лежащія на одной прямой точки, то плоскости слились бы, а не пересѣклись.

§ **149.** Если прямая AB, пересѣкающая плоскость M въ точкѣ B, перпендикулярна къ двумъ прямымъ BC и BD, проведеннымъ на плоскости M чрезъ точку пересѣченія B, то она перпендикулярна и ко всякой другой прямой BE, проведенной чрезъ ея основаніе B на той же плоскости, а слѣд. перпендикулярна и къ самой плоскости.



Соединимъ двѣ произвольныя точки C и D прямыхъ BC и BD линіею CD, которая пересѣкаетъ BE въ точкѣ E, продолжимъ AB по другую сторону плоскости M такъ что BF = AB. и проведемъ AC, AE, AD, FC, FE. FD. Такъ какъ

AC = FC и AD = FD (§ 28. 2). то (§ 24).

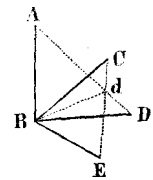
$\triangle$ ACD $\cong$ FCD, слѣд. $\measuredangle$ ACD = FCD, и (§ 17)

$\triangle$ ACE $\cong$ FCE, слѣд. AE = FE, потому (§ 24)

$\triangle$ ABE $\cong$ FBE, слѣд. $\measuredangle$ ABE = FBE. и потому

AB $\perp$ BE.

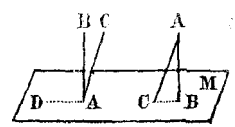
§ **150.** Если три прямыя CB, DB, EB перпендикулярны къ одной и той же прямой AB въ одной и той же точкѣ B, то онѣ находятся въ одной плоскости, которая перпендикулярна къ прямой AB.



Проведемъ чрезъ двѣ изъ этихъ линій BC и BE *плоскость* CBE. *Линія* AB будетъ перпендикулярна къ этой плоскости (§ 149). *Если положимъ*, что BD не лежитъ въ плоскости CBE, то мы можемъ чрезъ линіи BD и AB *провести плоскость* ABd, которая пересѣчетъ CBE по линіи Bd, такъ что BC, Bd и BE будутъ лежать въ одной и той же плоскости CBE. Такъ какъ AB $\perp$ CBE, то AB перпендикулярна и къ Bd, лежащей въ плоскости CBE. Въ такомъ случаѣ къ прямой AB въ одной и той же плоскости ABD чрезъ точку B были бы проведены два перпендикуляра Bd и BD. что не возможно (§ 11), слѣд. не можетъ быть также, чтобы линія BD лежала внѣ плоскости CBE.

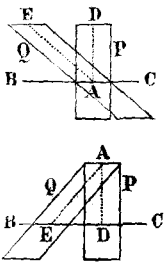
Слѣдствіе. Если прямой уголъ ABD обращается около одной изъ своихъ сторонъ AB, какъ около оси, то другая сторона BD опишетъ плоскость. перпендикулярную къ AB.

§ **151.** Изъ данной точки A, находящейся на плоскости M или внѣ ея, можно провести только одинъ перпендикуляръ AB къ плоскости M.



Положимъ, что кромѣ линіи AB еще и линія AC $\perp$ M, тогда проведя чрезъ AB и AC плоскость. которая пересѣчетъ плоскость M въ первомъ случаѣ по линіи AD, а во второмъ по BC, мы получимъ въ первомъ случаѣ $\measuredangle$ BAD = R = CAD, а въ второмъ тре—къ ABC, имѣющій два прямыхъ угла, что одинаково невозможно.

§ **152.** Чрезъ точку A, находящуюся на прямой BC или внѣ ея, можно провести только одну плоскость P, перпендикулярную къ этой прямой.



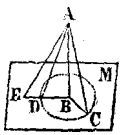
Положимъ, что кромѣ P можно провести еще плоскость $Q \perp BC$, тогда, проведя въ первомъ случаѣ чрезъ BC плоскость, которая пересѣчетъ плоскости P и Q по линіямъ AD и AE, получимъ $\measuredangle BAD = R = BAE$. Проведя же во второмъ случаѣ плоскость чрезъ точку A и линію BC, получимъ тре—къ ADE съ двумя прямыми углами. Такъ какъ оба слѣдствія невозможны, то и самое предположеніе, что $Q \perp BC$, также невозможно.

§ **153.** Если изъ точки A, лежащей внѣ плоскости M, проведемъ къ этой плоскости перпендикуляръ AB и нѣсколько наклонныхъ AC, AD, AE . . . , то

1) перпендикуляръ будетъ короче всякой наклонной;

2) наклонныя AC и AD, которыхъ основанія равно удалены отъ основанія перпендикуляра, равны между собою;

3) изъ двухъ наклонныхъ AE и AC та болѣе, которой основаніе далѣе отстоитъ отъ основанія перпендикуляра.

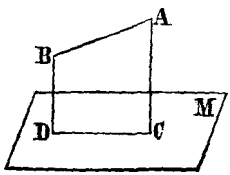


1) Всякая наклонная, напр. AC, какъ гипотенуза прямоугольнаго тре—ка, болѣе катета AB.

2) Если $BC = BD$, то $\triangle ABC \cong ABD$ (§ 17), слѣд. $AC = AD$.

3) Если $BE > BC$, и если въ тре—кѣ ABE будетъ проведена линія AD такъ, что $BD = BC$, то $AE > AD$ (§ 28, 3), слѣд. и $AE > AC$.

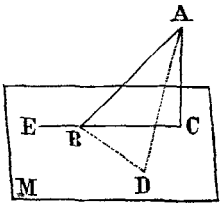
Слѣдствіе. Перпендикуляръ AB, какъ кратчайшая линія, которую можно провести изъ точки A на плоскость M, служитъ мѣрою разстоянія точки A отъ плоскости M.



§ **154.** 1) Если изъ концовъ прямой линіи AB опустимъ на какую нибудь площадь M перпендикуляры AC и BD, то прямая CD, соединяющая ихъ основанія C и D, называется проэкціею линіи AB на плоскость M. Плоскость M, въ которой лежитъ проэкція линій AB, называется плоскостью проэкцій, а плоскость ACBD, проходящая чрезъ перпендикуляры AC и BD, — проэктирующею плоскостью.

2) Когда прямая AB пересѣкаетъ плоскость M (какъ въ фигурѣ § 155), *тогда проэкція прямой AB будетъ разстояніе (BC) точки пересѣченія B отъ основанія перпендикуляра AC, опущеннаго изъ другаго конца на плоскость.* — Уголь ABC, заключающійся между линіею AB и *ея проэкціею BC, называется угломъ наклоненія линіи AB на плоскость M, или просто угломъ линіи AB съ плоскостью M.*

§ 155. Уголь ABC наклоненія линіи AB съ плоскостью M *есть самый меньшій изъ всѣхъ угловъ, которые наклонная* AB образуетъ съ прямыми, проведенными на плоскости M чрезъ ея основаніе B, напр. съ прямою BD.

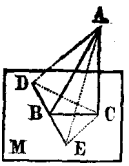


Отложимъ BD = BC и проведемъ AD. Такъ какъ AC ⊥ M, то AC < AD (§ 153. 1). слѣд. и ∠ ABC < ABD (§ 32).

Слѣдствія. 1) Уголъ ABE, смежный съ ABC, самый большой изъ всѣхъ угловъ, которые прямая AB образуетъ съ прямыми. проведенными въ плоскости M чрезъ ея основаніе B.

2) Уголъ, который наклонная AB образуетъ съ какою нибудь прямую въ плоскости M, тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе уголъ, образуемый этою прямою съ проэкціею наклонной AB. Если двѣ прямыя, *проходящія чрезъ точку B въ плоскости M, образуютъ равные углы съ проэкціею прямой AB, то онѣ образуютъ равные углы съ самою прямою AB.*

§ 156. Линія DE, проведенная въ плоскости M чрезъ основаніе наклонной AB перпендикулярно къ ея проэкціи BC, перпендикулярна и къ самой наклонной AB.

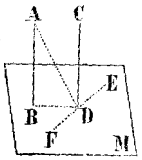


Отложимъ BD = BE и проведемъ AD, AE, CD, CE, тогда CD = CE (§ 28, 2), слѣд. AD = AE (§ 153, 2), и потому △ ABD ≅ ABE (§ 24), изъ чего слѣдуетъ, что ∠ ABD = ABE и AB ⊥ DE.

Слѣдствія. 1) *Прямая DE перпендикулярна къ плоскости, проходящей чрезъ линіи AB и BC* (§ 149).

2) Кратчайшее разстояніе линій DE и AC, не параллельныхъ и не встрѣчающихся, есть линія BC, перпендикулярная къ обѣимъ прямымъ, потому что соединивъ двѣ другія произвольныя точки A и E этихъ линіи, мы получимъ AE > AB > BC (§ 23, 1 и § 153, 3).

§ 157. Если изъ двухъ параллельныхъ линій одна (AB) перпендикулярна къ плоскости M, то и другая (CD) перпендикулярна къ этой плоскости.



Соединимъ прямою BD основанія параллельныхъ линій, проведемъ въ плоскости M прямую EF ⊥ BD, и соединимъ точки A и D. Такъ какъ AB ⊥ BD и CD ∥ AB, то и CD ⊥ BD (§ 8 слѣд.). Линія FE перпендикулярна къ плоскости ADB (§ 156, 1), слѣд. и къ линіи CD, лежащей въ этой плоскости. Такъ какъ теперь CD перпендикулярна къ BD и FE, то CD ⊥ M (§ 149).

§ 158. Если двѣ прямыя AB и CD перпендикулярны къ одной и той же плоскости M, то онѣ параллельны. (Фиг. § 157).

Положимъ что CD не параллельна AB, тогда чрезъ точку D можно провести прямую, параллельную AB, которая будетъ перпендикулярна къ M (§ 157). Такимъ образомъ мы получили бы въ точкѣ D два перпендикуляра къ плоскости M, что невозможно (§ 151).

§ 159. Двѣ линіи въ пространствѣ, параллельныя третьей, параллельны между собою.

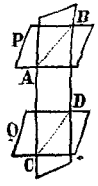
Плоскость, проведенная перпендикулярно къ третьей линіи, должна быть перпендикулярна и къ двумъ остальнымъ (§ 157), потому двѣ первыя прямыя, какъ перпендикуляры къ одной и той же плоскости, параллельны между собою (§ 158).

§ 160. Прямая AB параллельна плоскости M, если она параллельна прямой CD, лежащей въ этой плоскости.

Если бы прямая AB, лежащая въ плоскости ABCD, пересѣкла плоскость M, то это могло бы случиться только въ какой нибудь точкѣ прямой CD, общаго пересѣченія обѣихъ плоскостей; но AB ∥ CD, слѣд. прямая AB не можетъ пересѣчь плоскость M.

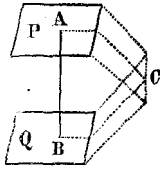
Слѣдствіе. Чрезъ какую нибудь точку внѣ плоскости можно провести безчисленное множество прямыхъ, параллельныхъ этой плоскости. Если чрезъ произвольную точку на плоскости проведутся на ней въ различныхъ направленіяхъ прямыя, а чрезъ точку внѣ плоскости параллельныя имъ, то эти послѣднія будутъ параллельны и плоскости.

§ 161. Пересѣченія AB и CD двухъ параллельныхъ плоскостей P и Q третьею плоскостью, параллельны между собою.



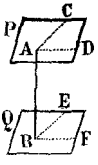
Прямыя AB и CD, лежащія въ одной и той же плоскости, не могутъ пересѣчься, потому что онѣ находятся въ то же время въ *параллельныхъ плоскостяхъ* P и Q, слѣдовательно параллельны между собою.

§ 162. Двѣ плоскости P и Q, перпендикулярныя къ одной и той же прямой AB, параллельны между собою.



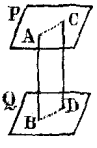
Если бы плоскости пересѣклись, то соединивъ какую нибудь точку C, лежащую на линіи пересѣченія, съ точками A и B, мы получили бы треугольникъ ABC съ двумя прямыми углами, что не возможно. слѣд. плоскости P и Q должны быть параллельны.

§ 163. Если двѣ плоскости P и Q параллельны, то прямая AB, перпендикулярная къ одной плоскости Q, перпендикулярна и къ другой P.



Проведемъ чрезъ AB двѣ произвольныя плоскости, которыя пересѣкутъ плоскость P по линіямъ AC и AD, а плоскость Q по линіямъ BE и BF. Такъ какъ AC ∥ BE, AD ∥ BF (§ 161) и ∠ ABE = R = ABF (§ 145, 2), то и ∠ BAC = R = BAD (§ 8, слѣд.), слѣдовательно AB ⊥ P (§ 149).

§ 164. Параллельныя линіи AB и CD, заключающіяся между параллельными плоскостями P и Q, равны между собою.

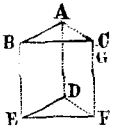


Проведемъ чрезъ AB и CD плоскость, тогда линіи пересѣченія этой плоскости съ плоскостями P и Q параллельны (§ 161), слѣдовательно ABCD параллелограмъ, и потому AB = CD.

Слѣдствія. 1) Параллельныя плоскости во всѣхъ своихъ точкахъ равно удалены другъ отъ друга, потому что прямыя AB и CD и въ такомъ случаѣ будутъ равны, когда онѣ перпендикулярны къ обѣимъ плоскостямъ.

2) Всякая прямая, проведенная между двумя параллельными плоскостями перпендикулярно къ каждой изъ нихъ, служитъ мѣрою разстоянія этихъ плоскостей другъ отъ друга.

§ 165. Если стороны двухъ угловъ ABC и DEF, лежащихъ въ разныхъ плоскостяхъ и обращенныхъ отверстіями въ одну и туже сторону, взаимно параллельны, то 1) такіе углы равны, и 2) плоскости ихъ параллельны.

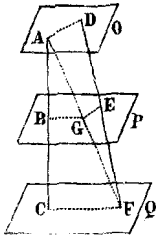


1) Отложимъ BA = ED, BC = EF, и проведемъ AC, DF, BE . . . , тогда ABED будетъ параллелограмъ (§ 34. 2) и потому AD ∥ BE. Точно также CF ∥ BE, слѣд. AD ∥ CF, т. е. ACFD параллелограмъ, откуда AC = DF. Такъ какъ △ ABC ≅ DEF (§ 24), то ∠ ABC = DEF.

2) Положимъ, что плоскости ABC и DEF не параллельны, и что чрезъ точку B проведена плоскость, которая параллельна къ плоскости DEF и пересѣчетъ прямую CF въ точкѣ G, тогда GF = BE (164); но такъ какъ CF = BE, то GF = CF, что невозможно, почему плоскости ABC и DEF должны быть параллельны.

Слѣдствіе. Если соединить концы трехъ равныхъ и параллельныхъ прямыхъ BE, AD, CF, не лежащихъ въ одной плоскости, то образуются равные тре—ки, которыхъ плоскости параллельны. Такъ какъ BE ∥ AD ∥ CF, то AB = DE, AC = DF, BC = EF, слѣд. △ ABC ≅ DEF и по прежнему доказательству плоскости этихъ тре—ковъ параллельны.

§ 166. Двѣ прямыя въ пространствѣ AC и DF дѣлятся параллельными плоскостями O, P, Q на пропорціональныя части.



Соединимъ точки A и F прямою AF, которая пересѣчетъ плоскость P въ точкѣ G, и проведемъ чрезъ точки A, D, F, и чрезъ точки A, C, F плоскости, которыя пересѣкутся съ плоскостями O, P, Q по линіямъ AD, GE и CF, BG. Такъ какъ AD ∥ GE, CF ∥ BG (§ 161), то получаемъ (§ 88)

AB : BC = (AG : GF =) DE : EF.

§ 167. 1) Неопредѣленное пространство, содержащееся между двумя пересѣкающимися плоскостями, называется двуграннымъ угломъ; самыя плоскости сторонами, а линія пересѣченія сторонъ — ребромъ двуграннаго угла.

2) Два двугранные угла равны, если ихъ можно такъ наложить другъ на друга, что ихъ ребра и стороны совпадутъ.

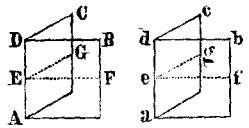
Если одна плоскость пересѣкаетъ другую такъ, что по обѣимъ сторонамъ образуетъ съ ней равные двугранные угла, то эти углы называются прямыми, а каждая изъ плоскостей перпендикулярною къ другой.

3) Если изъ какой нибудь точки ребра двуграннаго угла въ плоскостяхъ сторонъ возставимъ перпендикуляры къ ребру, то образованный ими уголъ называется линейнымъ угломъ двуграннаго, или угломъ наклоненія плоскостей сторонъ.

Плоскость линейнаго угла перпендикулярна къ ребру двуграннаго угла (149).

Въ какой бы точки ребра мы ни образовали линейные углы, всѣ они равны между собою (§ 165).

§ 168. Два двугранные угла BADC и badc относятся какъ ихъ линейные углы FEG и feg.



Если двугранные углы равны, то и ихъ линейные углы также равны. Наложимъ одинъ двугранный уголъ на другой такъ, чтобы они совпали другъ съ другомъ, и точка e упала въ точку E, тогда линіи ef и EF, eg и EG должны такъ же совмѣститься, потому что углы fea и FEA, gea и GEA какъ прямые равны между собою.

Если же двугранные углы не равны, но соизмѣримы, такъ что ихъ общую мѣру, которая также двугранный уголъ, можно отложить въ BADC m разъ, и въ badc n разъ, то будемъ имѣть

$$BADC : badc = m : n.$$

При отложеніи общей мѣры въ двугранныхъ углахъ линейный уголъ FEG раздѣлится на m, а уголъ feg на n равныхъ частей, потому что равнымъ двуграннымъ угламъ соотвѣтствуютъ и равные линейные углы, слѣд. будетъ

$$FEG : feg = m : n.$$

Изъ обѣихъ этихъ пропорцій слѣдуетъ что

$$BADC : badc = FEG : feg.$$

Если углы BADC и badc несоизмѣримы, то разсуждая подобно какъ въ § 53 можно доказать, что отношеніе двугранныхъ угловъ не можетъ быть ни болѣе, ни менѣе отношенія линейныхъ угловъ FEG и feg, и слѣд. будетъ равно ему.

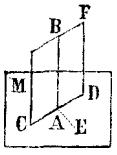
§ 169. Слѣдствія. 1) Двугранный уголъ измѣряется соотвѣтствующимъ ему линейнымъ угломъ. Если мы примемъ прямой двугранный уголъ за единицу мѣры двугранныхъ угловъ вообще,

то числовая величина всякаго двуграннаго угла будетъ равна числовой величинѣ его линейнаго угла, т. е. всякій изъ нихъ, измѣрянный своею единицею, даетъ одно и тоже число.

2) Такъ какъ измѣреніе двуграннаго угла приводится къ измѣренію соотвѣтствующаго ему линейнаго, то и дуга круга, заключающаяся между сторонами линейнаго угла, можетъ также служить мѣрою соотвѣтствующаго ему двуграннаго угла.

3) Двугранные углы бываютъ острые, прямые, тупые, дополнительные, смежные, вертикальные и. т. д., смотря по тому, какое изъ этихъ названій соотвѣтствуетъ ихъ линейнымъ угламъ. Точно также: двугранные вертикальные углы равны; сумма двухъ смежныхъ двугранныхъ угловъ равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ и. т. д.

§ **170.** Если прямая AB перпендикулярна къ плоскости M, то и всякая плоскось CF, проведенная чрезъ эту прямую, также перпендикулярна къ плоскости M.



Проведемъ на плоскости M прямую AE перпендикулярно къ линіи CD пересѣченія обѣихъ плоскостей, тогда прямая AB, какъ перпендикуляръ къ плоскости M, будетъ перпендикулярна и къ каждой изъ прямыхъ CD и AE. BAE, уголъ наклоненія обѣихъ плоскостей прямой, слѣдовательно плоскость CF $\perp$ M.

§ **171.** Слѣдствія. 1) Если три прямыя AB, AC, AE, пересѣкающіяся въ одной точкѣ A, взаимно перпендикулярны, то всякая изъ нихъ перпендикулярна къ плоскости, проходящей чрезъ двѣ остальныя, и плоскости M, CF и BAE взаимно перпендикулярны.

2) Плоскость угла наклоненія двухъ плоскостей перпендикулярна къ каждой изъ нихъ.

3) Проэктирующая плоскость какой либо прямой перпендикулярна къ плоскости проэкцій.

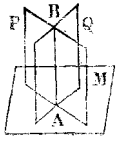
§ **172.** Если двѣ плоскости M и CF взаимно перпендикулярны, то прямая AB, проведенная въ одной плоскости CF перпендикулярно къ линіи пересѣченія CD, будетъ перпендикулярна и къ другой плоскости M. (Фиг. § 170).

Если проведемъ въ плоскости M прямую AE $\perp$ CD, то $\angle$ BAE = R, потому что CF $\perp$ M, а такъ какъ и $\angle$ BAC = R, то AB $\perp$ M (§ 149).

§ **173.** Если двѣ плоскости M и CF взаимно перпендикулярны, и изъ какой нибудь точки ихъ пересѣченія будетъ проведенъ перпендикуляръ AB къ одной изъ этихъ плоскостей напр. M, то этотъ перпендикуляръ долженъ лежать въ другой плоскости CF. (Фиг. § 170).

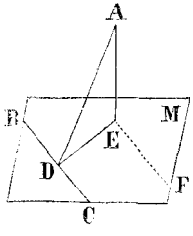
Предположимъ, что AB не лежитъ въ CF, тогда въ этой плоскости изъ точки A можно было бы провести перпендикулярную къ общему сѣченію CD прямую, которая въ тоже время перпендикулярна къ плоскости M (§ 172); слѣдовательно въ точкѣ A мы имѣли бы два перпендикуляра къ плоскости M, что невозможно (§ 151).

§ **174.** Если двѣ плоскости P и Q перпендикулярны къ третьей M, то и линія AB пересѣченія двухъ первыхъ плоскостей перпендикулярна къ третьей плоскости.



Если возставимъ изъ точки A перпендикуляръ къ плоскости M, то онъ долженъ находиться въ плоскости P и въ плоскости Q (§ 173), слѣдовательно этотъ перпендикуляръ будетъ общимъ пересѣченіемъ AB плоскостей P и Q.

§ **175.** Задачи.



1) Опустить перпендикуляръ на плоскость M изъ точки A, лежащей внѣ плоскости.

2) Изъ данной точки, лежащей на плоскости M, возставить перпендикуляръ къ этой послѣдней.

3) Чрезъ точку P, лежащую 1) на прямой AB, 2) внѣ прямой AB, провести плоскость, перпендикулярную къ этой прямой.

4) Провести плоскость, параллельную данной плоскости M и проходящую чрезъ точку A.

5) Провести плоскость, которая бы проходила чрезъ точку A, и отстояла на одно и тоже разстояніе отъ трехъ данныхъ точекъ O, M, N.

6) На данной плоскости M найти точку, равно удаленную отъ данныхъ точекъ O, P, Q, лежащихъ внѣ этой плоскости.

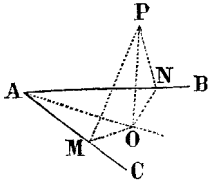
7) На плоскости даны три точки A, B, C, не лежащія на одной прямой: найти внѣ плоскости точку, равно отстоящую отъ данныхъ.

8) Провести чрезъ данную прямую AD плоскость, которая бы была перпендикулярна къ данной плоскости M, 1) если AD лежитъ въ плоскости M (фиг. § 170), 2) если AD пересѣкаетъ плоскость M (фиг. § 157).

9) Чрезъ данную точку P провести плоскость, параллельную данной прямой AB, и перпендикулярную данной плоскости M.

10) Провести плоскость, которая бы была равно удалена отъ данныхъ точекъ A, B, C, D, не лежащихъ въ одной и тойже плоскости.

11) Дана плоскость M и двѣ точки A и B внѣ ея. Провести на плоскости M прямую, которой разстоянія отъ A и B равнялись бы линіямъ a и b.



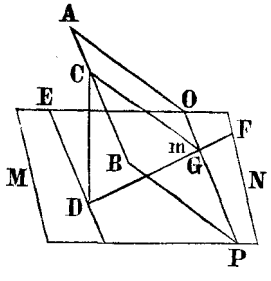
12) Даны двѣ прямыя AB и AC, которыя пересѣкаются въ точкѣ A. Провести плоскость такъ, чтобы каждая точка этой плоскости, напр. точка P, была равно удалена отъ прямыхъ AB и AC.

13) Провести плоскость, равно отстоящую отъ трехъ данныхъ не лежащихъ въ одной и тойже плоскости, параллельныхъ A, B, C.

14) Провести плоскость, перпендикулярную къ двумъ пересѣкающимся плоскостямъ M и N такъ, чтобы она прошла чрезъ точку P, лежащую внѣ этихъ плоскостей.

15) Чрезъ точку P провести прямую параллельно пересѣкающимся плоскостямъ M и N.

16) Внутри двуграннаго угла провести прямую, которой разстоянія отъ его сторонъ равнялись бы линіямъ m и n.



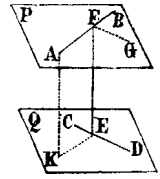
17) Провести плоскость, которая бы проходила чрезъ прямую OP, лежащую на плоскости MN, и составляла съ этою плоскостью уголъ, равный m.

18) Чрезъ прямую AB, параллельную данной плоскости MN, провести плоскость, каторая бы составила съ данной плоскостью уголъ m.

19) Даны двѣ линіи AB и DF, не пересѣкающіяся и не параллельныя; чрезъ одну изъ нихъ (DF) провести плоскость, параллельную другой AB.

20) Чрезъ данную точку P провести прямую, которая бы пересѣкла двѣ не пересѣкающіяся и не параллельныя прямыя M и N.

21) Чрезъ данную точку P провести плоскость, которая бы была параллельна двумъ линіямъ M и N, не пересѣкающимся и не параллельнымъ.



22) Чрезъ двѣ линіи AB и CD, не пересѣкающіяся не параллельныя, провести двѣ параллельныя плоскости.

23) Найти кратчайшее разстояніе двухъ линіи AB и CD, не пересѣкающихся и не параллельныхъ, т. е. провести прямую, перпендикулярную къ линіямъ AB и CD (§ 156, 2).

24) Чрезъ точку P, лежащую внѣ плоскости M, провести къ этой послѣдней наклонную, которая бы была параллельна данной плоскости N, равнялась данной прямой Q.

25) Даны точка P, плоскость M и параллельная ей прямая AB. Чрезъ точку P провести прямую, которая бы пересѣкла линію AB и плоскость M такъ, чтобы отрѣзокъ ея, заключающійся между линіею AB и плоскостью M, равнялся прямой a.

26) Между двумя линіями AB и CD, не лежащими въ одной плоскости, провести прямую, параллельную линіи EF, которая не лежитъ ни съ одною изъ данныхъ линій въ одной плоскости.

27) Чрезъ данную прямую AB провести плоскость, которой разстояніе отъ данной точки P равнялось бы прямой a.

28) Чрезъ данную точку P провести плоскость, которой разстояніе отъ данной прямой AB равнялось бы прямой a.

29) Дана плоскость M, прямая AB и точка P. Чрезъ точку P провести прямую, которая бы была параллельна плоскости M и отстояла отъ прямой AB на разстояніе a.

30) Чрезъ точку P провести прямую, которой разстоянія отъ двухъ данныхъ прямыхъ AB и CD, не лежащихъ въ одной плоскости, равнялись бы линіямъ a и b.

31) Даны двѣ не лежащія въ одной плоскости прямыя AB и CD. На одной изъ нихъ опредѣлить точку, которая 1) отстояла бы отъ другой прямой на разстояніе a, 2) была бы равно удалена отъ другой прямой и отъ точки P, лежащей внѣ обѣихъ прямыхъ.

32) Дана плоскость M, прамая AB и точка P. На прямой найти точку, равно удаленную отъ точки P и плоскости M.

33) Провести плоскость такъ, чтобы она имѣла отъ данныхъ точекъ A, B, C, не лежащихъ на одной прямой, разстоянія a, b, c.

II. О многогранныхъ углахъ.

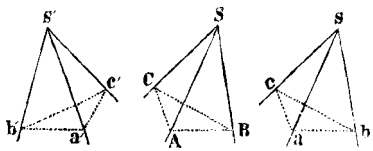
§ 176. 1) Если нѣсколько плоскостей пересѣкаются въ одной и тойже точкѣ, то неопредѣленное пространство, заключающееся между этими плоскостями, называется многограннымъ или тѣлеснымъ угломъ, а точка общаго пересѣченія плоскостей — вершиною многограннаго угла.

Плоскости, составляющія многогранный уголъ, называются его сторонами или гранями, а прямыя линіи, по которымъ пересѣкаются стороны, — ребрами угла. Линейные углы, составляемые ребрами, называются плоскими углами. Каждыя двѣ послѣдовательныя грани образуютъ двугранный уголъ.

По числу граней или плоскихъ угловъ, которое всегда равно числу реберъ, тѣлесные углы бываютъ 3, 4, 5 . . . гранные. Подъ именемъ частей тѣлеснаго угла подразумѣваются его плоскіе и двугранные углы, напр. трегранный уголъ имѣетъ шесть частей, три плоскихъ угла и три двугранныхъ.

2) Два тѣлесные углы равны, когда при наложеніи другъ на друга они совпадаютъ всѣми своими частями.

Въ равныхъ тѣлесныхъ углахъ всѣ плоскіе и двугранные углы одного порознь равны тѣмъ же частямъ другаго, но обратно изъ равенства частей двухъ тѣлесныхъ угловъ слѣдуетъ равенство самыхъ угловъ только въ такомъ случаѣ, когда соотвѣтственно равныя части въ обоихъ углахъ одинаково расположены. Если же равныя части расположены въ обратномъ порядкѣ, напр. въ одномъ углѣ такой порядокъ слѣва на право, какой въ другомъ справа на лѣво, то такіе тѣлесные углы при наложеніи совмѣститься не могутъ и называются симметрическими.



Если въ трегранныхъ углахъ S, s, s' будетъ

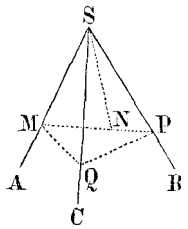
$\measuredangle ASB = asb = a's'b'$

$\measuredangle ASC = asc = a's'c'$

$\measuredangle BSC = bsc = b's'c'$,

и если кромѣ того соотвѣтствующіе двугранные углы равны, тогда трегранный уголъ S можетъ быть приведенъ въ совпаденіе съ угломъ s, но не можетъ совпадать съ угломъ s'. Углы S и s равны между собою, но S и s' симметричны. Два тѣлесные угла, симметричные третьему, равны между собою.

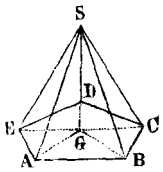
§ **177.** Во всякомъ трегранномъ углѣ SABC сумма двухъ плоскихъ угловъ болѣе третьяго.



Если всѣ плоскіе углы равны, то предложеніе само собою; если же они не равны, то слѣдуетъ только доказать, что наибольшій уголъ менѣе двухъ остальныхъ. Пусть ASB наибольшій плоскихъ угловъ. Соединимъ двѣ произвольныя точки на сторонахъ этого угла прямою MP и отложимъ его плоскости уголъ MSN = ASC, а на ребрѣ SC SQ = SN. Проведемъ прямыя MQ и PQ, тогда MSN ≅ MSQ (§ 17), слѣд. MN = MQ. Такъ какъ MQ + PQ > PM, то PQ > PN. Въ тре—кахъ PSQ и PSN сторона PS общая, а SQ = SN, ∡ PSQ > PSN (§ 32), и такъ

PSQ + MSQ > PSN + MSN или
BSC + ASC > ASB.

§ **178.** Во всякомъ многогранномъ углѣ сумма плоскихъ угловъ всегда менѣе четырехъ прямыхъ.



Пересѣчемъ стороны угла S произвольною плоскостію ABCDE, и изъ какой нибудь точки G произвольнаго мно—ка проведемъ къ вершинамъ его угловъ прямыя; тогда около g убразуется столько же тре—ковъ AGB, BGC . . . , сколько ихъ находится около вершины S многограннаго угла, слѣд. и сумма угловъ какъ тѣхъ, такъ и другихъ тре—ковъ будетъ одна и таже. Но по § 177

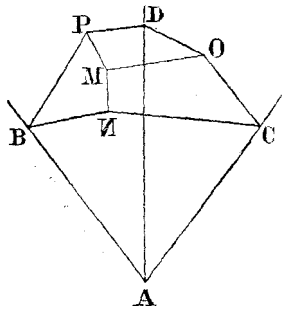
∡ ABC < SBA + SBC,
∡ BCD < SCB + SCD и т. д.,

посему сумма угловъ мно—ка ABCDE менѣе суммы угловъ при основаніяхъ тре—ковъ ASB, BSC . . ., слѣд. сумма угловъ ASB, BSC . . . при вершинѣ S должна быть менѣе суммы угловъ около точки G, т. е. менѣе четырехъ прямыхъ.

Примѣчаніе. Если одинъ или нѣсколько угловъ мно—ка ABCDE входящіе, т. е. такіе, которыхъ отверстія обращены къ внѣшней сторонѣ мно—ка, то сумма плоскихъ угловъ при вершинѣ S можетъ быть равна или болѣе четырехъ прямыхъ.

§ **179.** Если изъ произвольной точки M внутри трегранного угла ABCD проведутся плоскости перпендикулярно къ

его ребрамъ, то эти плоскости образуютъ другой трегранный уголъ MNOP, котораго плоскіе углы дополняютъ соотвѣтствующіе двугранные углы, а двугранные соотвѣтствующіе плоскіе углы перваго трегранного угла до двухъ прямыхъ.



Пусть ребра трегранного угла A пересѣчены плоскостями въ точкахъ B, C, D. По самому построенію уголъ NBP есть линейный двугранного угла при ребрѣ AB, слѣд. $\angle ABN = R$ и равнымъ образомъ $\angle ACN = R$. Плоскости BM и CM перпендикулярны къ плоскости BAC, проходящей чрезъ перпендикуляры AB и AC къ плоскостямъ BM и CM (§ 170): слѣд. прямая $MN \perp BAC$ (§ 174), а потому $\angle MNB = R = MNC$, такъ что BNC есть линейный уголъ двугранного при ребрѣ MN. Точно также можно доказать, что $\angle MPB = R = MPD$. Такъ какъ въ четыреугольникѣ MNBP сумма всѣхъ угловъ равна 4R, и углы N и P прямые, то

$$\angle NBP + NMP = 2R.$$

Въ четыреугольникѣ BACN по той же причинѣ

$$\angle BAC + BNC = 2R.$$

Такимъ же образомъ можно доказать, что

$$\angle NCO + NMO = 2R. \text{ и т. д.}$$

Слѣдствіе. Чѣмъ тупѣе одинъ изъ обоихъ трегранныхъ угловъ, тѣмъ болѣе заостренъ другой и обратно.

Ребра каждаго изъ этихъ угловъ перпендикулярны къ сторонамъ другаго.

Каждый изъ трегранныхъ угловъ A и M называется полярнымъ угломъ другаго.

§ 180. Во всякомъ трегранномъ углѣ сумма трехъ двугранныхъ угловъ болѣе 2 прямыхъ и мѣнѣе 6 прямыхъ.

Обозначимъ чрезъ A, B, C двугранные углы даннаго трегранного угла, и чрезъ M, N, P соотвѣтствующіе плоскіе углы его полярнаго угла, тогда (§ 179)

$$A + M = 2R$$
$$B + N = 2R$$
$$C + P = 2R, \text{ слѣд.}$$
$$(A + B + C) + (M + N + P) = 6R.$$

Такъ какъ $M + N + P < 4R$ (§ 178), то

$$A + B + C > 2R \text{ и}$$
$$A + B + B < 6R.$$

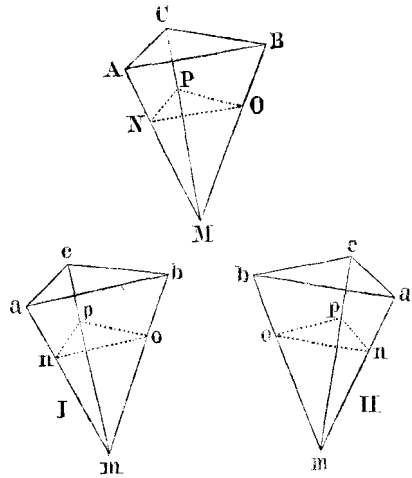
§ 181. Два трегранные угла равны между собою или симметричны, если въ нихъ соотвѣтственно равны:

1) три плоскіе угла, или

2) три двугранные угла, или

3) два плоскіе угла и лежащій между ними двугранный уголъ, или

4) два двугранные угла и лежащій между ними плоскій уголъ.



Докажемъ, что всѣ части трегранныхъ угловъ M, m (I) и m (II) удовлетворяющихъ одному изъ 4хъ приведенныхъ условій соотвѣтственно равны, при чемъ углы M и m (I), въ которихъ соотвѣтственно равныя части одинаково расположены, равны между собою, а углы M и m (II) симметричны, потому что въ нихъ соотвѣтственно равныя части расположены въ обратномъ порядкѣ. Представимъ себѣ что во всѣхъ трегранныхъ углахъ грани MBC и mbc лежатъ въ плоскости бумаги, а ребра MA и ma выдаются передъ бумагою. — Доказательство равенства частей въ равныхъ и симметричныхъ трегранныхъ углахъ одно и тоже. Соотвѣтствующіе двугранные углы тѣлесныхъ угловъ будемъ называть чрезъ A, B, C и a, b, c.

1) Пусть $\angle AMB = amb$, $\angle AMC = amc$, $\angle BMC = bmc$. Отложимъ на двухъ соотвѣтствующихъ ребрахъ равные отрѣзки MN и mn, и изъ точекъ N и n проведемъ плоскости PNO и pno, перпендикулярныя къ ребрамъ AM и am. Тогда легко выводится, что

$$\triangle MNO \cong mno, \quad \angle MNP \cong mnp,$$
$$\triangle MOP \cong mop, \quad \triangle NOP \cong nop,$$

слѣд. $\angle ONP = onp$, т. е. $\angle A = a$. Такимъ же построеніемъ на другихъ ребрахъ можно доказать, что $\angle B = b$ и $\angle C = c$. Изъ этого слѣдуетъ равенство угловъ M и m (I), и симметричность угловъ M и m (II).

2) Пусть $A = a$, $B = b$, $C = c$. Если построимъ полярные углы, соотвѣтствующіе даннымъ трегранным M и m, то въ нихъ плоскіе углы равны, потому что дополняютъ равные углы до 2R. (§ 179), слѣд. по предыдущему и соотвѣтствующіе двугранные углы также равны. Отсюда слѣдуетъ обратно равенство соотвѣтствующихъ пло-

скихъ угловъ данныхъ трегранныхъ M и m, потому M и m (I) равны, а M и m (II) симметричны.

3) Пусть $\measuredangle AMB = amb$, $\measuredangle AMC = amc$, $A = a$. Если при ребрахъ MA и ma сдѣлаемъ тоже построеніе какъ въ первомъ случаѣ, тогда по нашему условію $\measuredangle ONP = onp$. Такъ какъ

$$\triangle MNO \cong mno, \ \triangle MNP \cong mnp,$$
$$\triangle NOP \cong nop, \ \triangle MOP \cong mop,$$

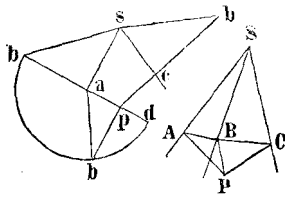
то $\measuredangle BMC = bmc$, слѣд. по первому случаю и $B = b$, $C = c$.

4) Пусть $A = a$, $B = b$, $\measuredangle AMB = amb$. Въ полярныхъ углахъ соотвѣтствующихъ угламъ M и m два плоскіе и лежащій между ними двугранный уголъ будутъ равны, слѣд. по третьему случаю и остальныя части полярныхъ угловъ также равны, изъ чего слѣдуетъ, что въ данныхъ углахъ M и m $C = c$, $\measuredangle AMC = amc$, $\measuredangle BMC = bmc$.

Слѣдствіе. Трегранный уголъ вполнѣ опредѣляется, если даны величина и расположеніе трехъ его частей, соотвѣтственно одному изъ разсмотрѣнныхъ случаевъ.

§ 182. Задачи.

1) Внутри даннаго трегранного угла найти точку, которой разстоянія отъ его граней равнялись бы прямымъ a, b, c.



2) По даннымъ тремъ плоскимъ угламъ трегранного угла SABC найти съ помощіею построенія на плоскости одинъ изъ его двугранныхъ угловъ, напр. уголъ, лежащій при ребрѣ AS.

3) Въ трегранномъ углѣ SABC даны два плоскихъ угла ASB и ASC, и заключающійся между ними двугранный уголъ BAP. Найти построеніемъ на плоскости третій плоскій уголъ.

4) Въ трегранномъ углѣ даны два его двугранные угла A и B, и заключающійся между ними плоскій уголъ M. Найти два остальные плоскіе угла и третій двугранный уголъ.

5) По тремъ двуграннымъ угламъ A, B, C трегранного угла найти его плоскіе углы.

6) Построить трегранный уголъ по тремъ даннымъ плоскимъ угламъ ASB, ASC, CSD.

7) Построить трегранный уголъ по двумъ даннымъ его плоскимъ угламъ и заключающемуся между ними двугранному углу.

8) Построить трегранный уголъ, равный данному углу SABC.

9) При данной прямой въ данной точкѣ построить трегранный уголъ, равный данному.

III. О Многогранникахъ.

§ 183. 1) Часть пространства, ограниченная со всѣхъ сторонъ кривыми поверхностями или плоскостями, называется тѣломъ, а граница или предѣлъ тѣла — его поверхностью. Если мы измѣряемъ тѣло съ помощію соотвѣтствующей единицы, то получимъ его объемъ. Два тѣла, независимо отъ ихъ формы, называются равновеликими или равномѣрными, если они имѣютъ равные объемы. Равными же тѣла называются тогда, когда можно ихъ представить такъ наложенными другъ на друга, что они совпадутъ взаимно всѣми своими частями.

2) Если поверхность тѣла состоитъ изъ плоскостей, то такое тѣло называется многогранникомъ. Многоугольники, ограничивающіе многогранникъ, называются его сторонами; прямыя, по которымъ пересѣкаются стороны, — ребрами, точки пересѣченія реберъ — вершинами, а углы, образованные двумя послѣдовательными ребрами — плоскими углами. При каждомъ ребрѣ есть двугранный уголъ, а при каждой вершинѣ — многогранный или по крайней мѣрѣ трегранный уголъ.

Изъ многогранниковъ мы будемъ разсматривать только выпуклые т. е. такіе, въ которыхъ каждый двугранный уголъ менѣе 2R, такъ что каждая сторона многогранника при своемъ продолженіи не встрѣтитъ поверхности многогранника.

3) Всякая прямая, соединяющая двѣ вершины многогранника и не лежащая въ плоскости какой—либо его стороны, называется діагональю многогранника. Плоскость, разсѣкающая многогранникъ и проходящая чрезъ ребро и вершину или чрезъ два ребра, называется діагональною плоскостью.

4) Многогранники называются подобными, если они ограничены подобными и одинаково расположенными сторонами, пересѣкающимися подъ соотвѣтственно равными двугранными углами.

5) Изъ опредѣленія равенства тѣлъ видно, что въ равныхъ многогранникахъ всѣ части (стороны, ребра, плоскіе и двугранные углы) одного должны быть равны соотвѣтствующимъ частямъ другаго, и что равныя

части совершенно одинаково расположены, если мы помѣстимъ оба многогранника какими либо двумя соотвѣтственными сторонами по одну и туже сторону какой либо плоскости.

Но обратно изъ равенства всѣхъ частей не слѣдуетъ всегда равенство самыхъ многогранниковъ. Если соотвѣтственно равныя части расположены въ обратномъ порядкѣ, то многогранники будутъ симметричны и при наложеніи другъ на друга не совпадутъ всѣми своими частями.

Два многогранника, симметричные третьему, равны между собою. — Изображеніе многогранника въ плоскомъ зеркалѣ симметрично ему самому.

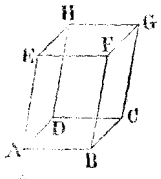
§ 184. Многогранникъ, въ которомъ двѣ противоположныя стороны равные и параллельные многоугольники, а всѣ прочія стороны параллелограмы, называется призмою. Эти два противоположныхъ многоугольника служатъ основаніями призмы. Совокупность площадей всѣхъ параллелограмовъ составляетъ боковую поверхность призмы. Призмы бываютъ трехсторонними, четырехсторонними...., смотря по числу сторонъ многоугольниковъ, служащихъ основаніями.

Высота призмы есть разстояніе между ея основаніями, т. е. перпендикуляръ, опущенный изъ произвольной точки верхняго основанія на нижнее. Прямыя, по которымъ пересѣкаются плоскости, образующія боковую поверхность, называются боковыми ребрами. — Если боковыя ребра перпендикулярны къ основанію, тогда призма называется прямою, и каждое ребро равно высотѣ призмы; во всякомъ же другомъ положеніи реберъ призма называется косою, или наклонною, и ея высота менѣе боковаго ребра.

Всякое сѣченіе призмы плоскостью, параллельною основанію, образуетъ фигуру, равную основанію, потому что въ полученномъ такимъ образомъ мно—кѣ и въ основаніи какъ стороны такъ и углы соотвѣтственно равны (§ 161, § 33, § 165).

Каждой вершинѣ призмы прилежатъ три плоскіе угла. Всякая n—сторонная призма имѣетъ $n+2$ ограничивающихъ ее плоскостей, $2n$ вершины и $3n$ реберъ.

§ 185. 1) Если основаніе призмы будетъ параллелограмъ, то такую призму называютъ параллелепипедомъ, слѣд. параллелепипедъ ограничивается шестью параллелограмами.



Въ параллелепипедѣ каждые два противолежащіе параллелограма, напр. AF и DG равны другъ другу и лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ, потому что стороны этихъ параллелограмовъ соотвѣтственно равны и параллельны ($AB \parallel DC$, $AE \parallel DH$...), слѣд. и углы

параллелограмовъ равны (§ 165, 1) а потому AF ≅ DG и AF ∥ DG § 165, 2).

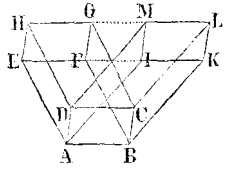
Всякія двѣ *противолежащія* стороны параллелепипеда можно разсматривать какъ основанія. Разстояніе сторонъ, принятыхъ за основанія, будетъ высота параллелепипеда.

Параллелепипедъ, въ которомъ боковыя стороны перпендикулярны къ основанію, называется прямымъ, въ противномъ же случаѣ — косымъ. Очевидно, что въ прямомъ параллелепипедѣ *всѣ боковыя стороны прямоугольники*; если сверхъ того и основанія прямоугольники, то параллелепипедъ называется прямоугольнымъ. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ каждыя двѣ пересѣкающіяся стороны образуютъ прямые двугранные углы.

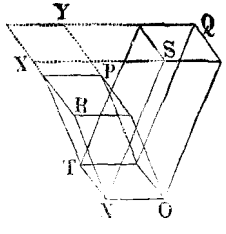
2) Кубомъ называется прямоугольный параллелепипедъ, ограниченный со всѣхъ сторонъ квадратами.

§ 186. Два параллелепипеда, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, равновелики.

Дадимъ параллелепипедамъ такое положеніе, что ихъ нижнія основанія совмѣстятся, а верхнія будутъ лежать въ одной и тойже плоскости. При этомъ могутъ быть два случая, а именно будутъ кромѣ того двѣ *боковыя стороны лежать* въ одной плоскости или нѣтъ.

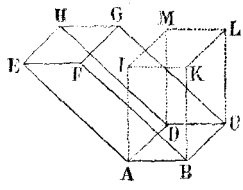


1) Параллелепипеды AH и AL, имѣющіе общее основаніе ABCD, ограничены съ двухъ боковъ параллельными плоскостями ABKE и DCLH, отчего ихъ верхнія основанія лежатъ между параллельными прямыми EK и HL. — Двѣ трехсторонніе призмы AEIDHM и BFKCGL равны, такъ какъ легко доказать, что всѣ ихъ части соотвѣтственно равны и совершенно одинаково расположены. Если мы отнимемъ отъ всего тѣла ABHL первую призму, то получимъ параллелепипедъ AL, а если отнимемъ вторую, то получимъ параллелепипедъ BH, изъ чего слѣдуетъ, что эти параллелепипеды равны между собою.

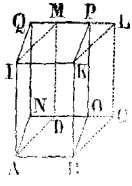


2) Параллелепипеды NP и NQ имѣютъ общее нижнее основаніе TO, а верхнія основанія лежатъ въ одной плоскости, но не между параллельными прямыми. Продолжимъ плоскости OS, TQ, TR, OE, чтобы образовать новый параллелепипедонъ NG, который будетъ *имѣть основаніями* TO и XY. Такъ какъ по предъидущему каждый изъ данныхъ параллелепипедовъ равенъ этому новому, то они должны быть равны и между собою.

§ 187. Всякій параллелепипедъ ABCDEFH можетъ быть обращенъ въ прямоугольный, имѣющій съ нимъ равновеликое основаніе и равную высоту.

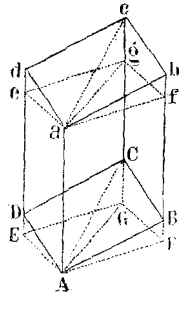


Проведемъ чрезъ ребра AB, BC, CD, AD плоскости, перпендикулярныя къ нижнему основанію ABCD, и продолжимъ до пересѣченія съ ними плоскость верхняго основанія, тогда полученный такимъ образомъ параллелепипедъ ABML будетъ имѣть съ даннымъ одно и тоже основаніе и равную высоту, а потому будетъ равновеликъ данному (§ 186). Если теперь AC прямоугольникъ, то прямоугольный параллелепипедъ ABML и будетъ требуемый.



Если же AC не прямоугольникъ, то стоитъ только чрезъ ребра AI и BK провести плоскости, перпендикулярныя къ сторонѣ ABKI, и продолжать сторону CLMD, тогда образуется прямоугольный параллелепипедъ ABPQ, который равновеликъ съ ABML (§ 186, 1), потому что за основаніе обоихъ параллелепипедовъ можно принять ихъ общую сторону ABIK. Кромѣ того, такъ какъ въ этихъ параллелепипедахъ основанія равновелики, ABON = ABCD (§ 79, слѣд.), и высоты равны, то изъ этого слѣдуетъ, что параллелепипеды ABGH и ABPQ имѣютъ равновеликіе основанія, равныя высоты и объемы.

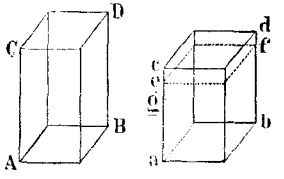
§ 188. Всякій параллелепипедъ ABCDabcd раздѣлится діагональною плоскостью на двѣ равновеликія трехстороннія призмы ABCabc и ADCadc.



Проведемъ чрезъ оконечности ребра Aa перпендикулярныя къ нему плоскости, тогда параллелепипедъ AFGEafge, образованный пересѣченіемъ этихъ плоскостей съ боковыми сторонами даннаго параллелепипеда будетъ прямой и раздѣляется діагональною плоскостью на двѣ равныя призмы AFGafg и AEGaeg, потому что ихъ части равны и одинаково расположены. Такъ какъ по той же самой причины многогранныя тѣла ABCGF и abcgf, ACDEG и acdeg попарно равны, то половины прямаго параллелепипеда равновелики по одиначкѣ косымъ призмамъ ABCabc и ADCadc, слѣд. и эти послѣднія также равновелики другъ другу.

Слѣдствіе. Трехстороннія призмы, на которыя раздѣляется косой параллелепипедъ діагональною плоскостью, симметричны другъ другу.

§ 189. Прямоугольные параллелепипеды AD и ad, имѣющіе равныя основанія, относятся какъ ихъ высоты.



Если высоты AC и ac соизмѣримы и ихъ общая мѣра заключается m разъ въ AC, и n разъ въ ac, тогда

$$AC : ac = m : n.$$

Представимъ себѣ, что по всей длинѣ сторонъ AC и ac отложена общая мѣра и чрезъ полученныя такимъ образомъ точки дѣленія проведены плоскости, параллельныя основаніямъ параллелепипедовъ, тогда AD раздѣлится на m, и ad на n равныхъ параллелепипедовъ (§ 186), такъ что

$$AD : ad = m : n.$$

Изъ обѣихъ пропорцій получимъ

$$AD : ad = AC : ac.$$

Эта пропорція должна существовать и въ такомъ случаѣ, когда высоты AC и ac несоизмѣримы. Положимъ что эта пропорція не вѣрна, а существуетъ другая

$$AD : ad = AC : ag,$$

гдѣ $ag < ac$. Раздѣлимъ сторону AC на токое число равныхъ частей, чтобы каждая изъ нихъ была $< gc$. Если будемъ откладывать эти части на линіи ac, начиная отъ точки a, то одно изъ дѣленій должно упасть гдѣ нибудь въ точкѣ e между g и c. Проведемъ чрезъ точку e плоскость, параллельную плоскости ab, тогда параллелепипеды AD a af, имѣющіе соизмѣримыя высоты, будутъ относиться

$$AD : af = AC : ac.$$

Изъ обѣихъ пропорцій получимъ

$$ad : af = ag : ae,$$

что невозможно, потому что $ad > af$, а $ag < ae$. Точно также можно доказать, что четвертый членъ пропорціи $AD : ad = AC : ac$ не можетъ быть болше линіи ac, а потому эта пропорція всегда должна быть справедлива.

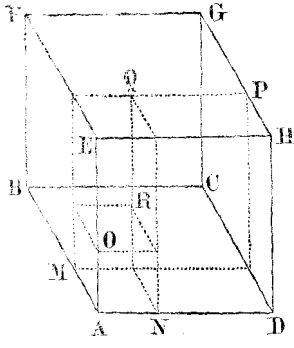
§ 190. Измѣрить какое нибудь тѣло значитъ опредѣлить, сколько разъ заключается въ немъ другое тѣло, принятое за единицу мѣры. Какъ для измѣренія площадей пользуются квадратомъ, построеннымъ на единицѣ длины, точно также для измѣренія объема или кубическаго содержанія тѣла употребляютъ за единицу кубъ, котораго ребро

есть какая нибудь единица длины. Кубъ, котораго ребро футъ, дюймъ и т. д., называется кубическимъ футомъ, дюймомъ и т. д.

Для опредѣленія объема тѣла нѣтъ надобность, измѣрять его непосредственно кубическою единицею, но достаточно измѣрять линейною единицею нѣкоторыя линіи, отъ которыхъ зависитъ величина тѣла.

§ 191. Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію трехъ его реберъ, пересѣкающихся въ одной изъ его вершинъ, или произведенію его основанія на высоту.

Эту теорему нужно понимать такъ: Если мы измѣряемъ одною и тоюже единицею длины три пересѣкающіяся въ одной вершинѣ ребра, и получимъ числа m, n, p, то параллелепипедъ, измѣрянный соотвѣтствующею кубическою единицею, дастъ число mnp.



Положимъ, что AG прямоугольный параллелепипедъ, и какая нибудь единица линейной мѣры, напр. футъ, заключается m разъ въ ребрѣ AB, n разъ въ AD, p разъ въ AE, при чѣмъ m, n, p могутъ быть цѣлыми дробными и ирраціональными числами. Отложимъ отъ вершины A по тремъ ребрамъ линіи AM, AN, AO, равныя единицѣ длины, такъ что $AB = m.AM$, $AD = n.AN$, $AE = p.AO$ Проведемъ чрезъ точку M плоскость, параллельную сторонѣ AH, чрезъ точку N плоскость параллельную сторонѣ AF, и чрезъ точку O плоскость параллельную основанію AC, тогда полученное такимъ образомъ тѣло AR будетъ кубическая единица, соотвѣтствующая принятой нами линейной. Такъ какъ параллелепипедъ AQ и кубъ AR имѣютъ общее основаніе, то они относятся какъ AE : AO (§ 189), и такъ какъ AE равна p разъ взятой линіи AO, то и кубъ AR нужно взять p разъ, чтобы образовать параллелепипедъ AQ, слѣд.

$$AQ = p\,.\,AR.$$

Параллелепипеды AP и AQ имѣютъ общее основаніе ME и при томъ $AD = n\,.\,AN$, потому AQ должно взять n разъ, чтобы образовать AP, слѣд.

$$AP = n\,.\,AQ \text{ или } AP = n\,.\,p\,.\,AR.$$

Наконецъ параллелепипеды AG и AP имѣютъ общее основаніе AH и кромѣ того $AB = m\,.\,AM$, слѣд.

$$AG = m\,.\,AP, \text{ и такъ какъ } AP = n\,.\,p\,.\,AR, \text{ то}$$

$$AG = mnp\,.\,AR \quad \text{или} \quad \frac{AG}{AR} = mnp.$$

Такъ какъ mn есть площадь основанія, и p высота даннаго параллелепипеда AG, то его объемъ mnp равенъ произведенію основанія mn на высоту p.

Если m, n, p цѣлыя числа, напр. 3, 4, 5, то отложивъ принятую линейную единицу на ребрахъ AB, AD, AE и проведя изъ точекъ дѣленія плоскости параллельныя сторонамъ параллелепипеда, мы убѣдимся наглядно, что онъ заключаетъ $3 . 4 . 5 = 60$ соотвѣтствующихъ кубическихъ единицъ.

Слѣдствія. 1) Объемъ куба равенъ третьей степени числа, выражающаго длину его ребра. Посему третью степень числа называютъ его кубомъ.

2) Если двѣ какія нибудь линейныя мѣры относятся какъ $m:n$, то соотвѣтствующія кубическія мѣры относятся какъ $m^3:n^3$. Напр.

1 Метръ = 10 дециметровъ = 100 сантиметровъ,

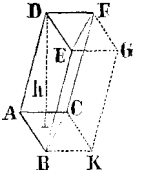
1 кубичный метръ = 1000 куб. децим. = 1000000 куб. сантим.

1 футъ = 12 дюймамъ, 1 куб. футъ = 1728 куб. дюймамъ.

§ 192. Объемъ всякаго параллелепипеда равенъ произведенію изъ его основанія на высоту.

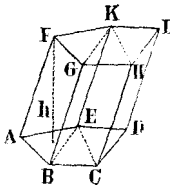
Такъ какъ всякій параллелепипедъ равновеликъ прямоугольному, имѣющему съ нимъ равновеликое основаніе и равную высоту (§ 187), а объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію основанія на высоту (§ 191), то и объемъ всякаго параллелепипеда равенъ произведенію основанія на высоту.

§ 193. Объемъ всякой призмы равенъ произведенію ея основанія на высоту.



1) Разсмотримъ сначала треугольную призму ABCDEF которой высота h. Проведя изъ точекъ B, C, E, F линіи, параллельныя ребрамъ AC, AB, DF, DE, дополнимъ призму до параллелепипеда AG, имѣющаго туже высоту h. Такъ какъ AG = ABKC × h (§ 192) и призма ABCDEF = $\frac{1}{2}$AG (§ 188), то

$$ABCDEF = \frac{ABKC}{2} \times h = ABC \times h.$$



2) Многоугольную призму ABCDEFGHIK можно раздѣлить на нѣсколько треугольныхъ, имѣющихъ съ нею туже высоту h. Объемы этихъ призмъ будутъ, ABE $\times$ h, BCE $\times$ h, CDE $\times$ h, слѣд. сумма ихъ, т. е. объемъ многоугольной призмы равна

$$(ABE + BCE + CDE)\,h = ABCDE \times h.$$

§ 194. Слѣдствія. 1) Два параллелепипеда или двѣ призмы, имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, равновелики.

2) Параллелепипеды или призмы относятся какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

3) Параллелепипеды или призмы, имѣющія равновеликія основанія, относятся какъ ихъ высоты, а имѣющія равныя высоты, относятся какъ основанія.

§ 195. 1) Многогранникъ, котораго одна сторона многоугольникъ, а всѣ остальныя—треугольники, имѣющіе одну общую вершину, называется пирамидою. Пирамиду можно построить, проведя послѣдовательно плоскости чрезъ каждую изъ сторонъ какого нибудь мно—ка и точку, не лежащую съ нимъ въ одной плоскости. Точка, въ которой сходятся всѣ тре—ки, называется вершиною пирамиды, а сторона, противолежащая этой вершинѣ, — основаніемъ. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины пирамиды на плоскость основанія, называется высотою пирамиды.

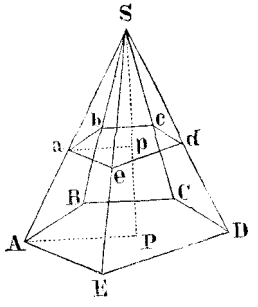
2) Пирамиды бываютъ трехстороннія четырехстороннія и т. д. смотря по числу сторонъ основанія или по числу тре—ковъ, составляющихъ боковую поверхность. Самая простая изъ всѣхъ пирамидъ — трехсторонняя, потому что она образована четырмя плоскостями, а чтобы замкнуть пространство со всѣхъ сторонъ нужно по крайней мѣрѣ 4 плоскости. Всѣ тѣлесные углы пирамиды въ такомъ случаѣ трехгранны, и всякая изъ ея сторонъ можетъ быть принята за основаніе. Всякая n—сторонняя пирамида имѣетъ $n + 1$ ограничивающихъ ее плоскостей, $n + 1$ вершинъ и $2n$ реберъ.

3) Если основаніе пирамиды правильный мно—къ, и перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе, пересѣчетъ это послѣднее въ его центрѣ, то пирамида называется правильною. Въ ней всѣ боковыя стороны равнобедренные треугольники.

4) Если пирамида пересѣкается плоскостью, параллельною основанію, то часть ея, заключающаяся между плоскостью сѣченія и основаніемъ

называется усѣченною пирамидою, а разстояніе двухъ ея параллельныхъ сторонъ — высотою усѣченной пирамиды. Всякая n—сторонняя усѣченная пирамида имѣетъ $n+2$ ограничивающихъ ее плоскостей, $2n$ вершинъ и $3n$ реберъ.

§ **196.** Если пирамида SABCDE будетъ пресѣчена плоскостью, параллельною основанію, то 1) сѣченіе abcde будетъ мно—къ, подобный основанію ABCDE, 2) площади подобныхъ мно—ковъ ABCDE и abcde относятся какъ квадраты ихъ разстояній (SP и sp) отъ вершины пирамиды.



1) Стороны мно—ковъ ABCDE и abcde параллельны (§ 161), отчего и углы ихъ соотвѣтственно равны (§ 165). Кромѣ того мы имѣемъ пропорціи:

$$AB : ab = (AS : aS =)\ AE : ae = ED : ed \ldots$$

слѣд. $ABCDE \backsim abcde$.

2) Проведемъ чрезъ ребро SA и высоту SP плоскость. Линіи AP и ap сѣченія этой плоскости съ плоскостями ABCDE и abcde параллельны, почему $\triangle ASP \backsim aSp$, а такъ какъ кромѣ того и $\triangle ASB \backsim aSb$, то

$$SP : Sp = SA : Sa = AB : ab, \quad \text{или}$$

$$SP^2 : Sp^2 = AB^2 : ab^2. \quad \text{Но по § 101}$$

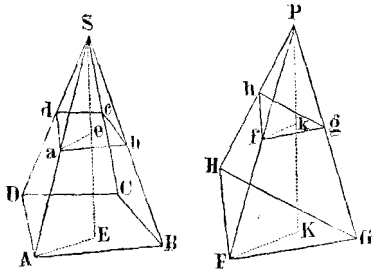
$$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2, \quad \text{слѣд.}$$

$$ABCDE : abcde = SP^2 : Sp^2.$$

Слѣдствія. 1) Если пирамида разсѣчена плоскостью, параллельною основанію, то отрѣзанная такимъ образомъ меньшая пирамида подобна цѣлой (§ 183, 5).

2) Основанія подобныхъ пирамидъ относятся какъ квадраты ихъ высотъ.

§ **197.** Если двѣ пирамиды SABCD и PFGH, имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, пересѣчены плоскостями, параллельными основаніямъ, на равныхъ разстояніяхъ ($Se = Pk$) отъ вершины, то площади пересѣченій (abcd и fgh) равновелики.



Положимъ, что обѣ пирамиды помѣщены своими основаніями въ одной и тойже плоскости и пересѣчены плоскостью, ей параллельною. Если SE и PK высоты пирамидъ, то (§ 196)

$$ABCD : abcd = SE^2 : Se^2$$
$$FGH : fgh = PK^2 : Pk^2.$$

Но по условію

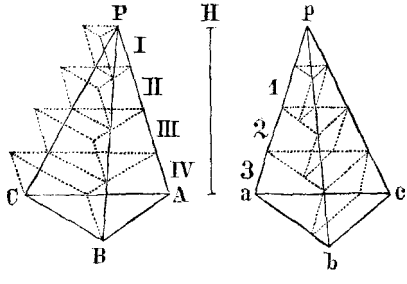
$$ABCD = FGH, \quad SE = PK, \quad Se = Pk,$$

потому и $SE^2 = PK^2$, $Se^2 = Pk^2$, слѣд. и

$$abcd = fgh.$$

§ 198 Двѣ трехстороннія пирамиды имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, равновелики.

Представимъ себѣ, что высоты обѣихъ пирамидъ раздѣлены на одно и тоже безконечно большое число равныхъ частей и чрезъ точки дѣленія проведены плоскости, параллельныя основаніямъ, тогда каждыя два сѣченія обѣихъ пирамидъ, одинаково удаленныя отъ вершинъ, равны (§ 196). Каждую часть пирамиды, заключающуюся между двумя послѣдовательными сѣкущими плоскостями, можно разсматривать какъ трегранную призму (хотя строго говоря она усѣченная пирамида), потому что два безконечно близкія сѣченія пирамиды безъ замѣтной ошибки равны одно другому. Такимъ образомъ пирамида разложится на безконечно большое числа чрезвычайно низкихъ призмъ, и такъ какъ каждая изъ нихъ въ одной пирамидѣ равна соотвѣтствующей ей въ другой, то и суммы ихъ т. е. самыя пирамиды должны быть такъ же равны.



Другое доказательство. Помѣстимъ обѣ пирамиды ихъ основаніями въ одной плоскости, и предположимъ, что PABC > pabc и именно что

$$PABC - pabc = Q.$$

Разность Q всегда можно представить въ видѣ призмы, которой основаніе ABC, а высота x. Раздѣлимъ общую высоту H обѣихъ пирамидъ на такое число равныхъ частей, чтобы каждая изъ нихъ была менѣе x, и чрезъ точки дѣленія проведемъ плоскости, параллельныя основаніямъ ABC и abc, тогда каждыя два сѣченія, равно удаленныя отъ основанія, будутъ равны (§ 197). Построимъ въ первой пирамидѣ на ея основаніи и на каждомъ сѣченіи внѣшнія призмы I, II, III...., которыхъ боковыя ребра параллельны ребру

AP, а во второй пирамидѣ построимъ подъ каждымъ сѣченіемъ внутреннія призмы 1, 2, 3. . . . такъ, чтобы ихъ боковыя ребра были параллельны ребру ap, тогда по равенству основаній и высотъ (§ 194, 1) будетъ I = 1, II = 2, III = 3, такъ что нижная призма IV составляетъ разность между суммою всѣхъ внѣшнихъ и суммою всѣхъ внутренныхъ призмъ. Такъ какъ

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} > \mathrm{PABC}$$

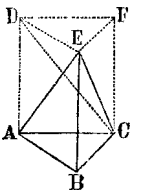
$$1 + 2 + 3 \quad < \mathrm{pabc}, \text{ то}$$

$$(\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}) - (1 + 2 + 3) > \mathrm{PABC} - \mathrm{pabc}, \text{ т. е.}$$

$$\mathrm{IV} > \mathrm{Q}.$$

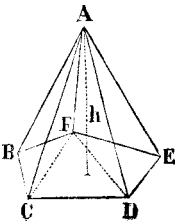
Однакожъ призма IV не можетъ быть болѣе призмы Q, потому что хотя обѣ онѣ имѣютъ одно и тоже основаніе ABC, но высота призмы IV выбрана нами менѣе x, высоты призмы Q, слѣд. преположеніе, что PABC > pabc, невозможно. Точно также можно доказать, что не можетъ быть PABC < pabc, а потому должно быть PABC = pabc.

§ 199. Объемъ трехсторонней пирамиды EABC равенъ трети объема призмы, имѣющей съ нею одно и тоже основаніе и туже высоту.



Если изъ вершинъ A и C проведемъ линіи AD и CF параллельныя ребру BE, и чрезъ точку E плоскость параллельную основанію ABC, то образуется трехсторонняя призма ABCDEF, которая имѣетъ одно и тоже основаніе и туже высоту съ данной пирамидою. Чрезъ это построеніе къ данной трехсторонней пирамидѣ EABC прибавится четырехсторонняя EACFD. Проведя плоскость ECD, мы раздѣлимъ EACFD на двѣ трехсторонніа пирамиды EACD и ECDF, которыя равновелики (§ 198). Но пирамиды ECDF и EABC имѣютъ равныя основанія DEF и ABC и равныя высоты (§ 164, 1) и потому равновелики. Такимъ образомъ три равновеликія пирамиды EACD, ECDF, EABC составляютъ призму ABCDEF, слѣд. EABC есть третья часть этой призмы.

§ 200. Объемъ всякой пирамиды равенъ третьей части произведенія ея основанія на высоту.



Для трехсторонней пирамиды это предложеніе прямо слѣдуетъ изъ § 193 и § 199.

Многосторонняя пирамида ABCDEF можетъ быть раздѣлена на трехсторонніа ABCF, ACDF, ADEF, имѣющія съ нею одну и туже высоту h. Объемы этихъ пирамидъ будутъ

$$\tfrac{1}{3}\mathrm{h} \,.\, \mathrm{BCF}, \quad \tfrac{1}{3}\mathrm{h} \,.\, \mathrm{CDF}, \quad \tfrac{1}{3}\mathrm{h} \,.\, \mathrm{DEF},$$

след. сумма ихъ или объемъ многосторонней пирамиды

$$ABCDEF = \tfrac{1}{3}h\,(BCF + CDF + DEF) = \tfrac{1}{3}h\,.\,BCDEF.$$

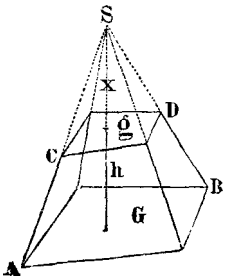
§ 201. Слѣдствія. 1) Двѣ пирамиды, имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, равновелики.

2) Объемъ всякой пирамиды равенъ трети объема призмы, имѣющей тѣже основаніе и высоту.

3) Пирамиды, имѣющія равновеликія основанія, относятся какъ ихъ высоты, имѣющія же равныя высоты, относятся какъ ихъ основанія.

§ 202. Опредѣлить объемъ усѣченной пирамиды ABCD по данной высотѣ h и основаніямъ G и g.

Представимъ себѣ, что стороны усѣченной пирамиды продолжены до пересѣченія ихъ въ вершинѣ S, такъ что усѣченная пирамида дополнится до цѣлой SAB. Обозначимъ высоту верхней дополнительной пирамиды чрезъ x, тогда (§ 200)



вся пирамида $SAB = \tfrac{1}{3}G\,(h + x)$,

верхняя пирамида $SCD = \tfrac{1}{3}gx$, слѣд.

усѣченная пирамида $ABCD = \tfrac{1}{3}G\,(h + x) - \tfrac{1}{3}gx$ или

$$ABCD = \tfrac{1}{3}\,[Gh + (G - g)\,x].$$

Для выраженія x посредствомъ данныхъ величинъ мы имѣемъ (§ 196, 2)

$$G : g = (h + x)^2 : x^2 \quad \text{или} \quad \sqrt{G} : \sqrt{g} = h + x : x,$$

$$x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}, \quad \text{слѣд.}$$

$$ABCD = \tfrac{1}{3}\left[Gh + (G - g)\,\frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}\right] \quad \text{или}$$

$$ABCD = \tfrac{1}{3}h\left[G + \frac{G - g}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \times \sqrt{g}\right]. \quad \text{Но}$$

$$G - g = (\sqrt{G} + \sqrt{g})\,(\sqrt{G} - \sqrt{g}), \quad \text{слѣд.}$$

$$\frac{G - g}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} = \sqrt{G} + \sqrt{g}, \quad \text{и потому}$$

$$ABCD = \tfrac{1}{3}h\,[G + (\sqrt{G} + \sqrt{g})\,\sqrt{g}] \quad \text{или}$$

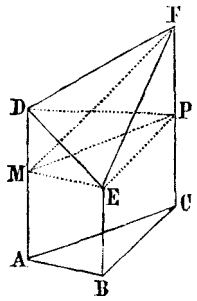
$$ABCD = \tfrac{1}{3}h\,(G + \sqrt{Gg} + g).$$

И такъ мы получимъ объемъ усѣченной пирамиды, если сложимъ площади верхняго и нижняго основанія и среднее геометрическое между ними, и полученную сумму умножимъ на треть высоты.

Усѣченная пирамида равновелика полной пирамидѣ тойже высоты, но основаніе которой равновелико суммѣ верхняго

и нижняго основанія и средняго пропорціальнаго между обоими основаніями усѣченной пирамиды.

§ **203.** Объемъ трехсторонней призмы ABCDEF, усѣченной непараллельно основанію, равняется произведенію ея основанія ABC на треть суммы перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ D, E, F на основаніе ABC.



Чрезъ вершину E, которая ближе всѣхъ прочихъ къ основанію ABC, проведемъ плоскость EMP, параллельную этому послѣднему; тогда $\triangle$ MEP $\cong$ ABC (§ 184). Усѣченная призма раздѣлится на призму ABCMEP и на четырехстороннюю пирамиду EMDFP. Эту послѣднюю можно разсѣчь плоскостью EDP на двѣ трехстороннія пирамиды DMEP и FDEP.

Проведемъ плоскость EFM, тогда

$\triangle$ FDP = FMP (§ 80, слѣд.), и потому

пир. EFDP = пир. EFMP (198), т. е.

пир. FDEP = пир. FMEP.

Если обозначимъ разстоянія вершинъ E, D, F отъ основанія ABC чрезъ h, h + m, h + p, то m и p будутъ разстояніями вершинъ D и F отъ плоскости EMP, слѣд. имѣемъ (§ 193, § 200)

$$\text{призма } ABCMEP = ABC \times h = ABC \times \frac{h + h + h}{3}$$

$$\text{пирамида } DMEP = MEP \times \frac{m}{3} = ABC \times \frac{m}{3}$$

$$\text{пир. } FDEP = \text{пир. } FMEP = MEP \times \frac{p}{3} = ABC \times \frac{p}{3}.$$

Сложивъ эти три равенства, найдемъ что

$$ABCDEF = ABC \times \frac{h + (h + m) + (h + p)}{3}.$$

Слѣдствія. 1) Такъ какъ это выраженіе равно

$\frac{1}{3}$ ABC h + $\frac{1}{3}$ ABC (h + m) + $\frac{1}{3}$ ABC (h + p), то

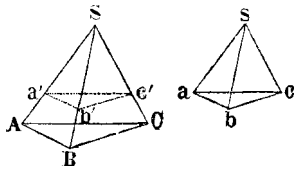
трехсторонняя призма, усѣченная непараллельно основанію, равновелика тремъ пирамидамъ, имѣющимъ тоже основаніе ABC, а вершины въ вершинахъ D, E, F.

2) Если призма прямая, то высоты ея будутъ боковыя ребра, слѣд. объемъ прямой трехсторонней призмы, усѣченной непараллельно основанію, равняется произведенію ея основанія на одну треть суммы всѣхъ боковыхъ реберъ.

§ 204. Симметричные многогранники равновелики.

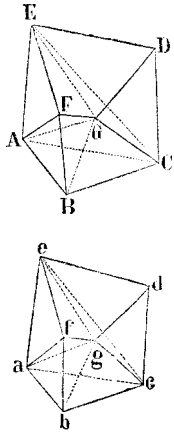
Симметричныя пирамиды равновелики, потому что объемъ пирамиды зависитъ только отъ ея высоты и площади основанія, а въ симметрическихъ многогранникахъ всѣ соотвѣтственныя части равны между собою. Такъ какъ два симметричные многогранника могутъ быть разсѣчены плоскостями на равное число попарно симметрическихъ пирамидъ, то они должны имѣть равные объемы.

§ 205. Двѣ трехстороннія пирамиды SABC и sabc подобны, если имѣютъ по равному двугранному углу, заключающемуся между двумя соотвѣтственно подобными и одинаково расположенными сторонами.



Пусть $\triangle ASB \backsim asb$, $\triangle ASC \backsim asc$ и двугранный уголъ $BASC = basc$. Отложимъ $Sa' = sa$, $Sb' = sb$, $Sc' = sc$ и проведемъ чрезъ точки a', b', c', плоскость, тогда пирамида $Sa'b'c \cong sabc$ (§ 181, 3) Такъ какъ $\triangle ASB \backsim a'Sb'$ и $\triangle ASC \backsim a'Sc'$, то $AB \parallel a'b'$ и $AC \parallel a'c'$ (§ 89). Изъ параллельности этихъ линій слѣдуетъ параллельность плоскостей ABC и $a'b'c'$ (§ 165, 2), и потому пирамиды SABC и $Sa'b'c'$ подобны (§ 196, слѣд. 1), слѣд. и $SABC \backsim sabc$.

§ 206. Два подобные многогранника ABCDEFG и abcdefg можно разложить на равное число соотвѣтственно подобныхъ и одинаково расположенныхъ пирамидъ.



Пусть одна сторона ABCDE будетъ пятиугольникъ, къ которому какъ къ основанію примыкаютъ два четыреугольника BCGF и DEFG и три тре—ка ABF, AEF и CDG. Проведя изъ вершины G діагональныя плоскости, мы разсѣчемъ многогранникъ на трехстороннія пирамиды GCDE, GACE, GABC, GAEF, GABF. Другой многогранникъ, въ которомъ тѣже буквы обозначаютъ соотвѣтствующія вершины, и части котораго расположены въ томъ же порядкѣ, разсѣчемъ также плоскостями изъ вершины g. Такъ какъ въ обоихъ многогранникахъ всѣ двугранные углы попарно равны другъ другу (§ 183, 4) и кромѣ того всѣ стороны многогранниковъ подобны [а потому и тре—ки, на которые они распадаются соотвѣтственно подобны (§ 100, 2)], то по § 205 пира-

мида GCDE $\backsim$ gcde, GABC $\backsim$ gabc, GAEF $\backsim$ gaef, GABF $\backsim$ gabf, потому что каждая пара этихъ пирамидъ имѣетъ по равному двугранному углу, заключающемуся между двумя соотвѣтственно подобными и одинаково расположенными сторонами. Наконецъ пирамида GAEC $\backsim$ gaec (§ 205), потому что стороны ACE $\backsim$ ace, GCE $\backsim$ gce и лежащіе при ребрѣ CE и ce углы равны, какъ дополненія до двухъ прямыхъ двухъ равныхъ двугранныхъ угловъ въ пирамидахъ GCDE и gcde.

§ **207.** Въ двухъ подобныхъ многогранникахъ 1) поверхности относятся какъ квадраты, а 2) объемы — какъ кубы двухъ сходственныхъ реберъ.

1) Въ двухъ подобныхъ многогранникахъ стороны попарно подобны, и потому всѣ соотвѣтствующія ребра пропорціональны. Площади двухъ соотвѣтствующихъ сторонъ многогранниковъ относятся какъ квадраты соотвѣтствующихъ реберъ, почему и суммы площадей сторонъ будутъ относиться также какъ квадраты реберъ.

2) Если многогранниками будутъ двѣ трехстороннія пирамиды P и p, то обозначивъ ихъ основанія чрезъ G и g, а высоты чрезъ H и h, и какія нибудь два соотвѣтствующія ребра чрезъ K и k, получимъ (§ 196, слѣд. 2)

$$G : g = H^2 : h^2, \quad \text{слѣд. и}$$
$$GH : gh = H^3 : h^3. \quad \text{Но такъ какъ}$$
$$GH : gh = P : p$$
$$H^3 : h^3 = K^3 : k^3, \quad \text{то}$$
$$P : p = K^3 : k^3.$$

Два подобные многогранника разсѣкаются площадями на равное число подобныхъ и одинаково расположенныхъ пирамидъ (§ 206) а подобныя пирамиды относятся какъ кубы ихъ соотвѣтствующихъ реберъ. Такъ какъ кромѣ того въ подобныхъ многогранникахъ соотвѣтствующія ребра пропорціональны, то ясно, что сумма пирамидъ однаго многогранника будетъ относиться къ суммѣ всѣхъ пирамидъ другаго какъ кубы соотвѣтствующихъ реберъ.

Слѣдствіе. Соотвѣтствующія ребра двухъ подобныхъ многогранниковъ относятся какъ квадратные корни изъ числовой величины поверхностей, или какъ кубическіе корни изъ числовой величины объемовъ многогранниковъ.

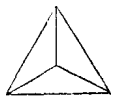
Если напр. дано построить многогранникъ, который бы былъ подобенъ данному и имѣлъ вдвое большую поверхность, то два соотвѣт-

ствующія ребра должны относиться какъ $1 : \sqrt{2}$. Если же объемъ искомаго многогранника долженъ быть вдвое болѣе объема даннаго, то соотвѣтствующія ребра должны относиться какъ $1 : \sqrt[3]{2}$.

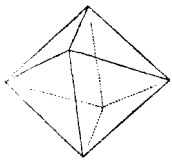
§ 208. Правильными многогранниками называются такіе, которые ограничены со всѣхъ сторонъ равными правильными многоугольниками, и въ которыхъ всѣ тѣлесные углы между собою равны.

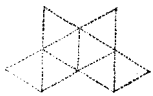
Могутъ быть только пять различныхъ правильныхъ многогранниковъ.

Слѣдующія фигуры представляютъ эти многогранники и ихъ поверхности, разпрямленныя въ плоскость, но взятыя въ меньшемъ масштабѣ.



1) Для образованія тѣлеснаго угла нужно по крайней мѣрѣ 3 многоугольника, и сумма плоскихъ угловъ, ограничивающихъ многогранный уголъ, должна быть менѣе, четырехъ прямыхъ (§ 178). Если мы представимъ себѣ, что три равные правильные треугольника составлены вмѣстѣ такъ, что образуютъ тѣлесный уголъ, то сумма всѣхъ плоскихъ угловъ, лежащихъ около вершины тѣлеснаго будетъ равна $3 \times \frac{2}{3}R = 2R$, а отверстіе этого угла можетъ быть закрыто правильнымъ тре—комъ, равнымъ остальнымъ. Такое тѣло, ограниченное четырмя тре—ками есть правильный четырегранникъ или тетраэдръ.

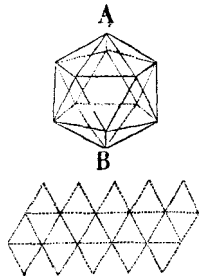




2) Представимъ себѣ, что четыре равные правильные треугольника, пересѣкающіеся подъ равными двугранными углами, образуютъ тѣлесный уголъ, тогда сумма плоскихъ угловъ этого тѣлеснаго менѣе 4R, и отверстіе его представляетъ квадратъ. Если мы приложимъ два составленные такимъ образомъ четырегранные угла ихъ отверстіями одинъ къ другому, то образуется ограниченный осмью тре—ками правильный осмигранникъ или октаэдръ.

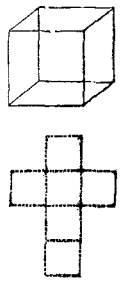
3) Если составимъ тѣлесный уголъ изъ пяти равныхъ правильныхъ треугольниковъ, пересѣкающихся подъ равными двугранными

углами, тогда сумма плоскихъ угловъ такого тѣлеснаго менѣе 4R, и его отверстіе будетъ представлять правильный пяти—къ. Наложимъ два такіе угла A и B, одинъ сверху, другой снизу на поясъ, сложенный изъ 10 такихъ же тре—ковъ, такъ чтобы пять тре—ковъ пояса совпали своими боками съ краями отверстія тѣлеснаго угла A, и пять тре—ковъ съ краями отверстія угла B, тогда образуется ограниченный 20 тре—ками правильный двадцатигранникъ или икосаэдръ.



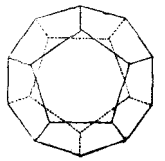
Изъ шести правильныхъ тре—ковъ нельзя составить тѣлеснаго угла, потому что шесть плоскихъ угловъ такого угла равнялись бы $6 \times \frac{2}{3}R = 4R$. Такимъ образомъ видно, что изъ правильнаго тре—ка можно составить только три различныхъ правильнихъ многогранниковъ.

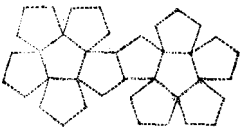
4) Изъ трехъ равныхъ квадратовъ образуется трегранный уголъ, котораго отверстіе можно закрыть, приложивъ еще три такіе же квадрата. Ограниченное шестью равными квадратами тѣло есть правильный шестигранникъ или кубъ или гексаэдръ.



Изъ 4 квадратовъ нельзя составить тѣлеснаго угла, потому что сумма его плоскихъ угловъ равнялась бы 4R.

5) Изъ трехъ равныхъ правильныхъ пятиугольниковъ можно составить тѣлесный уголъ, потому что сумма плоскихъ угловъ такого угла $3 \times \frac{6}{5}R < 4R$. Представимъ себѣ, что къ каждой сторонѣ правильнаго пятиугольника приложено по одинаковому съ нимъ пятиугольнику такъ, что около каждой его вершины составится по трегранному углу. Тогда образуется полузамкнутая поверхность, въ которой края отверстія состоитъ изъ 5 входящихъ и 5 выходящихъ угловъ. Если двѣ составленныя такимъ образомъ поверхности сложить такъ, чтобы выходящіе углы одной вошли во вдавшіеся углы другой, то получится многогранникъ, ограниченный 12 пятиугольниками и называемый правильнымъ двѣнадцатигранникомъ или додекаэдромъ.



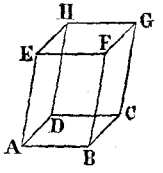


Изъ правильныхъ многоугольниковъ большаго числа сторонъ не могутъ быть составлены многогранники, потому что уже сумма плоскихъ угловъ трегранника, составленнаго изъ правильныхъ шестиугольниковъ $= 3 \times \frac{4}{3}R = 4R$.

§ 209. Задачи.

1) По данному ребру a построить кубъ.

2) Разсѣчь кубъ плоскостью такъ, чтобы линія сѣченія была правильный шестиугольникъ.



3) Даны длина и положеніе трехъ выходящихъ изъ одной точки прямыхъ; построить параллелепипедъ, у котораго эти прямыя были бы ребрами.

4) Даны величина и положеніе двухъ не пересѣкающихся и не параллельныхъ прямыхъ AB и FG; построить параллелепипедъ, у котораго эти линіи были бы ребрами.

5) Построить параллелепипедъ, подобный данному такъ, чтобы прямая a была однимъ изъ его реберъ, которое соотвѣтствуетъ одному изъ реберъ даннаго параллелепипеда.

6) Построить прямоугольный параллелепипедъ, который бы имѣлъ ребро a и былъ равновеликъ кубу, котораго ребро равно линіи b.

7) Построить призму по данному основанію, величинѣ и положенію боковаго ребра.

8) Начертитъ квадратъ, котораго площадь равнялась бы 1) боковой поверхности, 2) всей поверхности данной призмы или пирамиды.

9) Распрямить на плоскости поверхность 1) трехсторонней призмы по даннымъ тремъ ребрамъ какого либо ея угла и плоскимъ угламъ, заключающимся между этими ребрами, 2) пятисторонней призмы по данному основанію и двумъ прилежащимъ гранямъ.

10) Обратить 1) многостороннюю призму въ трехстороннюю, 2) многостороннюю призму въ параллелепипедъ.

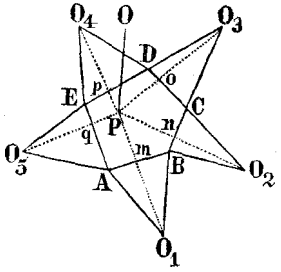
11) Усѣченную трехстороннюю призму обратить въ прямую, которой основаніе равнялось бы сѣченію данной призмы плоскостью, перпендикулярною къ боковымъ ребрамъ.

12) По даннымъ боковымъ ребрамъ трехсторонней пирамиды и образованнымъ ими плоскимъ угламъ начертить ея поверхность на плоскости, въ видѣ сплошной фигуры.

13) По даннымъ шести ребрамъ трехсторонней пирамиды начертить ея поверхность на плоскости въ видѣ сплошной фигуры.

14) Начертить на плоскости поверхность трехсторонней пирамиды, которой основаніе и его углы наклоненія относительно боковъ даны.

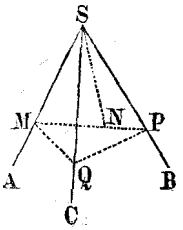
15) Начертить на плоскости поверхность пирамиды, если даны основаніе ABCDE, высота OP и точка P пересѣченія основанія съ высотою.



16) Начертить на плоскости поверхность пирамиды, если даны: основаніе ABCDE, боковое ребро BO и тѣлесный уголъ B.

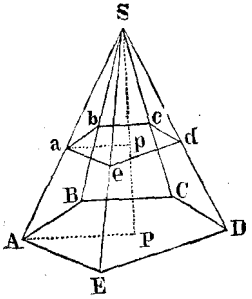
17) Дано основаніе ABCDE пирамиды и двѣ ея смежныя грани ABO и BCO, построить на плоскости въ видѣ сплошной фигуры поверхность этой пирамиды.

18) Чрезъ точку M на ребрѣ AS трегграннаго угла провести плоскость MPQ такъ, чтобы площади трехъ боковыхъ сторонъ пирамиды SMPO были равны между собою.



19) Раздѣлить трехстороннюю пирамиду пополамъ плоскостью, проходящею чрезъ ея вершину и пересѣкающею основаніе по прямой даннаго направленія.

20) Пирамиду SABCDE раздѣлить плоскостью, параллельною основанію 1) такъ, чтобы площади основанія и сѣченія относились какъ линіи m и n, 2) такъ, чтобы поверхность отсѣченной пирамиды Sabcde составляла треть поверхности цѣлой пирамиды.



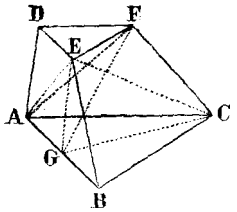
21) Построить тетраэдръ 1) по данному ребру, 2) по данной высотѣ.

22) Построить октаэдръ 1) по данному ребру, 2) по данной діагонали.

23) Построить додекаэдръ, котораго ребро равнялось бы линіи a.

24) Построить икосаэдръ, котораго ребро равнялось бы a.

25) Начертить на плоскости уголъ наклоненія двухъ смежныхъ плоскостей 1) тетраэдра, 2) октаэдра, 3) додекаэдра, 4) икосаэдра.



26) Построить треугольникъ, котораго площадь была бы среднею пропорціональною между площадями основаній данной усѣченной пирамиды ABCDEF.

27) Даны двѣ n—стороннія пирамиды, имѣющія равныя высоты и подобныя основанія; построить трехстороннюю пирамиду, которая бы была среднею пропорціональною между данными.

28) Усѣченную пирамиду разсѣчь плоскостью, параллельною основаніямъ такъ, чтобы полученная площадь сѣченія была среднею пропорціональною между площадями основаній данной усѣченной пирамиды.

IV. О цилиндрѣ.

§ 210. 1) Если прямая движется по окружности двухъ круговъ, лежащихъ въ параллельныхъ плоскостяхъ, постоянно оставаясь параллельною линіи, соединяющей центры этихъ круговъ, то образуется кривая поверхность, называемая цилиндрическою; тѣло, ограниченное этою послѣднею и двумя параллельными кругами, называется цилиндромъ, каждый изъ параллельныхъ круговъ—основаніемъ, линія, соединяющая центры основаній, — осью, а разстояніе плоскостей основаній другъ отъ друга — высотою цилиндра.

2) Всякая линія, соединяющая двѣ точки обоихъ основаній и проведенная параллельно оси, называется образующею. Эта линія должна совпадать съ цилиндрическою поверхностью, потому что ее можно разсматривать какъ одно изъ положеній прямой, которая своимъ движеніемъ описываетъ цилиндрическую поверхность. Всѣ образующія параллельны оси, а слѣдовательно и другъ другу и равны между собою (§ 164).

Отсюда слѣдуетъ, что всякое сѣченіе, проходящее чрезъ ось или параллельное оси параллелограмъ.

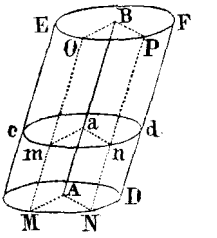
3) Прямымъ цилиндромъ называется такой, въ которомъ ось перпендикулярна основанію. При всякомъ же другомъ положеніи оси цилиндръ называется косымъ. Въ прямомъ цилиндрѣ всѣ образующія перпендикулярны основанію и равняются его высотѣ, въ косомъ же цилиндрѣ высота всегда менѣе образующей.

Если представимъ себѣ, что прямоугольникъ обращается около одной изъ своихъ сторонъ, какъ около неподвижной оси, то другая сторона опишетъ прямой цилиндръ.

Въ прямомъ цилиндрѣ всѣ сѣченія, проходящія чрезъ ось его или параллельно ей, прямоугольники.

4) Два цилиндра подобны, если ихъ оси наклонены подъ равными углами къ основаніямъ и если отношенія ихъ осей къ радіусамъ основаній равны.

§ **211.** Всякое сѣченіе (cmd) цилиндра плоскостью, параллельною основанію, образуетъ кругъ, который равенъ основанію, и котораго центръ лежитъ на оси цилиндра.



Проведемъ чрезъ ось по двумъ произвольнымъ направленіямъ плоскости, которыя пересѣкутъ основанія и параллельную имъ плоскость сѣченія по линіямъ Am и am, AN и an. Такимъ образомъ получатся параллелограмы AMam и ANan (§ 210, 2 и § 161), слѣдовательно AM = am и AN = an; а такъ какъ AM = AN, то и am = an, т. е. точки m и n одинаково удалены отъ a. Это заключеніе справѣдливо для всѣхъ точекъ, лежащихъ на кривой пересѣченія цилиндра, слѣдовательно эта кривая есть кругъ, котораго центръ находится на оси цилиндра, а радіусъ равенъ радіусу его основанія.

§ **212.** Объемъ цилиндра равенъ произведенію площади его основанія на высоту.

Мы разсматривали кругъ какъ правильный многоугольникъ съ безконечно большимъ числомъ сторонъ, потому и цилиндръ можно принимать за призму, которой основаніе такой мно—къ, а высота равна высотѣ цилиндра. Отсюда слѣдуетъ, что объемъ цилиндра, какъ объемъ призмы, равняется произведенію площади основанія на высоту.

§ **213.** 1) Если обозначимъ чрезъ h высоту цилиндра, а чрезъ r радіусъ его основанія, то

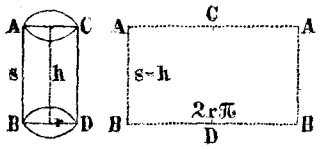
$$\text{объемъ цилиндра} = r^2\pi h,$$

2) Цилиндры, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, равновелики.

3) Цилиндры относятся какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

4) Цилиндры, имѣющіе равныя основанія, относятся какъ ихъ высоты, а имѣющіе равныя высоты, какъ основанія, а слѣд. и какъ квадраты радіусовъ основаній (§ 141).

§ 214. Боковая поверхность прямаго цилиндра равна произведенію окружности его основанія на высоту.



Такъ какъ всякая прямая, параллельная оси цилиндра, и соединяющая двѣ точки, лежащія на верхнемъ и нижнемъ его основаніи, совпадаетъ съ боковою поверхностью цилиндра, то мы можемъ представить себѣ эту поверхность разсѣченною по длинѣ одной изъ образующихъ и развернутою на плоскости. Такимъ образомъ получится прямоугольникъ, котораго одна сторона равна окружности основанія, а другая высотѣ цилиндра. Такъ какъ площадь прямоугольника равна произведенію двухъ его перпендикулярныхъ сторонъ, то боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности его основанія на высоту.

§ 215. 1) Если обозначимъ чрезъ h высоту прямаго цилиндра, чрезъ s образующую, и чрезъ r радіусъ основанія, тогда окружность основанія будетъ $2r\pi$, слѣд.

$$\text{боковая поверхность цилиндра} = 2r\pi h = 2r\pi s.$$

2) Такъ какъ площадь основанія $= \pi r^2$, то вся поверхность (O) прямаго цилиндра равна $2r\pi h + r^2\pi + r^2\pi$, т. е.

$$O = 2r\pi\ (r + h) = 2r\pi\ (r + s).$$

§ 216. 1) Два подобные цилиндра C и c относятся какъ кубы радіусовъ ихъ основаній или какъ кубы производящихъ.

2) Боковыя поверхности O и o двухъ подобныхъ цилиндровъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ основаній или квадраты ихъ производящихъ.

1) Пусть A и a будутъ, оси S и s производящія, R и r радіусы основаніи, H и h высоты цилиндровъ, тогда (§ 213, 1)

$$C : c = R^2\pi H : r^2\pi h = R^2H : r^2h.$$

Но по § 210, 4 $A : a = S : s = R : r = H : h$, и $S^3 : s^3 = R^3 : r^3$, откуда

$$C : c = R^3 : r^3 = S^3 : s^3.$$

2) Такъ какъ (§ 215, 1) $O : o = 2R\pi S : 2r\pi s = RS : rs$, то и

$$O : o = R^2 : r^2 = S^2 : s^2.$$

V. О конусѣ.

§ **217.** 1) Если прямая AB (фиг. § 218) движется по окружности ABC круга такъ, что постоянно проходитъ чрезъ неподвижную точку A, лежащую внѣ плоскости круга, то образованная ея движеніемъ кривая поверхность называется коническою, а тѣло, ограниченное этою поверхность и площадью круга, — конусомъ; движущаяся прямая называется образующею, неподвижная точка A — вершиною, кругъ BDC — основаніемъ, линія AE, соединяющая вершину A съ центромъ основанія E — осью, а перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе, — высотою конуса.

2) Прямымъ конусомъ называется такой, котораго ось перпендикулярна къ основанію, въ противномъ же случаѣ конусъ называется косымъ. Прямой конусъ образуется движеніемъ прямоугольнаго тре—ка около однаго изъ его катетовъ, причемъ другой катетъ описываетъ основаніе, а гипотенуза боковую поверхность конуса. Въ прямомъ конусѣ высота совпадаетъ съ осью и всѣ образующія равны (§ 153, 2).

3) Всякое сѣченіе, проходящее чрезъ вершину конуса, есть треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны — образующія, а третья — хорда основанія конуса. Если сѣченіе проходитъ чресъ ось, то треугольникъ состоитъ изъ двухъ образующихъ и діаметра основанія. Въ прямомъ конусѣ всѣ его сѣченія равнобедренные тре—ки, а всѣ осевыя сѣченія образуютъ равные равнобедренные тре—ки, перпендикулярныя къ основанію.

4) Два конуса подобны, если ихъ оси наклонены подъ одинаковыми углами къ основаніямъ и относятся какъ радіусы основаній.

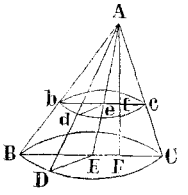
5) Если конусъ разсѣкается плоскостью, параллельною основанію, то часть его, заключающаяся между плоскостью сѣченія и основаніемъ, называется усѣченнымъ конусомъ, остальная же часть, заключающаяся между плоскостью сѣченія и вершиною, дополнительнымъ конусомъ.

Основаніе конуса и площадь его сѣченія называются основаніями, разстояніе основаній другъ отъ друга — высотою, а линія, соединяющая центры основаній — осью усѣченнаго конуса. Смотря потому, будетъ ли ось перпендикулярна къ основаніямъ или нѣтъ, конусъ называется прямымъ или косымъ.

Всякая прямая, совпадающая съ боковою поверхностью конуса и соединяющая двѣ точки основаній, проходитъ при продолженіи чрезъ вершину дополнительнаго конуса, и называется образующею. Въ прямомъ конусѣ всѣ образующія равны.

§ **218.** 1) Всякое сѣченіе bdc конуса, параллельное основанію BDC, есть кругъ, котораго центръ находится на оси AE конуса.

2) Площадь основанія конуса и площадь сѣченія, проведеннаго параллельно основанію, относятся какъ квадраты ихъ разстояній (AF, Af) отъ вершины.



1) Проведемъ чрезъ ось въ произвольныхъ направленіяхъ двѣ плоскости, которыя пересѣкутъ основаніе и параллельную ему плоскость сѣченія по линіямъ BC и bc, DE и de, тогда BC ‖ bc и DE ‖ de (§ 161). Изъ подобія тре—ковъ слѣдуетъ

$$BE : be = AE : ae = DE : de.$$

Такъ какъ BE = DE, то и be = de. Точно также можно доказать, что разстояніе точки e отъ остальныхъ точекъ линіи сѣченія равно be, слѣд. кривая сѣченія есть кругъ.

2) Если прямая AF перпендикулярна къ основаніямъ BDC и bdc, то изъ подобія тре—ковъ слѣдуетъ

$$BE : be = AB : ab = AF : af, \text{ слѣд. и}$$
$$BE^2 : be^2 = AB^2 : ab^2 = AF^2 : af^2.$$

Такъ какъ площади круговъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ, то

$$\text{кругъ } BE : \text{кругъ } be = AB^2 : ab^2 = AF^2 : af^2.$$

§ **219.** 1) Если конусъ разсѣченъ плоскостью параллельною основанію, то полученный такимъ образомъ меншій конусъ подобенъ цѣлому (§ 217, 4).

2) Площади основаній подобныхъ конусовъ относятся какъ квадраты высотъ конусовъ.

§ **220.** Объемъ всякаго конуса равенъ трети произведенія площади его основанія на высоту.

Если разсматривать кругъ какъ правильный многоугольникъ безчисленнаго числа сторонъ, то конусъ можно принимать за пирамиду съ безконечно большимъ числомъ граней, изъ чего слѣдуетъ, что объемъ конуса, какъ и пирамиды, равенъ трети произведенія площади основанія на высоту.

§ 221. 1) Обозначимъ чрезъ h высоту конуса, и чрезъ r радіусъ его основанія, тогда основаніе $= r^2\pi$, слѣд.

$$\text{объемъ конуса} = \tfrac{1}{3}r^2\pi h.$$

2) Если s будетъ образующая прямаго конуса, и r радіусъ основанія, то высота конуса $= \sqrt{s^2 - r^2}$, а

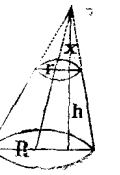
$$\text{объемъ} = \tfrac{1}{3}r^2\pi \sqrt{s^2 - r^2}$$

3) Два конуса, имѣющіе равные основанія и равныя высоты, равновелики.

4) Два конуса относятся какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

5) Объемъ конуса равновеликъ трети объема цилиндра, имѣющаго съ конусумъ равныя основаніе и высоту.

§ 222. Опредѣлить объемъ усѣченнаго конуса по данной высотѣ h и радіусамъ R и r верхняго и нижняго основаній.



Положимъ, что усѣченный конусъ дополненъ до цѣлаго чрезъ продолженіе его боковой поверхности. Если назовемъ высоту дополнительнаго конуса чрезъ x, то высота цѣлаго будетъ $x + h$, слѣд. (§ 221, 1)

$$\text{цѣлый конусъ} = \tfrac{1}{3}R^2\pi\,(h+x)$$

$$\text{дополнительный} = \tfrac{1}{3}r^2\pi x, \quad \text{слѣд.}$$

$$\text{усѣченный} = \tfrac{1}{3}R^2\pi\,(h+x) - \tfrac{1}{3}r^2\pi x,$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi\left[R^2h + (R^2 - r^2)\,x\right].$$

Такъ какъ $R : r = h + x : x$, то

$$x = \frac{hr}{R - r}, \quad \text{потому}$$

$$\text{усѣченный конусъ} = \tfrac{1}{3}\pi\left(R^2h + \frac{R^2 - r^2}{R - r}\cdot hr\right)$$

Но $R^2 - r^2 = (R + r)\,(R - r)$, слѣд.

$$\text{усѣченный конусъ} = \tfrac{1}{3}\pi h\left[R^2 + (R + r)\,r\right]$$

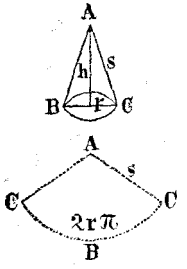
$$= \tfrac{1}{3}\pi h\,(R^2 + Rr + r^2).$$

Это выраженіе можетъ быть представлено и въ слѣдующемъ видѣ: $\tfrac{1}{3}h\,(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr)$, и такъ какъ $\pi Rr = \sqrt{\pi R^2 . \pi r^2}$, то объемъ усѣченнаго конуса равенъ объему полнаго той же высоты,

но основаніе котораго равновелико суммѣ верхняго и нижняго основаній усѣченнаго конуса, сложенной съ среднимъ геометрическимъ между этими же основаніями.

Слѣд. Если положимъ въ выраженіи $\frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$, что радіусъ меньшаго основанія $r = o$, то получимъ $\frac{1}{3}R^2\pi h$, т. е. выраженіе объема цѣлаго конуса; а положивъ $R = r$, получимъ $R^2\pi h$, т. е. выраженіе объема цилиндра.

§ 223. Боковая поверхность прямаго конуса равна половинѣ произведенія окружности его основанія на производящую.



Такъ какъ прямая, соединяющая вершину конуса съ какою—либо точкою основанія, совпадаетъ съ боковою поверхностью, то мы можемъ представить себѣ что поверхность конуса разрѣзана по какой—либо образующей и развернута на плоскости. Такъ какъ всѣ точки окружности основанія равно удалены отъ вершины, то развернутая боковая поверхность конуса будетъ круговой вырѣзокъ, котораго радіусъ равенъ образующей конуса, а дуга — окружности основанія. Площадь круговаго вырѣзка равняется половинѣ произведенія его дуги на радіусъ (§ 139), слѣд. и боковая поверхность прямаго конуса равна половинѣ произведенія его окружности основанія на образующую.

§ 224. 1) Если обозначимъ чрезъ s образующую прямаго конуса, и чрезъ r радіусъ основанія, тогда окружность основанія будетъ равна $2r\pi$, слѣд.

$$\text{боковая поверхность} = rs\pi.$$

2) Вся поверхность конуса будетъ равна

$$rs\pi + r^2\pi = r\pi(r + s).$$

3) Если будутъ даны радіусъ основанія r, и высота конуса h, то убразующая $s = \sqrt{r^2 + h^2}$, слѣд.

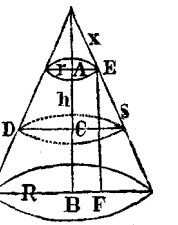
$$\text{боковая поверхность} = r\pi\sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\text{вся поверхность} = r\pi\left(r + \sqrt{r^2 + h^2}\right).$$

4) Окружность средняго сѣченія конуса, т. е. сѣченія, проведеннаго параллельно основанію и дѣлящаго высоту пополамъ, равна половинѣ окружности основанія, потому что окружность основанія относится къ окружности сѣченія, какъ радіусъ первой окружности къ радіусу второй,

радіусы же эти относятся какъ цѣлая высота къ половинѣ. Отсюда видно, что боковая поверхность конуса равна произведенію окружности средняго сѣченія на производящую.

§ 225. Опредѣлить боковую поверхность прямаго усѣченнаго конуса по данной производящей s и радіусамъ R и r нижняго и верхняго основаній.



Представимъ себѣ, что усѣченный конусъ дополненъ до цѣлаго и обозначимъ образующую дополнительнаго чрезъ x, а цѣлаго чрезъ $s + x$, тогда

боков. пов. цѣлаго кон. $= R\,(s + x)\,\pi$

боков. пов. дополн. кон. $= rx\pi$, слѣд.

боков. пов. усѣч. кон. $= R\,(s + x)\,\pi - rx\pi$

$$= \big(Rs + (R - r)\,x\big)\,\pi.$$

Такъ какъ $R : r = s + x : x$, то

$$x = \frac{rs}{R - r}, \quad \text{слѣд.}$$

боков. пов. усѣч. кон. $= (Rs + rs)\,\pi$

$$= (R + r)\,\pi s,$$

Это выраженіе равно $(\pi R + \pi r)\,s$, слѣд. боковая поверхность усѣченнаго конуса равна полусуммѣ окружностей нижняго и верхняго основанія, умноженной на образующую.

§ 226. 1) Если чрезъ средину оси AB проведемъ плоскость, параллельную основанію, тогда радіусъ круга сѣченія

$$CD = \frac{R + r}{2}, \quad \text{и окружность его} = 2\left(\frac{R + r}{2}\right)\pi.$$

Выраженіе боковой поверхности усѣченнаго конуса $(R + r)\pi s$ показываетъ, что боковая поверхность усѣченнаго прямаго конуса равна произведенію его образующей на окружность средняго сѣченія.

2) Вся поверхность прямаго усѣченнаго конуса равна

$$(R + r)\,\pi s + R^2\pi + r^2\pi = \pi\big[R^2 + r^2 + (R + r)s\big].$$

3) Если въ формулѣ $(R + r)\,\pi s$ положимъ $r = 0$, то получимъ выраженіе боковой поверхности цѣлаго конуса, а положивъ $R = r$ получимъ $2r\pi s$, т. е. выраженіе боковой поверхности цилиндра (§ 215, 1).

4) Если кромѣ R и r дана высота $AB = h$ прямаго усѣченнаго конуса, то опустивъ изъ точки E на нижнее основаніе конуса перпендикуляръ $EF = h$, получимъ $s = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$; тогда боковая поверхность M и вся поверхность O усѣченнаго конуса будутъ равны

$$M = (R + r)\pi\sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

$$O = \pi\left[R^2 + r^2 + (R + r)\sqrt{h^2 + (R - r)^2}\right]$$

§ **227.** 1) Объемы двухъ подобныхъ конусовъ относятся какъ кубы ихъ осей или радіусовъ.

2) Боковыя поверхности O и o двухъ подобныхъ прямыхъ конусовъ относятся какъ квадраты ихъ осей (A, a), или образующихъ (S, s) или радіусовъ (R, r).

1) Такъ какъ объемъ конуса равенъ трети объема цилиндра, имѣющаго съ нимъ равное основаніе и равную высоту (§ 221, 5), а объемы подобныхъ цилиндровъ относятся какъ кубы ихъ осей или радіусовъ (§ 216), то объемы конусовъ будутъ имѣть тоже отношеніе.

2) Такъ какъ $O : o = RS\pi : rs\pi$, и

$$A : a = R : r = S : s, \quad \text{то и}$$

$$O : o = R^2 : r^2 = S^2 : s^2 = A^2 : a^2.$$

§ **228.** Задачи.

1) Построить цилиндръ и конусъ, если даны радіусъ основанія r высота h и уголъ a наклоненія оси къ основанію.

2) Даны радіусъ основанія и высота прямаго цилиндра. Построить другой прямой цилиндръ, котораго боковая поверхность равнялась бы всей поверхности, а основаніе—основанію перваго цилиндра.

3) Начертить кругъ, котораго площадь равнялась бы цѣлой поверхности 1) прямаго цилиндра, 2) прямаго конуса, которыхъ радіусы основанія и высоты даны.

4) Начертить кругъ, котораго площадь равнялась бы всей поверхности прямаго усѣченнаго конуса.

5) Даны два подобные конуса; построить третій, который бы былъ подобемъ даннымъ, а объемъ его былъ среднее геометрическое между ихъ объемами.

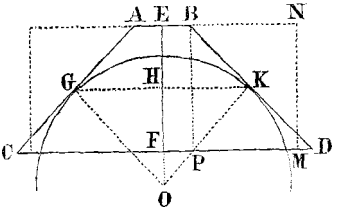
6) Построить цилиндръ, который бы былъ подобенъ данному цилиндру и котораго поверхность относилась бы къ поверхности даннаго цилиндра, какъ $m : n$.

7) Въ прямой цилиндръ вписать прямой же параллелепипедъ, котораго ребра основанія относились бы между собою какъ $1 : \sqrt{2}$. Это отношеніе берутъ, если желаютъ вырубить изъ бревна брусокъ, который бы могъ вынести наибо́льшую тяжесть.

8) Выразить въ линіяхъ отношеніе между объемами двухъ данныхъ конусовъ.

9) Построить цилиндръ и конусъ, сумма объемовъ которыхъ равнялась бы объему даннаго усѣченнаго конуса, а высота всѣхъ трехъ тѣлъ была бы одинакова.

10) *Дано сѣченіе* ABCD *по оси* EF усѣченнаго прямаго конуса. Построить прямой цилиндръ одинаковой съ конусомъ высоты, такъ что боковая поверхность равнялась бы боковой поверхности усѣченнаго конуса.

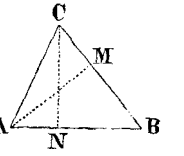


11) Усѣченный прямой конусъ разсѣчь плоскостью, параллельною основаніямъ такъ, что бы площадь сѣченія была среднею пропорціональною между площадями основаній.

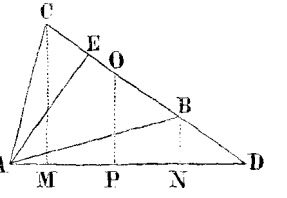
12) Чрезъ точку A, данную внѣ цилиндра, провести плоскость, которая бы коснулась его по образующей.

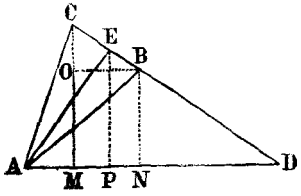
13) Чрезъ точку A внѣ конуса провести къ нему касательную плоскость.

14) Данный тре—къ ABC вращается около одной изъ его сторонъ AB, какъ около оси; построить конусъ, равновеликій полученному такимъ образомъ тѣлу вращенія такъ, чтобы площадь основанія этого конуса равнялась кривой поверхности, произшедшей отъ вращенія одной изъ сторонъ AC или BC даннаго треугольника.

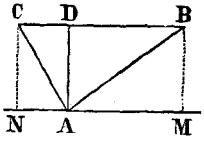


15) Данный тре—къ ABC вращается около проходящей чрезъ вершину A оси AD, которой положеніе дано и которая пересѣкается съ продолженіемъ стороны BC въ точкѣ D. Построить конусъ, котораго высота равнялась бы высотѣ AE даннаго тре—ка, а объемъ—тѣлу, произшедшему отъ вращенія тре—ка ABC.





16) Данный равноберенный тре—къ ABC вращается около проходящей чрезъ вершину A линіи AD, которой положеніе дано, и которая пересѣкаетъ продолженіе стороны BC въ точкѣ D. Построить конусъ и цилиндръ, которыхъ объемы равнялись бы поразнь объему тѣла вращенія, кромѣ того площадь основанія конуса равнялась бы кривой поверхности, описанной линіею BC, а радіусъ основанія цилиндра былъ бы равенъ перпендикуляру AB на CB.



17) Тре—къ ABC вращается около линіи MN, параллельной его сторонѣ BC и проходящей чрезъ вершину A. Построить цилиндръ и конусъ, чтобы объемъ каждаго изъ нихъ равнялся тѣлу, произшедшему отъ вращенія ABC, и кромѣ того чтобы радіусъ основанія цилиндра и высота конуса равнялись высотѣ AD тре—ка.

18) Половина правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ вращается около діаметра круга. (Фиг. § 237). 1) Построить прямой цилиндръ, котораго высота равнялась бы оси AF, а боковая поверхность — поверхности тѣла вращенія. 2) Построить цилиндръ и конусъ, чтобы объемъ каждаго изъ нихъ равнялся объему тѣла вращенія и кромѣ того радіусъ основанія цилиндра и высота конуса равнялись бы порознь аповемѣ (OT) вписаннаго многоугольника.

VI. О шарѣ.

§ **229.** Если полуокружность вращается около діаметра, какъ около оси, до тѣхъ поръ, пока она возвратится въ первоначальное положеніе, то дуга полуокружности описываетъ шаровую поверхность. Тѣло, ограниченное шаровою поверхностью, называется шаромъ, центръ вращаемаго полукруга — центромъ шара. — Всякая прямая, соединяющая центръ шара съ какою нибудь точкою, лежащею на поверхности, называется радіусомъ, а прямая, проходящая чрезъ центръ шара и соединяющая двѣ точки его поверхности, діаметромъ шара.

Изъ самаго образованія шара слѣдуетъ, что всѣ его радіусы

а слѣдовательно и всѣ діаметры равны. Поэтому шаръ можно разсматривать какъ тѣло, ограниченное поверхностью, которой всѣ точки равно отстоятъ отъ одной точки, находящейся внури шара и называемой центромъ.

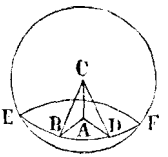
Шары, имѣющіе равные радіусы, равны; потому что если мы представимъ себѣ что они наложены такъ другъ на друга, что ихъ центры совпадаютъ, тогда и всѣ точки ихъ поверхностей должны также совпасть.

§ 230. Поверхность шара есть кривая по всѣмъ направленіямъ поверхность.

Если бы мы предположили, что какая нибудь часть поверхности шара плоска, то могли бы провести на этой части прямую линію, а взявъ на этой прямой три точки и проведя плоскость чрезъ эту прямую и центръ шара, мы получили бы три точки, лежащія на одной прямой и равно отстоящія отъ четвертой (центра шара), что невозможно (§ 29, 1).

Слѣдствіе. Прямая линія можетъ пересѣчь шаровую поверхность не болѣе какъ въ двухъ точкахъ.

§ 231. Если шаровая поверхность пересѣкается плоскостью, то линія пересѣченія будетъ кругъ.



Если плоскость сѣченія проходитъ чрезъ центръ то справедливость этой теоремы видна изъ самаго опредѣленія шара. Если же сѣкущая плоскость не проходитъ чрезъ центръ C, то опустивъ на эту плоскость изъ центра перпендикуляръ CA и соединивъ двѣ какія либо точки B и D линіи пересѣченія съ точками A и C, мы будемъ имѣть $\triangle CAB \cong CAD$ (§ 25 слѣд.), слѣд. $AB = AD$. Этотъ выводъ справедливъ для всякихъ двухъ точекъ линіи пересѣченія, и потому всѣ точки этой послѣдней равно удалены отъ точки A, слѣд. линія пересѣченія есть кругъ.

§ 232. 1) Перпендикуляръ, опущенный изъ центра шара на пересѣкающую его плоскость проходитъ чрезъ центръ круга сѣченія.

2) Линія, соединяющая центръ шара съ центромъ круга, произшедшаго отъ сѣченія шара плоскостью, перпендикулярна къ этой послѣдней.

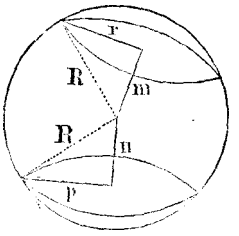
3) Перпендикуляръ, возставленный изъ центра круга сѣченія, пройдетъ чрезъ центръ шара, потому что онъ долженъ совпасть съ прямою, соединяющею эти центры (§ 151).

4) Перпендикуляры, возставленные изъ центровъ двухъ какихъ либо непараллельныхъ круговъ сѣченій встрѣчаются въ центрѣ шара.

5) Центры двухъ параллельныхъ сѣченій лежатъ на одномъ и томъ же діаметрѣ, перпендикулярномъ къ плоскостямъ обоихъ сѣченій.

6) Кругъ сѣченія опредѣляется тремя точками на поверхности шара (§ 146).

§ **233.** 1) Сѣченія, находящіяся на равныхъ разстояніяхъ отъ центра шара, равны. 2) Плоскости равныхъ сѣченій находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ центра шара. 3) Сѣченія тѣмъ болѣе, чѣмъ ближе къ центру шара. 4) Изъ двухъ неравныхъ сѣченій бо́льшее находится ближе къ центру чѣмъ меньшее.



Если изъ центра шара на двѣ сѣкущія плоскости опустимъ перпендикуляры m и n, то эти послѣдніе будутъ служить разстояніями плоскостей отъ центра шара и пройдутъ чрезъ центры сѣченій. Проведемъ въ обоихъ кругахъ сѣченій радіусы r и p и соединимъ ихъ концы съ центромъ шара радіусомъ R; тогда изъ произшедшихъ такимъ образомъ прямоугольныхъ тре—ковъ будемъ имѣть

$$R^2 = r^2 + m^2 \quad \text{и} \quad R^2 = p^2 + n^2, \quad \text{слѣд.}$$

$$r^2 + m^2 = p^2 + n^2.$$

1) Если $m = n$, то $r^2 = p^2$ или $r = p$.

2) Если $r = p$, то $m^2 = n^2$ или $m = n$.

3) Если $n < m$, то $p^2 > r^2$ или $p > r$.

4) Если $p > r$, то $n^2 < m^2$ или $n < m$.

§ **234.** 1) Сѣченіе, проходящее чрезъ центръ шара, называется большимъ кругомъ, всѣ же остальныя — малыми кругами

2) Всѣ большіе круги одного и того же шара равны между собою, потому что имѣютъ равные радіусы.

3) Два большіе круга дѣлятся взаимно пополамъ, такъ какъ ихъ плоскости проходятъ чрезъ центръ шара. потому и линія пере

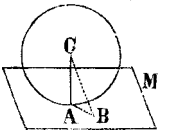
сѣченія плоскостей пройдетъ также чрезъ центръ и будетъ общимъ діаметромъ обоихъ круговъ.

4) Посредствомъ наложенія легко удостовѣриться, что шаръ и его поверхность дѣлятся пополамъ всякою плоскостью, проходящею чрезъ центръ шара. Каждая половина шара называется полушаріемъ.

5) Чрезъ двѣ діаметрально противоположныя точки поверхности шара можно провести безчисленное множество большихъ круговъ, а чрезъ двѣ не діаметрально противоположныя только одинъ большой и безчисленное множество малыхъ круговъ.

§ **235.** 1) Если плоскость M перпендикулярна къ радіусу AC въ концѣ его A, то она касается шара, т. е. имѣетъ съ нимъ только одну общую точку.

2) Плоскость M, касательная къ шару, перпендикулярна къ радіусу AC, проходящему чрезъ точку касанія.



1) Если $AC \perp M$, то соединивъ центръ C съ произвольною точкою B лежащею въ плоскости M (за исключеніемъ точки A), получимъ $CB > CA$ (153, 1); слѣд. B и всякая другая точка плоскости M, за исключеніемъ точки A, лежатъ внѣ шара.

2) Если плоскость M имѣетъ съ шаромъ только одну общую точку A, то всякая прямая BC, соединяющая центръ C съ какою нибудь точкою B плоскости M, будетъ болѣе радіуса CA, слѣд. линія CA будетъ кратчайшее разстояніе точки C отъ плоскости M, т. е. перпендикуляръ изъ точки C на плоскость M.

Слѣдствія. 1) Перпендикуляръ, опущенный изъ центра шара на касательную къ нему плоскость, пересѣчетъ эту послѣднюю въ точкѣ касанія.

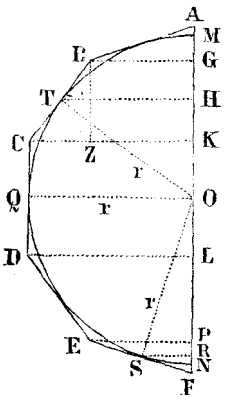
2) Перпендикуляръ къ касательной плоскости, возставленный въ точкѣ ея касанія, пройдетъ чрезъ центръ шара (§ 151).

§ **236.** 1) Всякая плоскость, пересѣкающая шаръ, дѣлитъ его на два шаровые отрѣзка или сегмента. Если сѣкущая плоскость пройдетъ чрезъ центръ шара, то каждый сегментъ будетъ полушаріемъ. Площадь круга сѣченія называется основаніемъ сегмента. Если проведемъ діаметръ перпендикулярно къ основанію, то часть его, лежащая между центромъ основанія и поверхностью шара, называется высотою шароваго сегмента.

2) Часть шаровой поверхности, заключающаяся между двумя параллельными сѣкущими плоскостями, называется зоною или шаровымъ поясомъ, а часть шара, лежащая между этими плоскостями, шаровымъ слоемъ. Площади параллельныхъ круговъ служатъ шароваму слою основаніями, а разстояніе между основаніями — высотою, такъ что эта послѣдняя, измѣряется частію радіуса шара, перпендикулярнаго къ основаніямъ и заключающагося между ними. — Если одна изъ параллельныхъ плоскостей касательна къ шару, то образуется сегментъ, имѣющій только одно основаніе.

3) Если вырѣзокъ круга сдѣлаетъ полный оборотъ около одного изъ радіусовъ, его ограничивающихъ, то образуется шаровой вырѣзокъ или сѣкторъ, а дуга круговаго вырѣзка описываетъ при этомъ поверхность шароваго сегмента.

§ **237.** Поверхность шара равна $4r^2\pi$, если r означаетъ радіусъ шара.



Если около полукруга MQN, котораго радіусъ r, опишемъ полупериметръ прав. мно—ка ABCDEF съ четнымъ числомъ сторонъ и представимъ себѣ, что вся фигура обращается около линіи AF, то ABCDEF опишетъ тѣло вращенія, а каждая изъ сторонъ — поверхность конуса, или полнаго, или усѣченнаго плоскостью, параллельною основанію, или наконецъ цилиндра. Опустимъ изъ вершинъ мно—ка перпендикуляры на ось AF, тогда отрѣзки оси AG, GK, KL . . . будутъ высотами полученныхъ отъ вращенія мно—ка полныхъ и усѣченныхъ конусовъ и цилиндра.

1) Чтобы вычислить поверхность усѣченнаго конуса, образованнаго движеніемъ линіи BC, проведемъ изъ точки B прямую $BZ \perp CK$ и изъ средины T стороны BC, т. е. изъ точки ея прикосновенія съ кругомъ, прямую $TH \perp AF$ и кромѣ того радіусъ $To = r$. Такъ какъ TH будетъ радіусъ круга средняго сѣченія усѣченнаго конуса, то (§ 226, 1).

Поверхность $BC = 2\pi \,.\, TH \,.\, BC$.

Но (по § 93, 2) $\triangle BCZ \backsim TOH$, слѣд.

$BC : TO = BZ : TH$ или

$BC : r = GK : TH$, т. е.

$BC \,.\, TH = r \,.\, GK$, слѣд.

поверхность $BC = 2\pi r \,.\, GK$.

2) Чтобы вычислить поверхность цилиндра, образованнаго движеніемъ линіи CD, проведемъ изъ точки касанія Q радіусъ QO. Такъ какъ $QO = DL$, то (§ 215, 1)

$$\text{поверхность } CD = 2\pi r \,.\, KL.$$

3) Наконецъ чтобы вычислить поверхность полнаго конуса, проведемъ изъ точки касанія S прямую $SR \perp AF$ и радіусъ SO, тогда (по § 224, 4)

$$\text{поверхность } EF = 2\pi \,.\, SR \,.\, EF.$$

Но такъ такъ $\triangle EFP \backsim OSR$, то

$$EF : r = FP : SR \quad \text{или} \quad EF \,.\, SR = r \,.\, FP, \quad \text{слѣд.}$$

$$\text{поверхность } EF = 2\pi r \,.\, FP.$$

Изъ всего этого видно, что поверхность цилиндра и полнаго или усѣченнаго конуса равняется окружности большаго круга ($2\pi r$), умноженной на высоту тѣла, такъ что

$$\text{пов. } AB = 2\pi r \,.\, AG$$

$$\text{пов. } BC = 2\pi r \,.\, GK$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{пов. } EF = 2\pi r \,.\, PF.$$

Сложивъ всѣ эти части, получимъ:

$$\text{поверхность тѣла вращенія} = 2\pi r\,(AG + GK \ldots + PF)$$
$$= 2\pi r \,.\, AF.$$

Увеличивая число сторонъ описаннаго мно—ка, мы можемъ сдѣлать разность между его периметромъ и окружностью менѣе всякой данной величины. Съ увеличеніемъ числа сторонъ величина оси AF приближается къ величинѣ діаметра, въ которую она и обращается. если число сторонъ мно—ка будетъ безконечно велико, т. е. когда мно—къ обратится въ кругъ, въ какомъ случаѣ тѣло вращенія обратится въ шаръ. Если въ выраженіе $2\pi r \,.\, AF$ воставимъ $AF = 2r$, тогда

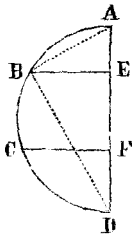
$$\text{поверхность шара} = 4r^2\pi.$$

§ 238. 1) Поверхность шара въ 4 раза больше площади его большаго круга.

2) Поверхности шаровъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ или діаметровъ. Если O и o поверхности шаровъ, R и r радіусы, D и d діаметры, то

$$O : o = 4R^2\pi : 4r^2\pi = R^2 : r^2 = D^2 : d^2.$$

§ **239.** Поверхность шароваго пояса равна $2\pi rh$, если h высота пояса, а r радіусъ шара.



Будемъ обращать полуокружность ABCD около діаметра AD, къ которому прямыя BE и CF перпендикулярны, тогда дуга AB опишетъ поверхность шароваго сегмента, а дуга BC — шаровой поясъ, которыхъ высоты будутъ AE и EF. Такимъ же образомъ какъ при вычисленіи поверхности шара въ § 237 выводится, что поверхность шароваго сегмента или пояса равняется окружности болшаго круга, умноженной на высоту сегмента или пояса. Если $AE = h$, то поверхность $AB = 2\pi rh$, и если $EF = h$, то поверхность $BC = 2\pi rh$.

§ **240.** 1) Поверхности сегментовъ или поясовъ одного и того же шара относятся какъ ихъ высоты.

2) Поверхность сегмента или пояса относится къ поверхности шара, какъ его высота къ діаметру шара.

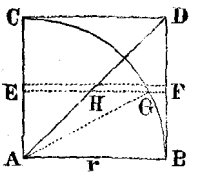
3) Если проведемъ хорду AB (фиг. 2 § 239), то изъ прямоугольнаго тре—ка ABD получимъ (§ 97, 2),

$$AB^2 = AD \,.\, AE = 2r \,.\, AE, \text{ слѣд. и}$$

$$2\pi r \,.\, AE = \pi \,.\, AB^2, \text{ т. е.}$$

Поверхность шароваго сегмента равняется площади круга, котораго радіусъ равенъ линейному разстоянію вершины сегмента отъ окружности основанія.

§ **241.** Объемъ шара равенъ $^4/_3 r^3\pi$, если r радіусъ шара.



Первое доказательство. Пусть ABDC будетъ квадратъ, котораго стороны равны радіусу r, AD діагональ квадрата и BGC четверть окружности, описанной радіусомъ r. Если будемъ обращать всю фигуру около линіи AC, какъ около оси, то квадратъ опишетъ прямой цилиндръ, тре—къ ACD — прямой конусъ, а четверть круга BGC — полушаріе. Если разсѣчемъ всѣ эти тѣла двумя плоскостями, перпендикулярными къ AC и безконечно близкими другъ къ другу, то цилиндрическій слой EF, шаровой слой EG и коническій EH можно разсматривать какъ прямые цилиндры съ безконечно малою высотою, которую назовемъ чрезъ h. Тогда

цилиндрическіе слой $= EF^2.\pi h$

шаровый слой $= EG^2.\pi h$

коническій слой $= EH^2.\pi h$.

Проведемъ линію AG, тогда въ $\triangle$ AEG

$$EG^2 = AG^2 - AE^2.$$

Такъ какъ AG EF и AE = EH, потому что $\measuredangle$ CAD = CDA = EHA, то

$$EG^2 = EF^2 - EH^2, \text{ слѣд.}$$

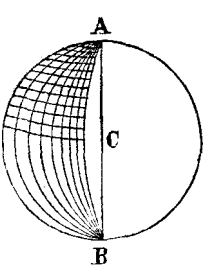
$$EG^2\pi h = EF^2\pi h - EH^2.\pi h,$$

т. е. шаровой слой равенъ цилиндрическому слою безъ коническаго. Три тѣла цилиндръ, полуокружность и конусъ, описанныя фигурами ABDC, ABGC, и ACD можно представить разсѣченными на безконечное множество такихъ безконечно тонкихъ слоевъ. Между частями тѣлъ вращенія, отсѣченными каждыми двумѣ послѣдовательными плоскостями будетъ существовать выведенное нами отношеніе, а потому и между суммами всѣхъ этихъ частей, т. е. полушаріемъ, цилиндромъ и конусомъ будетъ та же зависимость, т. е. если

цилиндръ $= r^3\pi$, конусъ $= \frac{1}{3}r^3\pi$, то

полушаріе $= r^3\pi - \frac{1}{3}r^3\pi = \frac{2}{3}r^3\pi$, или

весь шаръ $= \frac{4}{3}r^3\pi$.



Второе доказательство. Представимъ себѣ, что чрезъ концы діаметра AB проведено безчисленное множество большихъ круговъ и безчисленное множество малыхъ круговъ, перпендикулярныхъ діаметру AB. Тогда вся поверхность шара раздѣлится на безчисленное множество четыреугольниковъ и треугольниковъ, которые по причинѣ своей малости могутъ быть приняты за плоскіе. Если представимъ, что точки пересѣченія этихъ круговъ будутъ соединены съ центромъ шара, то шаръ распадется на безконечно малыя пирамиды. Высота каждой изъ этихъ пирамидъ равна радіусу шара (r), а сумма ихъ—объемовъ равна суммѣ всѣхъ ихъ основаній (т. е. поверхности шара), умноженной на треть общей высоты (т. е. радіуса r). Такъ какъ поверхность шара $= 4r^2\pi$, то объемъ шара $= 4r^2\pi \times \frac{1}{3}r = \frac{4}{3}r^3\pi$, т. е. объемъ шара равенъ трети произведенія его поверхности на радіусъ.

§ 242. 1) Если обозначимъ чрезъ d діаметръ шара, то $\frac{d}{2} = r$, слѣд.

$$\text{объемъ шара} = \frac{4}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \pi = \frac{1}{6} d^3 \pi.$$

2) Объемы K и k двухъ шаровъ относятся какъ кубы ихъ радіусовъ (R и r) или діаметровъ (D и d) потому что

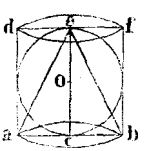
$$K : k = \tfrac{4}{3}R^3\pi : \tfrac{4}{3}r^3\pi = R^3 : r^3 = D^3 : d^3.$$

3) Если объемъ шара $\frac{4}{3}r^3\pi$ извѣстенъ, а требуется вычислить поверхность шара, то обозначая эту послѣднюю чрезъ x, можемъ поставить,

$$\tfrac{4}{3}r^3\pi = \tfrac{1}{3}rx, \text{ слѣд. } x = 4r^2\pi.$$

§ 243. (Архимедъ.) Если около шара опишемъ прямой цилиндръ, а въ этотъ послѣдній впишемъ прямой конусъ такъ, чтобы большой кругъ шара былъ общимъ основаніемъ цилиндра и конуса, а діаметръ шара общею высотою этихъ же тѣлъ, то будемъ имѣть такое отношеніе:

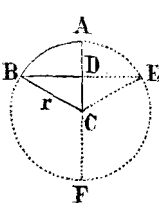
$$\text{объемъ кон.} : \text{об. шара} : \text{об. цил.} = 1 : 2 : 3.$$



Если обозначимъ чрезъ r радіусъ шара, то объемы конуса, шара и цилиндра будутъ $\frac{2}{3}r^3\pi$, $\frac{4}{3}r^3\pi$, $2r^3\pi$, слѣд. объемы этихъ трехъ тѣлъ относятся какъ

$$\tfrac{2}{3}r^3\pi : \tfrac{4}{3}r^3\pi : 2r^3\pi = 1 : 2 : 3.$$

§ 244. Объемъ сферическаго вырѣзка равняется $\frac{2}{3}\pi r^2 h$, гдѣ r означаетъ радіусъ шаръ, а h высоту шароваго сегмента, ограничивающаго шаровой вырѣзокъ.



Пусть ABC будетъ круговой секторъ, отъ обращенія котораго около радіуса AC получился шаровой секторъ ABCEA. Такъ какъ шаръ можно разсматривать какъ совокупность пирамидъ, имѣющихъ безконечно малыя основанія и равную радіусу шара высоту, то и шаровой секторъ можно разбить на подобныя же пирамиды. Изъ этого представленія легко найти объемъ сектора, умноживъ ограничивающую его поверхность шароваго сегмента на треть радіуса. Если $AD = h$, то поверхность шароваго сегмента, описаннаго вращеніемъ дуги AB около радіусу AC, равна $2\pi rh$, слѣд. объемъ сектора $= \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

§ 245. Объемъ сферическаго сегмента равняется $h^2\pi(r - \frac{1}{3})$, гдѣ r радіусъ шара, а h высота сегмента.

Если въ круговомъ секторѣ ABCEA (фиг. § 244) проведемъ радіусъ AC перпендикулярно къ хордѣ BC и всю фигуру будемъ вращать около радіуса AC, то отъ вращенія сектора получимъ сферическій секторъ, отъ вращенія площади ABD — сферическій сегментъ, и наконецъ отъ вращенія тре—ка BDC — прямой конусъ. Изъ самаго образованія сегмента ABEA видно, что онъ равняется сектору ABCEA безъ прямаго конуса CBE. Обозначивъ AC чрезъ r, а AD чрезъ h, получимъ

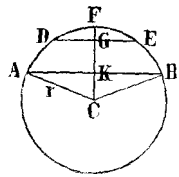
$CD = r - h$ и $BD^2 = r^2 - (r - h)^2 = (2r - h)\,h$, слѣд.

конусъ $CBE = \frac{1}{3}BD^2\pi \,.\, CD = \frac{1}{3}(2r - h)\,h\pi\,(r - h)$.

Но такъ какъ секторъ $ABCEA = \frac{2}{3}\pi r^2 h$, то

$$\text{сегментъ} = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h - \tfrac{1}{3}(2r - h)\,h\pi\,(r - h)$$
$$= \tfrac{1}{3}h\pi\left[2r^2 - (2r - h)(r - h)\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}h\pi\,(3r - h) = h^2\pi\,(r - \tfrac{1}{3}h).$$

§ 246. Сферическій слой ADEB равенъ разности между сегментами FABF и FAEF. Если даны высоты сегментовъ $FK = H$ и $FG = h$, и радіусъ шара $AC = r$, то



$$\text{сфер. слой} = H^2\pi\,(r - \tfrac{1}{3}H) - h^2\pi\,(r - \tfrac{1}{3}h)$$
$$= \pi r\,(H^2 - h^2) - \tfrac{1}{3}(H^3 - h^3).$$

§ 247. Задачи.

1) Провести къ шару касательную плоскость, которая бы проходила чрезъ данную точку P, лежащую внѣ шара.

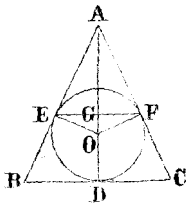
2) Провести плоскость касательную къ двумъ шарамъ.

3) Построить цилиндръ, котораго основаніе равнялось бы большему кругу шара, а боковая поверхность была равновелика данному поясу того же шара.

4) Построить кругъ, котораго площадь равновелика данному шаровому поясу.

5) Раздѣлить параллельными кругами поверхность шара на части, которыя бы относились какъ $m : n : p$.

6) Построить шаровой поясъ, который бы относился къ площади основанія его какъ $m : n$.



7) Данъ прямой конусъ. Построить въ немъ шаръ, который бы соприкасался съ боковою поверхностью конуса по кругу, и касался основанія конуса въ центрѣ (D); выразить радіусъ (EG) круга соприкосновенія конуса съ шаромъ посредствомъ образующей (AB) и радіуса основанія (BD).

8) Около даннаго конуса описать шаръ, котораго поверхность прошла бы чрезъ вершину конуса и совмѣстилась съ окружностью основанія.

9) Въ данную трехстороннюю пирамиду вписать шаръ, который бы коснулся каждой стороны пирамиды.

10) Даны радіусы a, b, c трехъ шаровъ, лежащихъ на одной плоскости и соприкасающихся между собою. Найти стороны тре—ка, котораго вершины лежатъ въ точкахъ прикосновенія плоскости съ шарами.

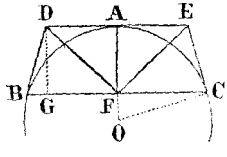
11) Построить шаровой секторъ, котораго объемъ равнялся бы объему, а ограничивающій его шаровой сегментъ — основанію косаго конуса.

12) Построить шаровой сегментъ, котораго объемъ равняется конусу, имѣющему съ нимъ общее основаніе, а вершину въ центрѣ шара.

13) Посроить шаровой сегментъ, котораго поверхность равняется поверхности конуса, имѣющаго съ первымъ общее основаніе, а вершину въ центрѣ шара.

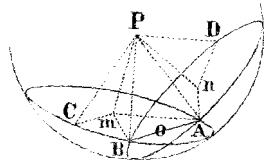
14) На основаніи щароваго сегмента построить равновеликій ему конусъ.

15) Отъ даннаго шара отрѣзать сегментъ, котораго объемъ относился бы къ объему соотвѣтствующаго ему сектора какъ m : n.



16) Около шароваго сегмента BAC описанъ прямой усѣченный конусъ BDEC равной съ сегментомъ высоты и при томъ такъ, что всѣ образующія этого конуса касаются шара въ точкахъ основанія сегмента. Обратить тѣло, заключающееся между поверхностью шара и усѣченнаго конуса, въ полный конусъ, который бы имѣлъ равную съ сегментомъ высоту.

17) Даны высота h и радіусы a, и b верхняго и нижняго основаній шароваго слоя. Построить цилиндръ, котораго высота $= \frac{1}{2}h$, и котораго объемъ, сложенный съ шаромъ діаметра h, равновеликъ данному шаровому слою.



18) Доказать, что чрезъ четыре точки A, B, C, D, не лежащія въ одной плоскости, можно провести только одну сферическую поверхность.

19) Около данной трехсторонней пирамиды описать сферическую поверхность.

20) Описать шаровую поверхность, которая бы прошла чрезъ всѣ *точки двухъ пересѣкающихся въ пространствѣ круговъ.*

21) Описать шаровую поверхность, если дана какая нибудь часть этой поверхности.

22) Доказать, что внутри всякаго правильнаго многогранника есть точка, которая равно удалена отъ всѣхъ его вершинъ, и отъ всѣхъ сторонъ.

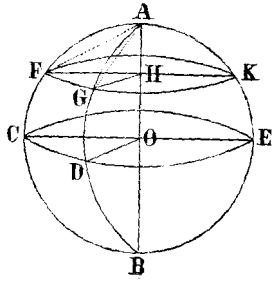
23) Около правильнаго многогранника описать шаръ, и въ правильномъ многогранникѣ вписать шаръ.

24) Описать шаръ, который бы касался всѣхъ реберъ правильнаго многогранника.

§ 248. Подъ сферическимъ разстояніемъ двухъ лежащихъ на одномъ и томъ же шарѣ точекъ разумѣется меньшая изъ дугъ большаго круга, проходящаго чрезъ эти точки.

Полюсами какого либо круга, проведеннаго на шарѣ, называются точки, въ которыхъ діаметръ, перпендикулярный къ плоскости этого круга, пересѣкаетъ поверхность шара. Діаметръ, соединяющій полюсы круга называется осью этого послѣдняго

§ 249. Каждый изъ полюсовъ равно удаленъ отъ всѣхъ точекъ соотвѣтствующаго ему круга.



Положимъ что діаметръ AB перпендикуляренъ къ площади большаго круга CDE и малаго FGK. Дуги AC, AD, BC, BD . . . равны между собою, потому что каждая изъ нихъ есть четверть окружности.

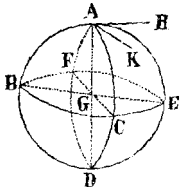
Относительно малаго круга хорды AF и AG равны (§ 153, 2), слѣд. и дуги AF и AG, BF и BG также равны.

Слѣдствія. 1) Каждый полюсъ большаго круга отстоитъ отъ всякой точки этого послѣдняго на 90°.

2) Параллельные круги имѣютъ общіе полюсы и общую ось.

3) Если точка A шара отстоитъ на 90° отъ двухъ какихъ либо точекъ C и D, того же шара не лежащихъ на концахъ одного и того же діаметра, то она есть полюсъ большаго круга, проходящаго чрезъ эти точки.

Такъ какъ дуга AC = AD = 90°, то ∠ AOC = AOD = R, а потому AO перпендикулярна къ плоскости CDE, слѣд. A есть полюсъ круга CDE.



§ 250. 1) Угломъ двухъ большихъ круговъ, напр. CAE называется уголъ наклоненія плоскостей этихъ круговъ. — Уголъ CAE называется сферическимъ угломъ, дуги AC и AE его сторонами, а точка A — его вершиною.

2) Сферическій уголъ CAE равенъ углу HAK, образованному линіями, касающимися его сторонъ въ вершинѣ A. Такъ какъ эти касательныя находятся въ плоскостяхъ сторонъ AC и AE. и перпендикулярны къ линіи AD пересѣченія этихъ плоскостей (§ 48 2). то HAK служитъ мѣрою наклоненія плоскостей (§ 107, 3).

3) Сферическій уголъ CAE измѣряется дугою CE, описанною изъ его вершины A четвертью окружности большаго круга, какъ радіусомъ, и заключающеюся между сторонами этого угла. Такъ какъ ∠ AGC = AGE = R, то ∠ CGE будетъ угломъ наклоненія плоскостей кругъ CA и EA; но дуга CE служитъ мѣрою углу CGE, слѣд. она будетъ измѣрять и уголъ CAE.

4) Часть поверхности шара, ограниченная двумя полуокружностями большаго круга называется сферическимъ двусторонникомъ. Оба сферическіе угла двусторонника равны.

5) Часть поверхности шара, ограниченная тремя дугами большихъ круговъ, называется сферическимъ треугольникомъ. Сферическіе тре—ки, подобно прямолинейнымъ, бываютъ прямоугольные, тупоугольные и остроугольные. Мы будемъ разсматривать только такіе сферическіе треугольники, которыхъ стороны и углы, каждый въ отдѣльности, менѣе 180°.

6) Равными сферическими тре—ками называются такіе, которые при взаимномъ наложеніи другъ на друга совмѣщаются всѣми своими частями. Если же всѣ части сферическихъ тре—ковъ попарно равны, но расположены въ обратномъ порядкѣ, то тре—ки называются симметричными.

§ 251. Если чрезъ центръ шара и стороны сферическаго тре—ка проведемъ плоскости, то получится трегранный уголъ, котораго плоскіе углы равны сторонамъ, а двугранные равны угламъ сферическаго тре—ка. Такимъ образомъ каждому сфер. тре—ку соотвѣтствуетъ трегранный уголъ, съ вершиною въ центрѣ шара и наоборотъ, — каждому трегранному углу соотвѣтствуетъ сферическій тре—къ, который получится, если мы какимъ нибудь радіусомъ изъ вершины трегранного угла какъ изъ центра опишемъ шара, при чемъ точки пересѣченія реберъ угла съ поверхностью шара будутъ вершинами сферическаго тре—ка.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что всѣ теоремы, выведенныя въ §§ 177 до 184 для плоскихъ и двугранныхъ угловъ трегранного угла, могутъ быть прямо отнесены къ сферическимъ тре—камъ, если мы вмѣсто двугранныхъ и плоскихъ угловъ трегранного вставимъ соотвѣтствующія части сферическаго тре—ка, т. е. стороны и углы. Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующія теоремы.

1) Въ сферическомъ тре—кѣ сумма двухъ сторонъ болѣе третьей. (§ 177).

2) Въ сферическомъ тре—кѣ сумма всѣхъ сторонъ менѣе 4R, т. е. менѣе периметра большаго круга сферы (§ 178).

3) Сумма трехъ угловъ сферическаго тре—ка болѣе 2R и менѣе 6R. (§ 180).

4) Два сферическіе те—ка равны или симметричны, если въ нихъ попарно равны:

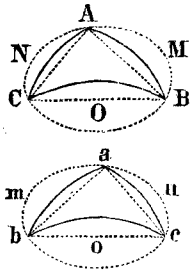
a) три стороны (§ 181, 1), или

b) три угли (§ 181, 2), или

c) двѣ стороны и лежащій между ними уголъ (§ 181, 3), или

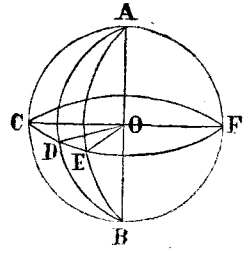
d) два угла и лежащая между ними сторона (§ 181, 4).

§ 252. Два симметричные тре—ка ABC и abc равновелики.



Такъ какъ дуги AB и ab, AC и ac, AC и bc равны между собою, то и хорды ихъ равны, слѣд. плоскій △ ABC ≅ abc. Если мы около этихъ тре—ковъ опишемъ окружности, то эти послѣднія будутъ равны между собою, слѣд. и равно удалены отъ центра шара (§ 233, 2), а потому поверхности шаровыхъ сегментовъ, которыхъ основаніями служатъ эти круги, должны быть равны другъ другу (§ 240, 1). Очевидно, что двухугольная фигура M, ограниченная двумя пересѣкающимися дугами, равна фигурѣ m; подобнымъ образомъ N = n и O = o. Отнявъ отъ равныхъ между собою поверхностей шаровыхъ сегментовъ равныя фигуры M, N, O и m, n, o, мы получимъ въ остаткѣ равновеликіе тре—ки ABC и abc.

§ 253. Поверхность сферическаго двусторонника относится къ поверхности шара, какъ уголъ двусторонника къ четыремъ прямымъ.



Если два сфер. двусторонника имѣютъ равные углы CAD и DAE, то они равны, потому что при наложеніи взаимно закроются. Если одинъ двусторонникъ ADBEA откладывается цѣлое число разъ на другомъ, AEBFA то и уголъ перваго отложится цѣлое число разъ на углѣ втораго, а если большой кругъ CDEF перпендикуляренъ къ сторонамъ двусторонника, то и дуга DE отложится тоже число разъ на дугѣ EF. Если при наложеніи получится остатокъ, то съ помощію такого же какъ въ §§ 53 и 168 пріема можно убѣдиться, что и въ этомъ случаѣ двусторонники будутъ относиться какъ ихъ углы. Разсматривая всю поверхность шара какъ двусторонникъ котораго уголъ = 4R, мы получимъ такую пропорцію: поверхность сфер. двусторонника относится къ поверхности шара, какъ уголъ его къ 4R, или измѣряющая его уголъ дуга къ окружности большаго круга.

§ 254. 1) Двусторонники того же шара, имѣющіе равные углы, равны между собою.

2) Для вычисленія поверхности двусторонника Z по данному углу A и радіусу r или поверхности O шара имѣемъ:

$$Z : 4r^2\pi = A : 4R \quad \text{или} \quad Z : O = A : 4R. \quad \text{слѣд.}$$

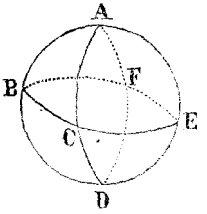
$$Z = \frac{Ar^2\pi}{R} \quad \text{или} \quad Z = \frac{A}{4R} \cdot O.$$

Углы A и R должны быть выражены въ единицахъ одного и тогоже названія, т. е. въ градусахъ минутахъ, или секундахъ.

3) Тѣло K, отсѣкаемое отъ шара плоскостями, проходящими чрезъ стороны двугранника, заключается столько разъ въ шарѣ, сколько разъ уголъ двусторонника заключается въ 4R, т. е.

$$K : \tfrac{4}{3} r^3 \pi = A : 4R, \text{ слѣд. } K = \frac{r^3 \pi}{3R} \cdot A.$$

§ 255. Поверхность сферическаго треугольника ABC относится къ цѣлой поверхности шара O, какъ сферическій избытокъ, т. е. разность между суммою его угловъ и 2R, относится къ 8R.



Продолжимъ стороны тре—ка ABC такъ, чтобы онѣ составили полные круги, которые пересѣкутся въ точкахъ D, E, F, діаметрально противоположныхъ точкамъ A, B, C, тогда (§ 254, 2)

$$ABC + BCD = \text{двустороннику } ABDCA = \frac{A}{4R} \quad O$$

$$ABC + ACE = \text{двустороннику } BAECB = \frac{B}{4R} \quad O$$

$$ABC + ABF = \text{двустороннику } CAFBC = \frac{C}{4R} \quad O$$

Сложивъ эти равенства и вставивъ ABF = DCE (§ 252), получимъ

$$3ABC + BCD + ACE + DCE = \frac{A + B + C}{4R} \cdot O$$

Но $ABC + BCD + ACE + DCE = \frac{1}{2} O$. слѣд.

$$2ABC + \tfrac{1}{2} O = \frac{A + B + C}{4R} \cdot O, \text{ откуда}$$

$$ABC = \frac{(A + B + C - 2R)\ O}{8R} \quad \text{или}$$

$$\frac{ABC}{O} = \frac{A + B + C - 2R}{8R}$$

§ 256. 1) Такъ какъ поверхность шара $O = 4r^2\pi$, то плоскость сферическаго тре—ка выражается помощію угловъ тре—ка и радіуса r такъ:

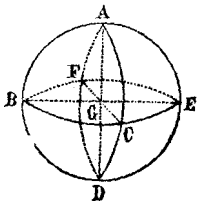
$$\triangle ABC = \frac{A+B+C-2R}{8R} \quad 4r^2\pi = \frac{A+B+C-2R}{2R} \cdot r^2\pi$$

$$\text{т. е.} \quad \triangle ABC = \frac{A+B+C-180^0}{180^0} \cdot r^2\pi$$

Въ этихъ формулахъ углы A, B, C и R должны быть выражены въ однѣхъ и тѣхъ же единицахъ угловой мѣры.

2) Всѣ сферческіе тре—ки на одномъ и томъ же шарѣ равновелики, если сумма ихъ угловъ равна.

3) Поверхности сфер. тре—ковъ одного и тогоже шара относятся какъ ихъ сферическіе избытки.



§ 257. 1) Тремя плоскостями, проведенными чрезъ центръ шара перпендикулярно другъ къ другу, шаровая поверхность дѣлится на 8 частей, которыя равны между собою, въ чемъ легко удостовѣриться чрезъ наложеніе. Каждая изъ этихъ частей, напр. ABC, замкнута дугами, равными четвертямъ окружностей большихъ круговъ, пересѣкающихся подъ прямыми, углами, называется сферическимъ октантомъ.

2) За единицу мѣры шаровой поверхности иногда принимается сфер. октантъ. При такой единицѣ мѣры поверхность шара равна 8.

3) Если за единицу угловой мѣры примемъ прямой уголъ, а за единицу мѣры сферической поверхности — сферическій октантъ, то поверхность сфер. треугольника равна сферическому избытку.

Такъ какъ сфер. октантъ $= \frac{1}{8} \cdot 4r^2\pi$, то $r^2\pi = 2$ сфер. октантамъ. Вставивъ это выраженіе въ выведенную выше формулу

$$\triangle ABC = \frac{A+B+C-2R}{2R} \cdot r^2\pi, \text{ получимъ}$$

$$\triangle ABC = \left(\frac{A+B+C-2R}{R}\right) \text{ сфер. окт.}$$

Но R и сфер. октантъ единицы мѣры, слѣд.

$$\triangle ABC = A+B+C-2.$$

Если напр. каждый изъ угловъ сфер. тре—ка ABC равенъ R, то $\triangle ABC = \frac{4}{3} \times 3 - 2 = 2$, т. е. равенъ 2 сфер. октантамъ или четверти поверхности сферы.

4) Если обозначимъ чрезъ A отношеніе угла сфер. двусторонника Z

къ прямому углу, то поверхность двусторонника Z равна 2A шаровымъ октантамъ.

Это предложеніе выведется изъ пропорцій $Z:8=A:4$, слѣд. $Z=2A$.

5) Поверхность сфер. тре—ка равняется поверхности сфер. двусторонника, котораго уголъ равенъ половинѣ сфер. избытка этого тре—ка.

Обозначимъ чрезъ x уголъ сфер. двусторонника, равновеликаго данному сфер. тре—ку, и приравняемъ выраженія этихъ поверхностей; тогда получимъ (§ 254, 2 и § 256, 1.)

$$\frac{xr^2\pi}{R}=\frac{A+B+C-2R}{2R}\cdot r^2\pi, \quad \text{слѣд.}$$

$$x=\tfrac{1}{2}(A+B+C)-R.$$

§ 258. 1) Найти поверхность сфер. многоугольника, т. е. части шаровой поверхности, ограниченной болѣе чѣмъ тремя дугами большихъ круговъ, если дано число сторонъ (n), сумма угловъ (S) и радіусъ шара (r).

Проведя изъ какой либо вершины много—ка дуги большихъ круговъ въ остальныя его вершины, мы получимъ (n—2) сферическихъ тре—ковъ. Если обозначимъ чрезъ s, s′, s″ . . . суммы угловъ каждаго изъ этихъ тре—ковъ, то поверхности ихъ будутъ (§ 256, 1):

$$\frac{s-180^0}{180^0}\cdot r^2\pi, \quad \frac{s'-180^0}{180^0}\cdot r^2\pi, \quad \frac{s''-180^0}{180^0}\cdot r^2\pi \ldots \text{ слѣд.}$$

$$\text{мно—къ}=\frac{s+s'+s''\ldots-(n-2)\,180^0}{180^0}\cdot r^2\pi=\frac{S-(n-2)\,180^0}{180}\cdot r^2\pi$$

гдѣ S должно быть выражено въ градусахъ и частяхъ градуса.

2) Если принимать за единицы мѣры прямой уголъ и сферическій октантъ, то поверхностъ сфер. мно—ка равна S—2 (n—2).

§ 259. Найти объемъ шаровой пирамиды, т. е. части шара, ограниченной сфер. много—комъ и плоскостями, проведенными чрезъ стороны сфер. мно—ка, если даны радіусъ (r) шара и углы много—ка.

Можно представить себѣ, что шаровая пирамида состоитъ изъ безконечно большаго числа безконечно малыхъ пирамидъ, которыя имѣютъ общую вершину въ центрѣ шара, основанія которыхъ составляютъ ограничивающій пирамиду сфер. мно—къ, а высоты равны радіусу (r) шара. Изъ этого слѣдуетъ, что объемъ шаровой пирамиды равняется поверхноси сфер. мно—ка, умноженной на $\frac{1}{3}r$.

Если основаніе сфер. пирамиды будетъ сфер. тре—къ, котораго углы A, B, C, то объемъ шаровой пирамиды (§ 256, 1)

$$= \frac{A + B + C - 180^0}{540^0} \cdot r^3 \pi$$

Если же основаніе мно—къ, въ которомъ n сторонъ и сумма угловъ = S, тогда объемъ шаровой пирамиды (§ 258, 1)

$$= \frac{S - (n - 2)\,180^0}{540^0} \cdot r^3 \pi.$$

§ 260. Задачи.

1) На данномъ шарѣ провести большой кругъ, котораго полюсомъ была бы данная точка A.

2) На шарѣ начертить кругъ, котораго полюсъ и радіусъ даны.

3) Провести дугу большаго круга чрезъ данныя двѣ точки на шарѣ.

4) Продолжить данную дугу большаго круга.

5) Найти полюсъ большаго или малаго круга, проведеннаго на шарѣ.

6) Построить сфер. мно—къ, который былъ бы симметриченъ данному сфер. мно—ку.

7) Чрезъ данную точку на дугѣ большаго круга провести дугу, перпендикулярную къ первой.

8) Изъ данной точки, лежащей внѣ большаго круга, провести къ этому кругу перпендикулярную дугу.

9) Раздѣлить пополамъ данную на шарѣ дугу.

10) Раздѣлить пополамъ данный сферическій уголъ.

11) Чрезъ данную на шарѣ точку провести большой кругъ, который бы пересѣкъ другой большой кругъ подъ даннымъ угломъ.

12) При данной точкѣ большаго круга построить сфер. уголъ, равный данному.

13) Около даннаго сфер. тре—ка описать кругъ.

14) Въ данномъ сфер. тре—кѣ вписать кругъ

15) Построить сфер. тре—къ по даннымъ 1) тремъ сторонамъ, 2) тремъ угламъ, 3) двумъ сторонамъ и заключающемуся между ними углу, 4) двумъ угламъ и лежащей между ними сторонѣ.

16) Чрезъ данную на шарѣ точку P провести большой кругъ, который бы касался даннаго малаго круга.

17) Провести большой кругъ, который бы касался даннаго малаго круга K, и имѣлъ бы полюсомъ точку P.

18) Провести большой кругъ, который бы касался двухъ данныхъ малыхъ круговъ.

19) Доказать, что меньшая дуга окружности большаго круга, заключающаяся между двумя лежащими на шарѣ точками, менѣе дуги всякаго малаго круга, заключеющейся между тѣмъ же точками.

ПЛОСКАЯ

ТРИГОНОМЕТРІЯ

для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ.

Составилъ

К. ГЕХЕЛЬ,

Докторъ математики въ Дерптѣ.

2. изданіе.

Дерптъ и Рига.

Изданіе типографіи Шнакенбурга.

1880.

Дозволено цензурою Дерптъ, 12. Апрѣля 1880 г.
Цензоръ П. Ф. Руммелъ.

Оглавленіе.

Введеніе.

§ 1 Если дано столько частей треугольника, сколько нужно для его опредѣленія, то остальныя части могутъ быть найдены двоякимъ способомъ: построеніемъ или вычисленіемъ. Если части, нужныя для опредѣленія тре—ка, даны на чертежѣ, то искомыя опредѣляются съ помощію построенія. Способы такого рѣшенія задачи даетъ Геометрія. Если же данныя стороны выражены числомъ въ какихъ либо опредѣленныхъ единицахъ длины, а углы даны въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, то искомыя части могутъ быть вычислены, т. е. выражены въ соотвѣтствующихъ имъ единицахъ.

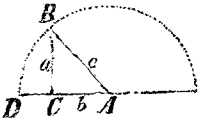
Наука, которая учитъ вычислять по достаточному количеству данныхъ частей тре—ка остальныя его части, называется плоскою тригонометріею.

Такъ какъ въ число данныхъ и искомыхъ частей тре—ка входятъ стороны и углы, — величины разнородныя, то однѣ изъ нихъ не могутъ быть вычислены непосредственно изъ другихъ. Для устраненія этого неудобства въ Тригонометріи вмѣсто угловъ вводятъ въ вычисленіе линій, величина и направленіе которыхъ находятся въ тѣсной связи съ величиною соотвѣтствующаго имъ угла.

Посредствомъ этихъ то воспомогательныхъ линій легко выражается зависимость между сторонами и углами треугольника.

I. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ.

§ **2.** Если будемъ описывать произвольнымъ радіусомъ AD полуокружность, то при движеніи радіусъ будетъ образовать со своимъ первоначальнымъ положеніемъ всѣ возможные углы, какіе только могутъ встрѣчаться въ тре—кѣ. Разсмотримъ сначала какой нибудь острый уголъ BAD, который для краткости будемъ обозначать буквою A.



Опустимъ изъ конца (B) вращающагося радіуса на AD перпендикуляръ BC и обозначимъ черезъ a, b, c числовыя величины сторонъ тре—ка ABC, тогда отношеніе $\frac{a}{c}$ называется синусомъ угла A и пишется

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

Отношеніе $\frac{b}{c}$ называется косинусомъ угла A и пишется

$$\cos A = \frac{b}{c}.$$

Отношеніе $\frac{\sin A}{\cos A}$, т. е. $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$ называется тангенсомъ угла A и обозначается

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{b}.$$

Отношеніе $\frac{\cos A}{\sin A}$, т. е. $\frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a}$ называется котангенсомъ угла A и обозначается

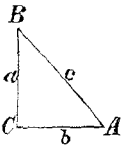
$$\operatorname{cotg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b}{a}.$$

Эти четыре отношенія, которыя суть числа отвлеченныя, называются тригонометрическими величинами угла A или соотвѣтствующей ему дуги BD.

Въ частномъ случаѣ, когда радіусъ $c = 1$, числовая величина синуса A, равнаго $\frac{a}{c}$, совпадаетъ съ числовою величиною перпендикуляра BC, такъ что $\sin A = a$. Въ томъ же случаѣ $\cos A = b$.

§ **3.** Изъ опредѣленія тригонометрическихъ величинъ слѣдуетъ, что въ прямоугольномъ тре—кѣ

1) синусъ остраго угла равняется противолежащему катету, раздѣленному на гипотенузу,



$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{b}{c};$$

2) косинусъ остраго угла равняется прилежащему катету, раздѣленному на гипотенузу,

$$\cos A = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c};$$

3) тангенсъ остраго угла равняется противолежащему катету, раздѣленному на прилежащій катетъ,

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a};$$

4) котангенсъ остраго угла равняется прилежащему катету, раздѣленному на противолежащій катетъ,

$$\operatorname{cotg} A = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{cotg} B = \frac{a}{b}.$$

§ **4.** Такъ какъ въ прямоугольномъ тре—кѣ острые углы A и B служатъ взаимно дополненіемъ до прямаго угла, то вмѣсто B можно взять $90^0 - A$. По § 3 имѣемъ равенства

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ и } \cos B = \frac{a}{c}, \qquad \cos A = \frac{b}{c} \text{ и } \sin B = \frac{b}{c},$$

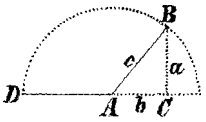
$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \text{ и } \operatorname{cotg} B = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{cotg} A = \frac{b}{a} \text{ и } \operatorname{tg} B = \frac{b}{a},$$

слѣдовательно

$$\mathbf{\sin A = \cos (90^0 - A)}$$
$$\mathbf{\cos A = \sin (90^0 - A)}$$
$$\mathbf{\operatorname{tang} A = \operatorname{cotg} (90^0 - A)}$$
$$\mathbf{\operatorname{cotg} A = \operatorname{tang} (90^0 - A)}$$

Такимъ образомъ синусъ, косинусъ, тангенсъ и котангенсъ остраго угла соотвѣтственно равны косинусу, синусу, котангенсу и тангенсу угла дополняющаго этотъ острый до прямаго.

§ **5.** Разсмотримъ теперь тригонометрическія величины тупаго угла BAD = A.



Опустимъ изъ конца B вращающагося радіуса AB перпендикуляръ BC на первоначальное направленіе радіуса AD, тогда отрѣзокъ AC приметъ положеніе, противоположное тому, которое бы онъ имѣлъ, если бы уголъ BAD былъ острый. Такая противоположность направленія выражается въ Геометріи отрицательнымъ знакомъ, такъ что при числовой величинѣ b отрѣзка AC должно поставить знакъ минусъ (—). Соображаясь съ § 2 получимъ:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \qquad \cos A = \frac{-b}{c} = -\frac{b}{c}.$$

По предъидущему для остраго угла BAC

$$\sin BAC = \frac{a}{c}, \qquad \cos BAC = \frac{b}{c}, \qquad \text{слѣд.}$$

$$\sin A = \sin BAC, \quad \cos A = -\cos BAC.$$

Такъ какъ углы BAD = A и BAC служатъ взаимно дополненіемъ до 180^0, то уголъ BAC = 180^0 — A, слѣд.

$$\mathbf{\sin A = \sin (180^0 - A)}$$
$$\mathbf{\cos A = -\cos (180^0 - A)}$$
$$\mathbf{tang\ A = -tang\ (180^0 - A)}$$
$$\mathbf{cotg\ A = -cotg\ (180^0 - A)}$$

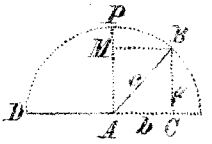
Два послѣднія уравненія слѣдуютъ непосредственно изъ двухъ первыхъ, такъ какъ тангенсъ всякаго угла равенъ частному отъ раздѣленія синуса этого угла на его косинусъ, а котангенсъ обратному частному.

Изъ предъидущихъ равенствъ слѣдуетъ, что тригон. величины смежныхъ угловъ, независимо отъ знака, равны между собою.

Косинусы, тангенсы и котангенсы двухъ смежныхъ угловъ отличаются знаками, а синусы совершенно равны, такъ что каждый синусъ можетъ принадлежать двумъ угламъ. По этой причинѣ опредѣленіе угла съ помощію одного только его синуса невозможно.

§ **6.** Тригонометрическія величины тупаго угла могутъ быть выражены съ помощію тригонометрическихъ величинъ остраго еще и другимъ способомъ.

Проведемъ въ полуокружности, при центрѣ которой находится тупой уголъ $BAD = A$, линію $BC \perp DC$, радіусъ $AP \perp AD$ и изъ точки B линію $BM \perp AP$. Тогда въ прямоугольникѣ $ACBM$ линія $AM = a$ $BM = b$. Такъ какъ



$$\sin A = \frac{a}{c}, \qquad \cos BAM = \frac{AM}{c} = \frac{a}{c},$$

$$\cos A = -\frac{b}{c}, \qquad \sin BAM = \frac{BM}{c} = \frac{b}{c},$$

и уголъ $BAM = A - 90$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{\sin A} &= \mathbf{\cos (A - 90^0)} \\ \mathbf{\cos A} &= -\mathbf{\sin (A - 90^0)} \\ \mathbf{tang\, A} &= -\mathbf{cotg\, (A - 90^0)} \\ \mathbf{cotg\, A} &= -\mathbf{tang\, (A - 90^0)} \end{aligned}$$

Такимъ образомъ синусъ тупаго угла равняется косинусу угла, который меньше его на 90^0; косинусъ тупаго угла равняется отрицательному синусу угла, на 90^0 меньшаго и т. д.

§ **7.** Вообще синусъ и косинусъ можно опредѣлить такъ:

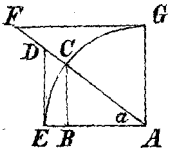
Синусъ угла или его дуги есть дробь, которой числитель есть перпендикуляръ, опущенный изъ одного конца дуги на діаметръ, проходящій черезъ другой конецъ, а знаменатель радіусъ дуги; косинусъ есть часть радіуса, заключающаяся между основаніемъ этого перпендикуляра и центромъ дуги, раздѣленная на весь радіусъ.

Между тригон. величинами употребляютъ иногда секансъ и косекансъ, величины обратныя косинусу и синусу, именно

$$\sec a = \frac{1}{\cos a}, \quad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a};$$

но мы не будемъ разсматривать эти величины, какъ совершенно излишнія.

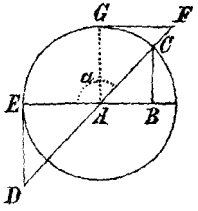
§ **8.** Тригонометрическія величины могутъ быть представлены въ видѣ прямыхъ линій слѣдующимъ образомъ.



Опишемъ изъ вершины остраго угла a произвольнымъ радіусомъ, который принимается за единицу мѣры, четверть окружности; проведемъ изъ оконечностей ея E и G касательныя до пересѣченія ихъ съ продолженной стороной AC угла a, и опустимъ $CB \perp AE$, тогда $\sin a$ выразится линіею CB, а $\cos a$ линіею AB. Такъ какъ

$$\operatorname{tg} a = \frac{CB}{AB} = \frac{DE}{AE}, \quad \operatorname{cotg} a = \frac{AB}{CB} = \frac{FG}{AG}, \text{ и}$$

$AE = AG = 1$, то $\operatorname{tg} a = DE$, $\operatorname{cotg} a = FG$.



Если уголъ $CAE = a$ тупой, то описавъ точно также изъ A радіусомъ, равнымъ единицѣ, окружность и возставивъ изъ A перпендикуляръ AG къ AE, проведемъ черезъ G и E касательныя до пересѣченія ихъ въ F и D съ продолженіемъ стороны AF и опустимъ $CB \perp AB$; тогда $\sin a = CB$, $\cos a = AB$, $\operatorname{tg} a = DE$, $\operatorname{cotg} a = FG$. Что двѣ послѣднія линіи отрицательны, видно изъ ихъ направленія, противоположнаго тому, которое было бы въ остромъ углѣ.

II. Выводъ тригонометрическихъ формулъ.

§ **9.** Если одна изъ тригон. величинъ дана, то остальныя три могутъ быть вычислены при помощи трехъ уравненій, которыя показываютъ взаимную связь тригон. величинъ. Два такія уравненія даны въ § 2

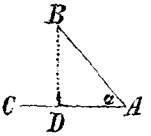
(1) $$\mathbf{tang\, a} = \frac{\mathbf{sin\, a}}{\mathbf{cos\, a}}$$

(2) $$\mathbf{cotg\, a} = \frac{\mathbf{cos\, a}}{\mathbf{sin\, a}}$$

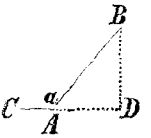
Къ этимъ двумъ прибавимъ выраженіе

(3) $$\mathbf{sin^2 a + cos^2 a = 1,}$$

которое можно вывести слѣдующимъ образомъ. Если изъ какой либо точки B стороны остраго или тупаго угла BAC (= a) опустимъ перпендикуляръ BD на другую сторону или на ея продолженіе, то $BD^2 + AD^2 = AB^2$. Раздѣлимъ обѣ части этого уравненія на AB^2, тогда



$$\frac{BD^2}{AB^2} + \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} \text{ т. е. } \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$



Нужно замѣтить, что хотя косинусъ тупаго угла равенъ $-\frac{AD}{AB}$, но квадратъ его также какъ и въ остромъ углѣ будетъ величина положительная.

Съ помощію этихъ трехъ уравненій можетъ быть рѣшена слѣдующая задача.

§ 10. Дана одна изъ тригон. величинъ какого нибудь угла, выразить посредствомъ ея всѣ остальныя тригон. величины тогоже угла.

I. Данъ sin a.

Изъ уравненія (3) слѣдуетъ

(4) $$\mathbf{cos\, a} = \sqrt{\mathbf{1 - sin^2 a}}$$

Вставивъ это выраженіе въ урав. (1) и (2), получимъ

(5) $$\mathbf{tang\, a} = \frac{\mathbf{sin\, a}}{\sqrt{\mathbf{1 - sin^2 a}}}$$

(6) $$\mathbf{cotg\, a} = \frac{\sqrt{\mathbf{1 - sin^2 a}}}{\mathbf{sin\, a}}$$

II. Данъ cos a.

Изъ уравненія (3) слѣдуетъ

(7) $$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$$

Вставивъ это выраженіе въ урав. (1) и (2), получимъ

(8) $$\operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a}$$

(9) $$\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 a}}$$

III. Данъ tg a.

Изъ (1) слѣдуетъ $\cos^2 a = \frac{\sin^2 a}{\operatorname{tg}^2 a}$. Если это выраженіе вставимъ въ (3), то получимъ

$\sin^2 a + \frac{\sin^2 a}{\operatorname{tg}^2 a} = 1$ или $\sin^2 a\,(1 + \operatorname{tg}^2 a) = \operatorname{tg}^2 a$, слѣд.

(10) $$\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$$

Изъ (10) слѣдуетъ $\frac{\sin a}{\operatorname{tg} a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$, а изъ (1)

$\cos a = \frac{\sin a}{\operatorname{tg} a}$, слѣд.

(11) $$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} \text{ или } \frac{1}{\cos a} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

Такъ какъ $\operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{cotg} a = \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\cos a}{\sin a} = 1$, то,

(12) $$\operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

IV. Данъ cotg a.

Изъ (12) слѣдуетъ, что

(13) $$\operatorname{tg} a = \frac{1}{\operatorname{cotg} a}$$

Если обѣ части урав. (3) раздѣлимъ на $\sin^2 a$, то получимъ

$$1 + \cot g^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}, \quad \text{слѣд.}$$

$$(14) \qquad \mathbf{\sin a = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot g^2 a}}}$$

Умноживъ обѣ части этого уравненія на $\cot g a$, получимъ

$$\sin a \,.\, \cot g\, a = \frac{\cot g\, a}{\sqrt{1 + \cot g^2 a}}$$

и такъ какъ изъ ур. (2) слѣдуетъ, что $\sin a \cot g a = \cos a$, то

$$(15) \qquad \mathbf{\cos a = \frac{\cot g a}{\sqrt{1 + \cot g^2 a}}}.$$

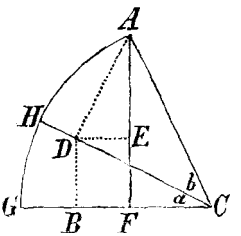
Въ уравненіяхъ (4), (5), (6), (11) должно брать передъ радикаломъ положительный или отрицательный знакъ, смотря по тому, будетъ ли уголъ a острый или тупой.

Въ уравненіяхъ (7) и (14) слѣдуетъ при радикалѣ всегда братъ знакъ $+$, такъ какъ синусы всѣхъ угловъ, меньшихъ 180^0, положительны.

Такъ какъ въ урав. (10) $tg a$ положителенъ для $a < 90^0$ и отрицателенъ для $a > 90^0$, а $\sin a$ для всѣхъ угловъ меньшихъ 180^0 положителенъ, то для знаменателя слѣдуетъ выбирать такой знакъ, чтобы во всякомъ случаѣ выраженіе $\sin a$ было положительно.

Въ урав. (8), (9), (15) имѣютъ значеніе только положительные знаки при радикалахъ, такъ какъ $tg a$, $\cot g a$, $\cos a$ при одной и тойже величинѣ угла a имѣютъ одинакіе знаки.

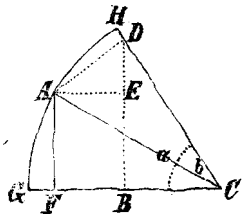
§ 11. По даннымъ Sinus и Cosinus двухъ угловъ a и b найти Sinus и Cosinus ихъ суммы $(a+b)$ или разности $(a-b)$.



Положимъ, что сумма угловъ a и b, приложенныхъ одинъ къ другому, будетъ менѣе 90^0. Опишемъ изъ ихъ общей вершины C радіусомъ, принятымъ за единицу мѣры, дугу; проведемъ изъ A линію $AD \perp CH$ и $AF \perp CG$, потомъ изъ D линію $DB \perp CG$ и $DE \perp AF$, тогда $\triangle AED \backsim CBD$, слѣд. $\measuredangle DAE = BCD = a$. Изъ чертежа видно, что

$$AF = DB + AE \quad \text{или}$$
$$\sin(a+b) = CD \,.\, \sin a + AD \,.\, \cos a, \quad \text{т. е.}$$
$$(16)\quad \mathbf{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

Далѣе
$$CF = CB - DE \quad \text{или}$$
$$\cos(a+b) = CD \,.\, \cos a - AD \,.\, \sin a, \quad \text{т. е.}$$
$$(17)\quad \mathbf{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.}$$



Положимъ, что уголь $GCH = a$ менѣе 90^0, и часть его $ACH = b$, слѣд. $ACG = a - b$. Опишемъ изъ C радіусомъ, равнымъ единицѣ, дугу, проведемъ изъ A линію $AF \perp CG$ и $AD \perp CH$, $DB \perp CG$ и $AE \perp DB$, тогда $\triangle ADE \backsim DCB$, слѣд. $\measuredangle ADE = DCB = a$. Изъ чертежа видно, что

$$AF = DB - DE \quad \text{или}$$
$$\sin(a-b) = CD \,.\, \sin a - AD \,.\, \cos a, \quad \text{т. е.}$$
$$(18)\quad \mathbf{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.}$$

Далѣе
$$CF = CB + AE \quad \text{или}$$
$$\cos(a-b) = CD \,.\, \cos a + AD \,.\, \sin a, \quad \text{т. е.}$$
$$(19)\quad \mathbf{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.}$$

Хотя Формулы (16), (17), (18), (19) выведены подъ условіемъ, что $a + b < 90^0$, и $a < 90^0$, но онѣ приложимы и къ тому случаю, когда $a + b$ и a тупые углы. Стоитъ только соотвѣтственно измѣнить фигуру и повторить прежнее построеніе, чтобы убѣдиться въ справедливости сказаннаго. Общность этихъ формулъ можетъ быть также доказана съ помощію уравненій § 4 и § 5, подставляя вмѣсто a и b дополненія $(90-a)$ и $(90-b)$, или (180^0-a) и $(180^0-b$.

§ **12.** Если положимъ въ урав. (16) $a = b$, то

$$(20)\quad \begin{cases} \mathbf{\sin 2a = 2 \sin a \cos a} & \text{или} \\ \mathbf{\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} \end{cases}$$

Въ второй формулѣ углы a и $\frac{1}{2}a$ находятся въ томъ же отношеніи, какъ углы 2a и a въ первой формулѣ.

Положивъ въ урав. (17) $a = b$, получимъ

$$(21)\quad \begin{cases} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a & \text{или} \\ \cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} \end{cases}$$

Если послѣднее уравненіе прибавимъ къ урав. (3) $1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}$ и отнимемъ отъ тогоже уравненія, то получимъ два слѣдующія:

$$(22)\qquad 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$(23)\qquad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

Изъ этихъ двухъ урав. выводятся формулы:

$$(24)\quad \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \text{ или } \cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$$

$$(25)\quad \sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \text{ или } \sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

Сложеніе и вычитаніе уравненій (16) и (18) даетъ:

$$(26)\quad \sin (a + b) + \sin (a - b) = 2 \sin a \cos b$$

$$(27)\quad \sin (a + b) - \sin (a - b) = 2 \cos a \sin b$$

Черезъ сложеніе и вычитаніе урав. (17) и (19) получимъ:

$$(28)\quad \cos (a - b) + \cos (a + b) = 2 \cos a \cos b$$

$$(29)\quad \cos (a - b) - \cos (a + b) = 2 \sin a \sin b$$

Положивъ въ четырехъ послѣднихъ уравненіяхъ $a + b = A$ и $a - b = B$, слѣд. $a = \frac{1}{2}(A + B)$, $b = \frac{1}{2}(A - B)$, получимъ:

$$(30)\quad \sin A + \sin B = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$(31)\quad \sin A - \sin B = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \sin \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$(32)\quad \cos B + \cos A = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$(33)\quad \cos B - \cos A = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \sin \tfrac{1}{2}(A - B)$$

§ **13.** Изъ урав. (1), (16), (17) слѣдуетъ, что

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\sin (a + b)}{\cos (a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя на $\cos a \cos b$, получимъ

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}}, \quad \text{т.е.}$$

$$(34) \qquad \mathbf{tg}\,(a+b) = \frac{\mathbf{tg}\,a + \mathbf{tg}\,b}{1 - \mathbf{tg}\,a \,.\, \mathbf{tg}\,b}$$

Положивъ здѣсь $a = b$, получимъ

$$(35) \qquad \mathbf{tg}\,2a = \frac{2\,\mathbf{tg}\,a}{1 - \mathbf{tg}^2 a} \quad \text{или} \quad \mathbf{tg}\,a = \frac{2\,\mathbf{tg}\,\frac{1}{2}a}{1 - \mathbf{tg}^2 \frac{1}{2}a}$$

Точно такимъ же образомъ

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b},$$

и раздѣливъ числителя и знаменателя на $\cos a \cos b$, получимъ

$$(36) \qquad \mathbf{tg}\,(a-b) = \frac{\mathbf{tg}\,a - \mathbf{tg}\,b}{t + \mathbf{tg}\,a \,.\, \mathbf{tg}\,b}$$

Такимъ же способомъ можно найти

$$(37) \qquad \mathbf{cotg}\,(a+b) = \frac{\mathbf{cotg}\,a\,\mathbf{cotg}\,b - 1}{\mathbf{cotg}\,a + \mathbf{cotg}\,b}$$

$$(38) \qquad \mathbf{cotg}\,2a = \frac{\mathbf{cotg}^2 a - 1}{2\,\mathbf{cotg}\,a}$$

$$(39) \qquad \mathbf{cotg}\,(a-b) = \frac{\mathbf{cotg}\,a\,\mathbf{cotg}\,b + 1}{\mathbf{cotg}\,b - \mathbf{cotg}\,a}$$

Въ § 16, 1 будетъ доказано, что $\operatorname{tg} 45^0 = \operatorname{cotg} 45^0 = 1$. Если вставимъ въ урав. (34),(36),(37),(39) $a = 45$, то получимъ

$$(40) \qquad \mathbf{tg}\,(45^0 + b) = \frac{1 + \mathbf{tg}\,b}{1 - \mathbf{tg}\,b}$$

$$(41) \qquad \mathbf{tg}\,(45^0 - b) = \frac{1 - \mathbf{tg}\,b}{1 + \mathbf{tg}\,b}$$

$$(42) \qquad \mathbf{cotg}\,(45^0 + b) = \frac{\mathbf{cotg}\,b - 1}{\mathbf{cotg}\,b + 1}$$

$$(43) \qquad \mathbf{cotg}\,(45^0 - b) = \frac{\mathbf{cotg}\,b + 1}{\mathbf{cotg}\,b - 1}$$

Черезъ дѣленіе урав. (16) и (18) на $\cos a \cos b$ и на $\sin a \sin b$ получаемъ формулы:

$$\text{(44)} \qquad \mathbf{tg\,a + tg\,b} = \frac{\mathbf{\sin(a+b)}}{\mathbf{\cos a \cos b}}$$

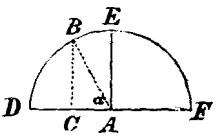
$$\text{(45)} \qquad \mathbf{tg\,a - tg\,b} = \frac{\mathbf{\sin(a-b)}}{\mathbf{\cos a \cos b}}$$

$$\text{(46)} \qquad \mathbf{cotg\,b + cotg\,a} = \frac{\mathbf{\sin(a+b)}}{\mathbf{\sin a \sin b}}$$

$$\text{(47)} \qquad \mathbf{cotg\,b - cotg\,a} = \frac{\mathbf{\sin(a-b)}}{\mathbf{\sin a \sin b}}$$

III. Вычисленіе тригонометрическихъ величинъ.

§ **14.** Прежде чѣмъ вычислять тригон. величины разсмотримъ измѣненія ихъ съ увеличеніемъ и уменьшеніемъ угла и предѣлы, въ которыхъ эти измѣненія происходятъ.



1) Опишемъ изъ вершины угла a радіусомъ, равнымъ единицѣ, полуокружность и положимъ, что сторона AD этого угла остается неподвижною, а другая сторона AB вращается около вершины A. Если уголъ $a = 0$, то точки B и D совпадаютъ и перпендикуляръ $BC = 0$, т. е. $\sin 0^0 = 0$. Съ увеличеніемъ угла a перпендикуляръ BC будетъ возрастать до тѣхъ поръ, пока точка B упадетъ въ точку E; тогда $\sin 90^0 = 1$. При дальнѣйшемъ увеличеніи угла a синусъ его будетъ уменьшаться и при $a = 180^0$ обратится въ o.

Такимъ образомъ всѣ возможныя величины синуса заключаются между предѣлами 0 и 1, и большій изъ двухъ острыхъ угловъ имѣетъ большій синусъ.

2) Еслы стороны AB и AD угла a совпадаютъ, то точка C сливается съ точкою D и линія AC перейдетъ въ линію AD, такъ что $\cos 0^0 = 1$. Съ увеличеніемъ

угла a косинусъ его AC все уменьшается, пока не обратится въ 0 при $a = 90^0$. При дальнѣйшемъ увеличеніи угла a косинусъ его становится отрицательнымъ и абсолютная величина возрастаетъ, такъ что $\cos 180^0 = -1$.

Величина косинуса заключается между 1 и — 1, и большій изъ двухъ острыхъ угловъ имѣетъ меньшій косинусъ.

3) Такъ какъ съ увеличеніемъ угла отъ 0^0 до 90^0 синусъ его возрастаетъ отъ 0 до 1, и косинусъ уменьшается отъ 1 до 0, а всякая дробь увеличивается отъ увеличенія ея числителя или отъ уменьшенія ея знаменателя и остается положительною, если ея числитель и знаменатель положительны, то изъ выраженія $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$ слѣдуетъ, что съ увеличеніемъ угла до 90^0 тангенсъ возрастаетъ и остается положительнымъ, такъ что

$$\operatorname{tg} 0^0 = \frac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = \frac{0}{1} = 0, \quad \operatorname{tg} 90^0 = \frac{\sin 90^0}{\cos 90^0} = \frac{1}{0} = \infty$$

Знакъ ∞ обозначаетъ, что $\operatorname{tg} 90^0$ есть величина безконечно большая. Такъ какъ прямой уголъ (90^0) можетъ произойти не только черезъ послѣдовательное увеличеніе остраго, въ которомъ тангенсъ положителенъ, но и черезъ уменьшеніе тупаго, у котораго тангенсъ отрицателенъ, то тангенсу прямаго угла могутъ соотвѣтствовать $+\infty$ и $-\infty$, смотря потому, какъ мы будемъ смотрѣть на его происхожденіе. Такъ какъ дробь $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$ уменьшается съ уменьшеніемъ числителя и увеличеніемъ знаменателя, то абсолютная величина тангенса будетъ все меньше по мѣрѣ того, какъ увеличивается уголъ отъ 90^0 до 180^0, пока не обратится въ

$$\operatorname{tg} 180^0 = \frac{\sin 180^0}{\cos 180^0} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Тангенсъ можетъ имѣть всѣ возможныя положительныя и отрицательныя величины отъ 0 до ∞, и большему изъ двухъ острыхъ угловъ соотвѣтствуетъ большій тангенсъ.

4) Съ помощію такихъ же разсужденій можно доказать, что измѣненія котангенса и соотвѣтствующаго ему угла на-

ходятся въ обратномъ отношеніи, т. е. при увеличеніи угла котангенсъ уменьшается, а при уменьшеніи угла увеличивается, такъ что

$$\cot g\, 0^0 = \frac{\cos 0^0}{\sin 0^0} = \frac{1}{0} = \infty, \quad \cot g\, 90^0 = \frac{\cos 90^0}{\sin 90^0} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\cot g\, 180^0 = \frac{\cos 180^0}{\sin 180^0} = \frac{-1}{0} = -\infty.$$

Котангенсъ можетъ имѣть всѣ числовыя величины между $+\infty$ и $-\infty$ и большему изъ двухъ острыхъ угловъ соотвѣтствуетъ меньшій котангенсъ.

Эти свойства тангенса и котангенса могутъ быть выведены изъ построенія тригонометрическихъ величинъ. Такъ напр. изъ фигуры § 8 видно, что съ увеличеніемъ остраго угла a точка пересѣченія D все болѣе удаляется отъ точки E, т. е. $tg\, a = DE$ увеличивается. При $a = 90^0$ точка D удаляется отъ E на безконечно большое разстояніе, т. е. $tg\, a$ становится безконечно большимъ. Точно также легко показать съ помощію геометрическихъ построеній и остальныя свойства тангенса и котангенса, выведенныя нами аналитическимъ путемъ.

§ 15. Чтобы выразить въ числахъ тригон. величины всѣхъ угловъ отъ 0^0 до 180^0, достаточно вычислить эти величины только для угловъ отъ 0^0 до 45^0.

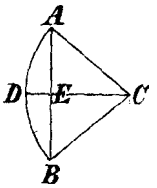
Дѣйствительно изъ § 5 видно, что синусъ тупаго угла равенъ синусу его смежнаго (остраго) угла, а косинусъ, тангенсъ и котангенсъ тупаго угла равны тѣмъ же тригон. величинамъ смежнаго угла, взятымъ со знакомъ минусъ; напр.

$$\sin 107^0 = \sin(180^0 - 107^0) = \sin 73^0$$
$$\cos 99^0 = -\cos(180^0 - 99^0) = -\cos 81^0;$$

и такъ какъ всякій уголъ отъ 45^0 до 90^0 дополняется до прямаго угломъ, меньшимъ 45^0, а тригон. величины остраго угла равны обратнымъ тригон. величинамъ угла, дополняющаго его до 90^0 (§ 4), то тригон. величины всѣхъ угловъ будутъ опредѣлены, если онѣ извѣстны для угловъ отъ 0^0 до 45^0. Напр.

$$\sin 75^0 = \cos(90^0 - 75^0) = \cos 15^0$$
$$tg\, 60^0 = \cot g(90^0 - 60^0) = \cot g\, 30^0.$$

Кромѣ того нѣтъ надобности вычислять всѣ тригон. величины этихъ угловъ; достаточно знать одну только, а съ помощію ея по § 10 могутъ быть вычислены и остальныя.



§ **16.** Опишемъ радіусомъ, равнымъ единицѣ, дугу и раздѣлимъ хорду ея AB и соотвѣтствующій ей центральный уголъ ACB линіею CD пополамъ, тогда увидимъ, что синусъ угла ACD равняется половинѣ хорды двойнаго угла ACB.

Съ помощію этой теоремы легко опредѣлить тригон. величины угловъ въ 45^0, 30^0 и 18^0, т. е. такихъ, которые равны половинамъ центральныхъ угловъ правильныхъ 4, 6, 10 — угольниковъ.

1) Если линія AB будетъ сторона прав. 4—угольника вписаннаго, то $ACB = 90^0$ и $ACD = 45^0$, почему и $CAE = 45^0$, слѣд. $AE = CE$. Такъ какъ $AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, то $AE = CE = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, т. е.

$$\sin 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071067 = \cos 45^0$$

$$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{AE}{CE} = 1 = \operatorname{cotg} 45^0.$$

2) Если линію AB примемъ за сторону прав. 6—угольника, то $AB = AC = 1$ и $ACB = 60^0$, слѣд. $ACD = 30^0$. Такъ какъ $AE = \frac{1}{2}$ и $CE = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, то

$$\sin 30^0 = \tfrac{1}{2} = 0{,}5 = \cos 60^0 \quad (\S\ 4)$$

$$\cos 30^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660254 = \sin 60^0$$

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{AE}{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5773502 = \operatorname{cotg} 60^0$$

$$\operatorname{cotg} 30^0 = \frac{CE}{AE} = \sqrt{3} = 1{,}7320508 = \operatorname{tg} 60^0.$$

3) Если AB будетъ сторона прав. 10—угольника, то $ACB = 36^0$ и $ACD = 18^0$. Въ такомъ случаѣ AB есть большій отрѣзокъ радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, т. е.

$1 : AB = AB : 1 - AB$ или $AB^2 + AB = 1$, слѣд.

$$AB = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \text{ и } AE = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$CE = \sqrt{1 - \tfrac{1}{16}(\sqrt{5} - 1)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}, \text{ т. е.}$$

$$\sin 18^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) = 0{,}3090169 = \cos 72^0$$

$$\cos 18^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = 0{,}9510565 = \sin 72^0$$

$$\operatorname{tg} 18^0 = \frac{AE}{CE} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} = 0{,}3249196 = \operatorname{cotg} 72^0$$

$$\operatorname{cotg} 18^0 = \frac{CE}{AE} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 3{,}0776835 = \operatorname{tg} 72^0.$$

§ **17.** Съ помощію найденныхъ тригон. величинъ могутъ быть вычислены тригон. величины всѣхъ угловъ. Посредствомъ формулъ (16), (17), (18) и (19) можно поданнымъ тригон. величинамъ двухъ угловъ вычислить тригон. величины ихъ суммы и разности, напр.

$$\sin 12^0 = \sin(30^0 - 18^0) = \sin 30^0 \cos 18^0 - \cos 30^0 \sin 18^0$$
$$= 0{,}2079117 = \cos 78^0.$$

По даннымъ синусамъ и косинусамъ какого либо угла съ помощію формулъ (20) и (21) можно вычислить синусы и косинусы угловъ, которые вдвое, втрое и т. д. болѣе, а пользуясь формулами (24) и (25) можно найти синусы и косинусы угловъ, вдвое меньшихъ, напр. изъ $\cos 18^0$ можно найти:

$$\sin 9^0 = \sqrt{\frac{1 - \cos 18^0}{2}} = 0{,}1564345$$

$$\cos 9^0 = \sqrt{\frac{1 + \cos 18^0}{2}} = 0{,}9876883$$

$$\sin 4^0\ 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 9^0}{2}} = 0{,}0784591.$$

Продолжая такимъ образомъ мы дойдемъ до тригон. величинъ очень малыхъ угловъ, $\sin 45'$, $\sin \frac{45'}{2}$, $\sin \frac{45'}{4}$, $\sin \frac{45'}{8}$, $\sin \frac{45'}{16}$, $\sin \frac{45'}{32} = 0{,}00040905$, $\sin \frac{45'}{64} = 0{,}00020452$ и т. д. Разсматривая рядъ полученныхъ такимъ образомъ тригон. величинъ весьма малыхъ угловъ, мы замѣтимъ, что углы относятся какъ ихъ синусы, и это заключеніе тѣмъ

справедливѣе, чѣмъ меньше взяты углы. Такимъ образомъ $\sin 1'$ опредѣлится изъ пропорціи:

$$\sin\frac{45'}{64} : \sin 1' = \frac{45'}{64} : 1', \text{ слѣд. } \sin 1' = 0{,}00029088.$$

Зная $\sin 1'$ мы можемъ получить $\cos 1'$ (§ 10, 4), потомъ $\sin 2'$ (§ 12,20), далѣе (§ 11,16) $\sin 3'$, $\sin 4'$ и т. д., переходя отъ однаго угла къ другому минутою большему. Такимъ образомъ можно вычислить всѣ тригон. величины.

IV. Объ употребленіи тригонометрическихъ таблицъ.

§ **18.** Въ тригон. таблицахъ для всѣхъ угловъ отъ 0^0 до 90^0 даются логариѳмы соотвѣтствующихъ имъ тригон. величинъ, такъ что для каждаго угла можно найти соотвѣтствующія тригон. величины и наоборотъ для какой либо тригон. величины—соотвѣтствующій ей уголъ. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ ссылаться на таблицы Вега, обработанныя Бремикеромъ; при этихъ таблицахъ есть описаніе ихъ устройства и употребленія.

1) Синусы и косинусы всѣхъ угловъ, тангенсы угловъ отъ 0^0 до 45^0 и котангенсы угловъ отъ 45^0 до 90^0 меньше единицы, потому логариѳмы ихъ имѣютъ отрицательныя характеристики; тангенсы же угловъ отъ 45^0 до 90^0 и котангенсы отъ 0^0 до 45^0 имѣютъ положительные логариѳмы; по этому для установленія единообразія въ таблицахъ всѣ логариѳмы, имѣющіе отрицательную характеристику, увеличены $10^{ью}$, напр.

$\sin 30^0 = 0{,}5$, слѣд. $\log\sin 30^0 = \log 0{,}5 = 0{,}6989700 - 1$,

между тѣмъ какъ въ таблицахъ написано

$$\log\sin 30^0 = 9{,}6989700.$$

Такимъ образомъ для полученія истиннаго логариѳма какой либо тригон. величины, меньшей единицы, должно вычесть 10, т. е. прибавить — 10 къ логариѳму, найденному въ таблицахъ, напр.

$\log \sin 12^0 = 9{,}3178789 - 10 = 0{,}3178789 - 1.$

Соотвѣтствующее логариѳму число, $\sin 12^0 = 0{,}2079117$, находится съ помощію обыкновенныхъ логариѳмическихъ таблицъ.

Если нужно опредѣлить уголъ, соотвѣтствующій данной тригон. величинѣ, напр. $\operatorname{tg} x = 0{,}3249196$, то надобно найти логариѳмъ этой величины $0{,}5117760 - 1$, прибавить къ нему 10, потому что онъ имѣетъ отрицательную характеристику, такъ что получимъ $9{,}5117760$, и тогда найдемъ въ таблицахъ для $\operatorname{tg} x = 9{,}5117760$ соотвѣтствующій уголъ 18^0.

2) Хотя въ таблицахъ углы слѣдуютъ черезъ каждыя 10 секундъ, но можно вычислять тригон. величины и для промежуточныхъ угловъ, выраженныхъ въ секундахъ или доляхъ секунды, съ помощію графы, обозначенной въ триг. таблицахъ буквою d или dc (differentia communis), гдѣ дается измѣненіе логариѳма тригон. величинъ при измѣненіи угла на 10 секундъ. Это вычисленіе основывается на томъ, что разности мало различающихся угловъ относятся какъ разности логариѳмовъ соотвѣтствующихъ имъ тригон. величинъ.

При вычисленіи нужно всегда имѣть въ виду, что съ увеличеніемъ остраго угла его синусъ и тангенсъ увеличиваются, а косинусъ и котангенъ уменьшаются (§ 14).

При употребленіи триг. таблицъ могутъ встрѣтиться задачи двухъ родовъ: къ данному углу прійскать соотвѣтствующую тригон. величину, или прійскать уголъ, соотвѣтствующій данной тригон. величинѣ.

Найти тригон. величину, соотвѣтствующую данному углу.

§ **19.** 1) Найти $\log \sin 37^0 15' 26'', 3$.

Въ тригон. таблицахъ мы находимъ, что $\log \sin 37^0 15' 20'' = 9{,}7820217$; съ увеличеніемъ угла $37^0 15' 20''$

на 10″, послѣдніе десятичные знаки его log sin увеличатся 277ью, потому измѣняя этотъ уголъ на 1″, измѣнимъ послѣдніе десятичные знаки его log sin на 27,7, а при увеличеніи даннаго угла на 6″,3 послѣдніе десятичные знаки увеличатся на $27,7 \times 6,3 = 174,51$, такъ что

$$\begin{array}{r} \log\sin 37^0 15' 20'' = 9,7826217 \\ 27,5 \times 6,3 = \quad + 174,51 \\ \hline \log\sin 37^0 15' 26'',3 = 0,7820392 - 1. \end{array}$$

Если требуется найти sin 37°15,26″,3, а не его логариѳмъ, то прійскиваютъ въ логариѳмическихъ таблицахъ число, соотвѣтствующее логариѳму 0,7820392 — 1, и тогда получается sin 37°15′26″,3 = 0,6054955.

2) Найти log cos 45°41′44″,25

$$\begin{array}{r} \log\cos 45^0\, 41' 40'' = 9,8441569 \\ 21,6 \times 4,25 = \quad - 91,8 \\ \hline \log\cos 45^0 41' 44'',25 = 0,8441477 - 1. \end{array}$$

При увеличеніи угла 45°41′40″ на 10″ послѣдніе десятичные знаки его log cos уменьшаются 216ью, слѣд. при увеличеніи угла на 1″ они уменьшаются на 21,6, а при увеличеніи на 4″,25 уменьшаются на $21,6 \times 4,25 = 91,8$.

3) Найти log tg 56°22′3″,89

$$\begin{array}{r} \log\operatorname{tg} 56^0 22' = 0,1770234 \\ 45,7 \times 3,89 = \quad + 177,773 \\ \hline \log\operatorname{tg} 56^0 22' 3'',89 = 0,1770412. \end{array}$$

4) Найти log cotg 14°55′18″,02

$$\begin{array}{r} \log\operatorname{cotg} 14^0\, 55' 10'' = 0,5743959 \\ 84,6 \times 8,02 = \quad - 678,482 \\ \hline \log\operatorname{cotg} 14^0 55' 18'',02 = 0,5743281. \end{array}$$

§ **20.** Тригон. величины тупыхъ угловъ находятся по формуламъ § 5 и § 6 двумя способами: отнимаютъ данный уголъ отъ 180° и отыскиваютъ требуемую тригон. величину полученнаго въ остаткѣ остраго угла, или отнимаютъ отъ даннаго угла 90°

и пріискиваютъ для полученнаго въ остаткѣ остраго угла тригон. величину, обратную требуемой.

1) Найти $\log \sin 98^0\, 3'2''$.

Если обозначимъ для краткости $98^0\, 3'\, 2''$ черезъ a, то отыскивая по первому способу получимъ:

$$\sin a = \sin (180^0 - a) = \sin\ 81^0\, 56'\, 58''$$
$$\log \sin 81^0\, 56'\, 50'' = 9{,}9956964$$
$$2{,}9 \times 8 = +\ 23{,}2$$
$$\log \sin 98^0\, 3'\, 2'' = 0{,}9956987 - 1.$$

По второму способу:

$$\sin a = \cos (a - 90^0) = \cos 8^0\, 3'\, 2''$$
$$\log \cos 8^0 3' = 9{,}9956993$$
$$2{,}9 \times 2 = -\ 5{,}3$$
$$\log \sin 98^0 3' 2'' = 0{,}9956987 - 1.$$

2) Косинусъ, тангенсъ и котангенсъ тупаго угла, какъ величины отрицательныя, не имѣютъ логариѳмовъ; но въ такомъ случаѣ отыскиваютъ логариѳмы ихъ абсолютныхъ величинъ и приписываютъ къ нимъ букву (n), чтобы показать, что соотвѣтствующія этимъ логариѳмамъ числа должны быть взяты со знакомъ минусъ. Напр.

Найти $\log \cos 144^0\, 4'\, 51'',3$.

Если обозначимъ уголъ $144^0\, 4'\, 51'',3$ черезъ a, то

$$\cos a = -\cos (180^0 - a) = -\cos 35^0 55' 8'',7$$
$$\log \cos 35^0 55' = 9{,}9084159$$
$$15{,}3 \times 8{,}7 = -\ 133{,}11$$
$$\log \cos 144^0 4' 51'',3 = 0{,}9084026 - 1\ (n).$$

По второму способу:

$$\cos a = -\sin (a - 90^0) = -\sin 54^0 4' 51'',3$$
$$\log \sin 54^0 4' 50'' = 9{,}9084006$$
$$15{,}3 \times 1{,}3 = +\ 19{,}89$$
$$\log \cos 144^0 4' 51'',3 = 0{,}9084026 - 1\ (n).$$

Чтобы найти самый косинусъ, должно пріискать число, соотвѣтствующее логариѳму 0,9084026 — 1 и написать передъ нимъ знакъ минусъ, такъ что

$$\cos 144^\circ 4' 51'',3 = -0,8098463.$$

3) Такимъ же образомъ находимъ

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} 125^\circ 24' 31'' &= 0,1481980 \text{ (п)} \\ \operatorname{tg} 125^\circ 24' 31'' &= -1,4066886 \\ \log \operatorname{cotg} 109^\circ 2' 28'' &= 0,5379852 - 1 \text{ (п)} \\ \operatorname{cotg} 109^\circ 2' 28'' &= -0,3451304. \end{aligned}$$

Найти уголъ, соотвѣтствующій данной тригон. величинѣ.

§ 21. Если дано будетъ

$$\log \sin x = 0,6389576 - 1,$$

то прибавивъ къ логариѳму 10 получимъ 9,6389576. Въ таблицахъ отыскиваемъ между логариѳмами синуса, меньшими 9,6389576, такой, который болѣе всѣхъ подходитъ къ 9,6389576. Такой логариѳмъ будетъ 9,6389376, менѣе даннаго на 0,0000200, и ему соотвѣтствуетъ уголъ $25^\circ 48' 50''$. Въ таблицахъ же находимъ, что съ увеличеніемъ 436ѣю послѣднихъ десятичныхъ знаковъ логариѳма 9,6389576 уголъ $25^\circ 48' 50''$ увеличится на $10''$, слѣд. увеличивая логариѳмъ 43,6ѣю, мы увеличимъ уголъ на $1''$, а потому, если прибавимъ къ $25^\circ 48' 50''$ столько секундъ, сколько разъ 43,6 заключается въ 200, то получимъ искомый уголъ x. Такимъ образомъ

$$\begin{aligned} \log \sin x &= 9,6389576 \\ \log \sin 25^\circ 48' 50'' &= 9,6389376 \\ \hline + 4,59 &= \frac{200}{43,6} \\ x &= 25^\circ 48' 54'',59. \end{aligned}$$

Такъ какъ (по § 5) синусъ остраго угла есть въ тоже время синусъ смежнаго съ нимъ тупаго, то и

$$x = 180^\circ - 25^\circ 48' 54'',59 = 154^\circ 11' 5'',41.$$

2) Такимъ образомъ данному синусу могутъ соотвѣтствовать два различные угла, между тѣмъ какъ коси-

нусъ, тангенсъ и котангенсъ могутъ принадлежать только одному опредѣленному углу, потому что по знаку (+ или —) этихъ тригон. величинъ можно судить, соотвѣтствуютъ ли онѣ острому или тупому углу. Такъ напр. $\cos x = 0,5$ соотвѣтствуетъ $x = 60^0$, а $\cos x = -0,5$ соотвѣтствуетъ $x = 180 - 60^0 = 120^0$. Если бы $\cos x$ былъ данъ въ видѣ логариѳма, то въ первомъ случаѣ онъ выразился бы черезъ $\log \cos x = 0,6989700 - 1$, а въ второмъ черезъ $\log \cos x = 0,6989700 - 1$ (n) или $\log(-\cos x) = 0,6989700 - 1$.

3) Если данъ $\log \cos x = 0,7390193 - 1$, то имѣемъ

$$\begin{array}{rl} \log \cos x = & 9,7390193 \\ \log \cos 56^0 45' = & 9,7390129 \\ \hline -1'',99 = & \dfrac{64}{32,1} \\ x = & 56^0 44' 58'',01. \end{array}$$

Точно также найдемъ, что

для $\log \operatorname{tg} x = 0,0328564$ $\quad x = 47^0 9' 55'',01$

для $\log \operatorname{cotg} x = 0,4771213$ $\quad x = 18^0\ 265'',82.$

§ **22.** Тупые углы могутъ быть опредѣлены по даннымъ тригон. величинамъ (§ 5 и § 6) двоякимъ способомъ: опредѣляютъ острый уголъ, соотвѣтствующій данной тригон. величинѣ и вычитаютъ его изъ 180^0, — или принимая данную тригон. величину за ея обратную, (sin за cos, tg за cotg) отыскиваютъ уголъ, соотвѣтствующій этой послѣдней и прибавляютъ къ нему 90^0.

1) Если дано $\log \cos x = 0,9084026 - 1$ (n), то имѣемъ

$$\begin{array}{rl} \log \cos(180^0 - x) = & 9,9084026 \\ \log \cos 35^0 55' 10'' = & 9,9084006 \\ \hline -1'',3 = & \dfrac{20}{15,3} \end{array}$$

$$180^0 - x = 35^0 55' 8'',7, \quad x = 180^0 - 35^0 55' 8'',7 = 144^0 4' 51'',3.$$

По второму способу имѣемъ

$$\log \sin (x - 90^0) = 9{,}9084026$$
$$\log \sin 54^0 4' 50'' = 9{,}9084006$$

$$+1'',3 = \begin{array}{r} 20 \\ \hline 15{,}3 \end{array}$$

$$x - 90^0 = 54^0 4' 51'',3, \quad x = 54^0 4' 51'',3 + 90^0$$
$$= 144^0 4' 51'',3.$$

2) Если данъ будетъ $\operatorname{tg} x = -2$, то отыскиваютъ сначала $\log 2$. Изъ $\log \operatorname{tg} x = 0{,}3010300$ (n) слѣдуетъ, что $x = 116^0 33' 54'',19$.

3) Изъ $\log(-\operatorname{cotg} x) = 0{,}5346294$ слѣдуетъ, что
$$x = 163^0 43' 21'',46.$$

§ **23.** При опредѣленіи угловъ, близко подходящихъ къ 0^0 или къ 90^0 по данной тригон. величинѣ или при опредѣленіи тригон. величины по данному углу такого рода нужно принять къ свѣденію слѣдующее.

Если синусъ и косинусъ близко подходятъ къ единицѣ, то величина ихъ измѣняется очень мало съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ угла т. е. измѣненіе синуса около 90^0 и косинуса около 0^0 очень незначительно. Если же синусъ и косинусъ приближаются ко своимъ наименьшимъ значеніямъ (т. е. синусъ около 0^0 и косинусъ около 90^0), то они измѣняются быстро. Такимъ образомъ различіе между $\log \cos 3'$ и $\log \cos 4'$ или что тоже, между $\log \sin 89^0 57'$, и $\log \sin 89^0 56'$, начинается только съ $7^{го}$ десятичнаго мѣста, между тѣмъ какъ $\log \sin 3'$ и $\log \sin 4'$, или что тоже, $\log \cos 89^0 57'$ и $\log \cos 89^0 56'$, отличаются уже своими характеристиками. Чѣмъ быстрѣе измѣняется какая либо тригон. величина съ измѣненіемъ угла, тѣмъ съ меньшею погрѣшностью опредѣляется изъ нея уголъ. Потому для опредѣленія очень малыхъ угловъ должно предпочтительно употреблять ихъ синусы, для угловъ близкихъ къ прямому — косинусы или же въ первомъ случаѣ тангенсы, а во второмъ котангенсы.

§ **24.** Разность между десятью и логариѳмомъ называется дополненіемъ логариѳма, напр.

$$\text{доп. } \log 4 = 10 - 0{,}6020600 = 9{,}3979400.$$

Чтобы получить дополненіе логариѳма, имѣющаго отрицательную характеристику, должно вычесть его мантиссу изъ 10 и къ остатку прибавить характеристику, взятую съ положительнымъ знакомъ, напр.

$$\text{доп. } \log 0{,}03 = 10 - (0{,}4771213 - 2) = 10 - 0{,}4771213 + 2 = 11{,}5228787.$$

Такъ какъ $a - b = a + (10 - b) - 10$, то для вычитанія однаго логариѳма изъ другаго достаточно къ уменьшаемому прибавить дополненіе вычитаемаго логариѳма и изъ найденной суммы вычесть 10.

Такая замѣна вычитанія сложеніемъ преимущественно употребляется въ такомъ случаѣ, когда отъ логариѳма или отъ суммы нѣсколькихъ логариѳмовъ вычитается нѣсколько другихъ логариѳмовъ, напр.

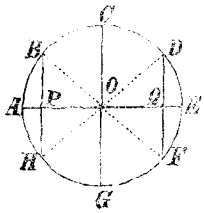
$$x = \frac{\sin 39^\circ 15' \times \operatorname{tg} 117^\circ 14'}{\operatorname{tg} 95^\circ \times \operatorname{cotg} 93^\circ 30'}.$$

Знакъ этого выраженія зависитъ отъ того, будетъ ли число отрицательныхъ производителей четное или нечетное, и такъ какъ при логариѳмахъ отрицательныхъ производителей ставится буква (n), то если буква (n) повторяется четное число разъ, искомое число x будетъ положительно, если же нечетное, — то отрицательно. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\begin{aligned}
\log \sin 39^\circ 15' &= 0{,}8012015 - 1 \\
\log \operatorname{tg} 117^\circ 14' &= 0{,}2884746 \quad (n) \\
CD \,.\, \log \operatorname{tg} 95^\circ &= 8{,}9419518 - 10 \; (n) \\
CD \,.\, \log \operatorname{tg} 93^\circ 30' &= 11{,}2135139 - 10 \; (n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log x &= -\,0{,}2451418 \; (n) \\
x &= -\,1{,}7584976.
\end{aligned}$$

V. Тригонометрическія величины угловъ, большихъ 180° и отрицательныхъ.



§ 25. Чтобы примѣнить тригон. величины къ угламъ, большимъ 180°, опишемъ радіусомъ, принятымъ за единицу, окружность и раздѣлимъ ее двумя діаметрами на четыре равныя части AC, CE, EG, GA. Примемъ AO за неподвижный радіусъ, а точками B,D,F,H обозначимъ положеніе подвижнаго радіуса въ различныхъ четвертяхъ окружности, изъ которыхъ AC будемъ считать за первую, EC за вторую и т. д. Тогда $\sin AB = BP$, $\cos AB = OP$, $\sin ACD = DQ$, $\cos ACD = OQ$; далѣе $\sin ACF = FQ$ и $\cos ACF = OQ$, наконецъ $\sin ACEH = HP$ и $\cos ACEH = OP$.

Такъ какъ мы приняли, что синусы 1ой и 2ой четверти положительны, а линіи FQ и HP имѣютъ направленіе, противоположное линіямъ DQ и BP, то синусы 3ей и 4ой четверти должны считаться отрицательными. Далѣе линіи OP и OQ имѣютъ противоположное направленіе, и такъ какъ косинусы 1ой четверти положительны, то косинусы 4ой четверти будутъ также положительны, а 2ой и 3ей четверти отрицательны. Изъ знаковъ синусовъ и косинусовъ слѣдуетъ, что тангенсы и котангенсы 1ой и 3ей четверти положительны, а 2ой и 4ой отрицательны.

Подобными разсужденіями какъ въ § 14 можно вывести слѣдующіе предѣлы для тригон. величинъ всѣхъ угловъ отъ 0° до 360°.

	0°	90°	180°	270°	360°
Синусъ	0	1	0	−1	0
Косинусъ	1	0	−1	0	1
Тангенсъ	0	$+\infty-$	0	$+\infty-$	0
Котангенсъ	$+\infty$	0	$-\infty+$	0	$-\infty$.

§ **26.** Опредѣленіе тригон. величинъ угловъ, большихъ 180^0, можетъ быть приведено къ опредѣленію тригон. величинъ острыхъ угловъ, при чемъ достаточно только разсмотрѣть синусы и косинусы, потому что тангенсы и котангенсы получатся изъ нихъ черезъ простое дѣленіе.

Назовемъ черезъ a въ фигурѣ § 25 уголъ $AOB = DOE = EOF = AOH$; тогда $BP = DQ = FQ = HP$, $OP = OQ$ и уголъ 3ей четверти, измѣряемый дугою ACF, будетъ $a + 180^0$. Принимая въ соображеніе знакъ тригон. величины мы получимъ непосредственно изъ чертежа слѣдующія формулы:

$$1)\quad \begin{cases} \mathbf{\sin(a + 180^0) = -\sin a} \\ \mathbf{\cos(a + 180^0) = -\cos a.} \end{cases}$$

Если обозначимъ уголъ $a + 180^0$ черезъ A^{III}, тогда $a = A^{III} - 180^0$, слѣд.

$$2)\quad \begin{cases} \mathbf{\sin A^{III} = -\sin(A^{III} - 180^0)} \\ \mathbf{\cos A^{III} = -\cos(A^{III} - 180^0).} \end{cases}$$

Напр. $\sin 196^0 = -\sin(196^0 - 180^0) = -\sin 16^0$. Такъ какъ $\log\sin 16^0 = 0{,}4403381 - 1$, то $\log\sin 196^0 = 0{,}4403381 - 1$ (n), слѣд. $\sin 196^0 = -0{,}2756374$. Точно также $\cos 228^0 = -\cos 48^0$, $\operatorname{tg} 234^0 = \operatorname{tg} 54^0$, $\operatorname{cotg} 216 = \operatorname{cotg} 36^0$.

Если сравнимъ тригон. величины дуги ACEH, соотвѣтствующей углу $360^0 - a$, съ тригон. величинами угла $AOB = a$, то найдемъ, что

$$3)\quad \begin{cases} \mathbf{\sin(360^0 - a) = -\sin a} \\ \mathbf{\cos(360^0 - a) = \cos a.} \end{cases}$$

Этимъ формуламъ можно придать другой видъ, подставивъ вмѣсто a его дополненіе $90^0 - a$, тогда

$$\sin[360^0 - (90^0 - a)] = -\sin(90^0 - a)$$

т. е. $\sin(270^0 + a) = -\cos a$,

и точно также $\cos(270^0 + a) = \sin a$.

Обозначимъ уголъ $270^0 + a$ черезъ A^{IV}, тогда $a = A^{IV} - 270^0$, слѣд.

$$4)\quad \begin{cases} \mathbf{\sin A^{IV} = -\cos(A^{IV} - 270^0)} \\ \mathbf{\cos A^{IV} = \sin(A^{IV} - 270^0).} \end{cases}$$

Напр. $\sin 340^0 = -\cos(340^0 - 270^0) = -\cos 70^0$; $\cos 293^0 = \sin 23^0$, $\operatorname{tg} 308^0 = -\operatorname{cotg} 38^0$, $\operatorname{cotg} 301^0 = -\operatorname{tg} 31^0$.

§ **27.** Отрицательный уголъ получится, если мы будемъ вращать подвижный радіусъ отъ его начальнаго положенія въ сторону, противоположную той, въ которую мы вращали этотъ радіусъ для полученія положительныхъ угловъ. Опишемъ по обѣимъ сторонамъ неподвижнаго радіуса АО равные углы АОВ $= +a$ и АОН $= -a$ (фиг. § 25), тогда изъ чертежа увидимъ, что

$$\sin(-a) = -\sin a, \quad \cos(-a) = \cos a, \quad \text{слѣд.}$$
$$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a, \quad \operatorname{cotg}(-a) = -\operatorname{cotg} a.$$

§ **28.** Если мы, описывая положительные углы, будемъ продолжать вращеніе радіуса и за 360^0, то онъ будетъ принимать всѣ положенія, которыя онъ имѣлъ при первомъ вращеніи отъ 0^0 до 360^0, и оттого для угловъ $a + 360^0$, $a + 2 . 360^0$ и т. д. получатся тѣже тригон. величины, какія мы получали для угла а, меньшаго 360^0. Такимъ образомъ, обозначивъ черезъ n какое либо цѣлое число, будемъ имѣть

$$\sin(a + n.360^0) = \sin a, \quad \cos(a + n.360^0) = \cos a$$
$$\operatorname{tg}(a + n.360^0) = \operatorname{tg} a, \quad \operatorname{cotg}(a + n.360^0) = \operatorname{cotg} a.$$

Такъ какъ во всѣхъ углахъ, большихъ 180^0, Синусъ и Косинусъ образуютъ, точно также какъ въ углахъ меньшихъ 180^0, катеты прямоугольнаго тре—ка, то всѣ формулы § 10, выведенныя изъ уравненій $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$ и $\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$, имѣютъ мѣсто и для всѣхъ угловъ, большихъ 180^0. Годность формулъ § 11 и выведенныхъ изъ нихъ въ § 12 и § 13 слѣдствій для всѣхъ возможныхъ угловъ легко доказать такимъ же образомъ, какъ можетъ быть доказано годность формулъ § 11 для тупыхъ угловъ.

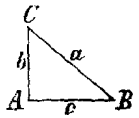
VI. Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ.

§ **29.** Если въ прямоугольномъ тре—кѣ кромѣ прямаго угла, который всегда уже извѣстенъ, даны еще двѣ какія либо части, а именно: острый уголъ и одна сторона, или двѣ стороны, то можно вычислить всѣ остальныя части тре—ка. При этомъ могутъ быть даны 1) гипотенуза и острый уголъ, 2) катетъ и острый уголъ, 3) гипотенуза и катетъ, 4) оба катета.

Будемъ постоянно обозначать прямой уголъ буквою A, гипотенузу буквою a, острые углы черезъ B и C, а противолежащіе имъ катеты черезъ b и c, площадь тре—ка буквою F.

Первый случай.

§ **30.** Даны гипотенуза a и острый уголъ B; найти C, b, c, F.



Рѣш. 1) $\mathbf{C = 90^0 - B}$ 2) $\mathbf{b = a \sin B}$

3) $\mathbf{c = a \cos B}$ 4) $F = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B.$

По § 12, 20 $\sin B \cos B = \frac{1}{2} \sin 2B$, слѣд.

$$\mathbf{F = \tfrac{1}{4} a^2 \sin 2B.}$$

Примѣр. Если $a = 987{,}31$ футъ, $B = 46^0 28' 35'',2$, тогда

1) $C = 43^0 31' 24'',8$

2)
$$\log a = 2{,}9944535$$
$$\log \sin B = 9{,}8603927 - 10$$
$$\log b = 2{,}8548462$$
$$b = 715{,}8898 \text{ фу}$$

3)
$$\log a = 2{,}9944535$$
$$\log \cos B = 9{,}8380003 - 10$$
$$\log c = 2{,}8324538$$
$$c = 679{,}9137 \text{ футъ}$$

4)
$$\log b = 2{,}8548462$$
$$\log c = 2{,}8324538$$
$$\log 2F = 5{,}6873000$$
$$2F = 486743{,}33$$
$$F = 243371{,}665 \ \square \text{ футъ.}$$

Если B близко къ 90^0 и посему $b = a \sin B$ не можетъ быть точно вычислено (§ 23), то опредѣляютъ сначала $c = a \cos B$ и потомъ уже вычисляютъ b по формулѣ $b = \sqrt{(a+c)(a-c)}$. Если же B близко къ 0^0, то сначала вычисляютъ $b = a \sin B$ и потомъ c по формулѣ $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$.

Второй случай.

§ **31.** 1) Даны катетъ c и прилежащій къ нему уголъ B; найти C, b, a, F.

Рѣш. 1) $\mathbf{C = 90^0 - B}$ 2) $\mathbf{b = c \operatorname{tg} B}$

3) $\frac{c}{a} = \cos B$, слѣд. $\mathbf{a = \frac{c}{\cos B}}$ 4) $\mathbf{F = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} c^2 \operatorname{tg} B}$.

Если $c = 1378{,}14$ футъ, $B = 3^0 37' 49''$, то $C = 86^0 22' 11''$,

$b = 87{,}4364$ ф., $a = 1380{,}911$ ф., $F = 60249{,}805$ □ ф.

2) Даны катетъ c и противолежащій ему уголъ C; найти B, b, a, F.

Рѣш. 1) $\mathbf{B = 90^0 - C}$ 2) $\frac{c}{b} = \operatorname{tg} C$, слѣд. $\mathbf{b = \frac{c}{\operatorname{tg} C}}$

3) $\frac{c}{a} = \sin C$, слѣд. $\mathbf{a = \frac{c}{\sin C}}$ 4) $\mathbf{F = \frac{1}{2} bc = \frac{c^2}{2 \operatorname{tg} C}}$.

Вторая задача въ сущности совершенно сходна съ первою, если мы будемъ разсматривать уголъ B какъ данную величину.

Если B близко къ 0^0, слѣд. C близко къ 90^0, то гипотенуза a не будетъ точно опредѣляться ни изъ $\frac{c}{\cos B}$, ни изъ $\frac{c}{\sin C}$. Въ такомъ случаѣ вычисляютъ a изъ выраженія $a = \frac{b}{\sin B}$.

Третій случай.

§ **32.** Даны гипотенуза a и катетъ b; найти B, C, c, F.

Рѣш. 1) $\sin B = \frac{a}{b}$ 2) $\cos C = \frac{b}{a}$ или $C = 90^0 - B$

3) $c = a \cos B$ или $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$

4) $F = \frac{1}{2} bc = \frac{b}{2} \sqrt{(a+b)(a-b)}$

Если $a = 246,7$ ф., $b = 135,9$ ф., тогда $B = 33^0 25' 36'',6$, $C = 56^0 34' 23'',4$, $c = 205,893$ ф., $F = 13990,45$ □ ф.

Если $\frac{b}{a}$ приближается къ 1, то вычисляютъ сначала $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$ и потомъ B и C изъ уравненія $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \operatorname{cotg} C$. Если же $\frac{b}{a}$ приближается къ 0, то опредѣляютъ c изъ $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$ или изъ $c = b \operatorname{cotg} B = b \operatorname{tg} C$.

Четвертый случай.

§ **33.** Даны оба катета b, c; найти B, C, a, F.

Рѣш. 1) $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$ 2) $\operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}$ или $C = 90^0 - B$

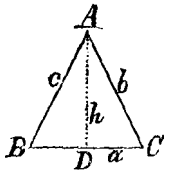
3) $\frac{b}{a} = \sin B$, слѣд. $a = \frac{b}{\sin B}$ или $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

4) $F = \frac{1}{2} bc$.

Если $b = 563,3$ ф., $c = 378,2$ ф., то $B = 56^0 7' 21'',23$, $C = 33^0 52' 38'',77$, $a = 678,4856$ ф., $F = 106520,03$ □ ф.

§ **34.** Треугольникъ можетъ быть вычисленъ не только по даннымъ сторонамъ и угламъ, но также, если будутъ извѣстны такія условія, которыя выражаютъ связь между частями тре—ка, такъ напр. если даны площадь и острый уголъ, площадь и одна сторона, гипотенуза и опущенный на нее изъ противолежащей вершины перпендикуляръ, сумма двухъ сторонъ и третья сторона и т. д. Рѣшеніе задачъ такого рода всегда можно привести къ одному изъ разсмотренныхъ нами случаевъ, если число данныхъ условій равняется числу искомыхъ частей тре—ка.

VII. Рѣшеніе равнобедренныхъ тре—ковъ.



§ **35.** Будемъ обозначать основаніе равнобедреннаго тре—ка буквою a и противолежащій ему уголъ буквою A. По причинѣ равенства сторонъ $b = c$ и угловъ $B = C$ для рѣшенія тре—ка достаточно знать только двѣ части, а именно 1) или основаніе и одинъ уголъ, 2) или боковую сторону и одинъ уголъ, 3) или основаніе и боковую сторону.

Если проведемъ высоту $AD = h$, то уголъ $BAD = \frac{1}{2}A$, линія $BD = \frac{1}{2}a$ и площадь $F = \frac{1}{2}ah$. Такъ какъ $B = C$, то $A + 2B = 180^0$.

§ **36.** Даны основаніе a и уголъ B или A.

Рѣш. 1) $A = 180^0 - 2B$ или $B = 90^0 - \frac{1}{2}A$

2) Изъ $\frac{1}{2}a = c\cos B$ слѣд. $c = \frac{a}{2\cos B} = \frac{a}{2\sin\frac{1}{2}A}$

3) По $h = \frac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\,B = \frac{1}{2}a\,\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}A$ слѣдуетъ.

$F = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{4}a^2\,\mathrm{tg}\,B = \frac{1}{4}a^2\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}A.$

§ **37.** Даны боковая сторона c и уголъ B или A.

Рѣш. 1) $A = 180^0 - 2B$ или $B = 90^0 - \frac{1}{2}A$

2) $a = 2c\cos B = 2c\sin\frac{1}{2}A$

3) $F = \frac{1}{2}ah$, но $a = 2c\cos B$, $h = c\sin B$, слѣд.

$F = c^2\cos B\sin B = c^2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}c^2\sin A$ (§ 12, 20).

§ **38.** Даны основаніе a и боковая сторона c.

Рѣш. 1) $\cos B = \frac{a}{2c}$. 2) $A = 180^0 - 2B$

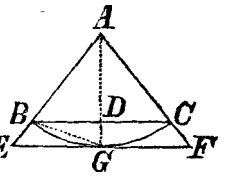
3) $F = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a\sqrt{\left(c + \frac{a}{2}\right)\left(c - \frac{a}{2}\right)}$

Примѣръ. $a = 6$ ф., $b = c = 5$ ф., $A = 73^0\,44'\,23'',24$, $B = C = 53^0\,7'\,48'',38$, $F = 12$ □ ф.

§ **39.** Рѣшеніе равнобедренныхъ тре—ковъ примѣняется при вычисленіи правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ и описанныхъ около него.

По данной сторонѣ s правильнаго n—угольника опредѣлить радіусы r и R круговъ вписаннаго и описаннаго и площадь F мно—ка.

Рѣш. Пусть BAC будетъ одинъ изъ равнобедренныхъ тре—ковъ, на которые раздѣляется n—угольникъ линіями, проведенными изъ центра A къ вершинамъ угловъ, тогда перпендикуляръ $AD = r$, $AB = R$, $BC = s$, $BD = \frac{1}{2}s$, $\measuredangle BAC = \frac{360^0}{n}$ и $BAD = \frac{180^0}{n}$.



Такъ какъ $AD = r = BD \operatorname{cotg} BAD$, $\frac{BD}{AB} = \sin BAD$, слѣд. $AB = R = \frac{BD}{\sin BAD}$, то

1) $r = \frac{1}{2}s \,.\, \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}$

2) $R = \frac{s}{2 \sin \frac{180^0}{n}}$

3) $F = \frac{sr}{2} \,.\, n = \frac{1}{4}s^2 n \,.\, \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}$.

Примѣръ. Если $s = 64$ ф., $n = 9$, то $r = 87{,}91928$ ф., $R = 93{,}56174$ ф., $F = 25320{,}75$ □ ф.

§ **40.** По данному радіусу r круга опредѣлить сторону, периметръ и площадь вписаннаго и описаннаго прав. n — угольника.

Рѣш. Пусть въ фигурѣ § 39 BC и EF будутъ стороны впис. и опис. n—угольника, тогда $AB = AG = r$, $\measuredangle BAG = \frac{180^0}{n}$, $BC = 2BD$, $BD = r \sin \frac{180^0}{n}$, $AD = r \cos \frac{180^0}{n}$, слѣд. во вписанномъ n—угольникѣ:

1) сторона $BC = 2r \sin \frac{180^0}{n}$ 2) периметръ $= 2nr \sin \frac{180^0}{n}$

3) площадь $= \frac{1}{2}$ пер. $\times$ AD $= nr^2 \sin\frac{180^0}{n} . \cos\frac{180^0}{n} =$

$\frac{1}{2}nr^2 \sin\frac{360^0}{n}$ (§ 12, 20)

Такъ какъ EF = 2EG, EG = AG$\mathrm{tg}\frac{180^0}{n} = r\mathrm{tg}\frac{180^0}{n}$,

то въ описанномъ n—угольникѣ:

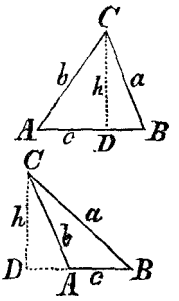
4) сторона EF $= 2r\mathrm{tg}\frac{180^0}{n}$, 5) периметръ $= 2nr\mathrm{tg}\frac{180^0}{n}$

6) Площадь $= \frac{r}{2} \times$ перим. $= nr^2\mathrm{tg}\frac{180^0}{n}$.

Примѣръ. Если $r = \frac{1}{2}$, $n = 21600$, слѣд. $\frac{180^0}{n} = 30''$, тогда находимъ, что периметръ вписаннаго и описаннаго мно—ка = 3,1415926, изъ чего слѣдуетъ, что и окружность, заключающаяся между обоими периметрами, должна выражаться тѣмъ же числомъ.

VIII. Рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ.

§ **41.** Разсмотримъ сперва нѣкоторыя предложенія, на которыхъ основано рѣшеніе косоугольныхъ тре—ковъ.



Если изъ вершины C остроугольнаго или тупоугольнаго тре—ка ABC опустимъ на противолежащую сторону AB или ея продолженіе перпендикуляръ h, то въ обоихъ случаяхъ $h = b \sin A$ и $h = a \sin B$, слѣд. $b \sin A = a \sin B$ или

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin B,}$$ и точно также

$$\mathbf{a : c = \sin A : \sin C}$$

$$\mathbf{b : c = \sin B : \sin C.}$$

Т. е. Стороны тре—ковъ относятся какъ синусы противолежащихъ имъ угловъ.

§ **42.** (Фиг. § 41). По извѣстному предложенію планиметріи

въ первой фигурѣ $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \,.\, AD$
во второй фигурѣ $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \,.\, AD$

Такъ какъ въ первомъ случаѣ $AD = b \cos A$, во второмъ $AD = -b \cos A$, то подставивъ въ предъидущія выраженія вмѣсто линіи AD равныя ей величины, получимъ для обоихъ случаевъ:

1) $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$, слѣд. $\mathbf{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$

2) $\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$, слѣд. $\mathbf{\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$

3) $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$, слѣд. $\mathbf{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$

Во всякомъ тре—къ квадратъ одной стороны равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія этихъ же сторонъ на косинусъ заключающагося между ними угла.

§ **43.** Такъ какъ $a : b = \sin A : \sin B$, то и

$a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B$ или (§ 12, 30, 31, § 10, 12)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)} \text{ или}$$

$$\mathbf{a + b : a - b = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B) : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B).}$$

Сумма двухъ сторонъ тре—ка относится къ ихъ разности какъ тангенсъ полусуммы противолежащихъ имъ угловъ относится къ тангенсу полуразности тѣхъ же угловъ.

Такъ какъ $A + B = 180^0 - C$ и $\frac{1}{2}(A + B) = 90^0 - \frac{1}{2}C$, слѣд. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C$ (§ 4), то предъидущую формулу можно представить и въ такомъ видѣ:

$$\mathbf{a + b : a - b = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B).}$$

§ **44.** Если даны сумма и разность двухъ величинъ, то большая изъ нихъ опредѣлится, если къ полусуммѣ прибавлить полуразность, а меньшая, если отъ полусуммы отнять полуразность.

Пусть x будетъ большая, y меньшая величина, сумма ихъ s, а разность d, тогда $x+y=s$, $x-y=d$. Складывая и вычитая эти уравненія получимъ:

$$x=\tfrac{1}{2}(s+d),\quad y=\tfrac{1}{2}(s-d).$$

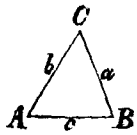
§ **45.** Площадь (F) тре—ка равна половинѣ произведенія двухъ его сторонъ, умноженной на синусъ угла, заключающагося между ними.

Изъ фигуры § 41 видно, что $h=a\sin B$, и $F=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}ac\sin B$. Точно также $F=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ab\sin C$.

Первый случай.

§ **46.** Даны сторона a и два угла; найти b, c, F.

Рѣш. Если даны два угла тре—ка, то и третій тоже извѣстенъ. По § 41 и § 45 имѣемъ



$$1)\ \mathbf{b=\frac{a\sin B}{\sin A}}\qquad 2)\ \mathbf{c=\frac{a\sin C}{\sin A}}$$

$$3)\ \mathbf{F=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}}.$$

Изъ $a=487{,}5$ фут., $A=103^0 48'$, $B=42^0 25'$ слѣдуетъ $C=33^0 47'$, $b=338{,}601$ фут., $c=279{,}13367$ фут., $F=45893{,}35$ □ ф.

Второй случай.

§ **47.** Даны стороны a, b, и лежащій между ними уголъ C; найти A, B, c, F.

Рѣш. Если вычислимъ полусумму угловъ A и B, то найдемъ $\frac{1}{2}(A+B)=90^0-\frac{1}{2}C$. Полуразность этихъ угловъ можно получить съ помощію пропорціи въ § 43, по которой $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C$. По § 44 находимъ

$$1)\ \mathbf{A=\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B)}\quad 2)\ \mathbf{B=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B)}$$

$$3)\ \mathbf{c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{b\sin C}{\sin B}}\qquad 4)\ \mathbf{F=\tfrac{1}{2}ab\sin C.}$$

Чтобы избѣжать отрицательныхъ количествъ, вставляютъ въ формулу $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C$ вмѣсто a большую, и вмѣсто b меньшую сторону тре—ка.

Примѣр. Изъ $a=1295{,}4$ ф., $b=835{,}7$ ф., $C=74^0 25' 30'',4$ слѣдуетъ

$$\tfrac{1}{2}C = 37^0\,12'\,45'',2 \qquad \log(a-b) = 2{,}6624745$$

$$\frac{(A+b)}{2} = 52^0\,47'\,14'',8 \qquad \log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C = 0{,}1195370$$

$$\mathrm{CD}\log(a+b) = 6{,}6713962 - 10$$

$$a + b = 2131{,}1$$

$$a - b = 459{,}7 \qquad \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B) = 9{,}4534077$$

$$\tfrac{1}{2}(A-B) = 15^0 51' 27'',51$$

1) $A = 68^0 38' 42'' 31$ 2) $B = 36^0 55' 47'',29$

3) $\log a = 3{,}1124939$ 4) $\log a = 3{,}1124039$

$\log\sin C = 9{,}9837526 - 10$ $\log b = 2{,}9220504$

$\mathrm{CD}\log\sin A = 0{,}0308905$ $\log\sin C = 9{,}9837527 - 10$

$\log c = 3{,}1270471$ $\log 2F = 6{,}0182070$

$c = 1339{,}822$ ф. $F = 521407{,}2$ □ ф.

§ **48.** Сторону c можно опредѣлить безъ предварительнаго вычисленія угловъ A и B непосредственно черезъ a, b, C (§ 42,3),

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}.$$

Тогда (§ 41) найдемъ $\sin A=\frac{a\sin C}{c}$, $\sin B=\frac{b\sin C}{c}$.

Третій случай.

§ **49.** Даны три стороны a, b, c; найти углы A, B, C и площадь F.

Рѣш. Изъ § 42 имѣемъ

1) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 2) $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

3) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Чтобы получить формулы, удобныя для вычисленія съ помощію логариѳмовъ, подставимъ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4bc}$ въ уравненія § 12, 24 и 25,

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \quad \text{и} \quad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}, \text{ тогда}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{4bc}} \quad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}} \quad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}, \quad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

Обозначимъ $\mathbf{a+b+c}$ черезъ $\mathbf{2s}$, тогда $b+c-a=2(s-a)$, $a+b-c=2(s-c)$, $a-b+c=2(s-b)$. Вставивъ эти величины въ предъидущія формулы, получимъ

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad \text{и} \quad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

Раздѣливъ 1ое уравненіе на 2ое получимъ

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

Если умножимъ числителя и знаменателя подкоренной дроби на s—a, предъидущее выраженіе будетъ имѣть видъ

$$4)\ \mathbf{tg}\tfrac{1}{2}\mathbf{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s-a}}\sqrt{\frac{(\mathbf{s-a})(\mathbf{s-b})(\mathbf{s-c})}{\mathbf{s}}}, \text{ и точно}$$

также $$5)\ \mathbf{tg}\tfrac{1}{2}\mathbf{B} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s-b}}\sqrt{\frac{(\mathbf{s-a})(\mathbf{s-b})(\mathbf{s-c})}{\mathbf{s}}}$$

$$6)\ \mathbf{tg}\tfrac{1}{2}\mathbf{C} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s-c}}\sqrt{\frac{(\mathbf{s-a})(\mathbf{s-b})(\mathbf{s-c})}{\mathbf{s}}}$$

Корень въ этихъ формулахъ должно всегда брать съ положительнымъ знакомъ, потому что половина всякаго угла въ тре—кѣ всегда острый уголъ. Для провѣрки счисленія служитъ уравненіе $A+B+C=180^0$.

Для вычисленія площади имѣемъ (§ 45 и § 12, 20)

$$F = \frac{bc.\sin A}{2} = \frac{bc.2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A}{2} = bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

т. е. $$7)\ \mathbf{F} = \sqrt{\mathbf{s}(\mathbf{s-a})(\mathbf{s-b})(\mathbf{s-c})}$$

Изъ $\tfrac{1}{2}bc\sin A = F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ слѣдуетъ

8) $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

Далѣе изъ фиг. § 41 и изъ урав. 8 слѣдуетъ

9) $h = b \sin A = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Съ помощію послѣдней формулы, въ которой h есть перпендикуляръ, опущенный на сторону c изъ противоположной вершины, опредѣляется высота тре—ка по даннымъ тремъ его сторонамъ.

Примѣръ. Если $a = 97{,}5$, $b = 84{,}5$ и $c = 91$ ф., тогда

$\log s = 2{,}1351327$ $\log(s-b) = 1{,}7160033$

$\log(s-a) = 1{,}5910646$ $\log(s-c) = 1{,}6580114$

$$\log \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = 1{,}4149733$$

$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = 9{,}8239087$ $A = 67^0 22' 48'',46$

$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = 9{,}6989700$ $B = 53^0\ 7' 48'',36$

$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = 9{,}7569619$ $C = 59^0 29' 23'',12$

$\log F = 3{,}5501060$ $F = 3549$ □ ф.

Четвертый случай.

§ 50. Даны стороны a, b, и уголъ A, противолежащій одной изъ данныхъ сторонъ; найти B,C,c,F.

Рѣш. 1) $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ 2) $C = 180^0 - (A + B)$

3) $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{b \sin C}{\sin B}$ 4) $F = \frac{1}{2} ab \sin C.$

Выраженія, найденныя для C, c, F, зависятъ отъ угла B, который можетъ быть острымъ и тупымъ.

Если $a \geqq b$, слѣд. и $A \geqq B$, то B можетъ быть только острымъ угломъ. Изъ $a = 154{,}31$ ф., $b = 123{,}84$ ф. $A = 43^0 17' 12'',3$ слѣд. $B = 33^0 23' 5'',89$, $C = 103^0 19' 41'',81$, $c = 218{,}9947$ ф., $F = 9297{,}517$ □ ф.

Если $a < b$, слѣд. и $A < B$, то B можетъ быть какъ острымъ такъ и тупымъ. Въ такомъ случаѣ C, c, F будутъ имѣть по два различныя значенія и мы получимъ

два треугольника, заключающіе данныя части. Изъ $a = 308$ ф., $b = 375$ ф., $A = 37^0 45'$ слѣдуетъ

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}5740313 \\ \log \sin A &= 9{,}7869056 - 10 \\ \text{CD} \log a &= 7{,}5114493 - 10 \\ \hline \log \sin B &= 9{,}8723862 - 10, \text{ слѣд.} \end{aligned}$$

1) $B = 48^0 11' 34'', 78$ или

2) $C = 94^0\ 3' 25'', 22$

3) $\log \sin C = 9{,}9989103 - 10$

$\log a = 2{,}4885507$

$\text{CD} \log \sin A = 0{,}2130944$

$\log c = 2{,}7005554$

$c = 501{,}8286$ ф.

4) $F = 57605{,}28$ □ ф.

1) $B = 131^0 48' 25'', 22$

2) $C = 10^0 26' 34'', 78$

3) $\log \sin C = 9{,}2582952 - 10$

$\log a = 2{,}4885507$

$\text{CD} \log \sin A = 0{,}2130944$

$\log c = 1{,}9599403$

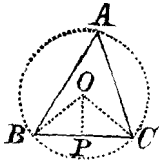
$c = 91{,}18859$ ф.

4) $F = 10467{,}6$ □ ф.

Въ частномъ случаѣ, если $a < b$ и въ тоже время $a = b \sin A$, то $\sin B = 1$, слѣд. $B = 90^0$; тогда получится только одинъ тре—къ, который будетъ имѣтъ прямой уголъ. Если же $a < b$ и въ тоже время $a < b \sin A$, слѣд. $\sin B > 1$, тогда нельзя будетъ найти тре—ка, который бы имѣлъ данныя въ задачѣ части.

§ **51.** Съ помощію формулъ въ § 49 можно рѣшить слѣдующую задачу:

По даннымъ сторонамъ a, b, c тре—ка ABC опредѣлить радіусы R и r круговъ описаннаго и вписаннаго.



Рѣш. 1) Опишемъ около тре—ка ABC кругъ и проведемъ изъ центра O прямую $OP \perp BC$ и линіи OB и OC, тогда

$$BC = 2\,BO \sin \tfrac{1}{2} BOC = 2\,R \sin A, \text{ слѣд.}$$

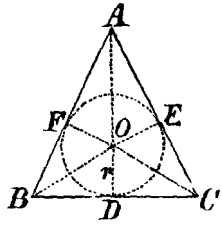
$$R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \sin A}.$$

Такъ какъ (§ 49,8) $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

гдѣ $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, то (§ 49,7)

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{abc}{4F}.$$

2) Проведемъ изъ центра къ вершинамъ тре—ка прямыя и опустимъ изъ центра на стороны a, b, c тре—ка перпендикуляры OD, OE, OF, тогда



$F = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{r}{2}(a+b+c)$, слѣд.

$$r = \frac{2F}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a+b+c}.$$

IX. Задачи.

§ **52.** Углы и ихъ тригон. величины (§ 2—28).

1) Выразить посредствомъ тригон. величинъ угла меньшаго 45^0 тригонометрическія величины слѣдующихъ угловъ: a) $\sin 74^0 41' 50''$ b) $\sin 124^0 40'$ c) $\sin 156^0 30'$ d) $\cos 75^0 5''$ e) $\cos 125^0$ f) $\cos 170^0 3' 35''$ g) $\operatorname{tg} 57^0 46'$ h) $\operatorname{tg} 95^0 55' 6''$ i) $178^0 33''$ k) $\operatorname{cotg} 52^0 48'$ l) $\operatorname{cotg} 134^0$ m) $\operatorname{cotg} 136^0 5'$.

2) Данъ $\sin a = 0{,}6$; найти $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$.

3) По $\cos a = -0{,}7071$ вычислить $\sin a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$.

4) $\operatorname{tg} a = 0{,}0174551$; найти $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{cotg} a$.

5) $\operatorname{cotg} a = -0{,}602$; найти $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$.

6) $\operatorname{tg} a = 3{,}1246$; найти $\operatorname{tg}(a + 45^0)$.

7) $\sin a = 0{,}2$; найти $\sin\frac{a}{2}$ и $\cos\frac{a}{2}$

8) Данъ $\cos a = 25:144$; найти $\cos\frac{a}{2}$.

9) Выразить $\cos 75^0$ черезъ $\sin 30$, $\sin 45^0$, $\cos 30^0$, $\cos 45^0$.

10) Вычислить $\sin 60^0$ по формулѣ § 12, 20.

11) Съ помощію $\sin 45^0$ и $\cos 45^0$ вычислить $\sin 90^0$ и $\cos 90$.

12) Вычислить $\cos 15^0$ (§ 11, 19 и § 12, 24)

13) $\cos a = \frac{1}{2}$; найти $\cos 2a$ и $\operatorname{tg} 2a$.

14) $\cos a = \frac{1}{3}$ и $\cos b = \frac{1}{5}$ найти $\sin(a+b)$ и $\cos(a-b)$.

15) Найти для угла $102^0 22' 56'',8$ $\log\sin$, $\log\cos$, $\log\operatorname{tg}$, $\log\operatorname{cotg}$.

16) $\log(-\cos x) = 0{,}9201496 - 1$; $\log(-\operatorname{tg} y) = 0{,}3176782$.

17) $\sin a = 0{,}433397$; найти $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$.

18) $\cos a = -0{,}9781475$; найти $\sin a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$.

19) $\operatorname{tg} a = \pm 0{,}371571$; найти $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{cotg} a$.

20) $\operatorname{cotg}(45^0 - a) = \sqrt{3}$; найти $\log\operatorname{tg}(45^0 + a)$.

21) Углы тре—ка a, b, c и $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c) = 1{,}3168521$; опредѣлить a.

22) Данъ $\log\operatorname{cotg} x = 1{,}0031187$ (n); найти x и $\log\cos x$.

23) $\operatorname{tg} a = x$ и $x^2 + 3x = -2$; найти a.

24) $\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, гдѣ $a = \pm 10$, $b = -7$, $c = 13$.

25) $\log\sin(a + 90^0) = 0{,}9904044 - 1$; найти $\cos a$.

26) $\sin^2 x = 0{,}5$ и $\operatorname{tg}^2 y = 0{,}2955551$.

27) $\log\operatorname{tg} x = -3$.

28) $\cos x = \frac{\cos 143^0 28' 59''}{\sin 109^0 2' 28''}$.

29) $\log\operatorname{tg} 2a = 0{,}4771213$; найти $\operatorname{tg} a$.

30) $\operatorname{tg} x = 3$; найти $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

31) $x = \frac{\sin 35^0 13' \cos 145^0 50'}{3\operatorname{tg} 140^0 \operatorname{cotg} 92^0 22' \cos 125^0}$.

32) $\cos x = \frac{0{,}5 \cos 34^0 10'}{\operatorname{tg} 73 \sin 150^0}$; $y = \frac{345 \operatorname{tg} 13^0 15' 50''}{\sin^2 15^0}$.

33) Выразить длину дуги въ 20^0 въ частяхъ радіуса.

34) Найти уголъ, котораго дуга равна 3мъ радіусамъ.

35) Выразить въ градусахъ, минутахъ и секундахъ дугу, которой длина равна радіусу.

36) Найти $\log\sin 302^0 54'$, $\log\cos 254^0 47'$, $\operatorname{tg} 206^0 34'$, $\operatorname{cotg} 323^0 53'$, $\cos 346^0$, $\sin 400^0$, $\log\cos 785^0$, $\log\sin 1029^0$, $\sin(-1029^0)$, $\cos(-300^0)$,

§ **53.** Прямоугольные тре—ки (§ 29—33).

Въ слѣдующихъ задачахъ буквы A, B, C, a, b, c, F всегда будутъ имѣть значеніе, опредѣленное нами въ § 29.

37) Опредѣлить стороны прямоугольника, котораго діагональ $= 325$ ф. и составляетъ уголъ $25^0 42'$ съ одной стороною.

38) Дана пропорція $a:b:c = 5:4:3$; найти B и C.

39) Въ кругѣ, котораго радіусъ равенъ 3 ф., опредѣлить разстояніе центра отъ хорды, стягивающей дугу въ $17^0 20'$.

40) Опредѣлить меньшій уголъ прямоугольнаго тре—ка, въ которомъ катеты относятся какъ $5:12$.

41) По даннымъ сторонамъ 4937 ф. и 3874 ф. прямоугольника опредѣлить углы этихъ сторонъ съ діагональю.

42) Тѣнь, бросаемая вертикальнымъ столбомъ въ 21,2 футовъ, равна 34,8 футамъ; найти угловое разстояніе солнца отъ горизонта.

43) Тѣнь, бросаемая вертикально поставленною палкою, короче самой палки на $\frac{1}{9}$ ея величины; опредѣлить высоту солнца.

44) Діаметрально противоположныя образующія прямаго конуса, котораго высота равна 4 фута, составляютъ уголъ въ $73^0 44' 23'',28$; найти діаметръ основанія.

45) Въ прямомъ усѣченномъ конусѣ радіусы верхняго и нижняго основаній равны 4 ф. и 11,5 ф., и діаметрально противоположныя образующія составляютъ уголъ въ $73^0 44' 23'',28$; вычислить боковую поверхность.

46) Діагональ сѣченія прямаго цилиндра плоскостью, проходящею черезъ ось, равна 17 ф. и составляетъ съ плоскостью основанія уголъ въ $61^0 55' 39'',04$; найти объемъ цилиндра.

47) Чтобы измѣрять ширину рѣки, отложили вдоль берега линію $AB = 159$ ф., изъ точки A возставили перпендикуляръ, который пересѣкъ противоположный берегъ въ точкѣ C, а уголъ $ABC = 53^0 7' 48'',4$; найти ширину рѣки.

48) Опредѣлить уголъ, подъ которымъ виденъ вертикально поставленный шестъ, котораго длина въ 500 разъ меньше разстоянія шеста отъ наблюдателя.

49) Какой величины кажется человѣкъ въ $5\frac{1}{2}$ футовъ ростомъ другому такого же роста, который находится отъ него на разстояніи 138 футовъ?

50) На одной и тойже горизонтальной плоскости стоитъ башня AB, которой высота $= 200$ ф., и столбъ CD, меньше башни. Найти высоту столба, если даны будутъ углы при вершинѣ столба, $BAC = 60^0$ и $BAD = 30^0$.

51) Подъ какимъ угломъ видна башня въ 372 фута высотою, если наблюдатель удаленъ отъ ней на 1712 фута и находится на высотѣ 11 футовъ надъ горизонтальною поверхностью?

52) Воздушный шаръ, котораго діаметръ $= 40$ футамъ, поднимается на мѣстѣ A по вертикальному направленію, и черезъ нѣсколько времени замѣченъ наблюдателемъ, находящимся на разстояніи 4000 футовъ отъ мѣста A, подъ угломъ въ $30'$. Какъ высоко находится шаръ въ этотъ моментъ?

53) Вычислить радіусъ круга, вписаннаго въ прямоугольный тре—къ, котораго катетъ $c = 77$ футамъ, а уголъ $B = 25^0 3' 27'',42$.

Въ слѣдующихъ задачахъ требуется, по даннымъ частямъ прямоугольнаго тре—ка вычислить остальныя его части.

54) Площадь $F = 1014 \square$ ф. и уголъ $B = 53^0 7' 48'',39$.

55) Площадь $F = 139,9045 \square$ ф. и катетъ $c = 20,5893$ ф.

56) Площадь $F = 275 \square$ ф. и гипотенуза $a = 62$ ф.

57) Гипотенуза $a = 5$ ф. и опущенный на нее изъ противолежащей вершины перпендикуляръ $h = 2,4$ ф.

58) Сумма гипотенузы и одного катета $a + c = s = 8$ ф., другой катетъ $b = 4$ ф.

59) Сумма катетовъ $b + c = s = 14$ футамъ и уголъ $B = 36^0 52' 11'',62$.

60) Сумма гипотенузы и одного катета $= 18$ ф. сумма гипотенузы и другого катета $= 16$ ф.

61) Площадь $F = 60 \square$ ф., сумма катетовъ $= 32$ ф.

62) Площадь $F = 4 \square$ ф. и периметръ $a + b + c = s = 20$ ф.

63) Гипотенуза $a = 56$ ф., сумма катетовъ $b + c = s = 64$ ф.

64) Периметръ $a + b + c = 90$ ф. и опущенная на гипотенузу высота тре—ка $h = 8,7804878$ ф.

65) Площадь $F = 11$ □ ф. и радіусъ описаннаго круга $R = 6{,}2$ ф.

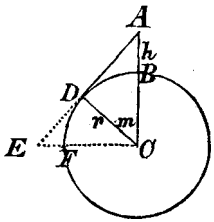
Въ слѣдующихъ задачахъ принято, что земля есть шаръ, котораго діаметръ равенъ 1719 географ. милямъ, окружность большаго круга ея = 5400 геог. мил., градусъ болшаго круга = 15 геог. мил., геог. миля = 24303 русск. футамъ.

66) Зная экваторъ земли, вычислить окружность параллели, проходящей черезъ $50^0 57'$ широты.

67) Подъ какою широтою проходитъ параллеля, которой окружность равна 3208,49 милямъ?

68) Съ какою скоростью въ секунду движется С. Петербургъ на 60^0 широты, въ слѣдствіе вращенія земли около оси?

69) Какъ высока должна быть гора, чтобы ея вершина была видна за 20 миль?



70) На какое разстояніе кругомъ можетъ человѣкъ въ 5 фут. ростомъ обозрѣть ровную мѣстность?

71) Вершина Тенерифскаго Пика видна за 33,3 мили съ корабля, если наблюдатель поднимется на немъ такъ, что глазъ его будетъ на 30 фут. выше поверхности моря. Опредѣлить высоту горы.

72) На какомъ разстояніи кривизна земли еще позволитъ видѣть другъ друга двумъ наблюдателямъ въ 6 футовъ ростомъ?

73) Какъ высоко надъ поверхностью моря должно лежать мѣсто, что бы изъ него видна еще была на горизонтѣ вершина Давалагири 27343 фут. высотою, если это мѣсто отстоитъ на 50,35 миль отъ горы?

74) На вершинѣ Чимборозо уголъ, образуемый горизонтальною линіею съ линіею, проведенною въ той же вертикальной плоскости отъ вершины къ горизонту, равенъ $2^0 49' 50'',39$; найти высоту горы.

75) Какъ высоко нужно подняться надъ поверхностью земли, чтобы обозрѣть поверхность, равную холодному поясу, т. е. 384977 □ миль?

§ **54.** Равнобедренные тре—ки и правильные многоугольники (§ 35—40).

76) Въ правильной четырехсторонней пирамидѣ плоскіе углы при вершинѣ равны каждый $45^0 35'$, а площадь основанія 120 □ фут., какъ велика вся поверхность пирамиды?

77) Образующая прямаго конуса равна 35 футамъ и составляетъ съ плоскостью основанія уголъ $27^0 19'$; найти высоту конуса.

78) Квадратъ длины прямоугольника равенъ двойному квадрату его ширины; подъ какимъ угломъ пересѣкутся діагонали прямоугольника?

79) Въ равнобедренномъ тре—кѣ квадратъ стороны относится къ квадрату основанія какъ 3:4; опредѣлить уголъ при вершинѣ.

80) Опредѣлить радіусъ круга, въ которомъ вписанный уголъ $= 14^0 16' 10''$ и опирается на хорду, равную 367,375 ф.

81) Два землемѣра находятся въ двухъ точкахъ, отстоящихъ на 850 фут. отъ вѣхи; одинъ изъ нихъ измѣрялъ уголъ между вѣхою и его товарищемъ и нашелъ, что этотъ уголъ $= 36^0 52' 11'',62$; на какомъ разстояніи другъ отъ друга находились землемѣры?

82) Радіусъ круга, описаннаго около правильнаго $15^{и}$ угольника равенъ 9,201 фут., найти радіусъ r круга, вписаннаго въ этотъ мн—къ, сторону его s и площадь r.

83) Площадь правильнаго $37^{и}$ угольн. вписаннаго = 24127,94 □ фут., найти его сторону s и радіусъ r вписаннаго въ него круга.

84) Опредѣлить длину круга, котораго радіусъ = 187 фут., если стягивающая дугу хорда = 36 фут.

85) Если изъ какой либо точки круга, какъ изъ центра, опишемъ его же радіусомъ другой кругъ, то половина хорды общей обоимъ кругамъ приблизительно равна сторонѣ правильнаго $7^{и}$ угольника, вписаннаго въ этотъ же кругъ. Какъ велика разность между центральнымъ угломъ, соотвѣтствующимъ сторонѣ $7^{и}$ угольника и центральнымъ угломъ, соотвѣтствующимъ половинѣ общей обоимъ кругамъ хорды?

86) Объемъ призмы = 50 куб. футъ; высота равна двойному діаметру круга, описаннаго около основанія призмы, которое представляетъ правилн. осмиугольникъ; вичислить сторону основанія.

87) Рѣшить тре—къ по данной площади $F = 79{,}45$ □ фут. и сторонѣ $b = 30{,}4$ фут.

88) Рѣшить тре—къ, котораго высота $h = 72$ фут. и сумма основанія и стороны $a + b = 210$ футамъ.

89) Рѣшить равнобедренный тре—къ, котораго периметръ = 4 фут., а высота = 1 фут.

90) Вычислить π изъ периметровъ 24000 — угольниковъ вписаннаго и описаннаго.

91) Вычислить хорду, соотвѣтствующую $17^0 13' 24''$ въ кругѣ, радіусъ котораго = 23,4 ф.

§ 55. Косоугольные трегольники (§ 41—51).

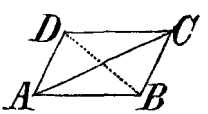
92) Вычислить углы тре—ка по данному отношенію его сторонъ $a:b:c = 8:15:17$.

93) Даны стороны тре—ка $a = 56$, $b = 52$, $C = 60$ фут., вычислить длину линіи, соединяющей вершину угла A со срединою стороны a.

94) Даны стороны тре—ка $a = 106{,}4177$, $b = 115{,}47$, $C = 94{,}1321$ фут.; вычислить перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ тре—ка на противолежащія стороны.

95) Изъ точки движутся 2 тѣло, одно со скоростію 83,4 фут., другое со скоростію 70,5 фут. въ секунду, по направленіямъ, которыя составляютъ уголъ $98^0 43'$; на какомъ разстояніи другъ отъ друга будутъ находиться эти тѣла черезъ 5 секундъ?

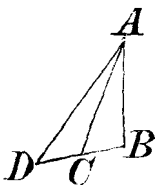
96) Если двѣ силы, которыхъ величина и направленіе выражаются прямыми AB и AD, дѣйствуютъ на точку A подъ какимъ нибудь угломъ, то равнодѣйствующая этихъ силъ (которыя въ такомъ случаѣ называются составляющими) совпадаетъ по величинѣ и по направленію съ діагональю AC параллелограма, построеннаго на силахъ AB и AD. Одна изъ составляющихъ выражается прямою, равною



684,56756 футамъ и образуетъ съ равнодѣйствующею и съ другою составляющею углы $44^0 44' 44''$ и $90^0 50' 40''$, какъ велика должна быть другая составляющая.

97) Двѣ силы въ 200 и въ 500 фунтовъ дѣйствуютъ на точку подъ угломъ 70^0, опредѣлить величину равнодѣйствующей и уголъ, который она образуетъ съ меньшею составляющею.

98) Даны двѣ стороны тре—ка, $a = 93$ фут., $b = 181$ фут., и заключающійся между ними уголъ $C = 42^0 34' 10''$; черезъ вершину A проведена линія, отрѣзывающая $1/3$ площади тре—ка; опредѣлить величины угловъ, на которые раздѣлится этою линіею уголъ A.



99) Чтобы измѣрять высоту башни AB, которая стоитъ на склонѣ горы, отъ основанія башни проложена линія $BD = 428$ ф. и измѣряны углы, подъ которыми видна башня съ конца D линіи BD и изъ средины C, первый уголъ $= 35^0 24' 42'',97$, а 2ой $= 53^0 33' 52'',07$. Какъ высока башня?

100) Чтобы измѣрять ширину CD рѣки (фиг. 99) продолжена линія CD до точки B: отъ этой точки проложена прямая $BA = 200$, которая образуетъ съ CD уголъ $B = 116^0 11'$; измѣряны углы линіи AB съ съ линіями, направленными въ точки C и D, и найдено, что $\measuredangle BAC = 37^0 20'$ и $\measuredangle BAD = 45^0 5'$. По этимъ даннымъ вычислить ширину рѣки.

101) Рѣшить тре—къ ABD (фиг. 99), въ которомъ $\measuredangle D = 53^0 7' 48'',2$, сторона $BD = 56$ ф. и линія AC, дѣлящая тре—къ, пополамъ, равна 48,66209 ф.

102) Въ тре—кѣ основаніе $a = 702$ фут., высота $h = 537$ ф. и сторона $b = 638$ фут.; опредѣлить сторону C и уголъ A.

103) Вычислить перпендикуляры, опущенные изъ вершины тре—ка на противоположныя стороны, если даны сторона $a = 975$ фут., стор. $b = 845$ фут. и уголъ A $= 67^0 22' 48'',48$.

104) Вычислить объемъ конуса, если діаметръ его основанія $= 16$ фут., болшая образующая $= 192$, а меньшая образующая $= 180$ фут.

105) Вычислить объемъ прямой пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ, если ребро при основаніи = 4,2426907 ф., а боковое ребро = 5 фут.

106) Въ параллелограмѣ ABCD (фиг. 96) AB = 380 ф., AD = 244 ф., AC = 527 фут.; опредѣлить уголъ A и діагональ BD.

107) Если раздѣлить пополамъ сторону правильнаго тре—ка вписаннаго, то получится приблизительно сторона правильнаго семиугольника, вписаннаго въ тотъ же кругъ; найти разность между центральнымъ угломъ, соотвѣтствующимъ приближенной сторонѣ правильнаго семиугольника, и центральнымъ угломъ, соотвѣтствующимъ дѣйствительной сторонѣ прав. семиугольника.

108) Рѣшить тре—къ, въ которомъ сторона $c = 2346$ фут., уголъ $C = 92^0 18'$ и отношеніе другихъ сторонъ будетъ $a : b = 11 : 8$.

109) Рѣшить тре—къ, въ которомъ площадь $F = 120$ □ ф., $\measuredangle A = 14^0 15' 0'',116$ и $\measuredangle B = 22^0 37' 11'',5$.

110) Рѣшить тре—къ, въ которомъ площадь $F = 341,06$ □ ф., сторона $a = 139,3$ и сторона $b = 27,2$ фут.

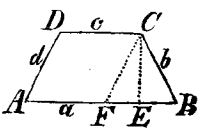
111) Рѣшить тре—къ, въ которомъ основаніе $a = 98,57041$ ф., высота $h = 43,8$ ф. и уголъ при вершинѣ $A = 95^0 39' 20''$.

112) Въ тре—кѣ даны уголъ $A = 95^0 27' 9'',457$ и противолежащая ему сторона, раздѣленная на 2 отрѣзка въ 36 и 8 футовъ перпендикуляромъ, опущеннымъ на нее изъ A; рѣшить тре—къ.

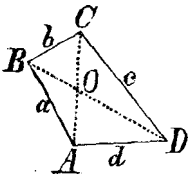
113) Вычислить радіусы R и r круговъ вписаннаго въ тре—къ и описаннаго около него, если одна сторона b тре—ка $b = 445,81$ фут., другая $c = 443,6$ фут. и уголъ $B = 33^0 21' 1 6''$.

114) Даны три перпендикуляра, опущенные изъ вершинъ тре—ка на противолежащія стороны: $1^{ый} = 840$ ф., $2^{ой} = 780$ ф., $3^{ій} = 728$.

115) Въ трапеціи ABCD даны параллельныя стороны $a = 13$ ф., $c = 5$ ф., непараллельныя стороны $d = 15$ ф. и $b = 17$ ф.; вычислить углы и площадь.



116) Въ трапеціи извѣстны высота CE = 7,56 ф., основаніе a = 33 фут. и прилежащіе къ основанію углы A = 30°14′16″ и B = 40°40′38″; вычислить сторону c, противолежащую основанію.



117) Пусть въ четыреугольникѣ ABCD діагонали AC = BD = 28,745788 ф. и образованный діагоналями уголъ AOD = 75°30′; вычислить площадь четыреугольника.

118) Чтобы измѣрять длину неприступной прямой BC, (ф. 117) провѣсили линію AD = 45501,62 фут., опредѣлили при концахъ этой прямой углы BAD = 106°22′45,″5, CAD = 67°13′57″,4 ADC = 62°42′48″,8 и ADB = 44°12′39″,6.

119) Въ четыреугольникѣ ABCD даны: сторона a = 24 ф., b = 20 фут., c = 18 фут., d = 16 фут. и уголъ A = 85″30′; найти углы B, C, D, діагональ AC и площадь F четыреугольника.