22.151.05я73
Р 83

514 (02)

Инженер Д. П. РУДИН

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ПО ТЕОРИИ И ПРАКТИКЕ

ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „УКРАИНСКИЙ ЭКОНОМИСТ“

Инженер Д. П. РУДИН

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ПО ТЕОРИИ И ПРАКТИКЕ

ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

ПРОЧИТАНЫ НА ЗЕМЛЕУСТРОИТЕЛЬНЫХ
КУРСАХ НАРКОМЗЕМА

ИЗДАТЕЛЬСТВО „УКРАИНСКИЙ ЭКОНОМИСТ"
1925

Екатеринослав, 2-я типо-лит. им.
„1-ое мая" Полиграфтреста.
Заказ № 2231. Тираж 3000 экз.
Оглит № 3479 от 13 июня
1925 года.

Глава I.

ГОНИОМЕТРИЯ.

ОТДЕЛ I. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ.

§ 1. ПРЕДМЕТ ТРИГОНОМЕТРИИ.

Как известно, многоугольник может быть разбит на треугольники проведением диагоналей. Поэтому для определения элементов многоугольника (его сторон и углов) необходимо уметь определять элементы треугольника.

Задача об определенни неизвестных элементов треугольника по тем или иным данным может быть решена двумя способами: 1) графически или построением и 2) аналитически или вычислением.

Графический способ состоит в построении треугольника по данным его элементам и определении по чертежу элементов неизвестных. Для построения треугольника, конечно, необходимо располагать достаточным числом данных, среди которых должна быть хотя бы одна сторона треугольника или линия, зависящая от формы или размеров треугольника, например, высота, и чертежными инструментами (линейкой, транспортиром и циркулем) для возможно точного выполнения построения.

Аналитический способ заключается в установлении, в виде уравнения, связи между данными и искомыми элементами треугольника и решении этого уравнения, корни которого и будут искомыми элементами треугольника.

Необходимо заметить, что по правилам и теоремам геометрии лишь в очень редких случаях возможно установление в виде уравнения связи между данными и искомыми элементами треугольника. Это происходит потому, что геометрия почти не дает правил ддя вывода соотношений между сторонами и углами треугольника. Установление этих соотношений и пользование ими для вычисления неизвестных элементов треугольников, или, как говорят, для решения треугольников и составляет предмет тригонометрии.

Тригонометрию принято разделять на две части: 1) гониометрию, в которой устанавливается соотношение между углами и прямыми линиями, проводимыми в этих углах, и 2) собственно тригонометрию, излагающую решение треугольников на основании правил гониометрии.

§ 2. СРАВНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО И АНАЛИТИЧЕСКОГО СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Графический способ определения неизвестных элементов треугольника имеет весьма важный недостаток, заключающийся в невозможности без ошибок строить на бумаге углы и линии, равно как и измерять по чертежу длины линий и величины углов. Ошибки эти в некоторых случаях могут оказаться значительными, и, следовательно, определение неизвестных элементов треугольника будет произведено неточно.

Известно, что наименьший промежуток, различаемый на бумаге невооруженным глазом, есть $\frac{1}{200}$ дюйма, и поэтому такой именно ошибкой сопровождается как нанесение линий на бумагу, так и определение длины уже нанесенной на бумагу линии. При построении на бумаге значительных по длине линий необходимо прибегать к уменьшению их, и величина ошибок, допускаемых в построении линии на бумаге, вполне зависит от выбранного уменьшения. Если, например, условимся уменьшать линии при нанесении их на бумагу в 16.800 раз, т.-е. принимать каждый дюйм на бумаге за 200 сажен, то, следовательно, $\frac{1}{200}$ дюйма будет соответствовать 1 сажени, что и составит величину ошибки.

По поводу определения углов транспортиром следует указать, что ошибка такого определения может достигнуть 15′.

Аналитический способ решения треугольников не имеет указанного выше недостатка, т. к. неизвестные величины при этом способе определяются не по чертежу, а из уравнений и поэтому не содержат тех ошибок, которые неизбежны при графическом способе.

Вышеизложенное позволяет притти к следующему важному заключению: аналитический способ решения треугольников, при прочих равных условиях, позволяет точнее, чем это возможно при применении графического способа, определить неизвестные элементы треугольника.

§ 3. ОТВЛЕЧЕННОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДУГ И УГЛОВ.

Кроме известного из геометрии способа выражения углов и измеряющих их дуг в градусной мере, в тригонометрии большое применение имеет также и способ отвлеченного выражения дуг и углов. При этом способе единицей для измерения длины дуги служит радиус, и, значит, дуга всегда выражается отвлеченным числом, показывающим отношение ее длины к радиусу. Следовательно, отвлеченное выражение длины окружности $2\pi R$ будет $\frac{2\pi R}{R}$ или 2π; для полуокружности получится π и т. д.

Так как при градусном измерении дуг и углов число дуговых градусов всегда равняется числу угловых градусов соответствующего дуге центрального угла, то при способе отвлеченного выражения дуг и углов

для измерения углов служит центральный угол, дуга которого равняется радиусу. Такой угол радиан а отвлеченное выражение угла есть отношение его радиану.

Задача. Определить градусную величину радиана.

На основании изложенного, между градусным и отвлеченным выражением дуг и углов устанавливаются следующие зависимости:

Градусное выражение дуг или углов	Отвлеченное выражение дуг или углов
360^0	2π
270^0	$\frac{3\pi}{2}$
180^0 . . .	π
90^0	$\frac{\pi}{2}$
60^0	$\frac{\pi}{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$
30^0	$\frac{\pi}{6}$

Весьма просто устанавливается соотношение между градусной величиной произвольной дуги или угла α^0 с их отвлеченным выражением a. Из вышеприведенной таблицы имеем, что для целой окружности ее градусное выражение есть 360^0, а отвлеченное—2π; поэтому

$$\frac{360^0}{2\pi} = \frac{\alpha^0}{a}$$

или по сокращении

$$\frac{180^0}{\pi} = \frac{\alpha^0}{a}$$

определяя теперь из этой пропорции a, будем иметь отвлеченное выражение дуги или угла:

$$a = \pi \frac{\alpha^0}{180^0}$$

градусного же выражения дуги или угла α из той же пропорции

$$\alpha^0 = 180^0 \frac{a}{\pi}.$$

§ 4. ЗНАКИ РАССТОЯНИЙ.

В тригонометрии оказывается необходимым различать данные и искомые расстояния не только по величине, а и по направлению.

черт. 1.

Пусть имеем прямую неограниченной длины и на ней точку M (черт. 1). Положение этой точки M на данной прямой будет вполне определено ее расстоянием d от некоторой произвольно выбранной точки O (начала счета расстояний) и положением относительно точки O. Это последнее условие необходимо потому, что на данном расстоянии от точки O могут находиться две точки: одна M—вправо от точки O и другая M_1—влево от этой точки. Самым простым способом для обозначения положения данных точек M и M_1 относительно начала O служит присоединение знака + или — к расстоянию этих точек d. При этом выбор направления, принимаемого за положительное, является совершенно произвольным, но, выбрав такое направление,—направление прямо противоположное, следует считать за отрицательное. Например, если расстояния, откладываемые вправо от точки O, рассматривать, как положительные, то—d будет означать расстояние от точки O до некоторой точки, расположенной влево от O.

В необходимости различать расстояния не только по величине, но и по направлению, возможно убедиться еще следующим образом.

Пусть требуется найти разность r двух положительных количеств a и b, т.-е. пусть

$$r = a - b.$$

В зависимости от величин a и b эта разность может быть или положительна, или равна O, или отрицательна. Именно: если $a > b$, то r — положительно, если $a = b$, то $r = O$, и если $a < b$, то r — отрицательно. Предположив теперь, что a и b обозначают некоторые расстояния, задача об определении разности этих расстояний решается так.

черт. 2.

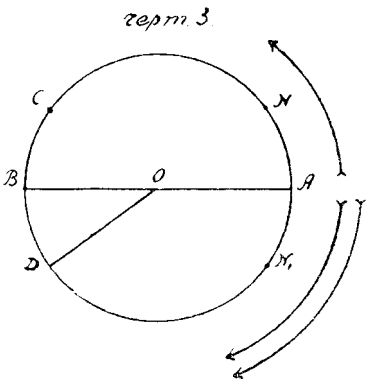
Пусть (черт. 2) точка O есть начало счета расстояний. Отложив от O вправо расстояние a, получим точку M, от которой в обратном направлении отложим расстояние b. Если теперь $a > b$, то конец расстояния b окажется между точками O и M—в точке $= M_1$, и разность r будет равна OM_1. Если же $a = b$, то конец расстояния b окажется в точке O и разность r будет равна O. Наконец, если $a < b$, то конец расстояния b окажется левее точки O—в точке M_2, и в этом случае

задача невозможна, так как произвести вычитания большего расстояния из расстояния меньшего нельзя. Но для общности считают, что в рассматриваемом случае разность r равна OM_2, а для указания того, что разность эта отрицательна, т.-е. прямо противоположна вышеуказанной разности OM_1, необходимо принять во внимание и положение отрезка, выражающего разность относительно точки O. Поэтому, рассматривая расстояния, откладываемые вправо от точки O положительными, будем считать расстояния противоположные—отрицательными.

§ 5. О ДУГАХ КРУГА И ЗНАКАХ ДУГ.

Возьмем (черт. 3) круг радиуса, равного 1, и на окружности этого круга точку A, которую примем за начало счета дуг.

Условимся далее дуги откладывать от точки A в направлении, обратном ходу часовой стрелки, так что, например, точка C будет концом дуги AC, отложенной в направлении, указанном на чертеже стрелкой.



Легко видеть теперь, что точка C будет также концом дуги AC, но отложенной в направлении, противоположном пред'идущему и показанном на чертеже двойной стрелкой. Таким образом и согласно пред'идущему (§ 4), для того, чтобы различать, в каком именно направлении отложена дуга, необходимо одно из этих направлений считать положительным, а противоположное ему—отрицательным. Будем считать положительным направление, обратное ходу часовой стрелки, а отрицательным—направление, совпадающее с ходом часовой стрелки. Вышеизложенное позволяет притти к важному заключению о том, что дуги круга могут быть не только положительными, но также и отрицательными.

Пусть теперь точка A (черт. 3), двигаясь в положительном или отрицательном направлении, описала полную окружность и возвратилась в свое начальное положение. Величина описанной дуги будет для положительного направления $+2\pi$, а для отрицательного -2π. Если точка A, описав полную окружность, не остановилась, а продолжает двигаться по окружности до некоторой точки в том же направлении, то вся, описанная точкой A, дуга будет больше 2π, например, $2\pi + a$—для положительного направления и $-(2\pi + a)$ для направления отрицательного. Легко понять, что точка A может в своем движении описать полную окружность n раз, где n произвольное целое число, и если после этого точка остановится в точке N для положительного направления и в точке N_1 для отрицательного направления, то вся дуга, описанная точкой A, соответственно будет $2\pi n + a$ для положительного направления и $-(2\pi n - a)$ для отрицательного направления, где a есть дуга AN или AN_1

Таким образом, необходимо допустить существование дуг больших и меньших целой окружности, что вместе с понятием об отрицательной дуге является обобщением геометрического представления о дугах круга. Само собою разумеется, что если вместо длины дуги будем рассматривать ее градусную меру, то рассуждениями, совершенно одинаковыми с предыдущими, придем к выражениям $360^0 . n + \alpha^0$ и $-(360^0 . n + \alpha^0)$.

Выражения $2\pi n + a$ и $360^0 n + \alpha^0$ называются **общим видом дуги, имеющей конец в данной точке**. Действительно, давая n произвольные целые, положительные и отрицательные (а также и 0) значения, будем получать всевозможные дуги, имеющие конец в одной и той же точке.

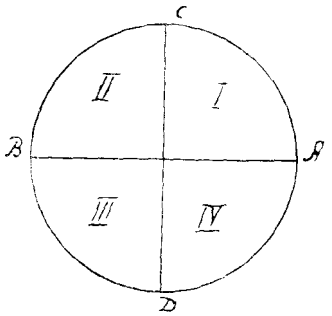
Изложенное выше не трудно распространить и на углы.

Проведем в круге (черт. 3) через точку A диаметр AB и назовем его **начальным или первым диаметром**. Тогда угол AOD может быть получен движением радиуса OD в положительном или отрицательном направлении, причем начальное положение радиуса OD будет совпадать с радиусом OA. А посему понятие об угле возможно обобщить углами отрицательными и углами, большими 360^0.

§ 6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ КРУГ.

Если в круге радиуса, равного 1 (черт. 4), точка A обозначает начало счета дуг, то диаметр AB по предыдущему называется начальным или первым диаметром. Диаметр же CD, перпендикулярный к AB, назовем **вторым** диаметром. Диаметрами AB и CD круг разбился на четыре четверти, счет которых ведется в направлении, обратного ходу часовой стрелки. Для отрицательных углов счет четвертей будет, очевидно, противоположным.

черт. 4



Круг, изображенный на чертеже 4, называется **тригонометрическим кругом**. Радиус этого круга, как сказано, есть единица, но, конечно, это не значит, что он непременно должен равняться одной единице какой-либо меры, например: 1 сажени, 1 вершку, 1 метру и т. д. Выражение „круг радиуса, равного единице", нужно понимать в том смысле, что радиус, какова бы ни была длина его, принимается за единицу при измерении дуг. Поэтому, если дуга, выраженная в частях радиуса, равна 1,7, а радиус равен 3 саженям, то длина дуги будет 5,1 сажени.

§ 7. ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИЯХ.

Все рассматриваемые в математике величины разделяются на **постоянные и переменные**. Постоянными величинами называются такие величины, которые не изменяют своего значения. Для них иногда

употребляется обозначение const. Переменными же величинами называются такие величины, значение которых может изменяться.

Пусть имеем выражение для длины окружности $y = 2\pi R$ (1). В этом выражении 2π — величина постоянная, R, а, следовательно, и y — величина переменная. Однако, если давать R произвольные значения, то для y будут получаться величины в зависимости от этих значений. Поэтому существуют независимые переменные, т.-е. такие, изменения которых могут быть произвольными, а также и переменные зависимые, изменения которых находятся в зависимости от других переменных. Независимые переменные называют также аргументами, переменные же зависимые—функциями. В равенстве (1) R — аргумент, а y — функция. Определяя из этого равенства R, найдем, что

$$R = \frac{y}{2\pi} \qquad (2)$$

причем в этом равенстве, уже обратно предыдущему, y можно рассматривать, как аргумент, а R — как функцию. Поэтому различают функции прямые и обратные. Таковыми, например, будут равенства (1) и (2). Выбор функции, которую условимся называть прямой, является произвольным.

По виду выражений, составляющих данные функции, и характеру производимых над этими выражениями действий, функции разделяются на несколько классов.

Рациональными функциями называются такие функции, аргумент которых не находится под знаком корня или может быть от знака корня освобожден.

Например, $y = ax^2 + b\sqrt{x^2}$

Иррациональными функциями называются такие функции, аргумент которых содержится под знаком корня и не может быть от него освобожден.

Например, $y = a\sqrt{x} - b^3\sqrt[3]{x^5}$

Целыми функциями называются такие функции, в которых аргумент не входит делителем.

Например, $y = \frac{ax^2}{2}$

Дробными функциями называются такие функции, в которых аргумент входит делителем.

Например, $y = \frac{bx}{a + x^2}$

Под тригонометрическими функциями подразумеваются такие функции, аргументом которых служат дуги и углы, а соотношение между функцией и аргументом устанавливается посредством особых линий,

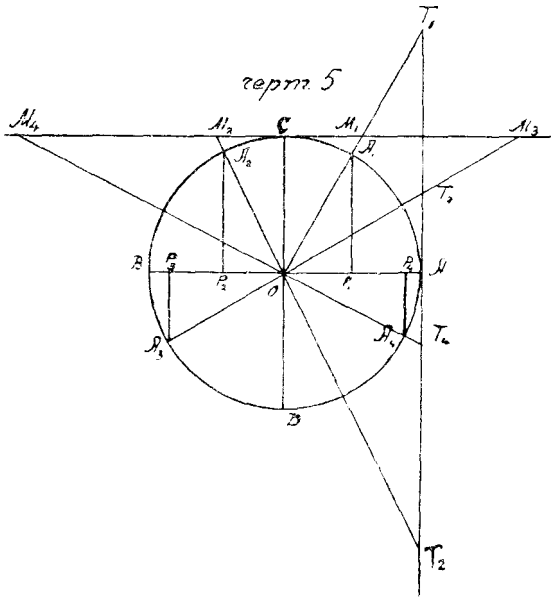
называемых тригонометрическими и проводимых для данных дуги или угла.

Функции, обратные тригонометрическим, называются круговыми функциями, и аргументом круговой функции будет тригонометрическая линия, а дуги или углы, соответствующие этим линиям, будут следовательно, функциями.

ОТДЕЛ II. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ИЗМЕНЕНИЯ.

§ 8. ПОСТРОЕНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЛИНИЙ И ФУНКЦИЙ.

Возьмем тригонометрический круг (черт. 5) и на окружности этого круга, во всех четырех четвертях его, точки A_1, A_2, A_3 и A_4, представляющие концы дуг AA_1, AA_2, AA_3 и AA_4, считаемых от одного начала A. Соответственно этим дугам можем рассматривать углы AOA_1, AOA_2, AOA_3 и AOA_4. Углы эти, равно как и дуги AA_1, AA_2, AA_3 и AA_4, можно рассматривать, как результат движения радиуса или точки A и в отрицательном направлении. Иными словами, последующие рассуждения и соображения одинаково применимы как к положительным, так и отрицательным углам или дугам.



Опустим из концов данных дуг на начальный диаметр AB перпендикуляры A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 и A_4P_4. Перпендикуляры эти называются линиями синуса (sinus) соответствующих дуг или углов. Отношение же линии синуса к радиусу называется синусом дуги или угла и обозначается знаком Sin.

Поэтому, вспоминая, что радиус тригонометрического круга есть 1, получим следующие тригонометрические функции синуса:

$$\frac{A_1P_1}{1} = A_1P_1 = \text{Sin } AA_1 = \text{Sin } AOA_1$$

$$\frac{A_2P_2}{1} = A_2P_2 = \text{Sin } AA_2 = \text{Sin } AOA_2$$

$$\frac{A_3P_3}{1} = A_3P_3 = \text{Sin } AA_3 = \text{Sin } AOA_3$$

$$\frac{A_4P_4}{1} = A_4P_4 = \text{Sin } AA_4 = \text{Sin } AOA_4$$

Расстояния от центра круга O до точек P_1, P_2, P_3 и P_4 (концы линий синусов), считаемые в обе стороны от центра, называются линиями косинуса (cosinus) соответствующих дуг или углов. Отношение же линии косинуса к радиусу называется косинусом дуги или угла и обозначается через Cos.

На этом основании будем иметь следующие тригонометрические функции косинуса:

$$\frac{OP_1}{1} = OP_1 = \text{Cos } AA_1 = \text{Cos } AOA_1$$

$$\frac{OP_2}{1} = OP_2 = \text{Cos } AA_2 = \text{Cos } AOA_2$$

$$\frac{OP_3}{1} = OP_3 = \text{Cos } AA_3 = \text{Cos } AOA_3$$

$$\frac{OP_4}{1} = OP_4 = \text{Cos } AA_4 = \text{Cos } AOA_4$$

Проведя теперь через точку A и в обе стороны от нее прямую, перпендикулярную к начальному диаметру, продолжим радиусы OA_1, OA_2, OA_3 и OA_4 до пересечения с этой прямой в точках T_1, T_2, T_3 и T_4.

Линии AT_1, AT_2, AT_3 и AT_4 называются линиями тангенса (tangens) соответствующих дуг или углов. Отношение же этих линий к радиусу называется тангенсом дуги или угла и обозначается через tg. Значит, тригонометрические функции тангенса будут:

$$\frac{AT_1}{1} = AT_1 = \text{tg } AA_1 = \text{tg } AOA_1$$

$$\frac{AT_2}{1} = AT_2 = \text{tg } AA_2 = \text{tg } AOA_2$$

$$\frac{AT_3}{1} = AT_3 = \text{tg } AA_3 = \text{tg } AOA_3$$

$$\frac{AT_4}{1} = AT_4 = \text{tg } AA_4 = \text{tg } AOA_4$$

Проведя затем через точку C и в обе стороны от нее перпендикулярно ко второму диаметру CD, а следовательно, параллельно к начальному диаметру AB линию, продолжим радиусы OA_1, OA_2, OA_3 и OA_4 до пересечения с этой линией в точках M_1, M_2, M_3 и M_4. Линии CM_1, CM_2, CM_3 и CM_4 называются линиями котангенса (cotangens) соответствующих дуг или углов. Отношение же этих линий к радиусу называется котангенсом дуги или угла и обозначается через ctg.

Следовательно, тригонометрические функции котангенса будут:

$$\frac{CM_1}{1} = CM_1 = \operatorname{ctg} AA_1 = \operatorname{ctg} AOA_1$$

$$\frac{CM_2}{1} = CM_2 = \operatorname{ctg} AA_2 = \operatorname{ctg} AOA_2$$

$$\frac{CM_3}{1} = CM_3 = \operatorname{ctg} AA_3 = \operatorname{ctg} AOA_3$$

$$\frac{CM_4}{1} = CM_4 = \operatorname{ctg} AA_4 = \operatorname{ctg} AOA_4$$

В дальнейшем на чертеже можно видеть линии OT_1, OT_2, OT_3 и O_4T, проходящие через концы данных дуг и соединяющие центр круга O с точками T_1, T_2, T_3 и T_4 (концы линий тангенса). Линии OT_1, OT_2, OT_3 и OT_4 называются линиями секанса (secans) соответствующей дуги или угла. Отношение же линии секанса к радиусу называется секансом дуги или угла и обозначается через sc.

Поэтому тригонометрическими функциями секанса будут:

$$\frac{OT_1}{1} = OT_1 = \operatorname{sc} AA_1 = \operatorname{sc} AOA_1$$

$$\frac{OT_2}{1} = OT_2 = \operatorname{sc} AA_2 = \operatorname{sc} AOA_2$$

$$\frac{OT_3}{1} = OT_3 = \operatorname{sc} AA_3 = \operatorname{sc} AOA_3$$

$$\frac{OT_4}{1} = OT_4 = \operatorname{sc} AA_4 = \operatorname{sc} AOA_4$$

Наконец, на чертеже можно видеть также линии OM_1, OM_2, OM_3 и OM_4, проходящие через концы данных дуг и соединяющие центр круга O с точками M_1, M_2, M_3 и M_4 (концы линий котангенса). Линии OM_1, OM_2, OM_3 и OM_4 называются линиями косеканса (cosecans) соответствующей дуги или угла. Отношение же линии косеканса к радиусу называется косекансом дуги или угла и обозначается через csc.

На этом основании тригонометрические функции косеканса будут:

$$\frac{OM_1}{1} = OM_1 = \csc AA_1 = \csc AOA_1$$

$$\frac{OM_2}{1} = OM_2 = \csc AA_2 = \csc AOA_2$$

$$\frac{OM_3}{1} = OM_3 = \csc AA_3 = \csc AOA_3$$

$$\frac{OM_4}{1} = OM_4 = \csc AA_4 = \csc AOA_4$$

Вышеизложенное позволяет дать следующие определения всех тригонометрических линий:

1) линией синуса называется длина перпендикуляра, опущенного из конца дуги на начальный или первый диаметр;

2) линией косинуса называется расстояние от центра круга до основания линии синуса;

3) линией тангенса называется длина касательной, проведенной через начало счета дуг до встречи с продолженным радиусом, проходящим через конец дуги;

4) линией котангенса называется длина касательной, проведенной параллельно начальному диаметру через конец дуги, равной 90^0 (или $\frac{\pi}{2}$), до встречи с продолженным радиусом, проходящим через конец дуги;

5) линией секанса называется длина продолженного до встречи с линией тангенса радиуса, проходящего через конец дуги, и

6) линией косеканса называется длина продолженного до встречи с линией котангенса радиуса, проходящего через конец дуги.

Замечание. Необходимо твердо помнить, что тригонометрические функции синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса и косеканса суть отношения соответствующих тригонометрических линий к радиусу и поэтому являются отвлеченными числами. Так, например, если радиус круга равен 5 дюймам, а линия косинуса некоторой дуги есть 2 дюйма, то косинус этой дуги будет равен $\frac{2}{5}$ или 0,4.

§ 9. ПЕРИОДИЧНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

В § 8 были построены тригонометрические функции для дуг и углов, не превышающих 360^0. Однако же, легко сообразить, что и для дуг или углов, больших 360^0, тригонометрические функции принимают последовательно те же значения, как и для дуг или углов, меньших 360^0

Другими словами, если α^0 есть угол или дуга, меньшая 360^0, то тригонометрические функции этой дуги или угла будут одинаковыми с тригонометрическими функциями дуги или угла равных $360^0 . n \pm \alpha^0$, где n есть произвольное целое положительное или отрицательное число.

Функции, которые не изменяются от прибавления к аргументу одного и того же количества, называются периодическими, а то наименьшее количество, от прибавления которого функция не изменяется, называется периодом.

Таким образом, тригонометрические функции суть функции периодические и периодом их является 360^0.

Однако, как то усматривается из чертежа 5, полная окружность (360^0) является наименьшим периодом лишь для функций синуса, косинуса, секанса и косеканса. Что же касается тригонометрических функций тангенса и котангенса, то из того же чертежа видно, что значения этих функций периодически повторяются не только через 360^0, но и через 180^0, т.-е. тригонометрическая функция тангенса и котангенса дуг или углов, оканчивающихся в первой и третьей четвертях и отличающихся на 180^0, будут одинаковы, равно как будут одинаковы те же функции для дуг или углов, оканчивающихся во второй и четвертой четвертях и также отличающихся на 180^0. Таким образом, периодом для функций тангенса и котангенса следует считать 180^0.

Периодичность тригонометрических функций позволяет написать следующие соотношения:

$$\operatorname{Sin}\alpha = \operatorname{Sin}(360^0 . n \pm \alpha) ; \ \operatorname{Cos}\alpha = \operatorname{Cos}(360^0 . n \pm \alpha)$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(180^0 . n \pm \alpha) ; \ \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(180^0 n \pm \alpha)$$
$$\operatorname{sc}\alpha = \operatorname{sc}(360^0 . n \pm \alpha) ; \ \operatorname{csc}\alpha = \operatorname{csc}(360^0 \pm \alpha)$$

В этих соотношениях α обозначает дугу или угол, меньшие 360^0, а n—произвольное целое, положительное или отрицательное число. Для отвлеченного же выражения дуг или углов эти соотношения напишутся так:

$$\operatorname{Sin} a = \operatorname{Sin}(2\pi n \pm a) ; \ \operatorname{Cos} a = \operatorname{Cos}(2\pi n \pm a)$$
$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}(\pi n \pm a) ; \ \operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg}(\pi n \pm a)$$
$$\operatorname{sc} a = \operatorname{sc}(2\pi n \pm a) ; \ \operatorname{csc} a = \operatorname{csc}(2\pi n \pm a)$$

В написанных соотношениях a обозначает отвлеченное выражение дуги или угла, а n имеет прежнее значение.

§ 10. ЗНАКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЛИНИЙ И ФУНКЦИЙ.

Обратимся вновь к рассмотрению чертежа 5, на котором построены тригонометрические линии дуг или углов для всех четырех четвертей. Из этого рассмотрения можно убедиться в том, что тригонометрические линии дуг или углов в различных четвертях направлены различно и именно: одинаково с направлением тригонометрических линий в первой четверти и прямо противоположно этому направлению. Поэтому и согласно предыдущему (§ 4) необходимо

одно из направлений рассматривать за положительное, направление же прямо противоположное—за отрицательное.

Условились направление тригонометрических линий в первой четверти считать положительным. Согласно этому условию:

1) линии синуса в первой и второй четвертях (A_1P_1 и A_2P_2), откладываемые вверх от начального диаметра, принимаются положительными, а линии синуса в третьей и четвертой четвертях (P_3A_3 и P_4A_4), откладываемые вниз от начального диаметра, будут отрицательными;

2) линии косинуса в первой и четвертой четвертях (OP_1 и OP_4), откладываемые вправо от центра O по начальному диаметру, считают положительными, а линии косинуса во второй и третьей четвертях (OP_2 и OP_3), откладываемые влево от центра O по начальному диаметру, будут отрицательными;

3) линии тангенса в первой и третьей четвертях (AT_1 и AT_3), откладываемые по соответствующей касательной вверх от начального диаметра, будут положительными, а линии тангенса во второй и четвертой четвертях (T_2A и T_4A), откладываемые по той же касательной вниз от начального диаметра, будут отрицательными;

4) линии котангенса в первой и третьей четвертях (CM_1 и CM_3), откладываемые по соответствующей касательной вправо от второго диаметра, считают положительными, а линии котангенса во второй и четвертой четвертях (CM_2 и CM_4), откладываемые по той же касательной влево от второго диаметра, будут отрицательными;

5) линии секанса в первой и четвертой четвертях (OT_1 и OT_4), откладываемые по направлению радиуса, соединяющего центр с концом дуги, принимают положительными, а линии секанса второй и третьей четверти (OT_2 и OT_3), откладываемые противоположно направлению радиуса, соединяющего центр с концом дуги, будут отрицательными и

6) линии косеканса в первой и второй четвертях (OM_1 и OM_2), откладываемые по направлению радиуса, соединяющего центр с концом дуги, считают положительными, а линии косеканса в третьей и четвертой четвертях (OM_3 и OM_4), откладываемые противоположно направлению радиуса, соединяющего центр с концом дуги, будут отрицательными.

Ниже приводится таблица знаков всех тригонометрических линий. (см. табл. стр. 18).

Из этой таблицы легко, между прочим, заметить, что тригонометрические линии синуса и косеканса, косинуса и секанса, тангенса и котангенса имеют одинаковые знаки и одних и тех же четвертях. Само собою разумеется, что тригонометрические функции, представляющие отношение тригонометрических линий к радиусу, имеют те же знаки, что и тригонометрические линии.

В виду периодичности тригонометрических функций, знаки функций для дуг и углов, превышающих 360^0 или 2π, будут одинаковы со знаками соответствующих дуг или углов, меньших 360^0 или 2π.

Тригонометрич. линии \ Четверти	I	II	III	IV
Sinus	+	+	−	−
Cosinus	+	−	−	+
Tangens	+	−	+	−
Cotangens	+	−	+	−
Secans	+	−	−	+
Cosecans	+	+	−	−

§ 11. ИЗМЕНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЛИНИЙ И ФУНКЦИЙ С ИЗМЕНЕНИЕМ ДУГИ ИЛИ УГЛА ОТ $-\infty$ до $+\infty$

С изменением дуги или угла изменяется каждая из тригонометрических линий и функций, причем изменения эти для различных линий и функций не одинаковы и зависят как от наименования тригонометрической линии или функции, так и от характера изменения аргумента (дуги или угла). Поэтому необходимо изучить изменения тригонометрических линий и функций для всевозможных изменений аргумента.

Конечно, изменения одноименных тригонометрических линий и функций будут одинаковы, и лишь для тригонометрических линий будет изменяться длина, а для функций—отношение этой длины к радиусу, равному 1 (т.-е. отвлеченное число). На этом основании в дальнейшем будут рассмотрены изменения тригонометрических линий, вполне, очевидно, применимые к изменению тригонометрических функций.

Так как в тригонометрии рассматриваются дуги и углы положительные и отрицательные, то эти углы и дуги могут быть сколь угодно большими (бесконечно большими) положительными и отрицательными величинами и для обозначения их величин употребляется знак $\pm\infty$ (бесконечность). Однако, практически, на основании правил периодичности, нет необходимости рассматривать изменения тригонометрических линий и функций при изменении аргумента в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и достаточно рассмотреть изменение тригонометрических линий и функций при изменении аргумента от 0^0 до 360^0 или от 0 до 2π. Для дуг или углов, заключающихся вне этих пределов, изменения тригонометрических линий и функций будут происходить по тем же правилам.

Необходимо заметить теперь, что в тригонометрии полезно различать получение нуля уменьшением положительного количества, и в этом случае следует сопровождать нуль знаком $+$ ($+0$), или же

увеличением отрицательного количества, когда нулю следует приписать знак $-(-0)$. Наконец, отметим, что и прямые линии и отвлеченные числа (равно как и дуги) могут иметь сколь угодно большую (бесконечно большую) положительную и отрицательную величину, что опять обозначается знаком $\pm\infty$. В частности понятие о бесконечно большой прямой линии можно получить, рассматривая две параллельных прямых, неограниченно продолженных в обе стороны. Такие прямые стремятся к пересечению в бесконечности. После этих необходимых замечаний переходим к изучению изменений тригонометрических линий (а следовательно, и функций) с изменением аргумента (дуги или угла) от 0^0 до 360^0 или от 0 до 2π.

1. Изменения синуса. Так как линия синуса есть длина перпендикуляра, опущенного из конца дуги на начальный диаметр, то, когда дуга равна 0^0 или 0, то и линия синуса также равна нулю $(+0)$. При увеличении дуги от 0^0 до 90^0 или от 0 до $\frac{\pi}{2}$ возрастает и линия синуса, причем если дуга равна 90^0 или $\frac{\pi}{2}$, то линия синуса равняется радиусу, т.-е. единице $(+1)$. При дальнейшем увеличении дуги от 90^0 до 180^0 или от $\frac{\pi}{2}$ до π линия синуса уменьшается и при дуге, равной 180^0 или π, линия синуса вновь обращается в 0 $(+0)$. Последующее увеличение дуги от 180^0 до 270^0 или от π до $\frac{3\pi}{2}$ обращает направление линии синуса в отрицательное, причем для дуг в 180^0 или π, рассматривая ее увеличение, линию синуса будем считать равной -0 и при дуге в 270^0 или $\frac{3\pi}{2}$ линия синуса, очевидно, будет равна -1. Наконец, при увеличении дуги от 270^0 до 360^0 или от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π направление линии синуса продолжает оставаться отрицательным и изменяется от -1 при дуге в 270^0 или $\frac{3\pi}{2}$ до -0, когда дуга равна 360^0 или 2π.

2. Изменения косинуса. Линия косинуса есть расстояние от центра круга до основания линии синуса, и поэтому, когда дуга равна 0^0 или 0, т.-е. когда конец ее находится в точке пересечения окружности с начальным диаметром,—линия косинуса равняется -1. При увеличении дуги от 0^0 до 90^0 или от 0 до $\frac{\pi}{2}$ линия косинуса уменьшается, а при значении дуги в 90^0 или в $\frac{\pi}{2}$ линия косинуса делается равной $0\ (+0)$. При дальнейшем увеличении дуги от 90^0 до 180^0 или от $\frac{\pi}{2}$ до π линия косинуса продолжает уменьшаться и обращается уже в отрицательную величину, причем, рассматривая изменение дуги в промежутке от 90^0 до 180^0 или от $\frac{\pi}{2}$ до π, примем для дуги в 90^0 или в $\frac{\pi}{2}$ линию косинуса равной—0, линия же косинуса для дуги в 180^0 или π будет, очевидно,

равна —1. Последующее изменение дуги от 180° до 270° или от π до $\frac{3\pi}{2}$ дает для линии косинуса опять отрицательное направление и именно для дуги в 180° или π линия косинуса равна —1, а в дальнейшем линия косинуса увеличивается и при дуге в 270° или $\frac{3\pi}{2}$ обращается в —0. Наконец, увеличение дуги от 270° до 360° или от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π обращает линию косинуса в положительную величину, и, следовательно, при дуге в 270° или $\frac{3\pi}{2}$ линия косинуса равна +0, а при дуге в 360° или 2π линия косинуса делается равной +1

3. Изменения тангенса По определению тангенс есть длина касательной, проведенной из начала счета дуг до встречи с продолженным радиусом, проходящим через конец дуги. Поэтому, когда дуга равняется 0° или 0, то линия тангенса также равна 0 (+0). При увеличении тангенса от 0° до 90° или от 0 до $\frac{\pi}{2}$ линия тангенса весьма быстро возрастает, а при дуге в 90° или $\frac{\pi}{2}$ обращается в $+\infty$, так как для этого значения дуги касательная в начале счета дуг и продолженный радиус, проходящий через конец дуги, будут параллельны и пересекутся в бесконечности. При дальнейшем изменении дуги от 90° до 180° или от $\frac{\pi}{2}$ до π линия тангенса для дуги, превышающей 90° или $\frac{\pi}{2}$ на сколь угодно малую величину, принимает отрицательное направление, причем, рассматривая изменения линии тангенса в этом промежутке необходимо, следовательно, принять, что при дуге в 90° или $\frac{\pi}{2}$ линия тангенса обращается в $-\infty$, а дальше увеличивается и при дуге в 180° или π обращается в —0. Вспоминая теперь, что периодом для тангенса является 180° или π, оказывается излишним изучать изменения тангенса при изменении дуги от 180° до 270° или от π до $\frac{3\pi}{2}$ а также при изменении дуги от 270° до 360° или от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π. Изменения эти будут соответственно одинаковы с изменениями тангенса для дуг от 0° до 90° или от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и для дуг от 90° до 180° или от $\frac{\pi}{2}$ до π.

4. Изменения котангенса. Под линией котангенса подразумевается длина касательной, проведенной через конец дуги в 90° до встречи с продолженным радиусом, проходящим через конец данной дуги. На этом основании, если дуга равна 0° или 0, то продолженный радиус будет параллелен касательной, на которой откладывается линия

котангенса, и, следовательно, эта последняя по предыдущему будет равна $+\infty$. При увеличении дуги от 0^0 до 90^0 или от 0 до $\frac{\pi}{2}$ линия котангенса уменьшается и при значении дуги в 90^0 или $\frac{\pi}{2}$ линия котангенса обратится в нуль $(+0)$, так как касательная и продолженный радиус пересекутся в той точке, от которой откладываются линии котангенса. При дальнейшем изменении дуги от 90^0 до 180^0 или от $\frac{\pi}{2}$ до π линия котангенса принимает отрицательное направление, и, рассматривая ее изменение в этом промежутке, следует считать, что при дуге в 90^0 или $\frac{\pi}{2}$ линия котангенса равняется -0, а при возрастании дуги до 180^0 или до π линия котангенса по абсолютной величине увеличивается, причем, когда дуга достигает значения 180^0 или π, линия котангенса обращается в $-\infty$, так как касательная и продолженный радиус, проходящий через конец дуги, вновь будут параллельны.

Для котангенса, так же, как и для тангенса, периодом является 180^0, и посему изменения линий котангенса для дуг третьей и четвертой четвертей будут одинаковы с изменениями котангенсов для дуг первой и второй четвертей.

5. Изменения секанса. Так как линией секанса называется длина продолженного до пересечения с линией тангенса радиуса, проходящего через конец дуги, то, когда дуга равняется 0^0 или 0, линия секанса равна $+1$. При увеличении дуги от 0^0 до 90^0 или от 0 до $\frac{\pi}{2}$ линия секанса возрастает и, когда дуга равняется 90^0 или $\frac{\pi}{2}$, то линия секанса будет равна $+\infty$, так как при таком значении дуги линия тангенса и проведенный через конец дуги радиус будут параллельны и пересекутся в бесконечности. При дальнейшем увеличении дуги от 90^0 до 180^0 или от $\frac{\pi}{2}$ до π линия секанса принимает отрицательное направление, и, следовательно, рассматривая изменения секанса в промежутке от 90^0 до 180^0 или от $\frac{\pi}{2}$ до π, нужно, как и для изменений тангенса, принять, что при дуге в 90^0 или $\frac{\pi}{2}$ линия секанса равняется $-\infty$ и далее, при увеличении дуги, увеличивается и становится равной -1 при дуге, равной 180^0 или π. Последующее увеличение дуги от 180^0 до 270^0 или от π до $\frac{3\pi}{2}$ сохраняет для линии секанса отрицательное направление и в рассматриваемом промежутке при дуге в 180^0 или π линия секанса будет равна -1, а при дуге в 270^0 или $\frac{3\pi}{2}$ линия секанса окажется

равной $-\infty$, так как линия тангенса и продолженный в обратном направлении радиус окажутся параллельными. Наконец, дальнейшее увеличение дуги от 270° до 360° или от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π изменяет направление линий секанса в положительное, причем, рассматривая изменение линии секанса в этом промежутке, необходимо по предыдущему принять для дуги в 270° или $\frac{3\pi}{2}$ линию секанса равной $+\infty$, а для дуги в 360° или 2π линия секанса будет равна $+1$.

6. Изменения косеканса. Линией косеканса называется длина продолженного до пересечения с линией котангенса радиуса, проходящего через конец дуги. Поэтому при значении дуги в 0° или 0 радиус, проходящий через конец дуги, будет параллелен линии котангенса, а линия косеканса будет равна $+\infty$. При увеличении дуги от 0° до 90° или от 0 до $\frac{\pi}{2}$ линия косеканса уменьшается, а при значении дуги в 90° или $\frac{\pi}{2}$ линия косеканса окажется равной радиусу, т.-е. $+1$. При дальнейшем увеличении дуги от 90° до 180° или от $\frac{\pi}{2}$ до π линия косеканса также увеличивается от $+1$ при дуге в 90° или $\frac{\pi}{2}$ до $+\infty$ при дуге в 180° или π, когда радиус и линия котангенса будут параллельны. Последующие увеличения дуги от 180° до 270° или от π до $\frac{3\pi}{2}$ обращают направление линии косеканса в отрицательное, причем, рассматривая изменение линии косеканса в этом промежутке, необходимо, как и для изменений тангенса, принять, что при дуге в 180° или π линия косеканса делается равной $-\infty$, а при дуге в 270° или $\frac{3\pi}{2}$ линия косеканса, очевидно, будет равна -1. Наконец, при изменении дуги от 270° до 360° или от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π направление линий косеканса продолжает оставаться отрицательным, причем для дуги в 270° или $\frac{3\pi}{2}$ линия косеканса будет равна -1, а для дуги в 360° или 2π линия косеканса обратится в $-\infty$, так как радиус, проведенный через конец дуги, и линия котангенса будут вновь параллельны.

Результаты, полученные предыдущими исследованиями, для наглядности заключим в нижеследующую таблицу изменений тригонометрических линий (а следовательно, и функций). (см. табл. стр. 23).

К этой таблице необходимо добавить, что, на основании правила периодичности, изменения тригонометрических линий и функций для дуг и углов, превышающих 360° или 2π, будут соответственно одинаковы с изменением линий и функций для дуг и углов, меньших 360° или 2π

Приведенная ниже таблица, равно как и все исследование, позволяют сделать весьма важное замечание о различном характере изменений тригонометрических линий и функций. Именно, изменения синуса и косинуса таковы, что при постепенном возрастании или убывании аргумента функция изменяется (возрастает или убывает) также постепенно или, как говорят, **непрерывно** в пределах от $+1$ до -1 и малому изменению аргумента всегда соответствует малое же изменение функции. Изменения же других тригонометрических функций таковы, что при некоторых изменениях аргумента функция изменяется не непрерывно и малому изменению аргумента соответствует весьма большое изменение функции; например, при изменении аргумента в 90^0 на сколь угодно малую величину α'' функция тангенса от значения $+\infty$ (при 90^0) сразу принимает значение, близкое к $-\infty$ (при $90^0+\alpha''$) или, как говорят, теряет непрерывность (испытывает разрыв непрерывности).

На этом основании назовем **непрерывными** такие функции, в которых сколь угодно малому изменению аргумента соответствует такое же изменение функции, и **прерывными** назовем те функции, в которых при малых изменениях аргумента сама функция претерпевает **весьма большие изменения**. Таким образом, функции синуса и косинуса будут непрерывными, а остальные тригонометрические функции — прерывными.

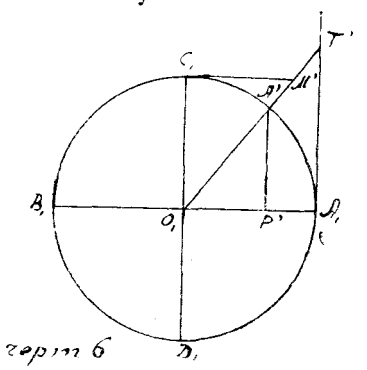
Четверти / Тригонометрическ. линии	I $0^0(0)-90^0\left(\frac{\pi}{2}\right)$	II $90^0\left(\frac{\pi}{2}\right)-180^0(\pi)$	III $180^0(\pi)-270^0\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	IV $270^0\left(\frac{3\pi}{2}\right)-360^0(2\pi)$
Sinus	$+0$ $+1$	$+1$ $+0$	-0 -1	-1 -0
Cosinus	$+1$ $+0$	-0 -1	-1 -0	$+0$ $+1$
Tangens	$+0$ $+\infty$	$-\infty$ -0	$+0$ $+\infty$	$-\infty$ -0
Cotangens	$+\infty$ $+0$	-0 $-\infty$	$+\infty$ $+0$	-0 $-\infty$
Secans.	$+1$ $+\infty$	$-\infty$ -1	-1 $-\infty$	$-\infty$ -1
Cosecans	$+\infty$ $+1$	$+1$ $+\infty$	$-\infty$ -1	-1 $-\infty$

§ 12. НЕЗАВИСИМОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДАННОЙ ДУГИ ИЛИ УГЛА ОТ ДЛИНЫ РАДИУСА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО КРУГА.

Возьмем (черт. 6) два тригонометрических круга, радиусы которых обозначим через R_1 и R_2, и на окружностях этих кругов отложим от начала счета дуг дугу α в одинаковое число градусов. Пусть конец дуг A′ и A″ оказался в первой четверти. Построим теперь в обоих кругах все тригонометрические линии для дуги α и рассмотрим треугольники

$O_1A'P'$ и $O_2A''P''$. Треугольники эти подобны, т. к. имеют равные прямые углы, и, кроме того, по построению $\angle A'O_1P' = \angle A''O_2P''$

Поэтому можно написать, что



$$\frac{A'P'}{O_1A'} = \frac{A''P''}{O_2A''}$$

или

$$\frac{A'P'}{R_1} = \frac{A''P''}{R_2}$$

Но $\frac{A'P'}{R_1}$ есть синус дуги или угла α для круга с радиусом R_1 (будем обозначать этот синус через $Sin_1\ \alpha$), а $\frac{A''P''}{R_2}$ есть синус дуги или угла α для круга с радиусом R_2 (обозначим это через $Sin_2\ \alpha$), и, значит, получим, что

$$Sin_1\ \alpha = Sin_2\ \alpha \qquad (1)$$

Из тех же треугольников имеем, что

$$\frac{O_1P'}{O_1A'} = \frac{O_2P''}{O_2A''}$$

или

$$\frac{O_1P'}{R_1} = \frac{O_2P''}{R_2}$$

Но, применяя прежние обозначения, найдем, что

$$\frac{O_1P'}{R_1} = Cos_1\ \alpha$$

и

$$\frac{O_2P''}{R_2} = Cos_2\ \alpha$$

и, следовательно,

$$Cos_1\ \alpha = Cos_2\ \alpha \qquad (2)$$

Рассматривая далее два треугольника $O_1T'A_1$ и $O_2T''A_2$, которые подобны по тем же признакам, что и предыдущие, можно написать:

$$\frac{A_1T'}{O_1A_1} = \frac{A_2T''}{O_2A_2}$$

или

$$\frac{A_1T'}{R_1} = \frac{A_2T''}{R_2}$$

а при наших обозначениях:

$$\frac{A_1T'}{R_1} = tg_1\ \alpha \quad \text{и} \quad \frac{A_2T''}{R_2} = tg_2\ \alpha$$

и потому

$$tg_1\ \alpha = tg_2\ \alpha \qquad (3)$$

Из тех же треугольников можно написать, что

$$\frac{O_1T'}{O_1A_1} = \frac{O_2T''}{O_2A_2}$$

или

$$\frac{O_1T'}{R_1} = \frac{O_2T''}{R_2}$$

Применяя прежние обозначения, найдем, что

$$\frac{O_1T'}{R_1} = \operatorname{sc}_1 \alpha \text{ и } \frac{O_2T''}{R_2} = \operatorname{sc}_2 \alpha$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sc}_1 \alpha = \operatorname{sc}_2 \alpha \tag{4}$$

Рассматривая, наконец, треугольники O_1C_1M' и O_2C_2M'', видим, что они подобны, так как имеют равные прямые углы, и, кроме того, $\angle C_1O_1M' = \angle C_2O_2M''$, как дополнение до 90^0 равных углов $A'O_1A_1$ и $A''O_2A_2$. Поэтому можно написать, что

$$\frac{C_1M'}{O_1C_1} = \frac{C_2M''}{O_2C_2}$$

или

$$\frac{C_1M'}{R_1} = \frac{C_2M''}{R_2};$$

применяя прежние обозначения, напишем, что

$$\frac{C_1M'}{R} = \operatorname{ctg}_1 \alpha \text{ и } \frac{C_2M''}{R_2} \operatorname{ctg}_2 \alpha$$

и потому

$$\operatorname{ctg}_1 \alpha = \operatorname{ctg}_2 \tag{5}$$

Написав теперь из тех же треугольников соотношения

$$\frac{O_1M'}{O_1C_1} = \frac{O_2M''}{O_2C_2}$$

или

$$\frac{O_1M'}{R_1} = \frac{O_2M''}{R_2}$$

и, принимая по предыдущему, что

$$\frac{O_1M'}{R_1} = \operatorname{csc}_1 \alpha \text{ и } \frac{O_2M''}{R_2} = \operatorname{csc}_2 \alpha,$$

найдем, что

$$\operatorname{csc}_1 \alpha = \operatorname{csc}_2 \alpha \tag{6}$$

Тождества (1) — (6) вполне доказывают независимость тригонометрических функций данной дуги или угла от длины радиуса, т. к. из этих

тождеств устанавливается равенство одинаковых тригонометрических функций одной и той же дуги при разных радиусах.

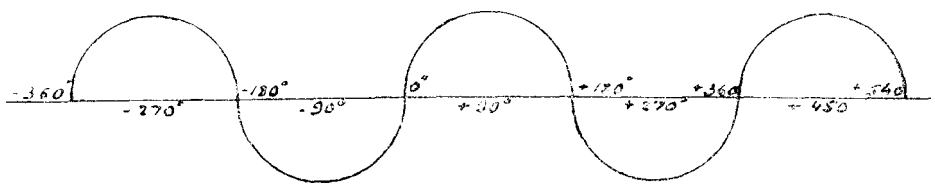
Совершенно одинаково с изложенным доказательство распространяется и на дуги остальных четвертей.

§ 12[1]. ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

На прямой линии от некоторой ее точки, принятой за начало счета положительных и отрицательных расстояний (§ 4), будем откладывать произвольные, но равные части, выражающие условно градусы угла или дуги. Тогда каждому такому значению, как известно, будет для каждой тригонометрической функции соответствовать определенное значение ее, каковое условимся откладывать вверх и вниз от выбранной линии, в зависимости от знака, на перпендикулярах, восставленных из соответствующих точек, выбрав, конечно, при откладывании определенную длину за единицу. Последовательно соединив концы всех перпендикуляров, получим кривую линию, которая называется графиком данной тригонометрической функции. Такое построение кривой линии называется построением ее по точкам, и, очевидно, чем больше будет взято точек, т.-е. чем меньше будет промежуток между значениями аргумента, откладываемыми на выбранной прямой, тем точнее будет график. Построим графики некоторых тригонометрических функций.

1) График функции $y = \operatorname{Sin} x$. Возьмем прямую (черт. 6[1]) и от точки O вправо и влево отложим равные отрезки, условно обозначающие значение аргумента $\pm 90^0, \pm 180^0$ и т. д.

черт. 6'

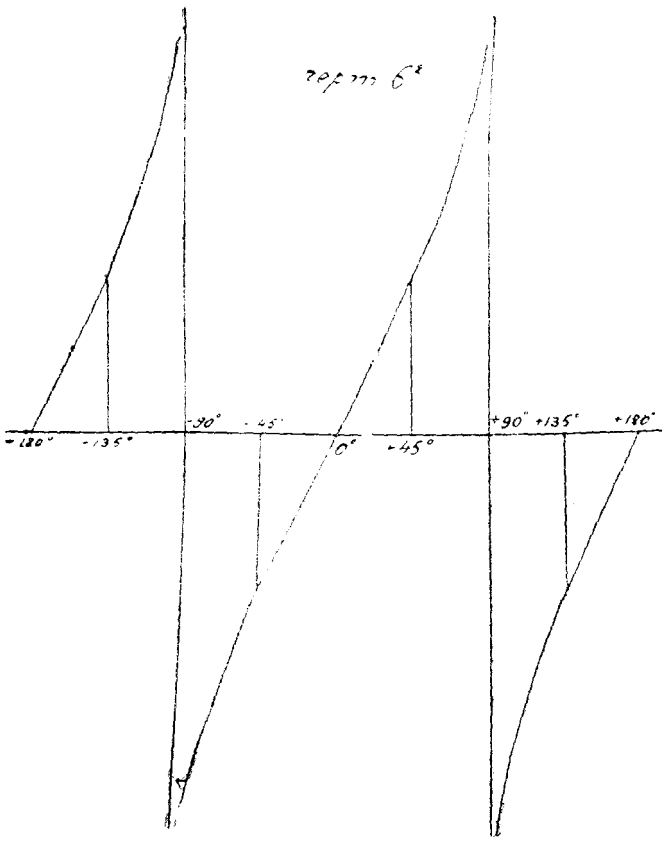


Так как $\operatorname{Sin} 0^0 = 0$; $\operatorname{Sin}(\pm 90^0) = \pm 1$; $\operatorname{Sin}(\pm 180^0) = 0$; $\operatorname{Sin}(\pm 270^0) = \mp 1$ и т. д., то в соответствующих точках восстановим перпендикуляры—вверх при положительном и вниз при отрицательном значении функции и, отложив на них длину, выбранную за единицу, соединим концы перпендикуляров кривой линией, что и даст график синуса или синусоиду. Кривая эта, как видим, идет непрерывно и может быть в виду периодичности функции синуса беспредельно продолжена в обе стороны от точки 0.

Задача. Построить график функции $y = \operatorname{Cos} x$.

2) График функции $y = \operatorname{tg} x$. Отложим на прямой от точки 0 (чертеж 6[2]) произвольные, но равные промежутки, условно обозначающие значение аргумента $\pm 45^0, \pm 90^0, \pm 135^0, \pm 180^0, \pm 225^0, \pm 270^0$ и т. д.

и, зная, что $\operatorname{tg} 0^0 = 0$; $\operatorname{tg}(\pm 45^0) = \pm 1$; $\operatorname{tg}(\pm 90^0) = \pm \infty$; $\operatorname{tg}(\pm 135^0) = \mp 1$; $\operatorname{tg}(\pm 180^0)$; ± 0 и т. д., восставим в соответствующих точках перпендикуляры, на которых сообразно со знаками отложим написанные, выше значения функций. При этом необходимо иметь в виду, что длина перпендикуляров, проведенных через точки, означенные на чертеже

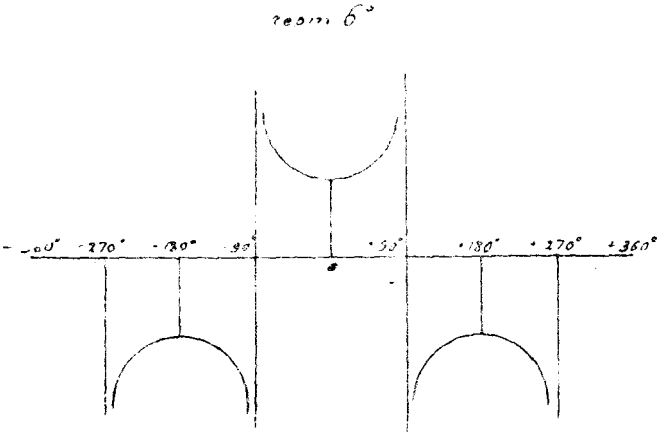


$\pm 90^0$, $\pm 270^0$, будет равна бесконечности, иными словами, при соединении концов перпендикуляров одной кривой линией, эта линия будет неограниченно подниматься вверх и опускаться вниз у перпендикуляров, проходящих через точки $\pm 90^0$, $\pm 270^0$. Кроме того, вспоминая, что при дальнейшем от $\pm 90^0$ изменении аргумента, даже на сколь угодно малую величину, значение функции, равное $\pm \infty$, становится близким к $\mp \infty$, убедимся, что кривая тангенса не непрерывна, а испытывает разрыв непрерывности при значениях аргумента $\pm 90^0$, $\pm 270^0$ и т. д. и представляется, следовательно, в виде отдельных удаляющихся в бесконечность ветвей.

Задача. Построить график функции $y = \operatorname{ctg} x$.

3) График функции $y = \sec x$. Вновь на прямой (черт. 6[3]) от точки 0 отложим промежутки, означающие значение аргумента $\pm 90^0$, $\pm 180^0$,

$\pm 270^0$ и т. д., и, определив значения функции, полученные величины отложим на соответствующих перпендикулярах, сообразно со знаками.



Кривая секанса получит вид, указанный на чертеже, и будет состоять из отдельных ветвей, испытывая разрыв непрерывности при значениях аргумента, равных $\pm 90^0, \pm 270^0$ и т. д.

Задача. Построить график функции $y = \csc x$.

ОТДЕЛ III. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ДУГИ ИЛИ УГЛА.

§ 13. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ГОНИОМЕТРИИ.

Возьмем выражение какой-либо тригонометрической функции например

$$y = \mathrm{Sin}\,\alpha$$

Если в этом равенстве считать известным α (дугу или угол), то, очевидно, можно будет определить y, и наоборот, если дано y, то окажется возможным определить α. Таким образом, намечаются две следующих задачи, которые и назовем основными задачами гониометрии.

Задача I. По данной дуге или углу определить их тригонометрические линии и функции.

Задача II. По данной тригонометрической линии или функции определить дугу или угол, им соответствующие.

Обе поставленные задачи могут быть решены как графическим так и аналитическим способом.

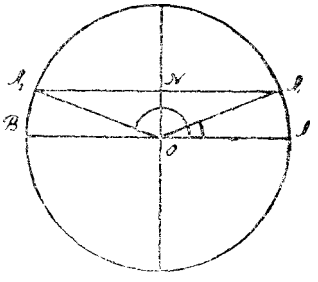
В самом деле, для решения графическим способом задачи I нужно будет на окружности тригонометрического круга отложить от начала счета дуг данную дугу и затем, пользуясь определением тригонометрических линий (§ 8), построить самые линии, а затем по чертежу определить отношение полученных линий к радиусу круга, в результате чего и получатся тригонометрические функции.

Задача эта, следовательно, всегда определенна и имеет одно только решение. Другими словами, данной дуге или углу соответствует только одна система тригонометрических линий и функций.

К несколько иным выводам мы придем, рассматривая задачу II, графическое решение которой покажем на нескольких примерах.

Пример № 1. Определить дугу или угол, если синус этой дуги или угла равен $^3/_8$.

черт. 7

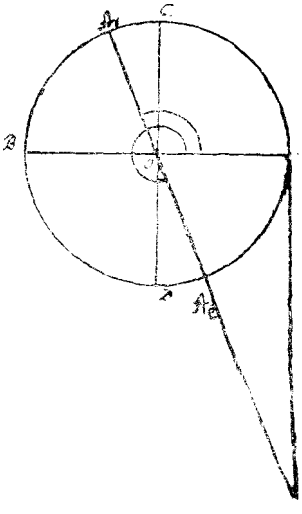


Возьмем (черт. 7) тригонометрический круг и, вспоминая, что синус угла или дуги есть отношение линии синуса (перпендикуляра, опущенного из конца дуги на начальный диаметр) к радиусу, найдем, что в данном примере радиус равняется 8 произвольным единицам, а линия синуса—3 таким же единицам. Поэтому, разделив радиус круга на 8 частей и отложив по второму диаметру вверх (так как синус дан положительным) от точки O три таких части, через полученную точку N проведем линию, параллельную начальному диаметру. Линия эта пересечет окружность в двух точках A_1 и A_2, которые, очевидно, и будут представлять концы двух дуг, имеющих данный синус $^3/_8$.

Соответствующие углы будут AOA_1 и AOA_2.

Пример № 2. Определить дугу или угол, если тангенс этой дуги или угла равен —2,5.

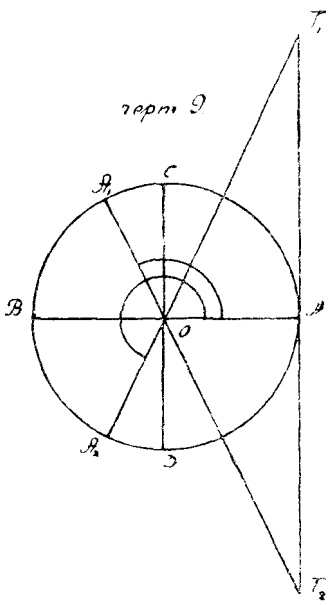
черт. 8



Возьмем (черт. 8) тригонометрический круг и, так как тангенс дуги или угла есть отношение линии тангенса (длины касательной, проведенной из начала счета дуг до встречи с продолженным радиусом, проведенным через конец дуги) к радиусу, то замечаем, что в данном примере радиус содержит 1 произвольную единицу, а линия тангенса — 2,5 таких же единицы. Поэтому отложим на касательной, проведенной из начала счета дуг вниз (так как тангенс дан отрицательным) от точки A 2,5 радиуса и полученную точку T соединим с центром круга; а продолжив полученную линию далее, найдем на окружности две точки A_1 и A_2, которые, очевидно, и представят концы двух дуг, имеющих данный тангенс — 2,5. Соответствующие углы будут AOA_1 и AOA_2.

Пример № 3. Определить дугу или угол, если секанс этой дуги равняется — 1,6.

Возьмем тригонометрический круг (черт. 9), и, зная, что секанс дуги или угла есть отношение линии секанса (продолженного до встречи с линией тангенса радиуса, проведенного через конец дуги) к радиусу, заключаем, что в данном примере радиус содержит одну произвольную единицу, а линия секанса — 1,6 таких же единиц. Поэтому, проведя линию тангенса и взяв растворением циркуля 1,6 радиуса, дважды засечем из центра круга этим радиусом линию тангенса. Вспоминая теперь, что по условию секанс *отрицателен и, следовательно* (§ 10), *дуга или* угол могут принадлежать второй и третьей четвертям, соединим полученные на линии тангенса точки T_1 и T_2 с центром O и продолжим полученные линии до пересечения с окружностью в точках A_1 и A_2, которые и представят, очевидно, концы двух дуг AA_1 и AA_2, имеющих данный секанс — 1,6. Соответствующие углы будут AOA_1 и AOA_2.



Не рассматривая остальных случаев построения дуг или углов по данным косинусу, котангенсу и косекансу, каковое построение привело бы нас также к двум дугам или углам, имеющим одну и ту же из данных тригонометрических функций, — прежде всего отметим, что вторая основная задача гониометрии имеет всегда два решения. Другими словами, существует всегда две дуги, меньшие окружности и имеющие один и тот же синус или косинус, тангенс или котангенс, секанс или косеканс.

Обозначая теперь меньшую из двух дуг, имеющих одинаковой одну и ту же тригонометрическую функцию, через α_1, а большую через α_2, и прилагая к этим дугам правило периодичности тригонометрических функций, мы придем к заключению, что существуют не только две, а бесчисленное множество дуг, имеющих одинаковой какую-либо из тригонометрических функций, и общий вид этих дуг таков: $360^0 n + \alpha_1$, и $360^0 n + \alpha_2$, где n—произвольное целое, положительное или отрицательное число.

Таким образом, вторая основная задача гониометрии об определении дуги или угла по данной тригонометрической функции есть задача неопределенная, имеющая бесчисленное множество решений. Поэтому при решении таких задач необходимо или в самом условии оговаривать, какая именно дуга или угол отыскивается, или исследовать решение для выяснения, какая дуга или угол отвечают условиям задачи.

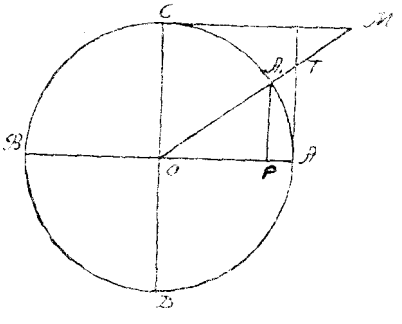
Изложенный в предыдущем графический способ решения обеих основных задач гониометрии заключает свойственные этому способу недостатки (§ 2). Аналитическое же решение этих задач, независимо от

возможно при помощи так называемых тригонометрических таблиц, все необходимое о которых будет изложено далее. Однако, для некоторых отдельных значений дуги или угла первую задачу гониометрии можно решить и без посредства тригонометрических таблиц, на основании простых геометрических соображений. Но до такого решения задачи полезно рассмотреть имеющие важное практическое значение соотношения между тригонометрическими функциями одной и той же дуги или угла. Соотношения эти разделяются на основные и вспомогательные.

§ 14. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ГОНИОМЕТРИИ.

Пусть имеем тригонометрический круг (черт. 10) и на окружности его точку A_1, представляющую конец дуги α в первой четверти. Построим все тригонометрические линии этой дуги и прежде всего рассмотрим прямоугольный треугольник OA_1P, из которого, на основании теоремы Пифагора, напишем, что $\overline{A_1P}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OA_1}^2$. Разделяя теперь обе части этого равенства на $\overline{OA_1}^2$ (где OA_1 — радиус) и вспоминая, что $\frac{A_1P}{OA_1}$ будет синусом данной дуги α, а $\frac{OP}{OA_1}$ — ее косинусом, получим первую основную формулу:

черт 10



$$\mathrm{Sin}^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\alpha = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Рассматривая далее два подобных треугольника OA_1P и OTA, можно написать, что $\frac{TA}{OA} = \frac{A_1P}{OP}$, а разделяя числителя и знаменателя правой части этого равенства на OA (где OA — радиус) и замечая, что $\frac{TA}{OA}$ будет тангенсом дуги α, а $\frac{A_1P}{OA}$ и $\frac{OP}{OA}$ по предыдущему,—синусом и косинусом той же дуги, получим вторую основную формулу:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha} \qquad (2)$$

Из тех же подобных треугольников можно получить такое соотношение $\frac{OT}{OA} = \frac{OA_1}{OP}$. По разделению же числителя и знаменателя правой части равенства на OA_1 и замечая, что $\frac{OT}{OA}$ есть секанс дуги α, а $\frac{OP}{OA_1}$, попрежнему, ее косинус, получим третью основную формулу:

$$\mathrm{sc}\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad (3)$$

Возьмем теперь треугольники OA_1P и OCM. Треугольники эти подобны, ибо имеют по равному прямому углу и, кроме того, $\angle A_1OA = \angle OMC$, как углы внутренние накрест лежащие. Поэтому пишем, что $\frac{CM}{OC} = \frac{OP}{A_1P}$. Разделив числителя и знаменателя правой части равенства на OC (где OC—радиус) и отмечая, что $\frac{CM}{OC}$ будет котангенсом дуги α $\frac{OP}{OC}$ и $\frac{A_1P}{OC}$, как указывалось выше,—ее косинусом и синусом,—получим четвертую основную формулу:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}$$

Наконец, из тех же треугольников имеем, что

$$\frac{OM}{OC} = \frac{OA_1}{A_1P}$$

или так как $OC = OA_1$, как радиусы,

$$\frac{OM}{OC} = \frac{OC}{A_1P}$$

Приняв же во внимание, что $\frac{OM}{OC}$ есть косеканс α, а $\frac{A_1P}{OC}$—синус этой дуги, и разделив числителя и знаменателя правой части равенства на OC, получим пятую основную формулу:

$$\operatorname{csc}\alpha = \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha} \qquad (5)$$

Выведенные пять основных формул связывают шесть тригонометрических функций одной и той же дуги или угла, и так как формулы эти независимы, то, следовательно, пользуясь ими, по одной какой либо тригонометрической функции возможно вычислить все остальные функции.

§ 15. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ГОНИОМЕТРИИ.

Формулы (1)—(5) предыдущего параграфа вполне разрешают вопрос о вычислении тригонометрических функций дуги или угла по одной из них. Однако же, в виду возможного упрощения вычислений оказывается полезным подвергнуть основные формулы некоторым преобразованиям, в результате чего и получатся вспомогательные формулы гониометрии. В § 14 были, между прочим, выведены формулы (2) и (4)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha} \text{ и } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}$$

Перемножив почленно эти равенства, найдем

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\alpha}$$

сокращении получим первую вспомогательную формулу:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \qquad 1)$$

Умножая теперь обе части выведенного в § 14 равенства 3) $\frac{1}{\operatorname{Cos}\alpha}$ на $\cos\alpha$, получим вторую вспомогательную формулу

$$\operatorname{sc}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\alpha = 1 \qquad 2)$$

Взяв теперь формулу (5) § 14 $\operatorname{csc}\alpha = \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha}$ и умножив обе части на $\operatorname{Sin}\alpha$, получим третью вспомогательную формулу:

$$\operatorname{csc}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\alpha = 1 \qquad 3)$$

Вновь возьмем теперь формулу (3) § 14 $\operatorname{sc}\alpha = \frac{1}{\operatorname{Cos}\alpha}$ и, возведя равенства в квадрат, получим

$$\operatorname{sc}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$$

Но на основании формулы (1) § 14, можем вместо 1 подставить $\operatorname{Sin}^2\alpha + \operatorname{Cos}^2\alpha$, т.-е. выйдет, что

$$\operatorname{sc}^2\alpha = \frac{\operatorname{Sin}^2\alpha + \operatorname{Cos}^2\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$$

На самом деле, разделяя теперь числителя правой части написанного на знаменателя, получим, что

$$\operatorname{sc}^2\alpha = \frac{\operatorname{Sin}^2\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha} + \frac{\operatorname{Cos}^2\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$$

как

$$\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

окончательно получим четвертую вспомогательную формулу:

$$\operatorname{sc}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha + 1 \qquad 4)$$

Точно такие рассуждения, но примененные к формуле (5) пред'идущего параграфа, т.-е. к равенству $\operatorname{csc}\alpha = \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha}$ привели бы нас к вспомогательной формуле

$$\operatorname{csc}^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha + 1 \qquad 5)$$

§ 16. ОБЩНОСТЬ ОСНОВНЫХ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФОРМУЛ ГОНИОМЕТРИИ.

Вывод основных и вспомогательных формул гониометрии был сделан в предположении, что дуга α оканчивалась в первой четверти. Однако же легко показать, что эти формулы будут справедливы для произвольной дуги.

В самом деле, те геометрические соотношения, которые были получены в § 14 из треугольников, образованных радиусами и тригонометрическими линиями дуги первой четверти, очевидно, будут иметь место и для дуги, оканчивающейся во второй, третьей или четвертой четвертях. И лишь необходимо показать, что, заменяя в этих соотношениях, как это и делалось в § 14, геометрические линии линиями тригонометрическими, следует принимать во внимание и знаки этих последних.

Не останавливаясь на рассмотрении всех случаев, рассмотрим, например, дугу или угол в третьей четверти, для которой, как известно, синус, косинус, секанс и косеканс принимаются отрицательными, а тангенс и котангенс—положительными. В применении к данной дуге, которую обозначим через α, основные формулы примут следующий вид:

1 формула $(-\operatorname{Sin}^2\alpha)+(-\operatorname{Cos}^2\alpha)=1$

$$\operatorname{Sin}^2\alpha+\operatorname{Cos}^2\alpha=1$$

2 формула $+\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{-\operatorname{Sin}\alpha}{-\operatorname{Cos}\alpha}$

или

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha}$$

3 формула $-\operatorname{sc}\alpha=\dfrac{1}{-\operatorname{Cos}\alpha}$

или, по умножении обеих частей равенства на -1, выйдет, что

$$\operatorname{sc}\alpha=-\frac{1}{\operatorname{Cos}\alpha}$$

4 формула $+\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{-\operatorname{Cos}\alpha}{-\operatorname{Sin}\alpha}$

или

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}$$

и 5 формула $-\operatorname{csc}\alpha=\dfrac{1}{-\operatorname{Sin}\alpha}$

откуда по умножении обеих частей равенства на -1 получим, что

$$\operatorname{csc}\alpha=\frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha}$$

Таким образом, все основные формулы, а следовательно, и вспомогательные, как полученные из основных алгебраическими преобразованиями, независящими от величины дуги, сохранили свой вид и для дуг третьей четверти.

Задача. Доказать общность основных формул для дуг второй и четвертой четвертей.

Подтвердив общность основных формул для всех четырех четвертей, легко видеть, что по правилу периодичности тригонометрических функций, формулы эти останутся справедливыми для всевозможных дуг, как больших, так и меньших окружности.

§ 17. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ОДНОЙ ИЗ НИХ.

Соберем в одно место все формулы, которыми придется пользоваться при вычислениях

$$\mathrm{Sin}^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\alpha = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2); \qquad \mathrm{sc}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4); \qquad \mathrm{csc}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{Sin}\,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6); \qquad \mathrm{sc}\,\alpha \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\mathrm{csc}\,\alpha \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8); \qquad \mathrm{sc}^2\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\mathrm{csc}^2\alpha = 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Пример 1. Вычислить тригонометрические функции дуги или угла α, если $\mathrm{Cos} = -\frac{5}{6}$

Из формулы (1) имеем: $\mathrm{Sin}^2\alpha = 1 - \mathrm{Cos}^2\alpha$, а по подстановке $\frac{5}{6}$ вместо $\mathrm{Cos}\,\alpha$ и приведении к общему знаменателю получаем

$$\mathrm{Sin}^2\alpha = \frac{11}{36}$$

откуда

$$\mathrm{Sin}\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{11}{36}} = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$$

По формуле (2) найдем, что

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\pm\frac{\sqrt{11}}{6}}{-\frac{5}{6}}$$

откуда

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{11}}{5}$$

Формула (6) даст, что

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$

или по подстановке $\pm\frac{\sqrt{11}}{5}$ вместо $\mathrm{tg}\,\alpha$ получим

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{11}}$$

Из формулы (3) выйдет, что

$$\sec\alpha = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$$

Наконец, по формуле (5), подставляя в нее вместо $\sin\alpha$ для него величину $\pm\frac{\sqrt{11}}{6}$, получим, что

$$\csc\alpha = \pm\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \pm\frac{6}{\sqrt{11}}$$

Для поверки всего вычисления можно воспользоваться формул из которой по подстановке в нее найденных величин $\sec\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ чим, что

$$\left(\frac{6}{5}\right)^2 = 1 + \pm\left(\frac{\sqrt{11}}{5}\right)^2$$

или

$$\frac{36}{25} = 1 + \frac{11}{25}$$

$$\frac{36}{25} = \frac{36}{25}$$

Получение тождества удостоверяет в правильности вычисле

Пример 2. Вычислить тригонометрические дуги или угла α, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$

По формуле (6) прямо получаем, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Формула (9) позволяет написать, что

$$\sec^2\alpha = 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

или

$$\sec\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Из формулы (10) оказывается, что

$$\csc^2\alpha = 1 + (\sqrt{3})^2$$

откуда

$$\csc\alpha = \pm 2$$

На основании формулы (7) напишем, что

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$$

вместо $\sec\alpha$ найденной величины $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ получим, что

$$\operatorname{Cos}\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Наконец, точно также из формулы (8) найдем, что

$$\operatorname{Sin}\alpha=\pm\frac{1}{2}$$

Поверку произведем по формуле (1). Будем иметь

$$\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2+\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$$

Действительно,

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

Пример 3. Вычислить тригонометрические функции дуги или угла α, если $\csc\alpha=-\frac{7}{4}$

Из формулы (8) получим, что

$$\operatorname{Sin}\alpha=\frac{1}{-\frac{7}{4}}=-\frac{4}{7}$$

По формуле (1) найдем, что

$$\operatorname{Cos}^2\alpha=1-\left(-\frac{4}{7}\right)^2$$

или

$$\operatorname{Cos}\alpha=\pm\frac{\sqrt{33}}{7}$$

Последовательное применение формул (2) и (4) даст, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\frac{4}{7}}{\pm\frac{\sqrt{33}}{7}}=\mp\frac{4}{\sqrt{33}}\quad\text{и}\quad\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\pm\frac{\sqrt{33}}{7}}{-\frac{4}{7}}=\mp\frac{\sqrt{33}}{4}$$

Наконец, по формуле (3), подставляя в нее вместо $\operatorname{Cos}\alpha$ найденную величину $\pm\frac{\sqrt{33}}{7}$ получим, что

$$\sec\alpha=\pm\frac{7}{\sqrt{33}}$$

Для проверки вычисления послужит формула (10). Будем иметь

$$\left(-\frac{7}{4}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{33}}{4}\right)^2$$

В самом деле,

$$\frac{49}{16} = 1 + \frac{33}{16} = \frac{49}{16}$$

Не останавливаясь на примерах вычисления тригонометрических функций по данным синусу, тангенсу и секансу, что выполняется столь же просто,—необходимо обратить внимание на двойной знак ($\pm$) для некоторых тригонометрических функций, что вполне об'ясняется уже известным нам (§ 13) правилом о существовании всегда двух дуг, меньших окружности и имеющих одинаковой какую-либо одну тригонометрическую функцию. И так как в приведенных выше примерах не оговаривалось, какая именно из двух дуг в данном примере подразумевается, то необходимо было получить решение для обеих дуг. Поэтому в примере 1 по данному положительному косинусу, что может быть (§ 10) в первой и четвертой четвертях и было найдено для синуса, тангенса и котангенса и косеканса по две величины, одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку, ибо в этих четвертях названные тригонометрические функции имеют разные знаки. Что же касается функции секанса, то эта функция имеет знаки, одинаковые с косинусом, чем и об'ясняется, что для секанса в примере 1 для секанса был получен один знак $+$.

Точно также в примере 2 по данному положительному котангенсу, что может быть только в первой и третьей четвертях,—были найдены для синуса, косинуса, секанса и косеканса величины с двойными знаками, потому что в этих четвертях указанные функции имеют разные знаки,—а для тангенса был получен знак $+$, одинаковый со знаком котангенса.

Наконец, в примере 3 по данному отрицательному косекансу, с которым одинаковые знаки имеют функции синуса, для остальных функций было найдено по два знака, так как в третьей и четвертой четвертях, где функция косеканса отрицательна, функции косинуса, тангенса, котангенса и секанса имеют разные знаки.

В тех случаях, когда при выяснении тригонометрических функций известна четверть, в которой находится конец дуги, необходимо тригонометрические функции, сопровождать только одним знаком, соответствующим четверти, отбрасывая второй знак, получающийся при вычислениях.

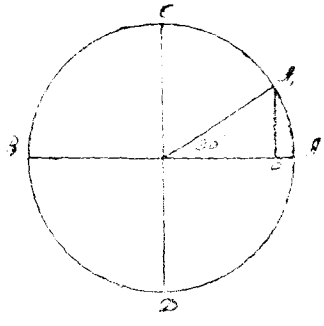
Задача. Вычислить тригонометрические функции дуги α, оканчивающейся: а) в III четверти, если $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ б) во II четверти, если $\operatorname{tg}\alpha = -4$ и в) в IV четверти, если $\sec\alpha = +6$.

§ 18. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛОВ В 30^0, 45^0 и 60^0.

Применим основные и вспомогательные формулы гониометрии к вычислению тригонометрических функций углов в 30^0, 45^0 и 60^0, каковые функции окажутся весьма полезными во многих практических вопросах.

1) Тригонометрические функции угла в 30^0. Пусть имеем тригонометрический круг (черт. 11) и на окружности его точку A_1 представляющую конец дуги в 30^0. Проведя линию синуса A_1P, заметим, что к полученному прямоугольному треугольнику A_1OP можно применить известное из геометрии свойство, заключающееся в том, что если в прямоугольном треугольнике один из острых углов равняется 30^0, то противолежащий этому углу катет (в данном случае линия синуса A_1P) равняется половине гипотенузы (в данном случае радиуса). Следовательно, линия синуса угла в 30^0 равна половине радиуса, а потому

черт. 11



$$\text{Sin } 30^0 = \frac{1}{2}$$

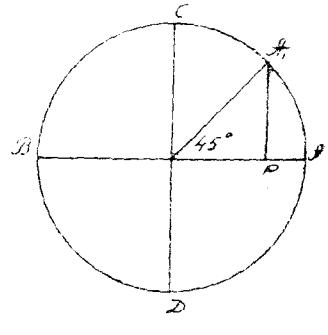
Применяя же основные и вспомогательные формулы гониометрии последовательно найдем, что

$$\text{Cos } 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \text{tg } 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \text{ctg } 30^0 = \sqrt{3};\ \text{sc } 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{и } \text{csc } 30^0 = 2.$$

2) Тригонометрические функции угла в 45^0. Возьмем тригонометрический круг (черт. 12) и на окружности его точку A_1, представляющую конец дуги в 45^0. Проведя линию синуса A_1P, найдем, что линия OP будет линией косинуса угла в 45^0 и что прямоугольный треугольник A_1OP будет равнобедренным. Поэтому для угла в 45^0 линии синуса и косинуса равны, а значит равны и функции синуса и косинуса, т.-е.

черт. 12



$$\text{Sin } 45^0 = \text{Cos } 45^0.$$

Отсюда последовательное применение основных и вспомогательных формул даст, что

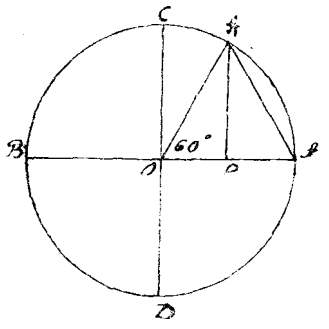
$$\text{tg } 45^0 = 1;\ \text{ctg } 45^0 = 1;\ \text{sc } 45^0 = \sqrt{2};$$

$$\text{csc } 45^0 = \sqrt{2};\ \text{Sin } 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{и } \text{Cos } 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3) Тригонометрические функции угла в 60°. Пусть имеем тригонометрический круг (черт. 13) и на нем точку A_1, представляющую конец дуги в 60°. Легко понять, что линия A_1A есть сторона правильного вписанного шестиугольника, которая, как известно, равна радиусу, а потому треугольник A_1OA будет равносторонним. Проведя в этом треугольнике высоту (это будет линия синуса угла в 60°), найдем, что основание треугольника OA разделилось в точке P пополам, т.-е. OP (это есть линия косинуса угла в 60°) будет равна половине радиуса и, следовательно,

черт. 13



$$\text{Cos}\,60^0 = \frac{1}{2}$$

Отсюда, применяя формулы, получим, что

$$\text{Sin}\,60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \text{tg}\,\alpha = \sqrt{3};\ \text{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \text{sc}\,\alpha = 2;\ \text{csc}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ОТДЕЛ IV. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ РАЗЛИЧНЫХ ДУГ ИЛИ УГЛОВ.

§ 19. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ О ПРИВЕДЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ПРОСТЕЙШЕМУ АРГУМЕНТУ.

Простейшим аргументом называется дуга или угол, меньшие 45° или $\frac{\pi}{4}$. К такому аргументу возможно, оказывается, привести тригонометрические функции любого угла или дуги, причем преобразование это производится на основании особых формул приведения. Формулы эти весьма важны в практическом отношении, так как позволяют при различных вычислениях пользоваться только углами или дугами, не превышающими 45° или $\frac{\pi}{4}$

В дальнейшем рассмотрим формулы приведения: 1) для отрицательного аргумента к равному по величине положительному аргументу, 2) для аргументов:

$$90^0 = \alpha;\ 180^0 = \alpha;\ 270^0 = \alpha \text{ и } 360^0 - \alpha$$

к аргументу α.

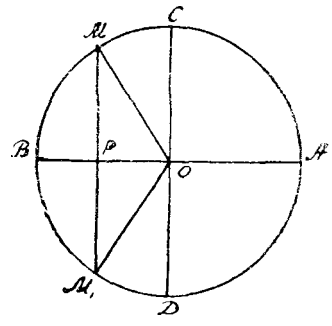
Что же касается аргумента $360^0 + \alpha$ или вообще $360^0\ n + \alpha$, то по правилу периодичности этот аргумент прямо соответствует α.

§ 20. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ ПРЯМО ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ АРГУМЕНТОВ.

Прямо противоположными аргументами называются такие аргументы, сумма которых равняется 0; например, α и $-\alpha$ будут прямо противоположными аргументами.

Возьмем (черт. 14) тригонометрический круг и от начала счета дуг отложим дугу $AM = \alpha$ в положительном направлении и равную ей по абсолютной величине дугу AM_1 в направлении отрицательном. Построив для этих дуг линии синуса MP и M_1P и, проведя радиусы OM и OM_1, докажем, что прямоугольные треугольники OMP и OM_1P между собой равны. Действительно, $MO = M_1O$, как радиусы, а $\angle MOP = \angle M_1OP$, как дополнение до 180^0 равных углов AOM и AOM_1. Поэтому $MP = M_1P$, а следовательно, OP будет общей стороной этих двух треугольников.

черт. 14



Линии MP и M_1P суть линии синуса дуг α и α_1, причем согласно § 10 первая из них принимается положительной, а вторая—отрицательной. Линия OP есть общая линия косинуса для обеих дуг α и $-\alpha$. Переходя к тригонометрическим функциям, можно, следовательно, написать, что

$$\frac{MP}{R} = \operatorname{Sin}\alpha \text{ и } -\frac{M_1P}{R} = \operatorname{Sin}(-\alpha)$$

и также, что

$$\frac{OP}{R} = \operatorname{Cos}\alpha \text{ и } \frac{OP}{R} = \operatorname{Cos}(-\alpha)$$

Первые два равенства после умножения обеих частей первого из них на -1 позволяют написать, что

$$-\operatorname{Sin}\alpha = \operatorname{Sin}(-\alpha)$$

откуда

$$-\operatorname{Sin}(-\alpha) = \operatorname{Sin}\alpha$$

Из двух же последних равенств непосредственно имеем, что

$$\operatorname{Cos}(-\alpha) = \operatorname{Cos}\alpha$$

Согласно этим соотношениям и на основании формул гониометрии получим, что

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;\ \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;\ \operatorname{sc}(-\alpha) = \operatorname{sc}\alpha \text{ и } \operatorname{csc}(-\alpha) = -\operatorname{csc}\alpha.$$

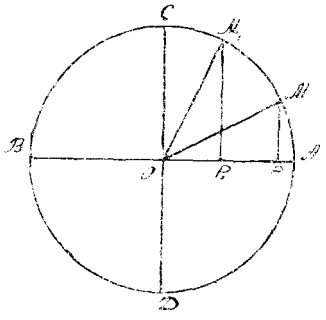
Легко понять, что выводы не изменяются при любом значении дуги и, таким образом, выходит, что функции синуса, тангенса, котангенса и косеканса прямо противоположных аргументов равны по величине и противоположны по знаку, а функции косинуса и секанса таких аргументов равны по величине и по знаку одинаковы.

Конечно, для отвлеченного выражения аргумента выводы сохраняют свою силу.

§ 21. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ АРГУМЕНТОВ.

Дополнительными аргументами называются те аргументы, сумма которых равняется 90^0; например, α и $90^0 - \alpha$ будут дополнительными аргументами.

черт. 15



Возьмем (черт. 15) тригонометрический круг и от начала A отложим дугу α, оканчивающуюся в первой четверти, и дугу $90^0 - \alpha$, которая, очевидно, также будет иметь конец в первой четверти. При этом, если $\alpha > 45^0$, то $90^0 - \alpha < 45^0$ и, значит, конец второй дуги будет ближе к точке, чем конец первой дуги; если же $\alpha < 45^0$, то $90^0 - \alpha > 45^0$ и конец второй дуги будет дальше от точки A по сравнению с концом первой дуги.

Построив теперь для обеих дуг линии синусов MP и M_1P_1 и проведя радиусы OM и OM_1, заметим, что треугольники OMP и OM_1P_1 равны между собой, потому что имеют равные углы, а $OM_1 = OM$, как радиусы; на этом основании $OP_1 = MP$ и $M_1P_1 = OP$.

Но так как OP и OP_1 суть линии косинусов рассматриваемых дуг, то, следовательно, выйдет, что

$$\mathrm{Cos}\,(90^0 - \alpha) = \mathrm{Sin}\,\alpha \text{ и } \mathrm{Sin}\,(90^0 - \alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha$$

Полученные формулы приведения дополнительных аргументов обладают общностью, т.-е. не изменяются с изменением величины α.

Применяя же эти соотношения и формулы гониометрии последовательно, найдем, что

$$\mathrm{tg}\,(90^0 - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha \text{ и } \mathrm{ctg}\,(90^0 - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha;$$
$$\mathrm{sc}\,(90^0 - \alpha) = \mathrm{csc}\,\alpha \text{ и } \mathrm{csc}\,(90^0 - \alpha) = \mathrm{sc}\,\alpha.$$

Называя теперь соответственно синус и косинус, тангенс и котангенс, секанс и косеканс—сходными функциями, заключаем, что тригонометрические функции угла равны сходным функциям угла дополнительного.

При отвлеченном выражении аргумента написанные выше формулы примут такой вид:

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a}\right) = \mathrm{Sin}\,\mathrm{a};\ \mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a}\right) = \mathrm{Cos}\,\mathrm{a}$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a}\right) = \mathrm{ctg}\,\mathrm{a};\ \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a}\right) = \mathrm{tg}\,\mathrm{a}$$

$$\mathrm{sc}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a}\right) = \mathrm{csc}\,\mathrm{a};\ \mathrm{csc}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a}\right) = \mathrm{sc}\,\mathrm{a}$$

§ 22. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ АРГУМЕНТА $90^0 + \alpha$ К АРГУМЕНТУ α.

Формулы приведения прямо противоположных и дополнительных (§§ 20 и 21) справедливы для всевозможных значений α и в равенстве $\mathrm{Sin}(90 - \alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha$ можно заменить α через $-\alpha$. выйдет, что

$$\mathrm{Sin}[90^0 - (-\alpha)] = \mathrm{Cos}(-\alpha)$$

$$\mathrm{Sin}(90^0 + \alpha) = \mathrm{Cos}(-\alpha)$$

На основании формул приведения прямо противоположных аргументов $\mathrm{Cos}(-\alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha$, а потому окончательно $\mathrm{Sin}(90^0 + \alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha$.

Таким же образом последовательно будем иметь

$$\mathrm{Cos}(90^0 - \alpha) = \mathrm{Sin}\,\alpha$$
$$\mathrm{Cos}[90^0 - (-\alpha)] = \mathrm{Sin}(-\alpha)$$
$$\mathrm{Cos}(90^0 + \alpha) = \mathrm{Sin}(-\alpha)$$

окончательно по приведении отрицательного аргумента получим, что

$$\mathrm{Cos}(90^0 + \alpha) = -\mathrm{Sin}\,\alpha$$

Формулы гониометрии позволяют на основании выведенных соотношений написать, что

$$\mathrm{tg}(90^0 + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha;\ \mathrm{cgt}(90^0 + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$
$$\mathrm{sc}(90^0 + \alpha) = -\mathrm{csc}\,\alpha;\ \mathrm{csc}(90^0 + \alpha) = \mathrm{sc}\,\alpha$$

Формулы приведения аргумента $90^0 + \alpha$ к аргументу α справедливы при любом значении α.

Для отвлеченного выражения аргумента формулы приведения будут иметь такой вид:

$$\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{a}\right) = \mathrm{Cos}\,\mathrm{a};\ \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{a}\right) = -\mathrm{Sin}\,\mathrm{a}$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{a}\right) = -\mathrm{ctg}\,\mathrm{a};\ \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{a}\right) = -\mathrm{tg}\,\mathrm{a}$$

$$\mathrm{sc}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{a}\right) = -\mathrm{csc}\,\mathrm{a};\ \mathrm{csc}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{a}\right) = \mathrm{sc}\,\mathrm{a}$$

Задача. Доказать по чертежу формулы приведения аргумента $90^0 + \alpha$, если α оканчивается в первой четверти.

§ 23. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ АРГУМЕНТА $180^0 \mp \alpha$ К АРГУМЕНТУ α.

Согласно предыдущему (§ 22) мы имеем, что

$$\mathrm{Sin}(90^0 + \alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha$$

В виду справедливости этой формулы для всяких значений α заменим в написанном равенстве α через $90^0 - \alpha$ и тогда получим, что

$$\mathrm{Sin}[90^0 + (90^0 - \alpha)] = \mathrm{Cos}(90^0 - \alpha)$$

откуда

$$\mathrm{Sin}(180^0 - \alpha) = \mathrm{Cos}(90^0 - \alpha)$$

а по приведении дополнительного аргумента окончательно найдем, что

$$\mathrm{Sin}\,(180^0 - \alpha) = \mathrm{Sin}\,\alpha.$$

Если теперь возьмем формулу

$$\mathrm{Cos}\,(90^0 + \alpha) = -\mathrm{Sin}\,\alpha$$

вновь заменим α через $90^0 - \alpha$, то после простых преобразований получим, что

$$\mathrm{Cos}\,(180^0 - \alpha) = -\mathrm{Cos}\,\alpha.$$

По формулам же гониометрии будем иметь, что

$$\mathrm{tg}\,(180^0 - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha;\ \mathrm{ctg}\,(180^0 - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$$
$$\mathrm{sc}\,(180^0 - \alpha) = -\mathrm{sc}\,\alpha;\ \mathrm{csc}\,(180^0 - \alpha) = \mathrm{Csc}\,\alpha.$$

Все выведенные формулы справедливы для произвольного аргумента α.

При отвлеченном выражении аргумента получатся следующие формулы:

$$\mathrm{Sin}\,(\pi - a) = \mathrm{Sin}\,a;\ \mathrm{Cos}\,(\pi - a) = -\mathrm{Cos}\,a$$
$$\mathrm{tg}\,(\pi - a) = -\mathrm{tg}\,a;\ \mathrm{ctg}\,(\pi - a) = -\mathrm{ctg}\,a$$
$$\mathrm{sc}\,(\pi - a) = -\mathrm{sc}\,a;\ \mathrm{csc}\,(\pi - a) = \mathrm{csc}\,a$$

Что касается теперь формул приведения аргумента $180^0 + \alpha$, то таковые легко получатся из предыдущих заменой α через $-\alpha$. Действительно, выше мы имели, что

$$\mathrm{Sin}\,(180^0 - \alpha) = \mathrm{Sin}\,\alpha$$

Заменяя в этом равенстве α через $-\alpha$, получим, что

$$\mathrm{Sin}\,[180^0 - (-\alpha)] = \mathrm{Sin}\,(-\alpha)$$

откуда, по приведении в превой части отрицательного аргумента окончательно найдем, что

$$\mathrm{Sin}\,(180^0 + \alpha) = -\mathrm{Sin}\,\alpha$$

Точно таким же образом из формулы $\mathrm{Cos}\,(180^0 - \alpha) = -\mathrm{Cos}\,\alpha$ получим, что

$$\mathrm{Cos}\,(180^0 + \alpha) = -\mathrm{Cos}\,(-\alpha)$$

или по приведении отрицательного аргумента

$$\mathrm{Cos}\,(180^0 + \alpha) = -\mathrm{Cos}\,\alpha$$

Выведенные соотношения позволяют написать, что

$$\mathrm{tg}\,(180^0 + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha;\ \mathrm{ctg}\,(180^0 + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$$
$$\mathrm{sc}\,(180^0 + \alpha) = -\mathrm{sc}\,\alpha;\ \mathrm{csc}\,(180^0 + \alpha) = -\mathrm{csc}\,\alpha$$

Все эти формулы обладают общностью и при отвлеченном аргумента будут иметь такой вид:

$$\operatorname{Sin}(\pi + a) = -\operatorname{Sin} a;\ \operatorname{Cos}(\pi + a) = -\operatorname{Cos} a$$
$$\operatorname{tg}(\pi + a) = \operatorname{tg} a;\ \operatorname{ctg}(\pi + a) = \operatorname{ctg} a$$
$$\operatorname{sc}(\pi + a) = -\operatorname{sc} a;\ \operatorname{csc}(\pi + a) = -\operatorname{csc} a$$

Замечание. Формулы для тангенса и котангенса аргумента, равного $180^0 + \alpha$ или $\pi + a$, возможно было написать непосредственно по правилу периодичности, т. к. периодом для этих функций является 180^0 или π (§ 9).

Задача. Доказать по чертежу формулы приведения аргумента $180^0 + \alpha$, если α оканчивается в первой

§ 24. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ АРГУМЕНТА $270 \pm \alpha$ К АРГУМЕНТУ α.

Возьмем формулу

$$\operatorname{Sin}(180^0 + \alpha) = -\operatorname{Sin}\alpha$$

заменим α через $90^0 - \alpha$. Тогда выйдет, что

$$\operatorname{Sin}[180^0 + (90 - \alpha)] = -\operatorname{Sin}(90 - \alpha)$$

Отсюда, по приведении в правой части дополнительного аргумента, что

$$\operatorname{Sin}(270^0 + \alpha) = -\operatorname{Cos}\alpha$$

Выполнив такое же преобразование формулы $\operatorname{Cos}(180^0 + \alpha) = -\operatorname{Cos}\alpha$, что

$$\operatorname{Cos}(270^0 - \alpha) = -\operatorname{Cos}(90^0 - \alpha)$$

окончательно

$$\operatorname{Cos}(270^0 - \alpha) = -\operatorname{Sin}\alpha$$

Формулы эти, справедливые для любого значения аргумента, дают возможность написать следующие соотношения для остальных тригонометрических функций

$$\operatorname{tg}(270^0 - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha;\ \operatorname{ctg}(270^0 - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{sc}(270^0 - \alpha) = -\operatorname{csc}\alpha;\ \operatorname{csc}(270^0 - \alpha) = -\operatorname{sc}\alpha$$

При отвлеченном выражении аргумента будем иметь

$$\operatorname{Sin}\left[\frac{3\pi}{2} - a\right] = -\operatorname{Cos} a;\ \operatorname{Cos}\left[\frac{3\pi}{2} - a\right] = -\operatorname{Sin} a$$
$$\operatorname{tg}\left[\frac{3\pi}{2} - a\right] = \operatorname{ctg} a;\ \operatorname{ctg}\left[\frac{3\pi}{2} - a\right] = \operatorname{tg} a$$
$$\operatorname{sc}\left[\frac{3\pi}{2} - a\right] = -\operatorname{csc} a;\ \operatorname{csc}\left[\frac{3\pi}{2} - a\right] = -\operatorname{sc} a$$

Формулы приведения аргумента $270^0 + \alpha$ получаются из предыдущих формул приведения аргумента $270^0 - \alpha$ путем замены в этих последних формулах α через $-\alpha$. В самом деле, мы имеем, что

$$\operatorname{Sin}(270^0 - \alpha) = -\operatorname{Cos}\alpha$$

Заменяя теперь α через $-\alpha$, найдем, что

$$\operatorname{Sin}[270^0 - (-\alpha)] = -\operatorname{Cos}(-\alpha)$$

откуда, по приведении отрицательного аргумента, окончательно получим, что

$$\operatorname{Sin}(270^0 + \alpha) = -\operatorname{Cos}\alpha$$

Преобразуя точно также формулу $\operatorname{Cos}(270^0 - \alpha) = -\operatorname{Sin}\alpha$, получим, что

$$\operatorname{Cos}(270^0 + \alpha) = -\operatorname{Sin}(-\alpha)$$

или, приведя отрицательный аргумент

$$\operatorname{Cos}(270^0 + \alpha) = -(-\operatorname{Sin}\alpha)$$

и окончательно

$$\operatorname{Cos}(270^0 + \alpha) = \operatorname{Sin}\alpha$$

На основании этих формул, справедливых для произвольных значений аргумента, напишем, что

$$\operatorname{tg}(270^0 + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;\ \operatorname{ctg}(270^0 + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{sc}(270^0 + \alpha) = \operatorname{csc}\alpha;\ \operatorname{csc}(270^0 + \alpha) = -\operatorname{sc}\alpha$$

Для отвлеченного выражения аргумента формулы примут вид:

$$\operatorname{Sin}\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = -\operatorname{Cos} a;\ \operatorname{Cos}\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = \operatorname{Sin}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = -\operatorname{ctg} a;\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = -\operatorname{tg} a$$

$$\operatorname{sc}\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = \operatorname{csc} a;\ \operatorname{csc}\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = -\operatorname{sc} a$$

Задача. Доказать по чертежу формулы приведения аргумента $270^0 \mp \alpha$, если α оканчивается в первой четверти

§ 25. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ АРГУМЕНТА $360^0 - \alpha$ К АРГУМЕНТУ α.

В предыдущем параграфе была выведена формула $\operatorname{Sin}(270^0 + \alpha) = -\operatorname{Cos}\alpha$.

Заменим в этой формуле α через $90^0 - \alpha$; найдем, что

$$\operatorname{Sin}[270^0 + (90^0 - \alpha)] = -\operatorname{Cos}(90^0 - \alpha)$$

откуда по приведении дополнительного аргумента получим, что

$$\operatorname{Sin}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{Sin}\alpha$$

Точно также, взяв формулу $\mathrm{Cos}(270^0 + \alpha) = \mathrm{Sin}\,\alpha$ и произведя указанную выше замену, получим, что $\mathrm{Cos}[270^0 + (90^0 - \alpha)] = \mathrm{Sin}(90^0 - \alpha)$. а по приведении дополнительного аргумента выйдет, что

$$\mathrm{Cos}(360^0 - \alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha$$

По этим соотношениям и формулам гониометрии найдем, что

$$\mathrm{tg}(360^0 - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha;\ \mathrm{ctg}(360^0 - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha;$$
$$\mathrm{sc}(360^0 - \alpha) = \mathrm{sc}\,\alpha;\ \mathrm{csc}(360^0 - \alpha) = -\mathrm{csc}\,\alpha$$

Для отвлеченного выражения аргумента все эти формулы, обладающие общностью, напишутся так:

$$\mathrm{tg}(2\pi - a) = -\mathrm{tg}\,a;\ \mathrm{ctg}(2\pi - a) = -\mathrm{ctg}\,a;$$
$$\mathrm{sc}(2\pi - a) = \mathrm{sc}\,a;\ \mathrm{csc}(2\pi - a) = -\mathrm{csc}\,a;$$
$$\mathrm{Sin}(2\pi - a) = -\mathrm{Sin}\,a;\ \mathrm{Cos}(2\pi - a) = \mathrm{Cos}\,a$$

Задача. Доказать по чертежу формулы приведения аргумента $360^0 - \alpha$, если α оканчивается в первой четверти.

§ 26. ОБЩИЕ ЗАКЛЮЧЕНИЯ О ФОРМУЛАХ ПРИВЕДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Все выведенные в §§ 20—25 формулы приведения возможно заключить в следующую таблицу, которая облегчит до некоторой степени их *запоминание*:

Аргумент / Функция	α	$90^0 - \alpha$	$90^0 + \alpha$	$180^0 - \alpha$	$180^0 + \alpha$	$270^0 - \alpha$	$270^0 + \alpha$	$360^0 - \alpha$
	a	$\frac{\pi}{2} - a$	$\frac{\pi}{2} + a$	$\pi - a$	$\pi + a$	$\frac{3\pi}{2} - a$	$\frac{3\pi}{2} + a$	$2\pi - a$
Sinus	$\mathrm{Sin}\,\alpha$	$\mathrm{Cos}\,\alpha$	$\mathrm{Cos}\,\alpha$	$\mathrm{Sin}\,\alpha$	$-\mathrm{Sin}\,\alpha$	$-\mathrm{Cos}\,\alpha$	$-\mathrm{Cos}\,\alpha$	$-\mathrm{Sin}\,\alpha$
Cosinus	$\mathrm{Cos}\,\alpha$	$\mathrm{Sin}\,\alpha$	$-\mathrm{Sin}\,\alpha$	$-\mathrm{Cos}\,\alpha$	$-\mathrm{Cos}\,\alpha$	$-\mathrm{Sin}\,\alpha$	$\mathrm{Sin}\,\alpha$	$\mathrm{Cos}\,\alpha$
Tangens	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
Cotangens	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
Secans	$\mathrm{sc}\,\alpha$	$\mathrm{csc}\,\alpha$	$-\mathrm{csc}\,\alpha$	$-\mathrm{sc}\,\alpha$	$-\mathrm{sc}\,\alpha$	$-\mathrm{csc}\,\alpha$	$\mathrm{csc}\,\alpha$	$\mathrm{sc}\,\alpha$
Cosecans	$\mathrm{csc}\,\alpha$	$\mathrm{sc}\,\alpha$	$\mathrm{sc}\,\alpha$	$\mathrm{csc}\,\alpha$	$-\mathrm{sc}\,\alpha$	$-\mathrm{sc}\,\alpha$	$-\mathrm{sc}\,\alpha$	$-\mathrm{csc}\,\alpha$

Однако же, значительное количество и большое разнообразие формул делает довольно затруднительным их запоминание; поэтому весьма полезными для облегчения памяти являются следующие правила, которые легко устанавливаются на основании помещенной выше таблицы:

1) Называя сходными функциями функции синуса и косинуса, тангенса и котангенса, секанса и косеканса, можно заметить, что приведенная функция оказывается или одинаковой с приводимой функцией

или же изменяется на сходную. При этом, когда в приводимой функции есть число, кратное 180^0 или π, то приведенная функция не меняется; если же в приводимой функции есть число, кратное 90^0 или $\frac{\pi}{2}$, то приведенная функция меняется на сходную.

2) Знак приведенной функции при всяком значении α всегда будет таким, какой имела бы приводимая функция в случае, если бы дуга α оканчивалась в первой четверти.

Пример № 1. Привести $\operatorname{tg} 263^0$ к простейшему аргументу.

Дугу в 263^0 можно представить в двояком виде: 1) $263^0 = 180^0 + 83^0$ и 2) $263^0 = 270^0 - 7^0$. Поэтому для приведения имеем или $\operatorname{tg}(180^0 + 83^0)$ или $\operatorname{tg}(270^0 - 7^0)$. Замечая, что для данного примера α действительно есть дуга первой четверти, так как она равна 83^0 или 7^0, выбираем для окончательного преобразования выражение $\operatorname{tg}(270^0 - 7^0)$, ибо приведенная функция в этом случае будет иметь простейший аргумент. Имея же теперь в виду, что 263^0 есть дуга третьей четверти, в которой тангенс положителен, и что в составе приводимой функции число 270^0 кратно 90^0, что обращает приведенную функцию в сходную с данной, найдем

$$\operatorname{tg} 263^0 = \operatorname{tg}(270^0 - 7^0) = \operatorname{ctg} 7^0.$$

Конечно, результат получился бы одинаковый, если бы приводимой функции мы взяли в виде $180^0 + 83^0$, но решение было бы продолжительно, так как при аргументе $180^0 + 83^0$ приведенная функция имела бы аргумент 83^0 и пришлось бы от этого аргумента переходить к простейшему, что выше было выполнено непосредственно.

Пример № 2. Привести $\operatorname{Cos} 1247^0$ к простейшему аргументу.

Прежде всего исключаем из данной дуги полные периоды (360^0), в результате чего получится дуга в 167^0, так как

$$1247^0 = 3 \cdot 360^0 + 167^0$$

Дугу в 167^0 можно представить в виде $180^0 - 13^0$ или же в виде $90^0 + 77^0$, и поэтому для приведения имеем: или $\operatorname{Cos}(180^0 - 13^0)$ или $\operatorname{Cos}(90^0 + 77^0)$. По соображениям, изложенным в предыдущем примере, выбираем для окончательного преобразования $\operatorname{Cos}(180^0 - 13^0)$, и, так как дуга в 167^0 принадлежит второй четверти, где косинус отрицателен, а в составе приводимой функции число 180^0 кратно 180^0, что не меняет названия приведенной функции, будем иметь

$$\operatorname{Cos} 1247^0 = -\operatorname{Cos} 13^0.$$

Пример № 3. Привести $\operatorname{csc}(-707^0 15')$ к простейшему аргументу.

Исключая по предыдущему из данной дуги полные периоды, получим $\operatorname{csc}(-347^0 15')$, но по правилам приведения отрицательного аргумента будем иметь, что

$$\operatorname{csc}(-347^0 15') = -\operatorname{csc}(347^0 15')$$

Для дальнейшего приведения дугу $347^0\,15'$, представим в виде $-360^0 - 12^0\,45'$ и зная, что косеканс дуги в четвертой четверти отрицателен и что в этом случае приведенная функция не изменится, так как 360^0 кратно 180^0, получим

$$\csc(-707^0\,15') = +\csc 12^0\,45'.$$

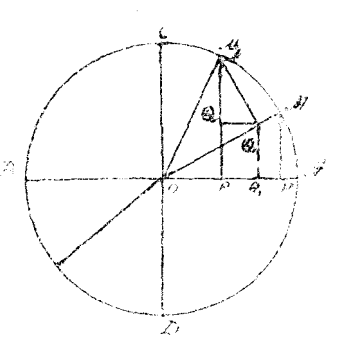
Задача. Привести к простейшему аргументу: а) $\mathrm{Sin}\,\frac{6}{7}\pi$; б) $\mathrm{ctg}\,3{,}5\pi$ и в) $\sec 17\pi$.

§ 27. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ ДУГ.

В практическом отношении весьма важен вопрос об определении тригонометрических функций суммы и разности дуг по тригонометрическим функциям этих дуг. Формулы, которые будут ниже выведены, позволяют очень просто вычислять тригонометрические функции тех дуг, которые можно представить в виде суммы или разности дуг с известными тригонометрическими функциями.

1) Синус суммы двух дуг. Возьмем (черт. 16) тригонометрический круг и от начала счета дуг отложим в положительном направлении дугу α, оканчивающуюся в первой четверти. Из конца M этой дуги отложим в том же направлении вторую дугу β, причем предположим, что $\alpha + \beta < 90^0$. Проведя через точку M диаметр и приняв его за начальный для дуги β, построим линии синуса как для дуг α и β, так и для дуги AM_1, которая будет, очевидно, равна $\alpha + \beta$. Эти линии будут: MP для дуги α, M_1Q для дуги β и M_1P_1 для дуги $\alpha + \beta$. Соответственно этому линии косинуса для этих дуг будут: OP для дуги α, OQ для дуги β и OP_1 для дуги $\alpha + \beta$. Соединив теперь точку M_1 с центром и опустив из точки Q перпендикуляры QQ_1 на линию M_1P_1 и QQ_2 — на начальный диаметр, можно написать, что

черт. 16



$$M_1P_1 = M_1Q_1 + Q_1P_1$$

или так как

$$Q_1P_1 = QQ_2$$

то

$$M_1P_1 = M_1Q_1 + QQ_2$$

Выражая входящие в это равенство линии в частях радиуса и вспоминая, что M_1P_1 есть линии синуса дуги $\alpha + \beta$, получим

$$\frac{M_1P_1}{R} = \frac{M_1Q_1}{R} + \frac{QQ_2}{R}$$

$$\mathrm{Sin}(\alpha + \beta) = \frac{M_1Q_1}{R} + \frac{QQ_2}{R} \qquad 1)$$

Рассмотрим затем треугольники OMP и OQQ_2. Треугольники подобны, а потому

$$\frac{MP}{QQ_2} = \frac{OM}{OQ}$$

откуда

$$QQ_2 = \frac{MP \cdot OQ}{OM}$$

Равным образом подобны будут треугольники OMP и QM_1Q_1, ибо имеют по равному прямому углу и, кроме того, $\angle MOP = \angle QM_1Q_1$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому можно написать, что

$$\frac{MO}{M_1Q} = \frac{OP}{M_1Q_1}$$

откуда

$$M_1Q_1 = \frac{M_1Q \cdot OP}{MO}$$

Подставляя теперь в равенство (1) найденные величины для QQ_2 и M_1Q_1 и заменяя MO через R, получим, что

$$\mathrm{Sin}(\alpha + \beta) = \frac{M_1Q \cdot OP}{R \cdot R} + \frac{MP \cdot OQ}{R \cdot R}$$

Но на основании вышеизложенного

$$\frac{M_1Q}{R} = \mathrm{Sin}\,\beta;\ \frac{OP}{R} = \mathrm{Cos}\,\alpha;\ \frac{MP}{R} = \mathrm{Sin}\,\alpha \text{ и } \frac{OQ}{R} = \mathrm{Cos}\,\beta,$$

а потому, переставляя слагаемые, найдем следующую формул синуса суммы двух дуг

$$\mathrm{Sin}(\alpha + \beta) = \mathrm{Sin}\,\alpha \cdot \mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Cos}\,\alpha \cdot \mathrm{Sin}\,\beta$$

2) К о с и н у с с у м м ы д в у х д у г. Возвращаясь к чертежу 16, можно написать, что

$$OP_1 = OQ_2 - P_1Q_2$$

или так как

$$P_1Q_2 = QQ_1$$

то

$$OP_1 = OQ_2 - QQ_1$$

Но OP_1 есть линия косинуса для дуги $\alpha + \beta$, а потому по разделении обеих частей предыдущего равенства на R найдем, что

$$\mathrm{Cos}(\alpha + \beta) = \frac{OQ_2}{R} - \frac{QQ_1}{R}$$

рассмотренных уже треугольников OMP и OQQ_2, а также QM_1Q_1 получим, что

$$\frac{OP}{OQ_2} = \frac{OM}{OQ} \text{ и } \frac{MP}{QQ_1} = \frac{MO}{M_1Q}$$

$$OQ_2 = \frac{OP \cdot OQ}{OM} \text{ и } QQ_1 = \frac{MP \cdot M_1Q}{MO}$$

По подстановке же найденных величин в равенство (2) и по замене через R найдем, что

$$\operatorname{Cos}(\alpha + \beta) = \frac{OP \cdot OQ}{R \cdot R} - \frac{MP \cdot M_1Q}{R \cdot R}$$

так как OP и OQ есть линии косинусов дуг α и β, а MP и M_1Q синусов этих дуг, то окончательно получится следующая формула косинуса суммы двух дуг:

$$\operatorname{Cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta$$

3) Тангенс и котангенс суммы двух дуг. Для вычисления тангенса и котангенса суммы двух дуг воспользуемся основными соотношениями между тангенсом, котангенсом, синусом и косинусом, а именно:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{Sin}(\alpha + \beta)}{\operatorname{Cos}(\alpha + \beta)} \text{ и } \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{Cos}(\alpha + \beta)}{\operatorname{Sin}(\alpha + \beta)}$$

Подставляя в правые части этих равенств найденные уже выражения для синуса и косинуса суммы двух дуг, будем иметь:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta} \tag{1}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta} \tag{2}$$

теперь числителя и знаменателя правой части первого равенства на $\operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta$, а второго равенства — на $\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta$, получим, что

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta} + \dfrac{\operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta}}{\dfrac{\operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta} - \dfrac{\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\dfrac{\operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta} - \dfrac{\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta}}{\dfrac{\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta} + \dfrac{\operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta}}$$

После простейших преобразований окончательно получим формулы для тангенса и котангенса суммы двух дуг

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

4) Тригонометрические функции разности двух дуг. Выведенные в предыдущем формулы для тригонометрических функций суммы двух дуг α и β оказываются справедливыми и для произвольных по величине положительных и отрицательных дуг. Иными словами, формулы эти обладают общностью, для доказательства чего возможно было бы в каждом данном случае применить те рассуждения, которые применялись выше.

Допустив теперь общность формул для тригонометрических функций суммы двух дуг α и β, подставим в эти формулы $-\beta$ вместо β. Будем последовательно иметь

$$\operatorname{Sin}(\alpha-\beta)=\operatorname{Sin}\alpha\,.\,\operatorname{Cos}(-\beta)+\operatorname{Cos}\alpha\,.\,\operatorname{Sin}(-\beta)$$
$$\operatorname{Cos}(\alpha-\beta)=\operatorname{Cos}\alpha\,.\,\operatorname{Cos}(-\beta)-\operatorname{Sin}(\alpha)\operatorname{Sin}(-\beta)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1+\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}(-\beta)}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}(-\beta)-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}(-\beta)}$$

По приведении отрицательного аргумента (§ 20) получим, что

$$\operatorname{Sin}(\alpha-\beta)=\operatorname{Sin}\alpha\,.\,\operatorname{Cos}\beta+\operatorname{Cos}\alpha\,.\,(-\operatorname{Sin}\beta)$$
$$\operatorname{Cos}(\alpha-\beta)=\operatorname{Cos}\alpha\,.\,\operatorname{Cos}\beta-\operatorname{Sin}\alpha\,.\,(-\operatorname{Sin}\beta)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+(-\operatorname{tg}\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,(-\operatorname{tg}\beta)}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,(-\operatorname{ctg}\beta)-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}(-\beta)}$$

Окончательно же раскрыв скобки и умножив числителя и знаменателя правой части последнего равенства на -1, найдем следующие формулы для разности двух дуг:

$$\operatorname{Sin}(\alpha-\beta)=\operatorname{Sin}\alpha\,.\,\operatorname{Cos}\beta-\operatorname{Cos}\alpha\,.\,\operatorname{Sin}\beta$$
$$\operatorname{Cos}(\alpha-\beta)=\operatorname{Cos}\alpha\,.\,\operatorname{Cos}\beta+\operatorname{Sin}\alpha\,.\,\operatorname{Sin}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$$

Формулы эти также справедливы для произвольных значений дуг.

Задача. Найти $\operatorname{Sin}(\alpha+\beta+\gamma)$ и $\operatorname{Cos}(\alpha-\beta+\gamma-\delta)$.

§ 28. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДВОЙНЫХ И ПОЛОВИННЫХ ДУГ.

Если дана дуга α, то 2α называется **двойной** дугой, а $\frac{\alpha}{2}$ **половинной** дугой.

1) Тригонометрические функции двойных дуг.

Выше (§ 27) были выведены следующие формулы для тригонометрических функций суммы двух дуг:

$$\operatorname{Sin}(\alpha+\beta) = \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta$$
$$\operatorname{Cos}(\alpha+\beta) = \operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

Заменив в этих формулах β через α, найдем, что

$$\operatorname{Sin} 2\alpha = \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\alpha$$
$$\operatorname{Cos} 2\alpha = \operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\alpha - \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$$

Отсюда же, после простейших преобразований, получаются следующие формулы для тригонометрических функций двойных дуг:

$$\operatorname{Sin} 2\alpha = 2 \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\alpha$$
$$\operatorname{Cos} 2\alpha = \operatorname{Cos}^2\alpha - \operatorname{Sin}^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

Формулы эти, согласно предыдущему, справедливы для всевозможных значений дуги.

2) Тригонометрические функции половинных дуг.

Рассматривая дугу α, как двойную, а следовательно, $\frac{\alpha}{2}$, как половинную, воспользуемся выведенной выше формулой для косинуса двойной дуги. Будем иметь

$$\operatorname{Cos}\alpha = \operatorname{Cos}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1)$$

Но для всякой дуги справедливо тождество

$$\mathrm{Sin}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{Cos}^2\frac{\alpha}{2}=1$$

отсюда

$$\mathrm{Cos}^2\frac{\alpha}{2}=1-\mathrm{Sin}^2\frac{\alpha}{2}$$

Подставляя же эту величину в равенство (1), получим, что

$$\mathrm{Cos}\,\alpha=1-2\,\mathrm{Sin}^2\frac{\alpha}{2}$$

откуда окончательно по извлечении корня квадратного получится формула для синуса половинной дуги

$$\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\mathrm{Cos}\,\alpha}{2}} \qquad (2)$$

Точно также из написанного выше тождества найдем, что

$$\mathrm{Sin}^2\frac{\alpha}{2}=1-\mathrm{Cos}^2\frac{\alpha}{2}$$

а по подстановке в равенство (1) получим, что

$$\mathrm{Cos}\,\alpha=2\,\mathrm{Cos}^2\frac{\alpha}{2}-1$$

откуда

$$2\,\mathrm{Cos}^2\frac{\alpha}{2}=1+\mathrm{Cos}\,\alpha$$

Разделяя же обе части этого равенства на 2 и извлекая корень квадратный, найдем формулу для косинуса половинной дуги

$$\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}\,\alpha}{2}} \qquad (3)$$

Разделив теперь почленно равенство (2) на равенство (3), получим формулу для тангенса половинной дуги

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\mathrm{Cos}\,\alpha}{1+\mathrm{Cos}\,\alpha}} \qquad (4)$$

Наконец, по разделении равенства (3) на равенство (2) найдем формулу для котангенса половинной дуги

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}\,\alpha}{1-\mathrm{Cos}\,\alpha}} \qquad (5)$$

Формулы (2)—(5) выражаются через квадратный корень и поэтому им приписаны знаки $\pm$. Из этих знаков необходимо выбрать знак соответствующей четверти, в которой оканчивается дуга.

Задача. Найти $\operatorname{Sin} 3\alpha$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$.

Задача. Доказать, что $\operatorname{tg} \alpha \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{1 + \operatorname{Cos} \alpha}$.

Задача. Доказать, что разность между гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника равняется двойному произведению гипотенузы на квадрат синуса половинного угла между ними.

§ 29. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ И РАЗНОСТИ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ ДВУХ ДУГ В ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

Выражения вида $\operatorname{Sin} m \pm \operatorname{Sin} n$ и $\operatorname{Cos} m \pm \operatorname{Cos} n$ легко преобразуются в произведения на основании формул для тригонометрических функций суммы и разности двух дуг.

1) Сумма и разность синусов двух дуг. Выше (§ 27) выведены формулы

$$\operatorname{Sin}(\alpha + \beta) = \operatorname{Sin} \alpha \cdot \operatorname{Cos} \beta + \operatorname{Cos} \alpha \cdot \operatorname{Sin} \beta$$
$$\operatorname{Sin}(\alpha - \beta) = \operatorname{Sin} \alpha \cdot \operatorname{Cos} \beta - \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} \beta$$

Складывая и вычитая почленно эти равенства, получим

$$\operatorname{Sin}(\alpha + \beta) + \operatorname{Sin}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{Sin} \alpha \cdot \operatorname{Cos} \beta$$
$$\operatorname{Sin}(\alpha + \beta) - \operatorname{Sin}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{Cos} \alpha \cdot \operatorname{Sin} \beta$$

приняв

$$\alpha + \beta = m$$
$$\alpha - \beta = n$$

По сложении и вычитании этих равенств получим

$$\alpha = \frac{m + n}{2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{m - n}{2}$$

Заменяя же в вышенаписанных равенствах $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, α и β найденными для них величинами, получим формулы для суммы и разности синусов двух дуг в виде произведения

$$\operatorname{Sin} m + \operatorname{Sin} n = 2 \operatorname{Sin} \frac{m + n}{2} \cdot \operatorname{Cos} \frac{m - n}{2}$$

$$\operatorname{Sin} m - \operatorname{Sin} n = 2 \operatorname{Cos} \frac{m + n}{2} \cdot \operatorname{Sin} \frac{m - n}{2}$$

2) Сумма и разность косинусов двух дуг. Для косинуса суммы и разности двух дуг были выведены (§ 27) следующие формулы:

$$\operatorname{Cos}(\alpha+\beta) = \operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta$$
$$\operatorname{Cos}(\alpha-\beta) = \operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta$$

По сложении и вычитании этих равенств получим

$$\operatorname{Cos}(\alpha+\beta) + \operatorname{Cos}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta$$
$$\operatorname{Cos}(\alpha+\beta) - \operatorname{Cos}(\alpha-\beta) = -2\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\beta$$

Заменяя же, как и выше, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, α и β через m, n, $\frac{m+n}{2}$ и $\frac{m-n}{2}$ найдем формулы для суммы и разности косинусов двух дуг в произведения

$$\operatorname{Cos} m + \operatorname{Cos} n = 2\operatorname{Cos}\frac{m+n}{2} \cdot \operatorname{Cos}\frac{m-n}{2}$$

$$\operatorname{Cos} m - \operatorname{Cos} n = -2\operatorname{Sin}\frac{m+n}{2} \cdot \operatorname{Sin}\frac{m-n}{2}$$

ОТДЕЛ V. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

§ 30. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О ВЫЧИСЛЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

Для возможности решения аналитическим способом основных задач гониометрии (§ 13) необходимо уметь вычислять: 1) значение тригонометрической функции, соответствующее данному аргументу или 2) значение аргумента, соответствующее данной тригонометрической функции.

Для того, чтобы в каждом отдельном случае не приходилось производить указанных вычислений, пользуются составленными по правилам высшей математики таблицами тригонометрических функций, причем в этих таблицах для каждого значения аргумента имеется соответствующее значение тригонометрических функций. Однако же, возможно дать способ вычисления тригонометрических функций, основанный на допущении равенства между синусом или тангенсом малой дуги и самой дугой, выраженной, конечно, в отвлеченной мере. Допущение это, вообще говоря, неправильно, и, следовательно, вычисление по этому способу тригонометрических функций будет ошибочно и необходимым представится также каждый раз вычислять и величины допущенных ошибок.

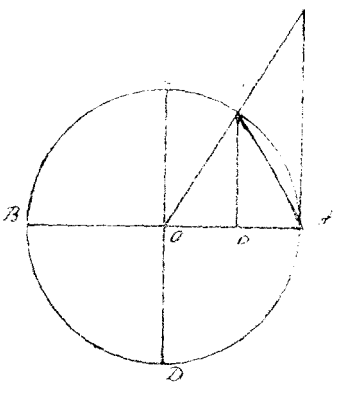
В дальнейшем будут доказаны те теоремы, которые раз'яснят указанный способ вычисления тригонометрических функций.

§ 31. *Теорема.* Если дуга меньше 90^0, то синус этой дуги меньше самой дуги, выраженной в отвлеченной мере, а эта дуга меньше ее тангенса.

Обозначим отвлеченное выражение дуги, меньшей 90°, через a, тогда требуется доказать справедливость неравенства

$$\mathrm{Sin}\, a < a < \mathrm{tg}\, a$$

Возьмем (черт. 17) тригонометрический круг и от начала счета дуг отложим дугу AM, меньшую 90° и в отвлеченной мере равную a. Построив линии синуса и тангенса этой дуги и проведя хорду MA из чертежа, увидим, что



$$\text{площ. } \triangle OMA < \text{площ. сектора } OMA < \text{площ. } \triangle OTA$$

Но так как площадь треугольника равняется половине произведения основания на высоту, а площадь сектора равняется выпрямленной дуге, умноженной на половину радиуса, то

$$\frac{1}{2} OA \cdot MP < \frac{1}{2} OA \cdot \quad AM < \frac{1}{2} OA \cdot OT$$

а по сокращении всех членов неравенства на $\frac{1}{2} OA$, выйдет, что

$$MP < \text{дуга } AM < AT$$

Разделив теперь все части полученных неравенств на радиус R, найдем

$$\frac{MP}{R} < \text{дуга } \frac{AM}{R} < \frac{AT}{R}$$

но $\frac{MP}{R} = \mathrm{Sin}\, a$; $\frac{AT}{R} = \mathrm{tg}\, a$, а $\frac{AM}{R}$ есть a,

так как представляет длину дуги, выраженную в частях радиуса, поэтому

$$\mathrm{Sin}\, a < a < \mathrm{tg}\, a$$

что и требовалось доказать.

§ 32. *Теорема.* Предел отношения синуса дуги к самой дуге, выраженной в отвлеченной мере при стремлении дуги к 0, равняется единице.

Требуется доказать, что:

$$\lim \frac{\mathrm{Sin}\, a}{a} = 1$$

при $a = 0$

Выше (§ 31) были доказаны неравенства

$$\mathrm{Sin}\, a < a < \mathrm{tg}\, a$$

Разделив 1 на каждый из членов этих неравенств, получим неравенство обратного смысла:

$$\frac{1}{\operatorname{Sin} a} > \frac{1}{a} > \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

При умножении всех членов этих неравенств на положительное число Sin a найдем, что

$$\frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin} a} > \frac{\operatorname{Sin} a}{a} > \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{tg} a}$$

и отсюда после простейших преобразований

$$1 > \frac{\operatorname{Sin} a}{a} > \operatorname{Cos} a$$

Из полученных неравенств видно, что $\frac{\operatorname{Sin} a}{a}$ заключается между двумя пределами, из которых больший есть 1, а меньший Cos a. Однако, переходя к пределу при $a = 0$, получим, что $\operatorname{Cos} a = 1$, и, таким образом, окажется:

$$1 > \lim \frac{\operatorname{Sin} a}{a} > 1$$

при $a = 0$

Отсюда же ясно, что

$$\lim \frac{\operatorname{Sin} a}{a} = 1$$

при $a = 0$

Задача. Доказать, что

$$\lim \frac{\operatorname{tg} a}{a} = 1$$

при $a = 0$

§ 33. ЗАМЕНА СИНУСА МАЛОЙ ДУГИ САМОЙ ДУГОЙ, ВЫРАЖЕННОЙ В ОТВЛЕЧЕННОЙ МЕРЕ.

Доказанную в предыдущем параграфе теорему о пределе стремления синуса дуги к самой дуге, неограниченно приближающейся к 0, распространим теперь на малые дуги. Иными словами, будем считать справедливым равенство следующего вида:

$$\frac{\operatorname{Sin} a}{a} \quad 1$$

или

$$\operatorname{Sin} a \quad a$$

Равенство это, справедливое только в пределе при $a = 0$, для всяк другого значения a обращается, конечно, в неравенство, и поэтому

допущение ошибочно, а следовательно и Sin a будет вычислен по равенству (1) с некоторой ошибкой, тем меньшей, чем меньше a.

Пусть имеем дугу в 1″. Отвлеченное ее выражение будет (§ 3)

$$\frac{\pi . 1''}{180 . 60 . 60''}$$

или просто

$$\frac{\pi}{180 . 60 . 60}$$

Поэтому, на основании равенства (1), получим, что

$$\mathrm{Sin}\, 1'' = \frac{\pi}{180 . 60 . 60} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Точно также отвлеченное выражение дуг в 1′ и 1° соответственно будет равно

$$\frac{\pi}{180 . 60} \text{ и } \frac{\pi}{180}$$

а, следовательно

$$\mathrm{Sin}\, 1' = \frac{\pi}{180 . 60} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

и

$$\mathrm{Sin}\, 1^\circ = \frac{\pi}{180} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Если теперь будем рассматривать дугу, содержащую α секунд, или минут или градусов, то для отвлеченного ее выражения a последовательно получим:

$$a = \frac{\pi \alpha''}{180 . 60 . 60''}$$

$$a = \frac{\pi \alpha'}{180 . 60'}$$

$$a = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ}$$

Отсюда на основании равенства (2) — (4) будем иметь, что

$$a = \alpha'' \mathrm{Sin}\, 1''$$
$$a = \alpha' \mathrm{Sin}\, 1'$$
$$a = \alpha^\circ \mathrm{Sin}\, 1^\circ$$

Применяя же равенство (1), окончательно получим, что

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Sin}\, \alpha'' &= \alpha'' \mathrm{Sin}\, 1'' \\ \mathrm{Sin}\, \alpha' &= \alpha' \mathrm{Sin}\, 1' \\ \mathrm{Sin}\, \alpha^\circ &= \alpha^\circ \mathrm{Sin}\, 1^\circ \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Найденные соотношения вполне разрешают вопрос о вычислении тригонометрической функции по ее аргументу.

Из этих соотношений легко получим, что

$$\left.\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{\operatorname{Sin}\alpha''}{\operatorname{Sin}1''} \\ \alpha' &= \frac{\operatorname{Sin}\alpha'}{\operatorname{Sin}1'} \\ \alpha^0 &= \frac{\operatorname{Sin}\alpha^0}{\operatorname{Sin}1^0} \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Равенства эти позволяют определить значение аргумента, соответствующее данному значению тригонометрической функции.

Равенства, одинакового вида с выведеными равенствами 5) — 6) могут быть написаны и для тригонометрической функции тангенса, причем для малой дуги a всегда возможна замена тангенса малой дуги ее синусом, т.-е.

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{Sin} a$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 1'' &= \operatorname{Sin} 1'' \\ \operatorname{tg} 1' &= \operatorname{Sin} 1' \\ \operatorname{tg} 1^0 &= \operatorname{Sin} 1^0 \end{aligned}$$

Поэтому, при необходимости вычислять тангенс малой дуги или эту дугу по ее тангенсу, переходят к функции синуса и соответственно применяют формулы (5) — (6).

Что касается практического применения равенств (5) — (6), то целесообразнее всего величины $\operatorname{Sin} 1^0$, $\operatorname{Sin} 1'$ и $\operatorname{Sin} 1''$ представить в виде простых дробей с числителями, равными 1.

Задача. Представить $\frac{1}{\operatorname{Sin} 1^0}$ $\frac{1}{\operatorname{Sin} 1'}$ и $\frac{1}{\operatorname{Sin} 1''}$ в виде целых чисел.

§ 34. ПРЕДЕЛ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ЗАМЕНЕ СИНУСА МАЛОЙ ДУГИ ОТВЛЕЧЕННЫМ ЕЕ ВЫРАЖЕНИЕМ.

Выше указывалось, что при замене синуса малой дуги отвлеченным выражением самой дуги происходит ошибка, значение которой и нужно определить. Для этого необходимо найти по возможности близкие пределы, между которыми заключается синус малой дуги, и тогда за ошибку можно будет принять разность этих пределов.

Мы уже имели (§ 31), что

$$\operatorname{Sin} a < a \qquad 1$$

Приняв теперь a за двойной аргумент, можно написать (§ 23), что

$$\operatorname{Sin} a = 2 \operatorname{Sin} \frac{a}{2} \cdot \operatorname{Cos} \frac{a}{2}$$

По умножении и делении правой части этого равенства на $\operatorname{Cos}\frac{a}{2}$ найдем, что

$$\operatorname{Sin} a = \frac{2\operatorname{Sin}\frac{a}{2} \cdot \operatorname{Cos}\frac{a}{2} \cdot \operatorname{Cos}\frac{a}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{a}{2}}$$

откуда

$$\operatorname{Sin} a = 2\operatorname{tg}\frac{a}{2} \cdot \operatorname{Cos}^2\frac{a}{2}$$

Но так как (§ 14) $\operatorname{Cos}^2\frac{a}{2} = 1 - \operatorname{Sin}^2\frac{a}{2}$, то

$$\operatorname{Sin} a = 2\operatorname{tg}\frac{a}{2}\left(1 - \operatorname{Sin}^2\frac{a}{2}\right) \qquad 2)$$

На основании § 31

$$\operatorname{Sin}\frac{a}{2} < \frac{a}{2} < \operatorname{tg}\frac{a}{2}$$

и следовательно, по замене в равенстве (2) $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ меньшим числом $\frac{a}{2}$ а $\operatorname{Sin}\frac{a}{2}$ большим числом $\frac{a}{2}$ равенство это обратится в неравенство, причем правая его часть, несомненно, уменьшится. Поэтому

$$\operatorname{Sin} a > 2 \cdot \frac{a}{2}\left[1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

откуда

$$\operatorname{Sin} a > a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)$$

или окончательно

$$\operatorname{Sin} a > a - \frac{a^3}{4}$$

Итак, принимая во внимание неравенство (1), мы приходим к заключению, что $\operatorname{Sin} a$ заключается между двумя пределами, из которых a будет высшим пределом и $a - \frac{a^3}{4}$ низшим пределом. Посему, обозначая погрешность, происходящую при замене синуса дуги самой дугой, выраженной в отвлеченной мере, через ε_1, найдем, что

$$\varepsilon_1 = a - \left(a - \frac{a^3}{4}\right) < \frac{a^3}{4}$$

Таким образом, погрешность, происходящая при замене синуса дуги отвлеченным выражением дуги, не превышает одной четверти куба дуги.

Задача. Вычислить $\mathrm{Sin}\,10''$ и определить предел погрешности ($\pi = 3{,}14159$).

§ 35. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОСИНУСА МАЛОЙ ДУГИ И ПРЕДЕЛ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ЭТОМ ВЫЧИСЛЕНИИ.

Как известно, $\mathrm{Cos}\,0^0 = 1$ и поэтому при малой дуге возможно с некоторой ошибкой принять косинус такой дуги равным 1. Для определения погрешности найдем, по предыдущему, два предела, между которыми заключается косинус малой дуги. Один из этих пределов очевиден и именно:

$$\mathrm{Cos}\,a < 1$$

или

$$1 > \mathrm{Cos}\,a$$

Таким образом, высший предел косинуса малой дуги есть 1. Для нахождения низшего предела будем рассматривать a, как двойной аргумент и напишем формулу для косинуса двойного аргумента. Будем иметь (§28).

$$\mathrm{Cos}\,a = \mathrm{Cos}^2\frac{a}{2} - \mathrm{Sin}^2\frac{a}{2}$$

Заменяя же $\mathrm{Cos}^2\frac{a}{2}$ через $1 - \mathrm{Sin}^2\frac{a}{2}$, получим, что

$$\mathrm{Cos}\,a = 1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\frac{a}{2}$$

Но так как для аргумента, меньшего 90^0,

$$\mathrm{Sin}\,a < a$$

то и

$$\mathrm{Sin}\frac{a}{2} < \frac{a}{2}$$

а потому, заменяя $\mathrm{Sin}\frac{a}{2}$ большим числом $\frac{a}{2}$, мы уменьшаем разность $1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\frac{a}{2}$, ибо увеличим вычитаемое. На этом основании

$$\mathrm{Cos}\,a > 1 - \frac{a^2}{2}$$

Это выражение и представляет низший предел косинуса малой дуги.

Обозначая теперь через ε_2 погрешность, происходящую при замене косинуса малой дуги 1, найдем, что

$$\varepsilon_2 = 1 - \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

Следовательно, погрешность, происходящая от замены косинуса малой дуги единицей не превышает половины квадрата дуги, выраженной в отвлеченной мере.

Возможным оказывается найти и более точные пределы для косинуса малой дуги, именно при этом получится, что

$$\mathrm{Cos}\, a = 1 - \frac{a^2}{2}$$

Из этого равенства найдем, что

$$\frac{a^2}{2} = 1 - \mathrm{Cos}\, a$$

$$a^2 = 2(1 - \mathrm{Cos}\, a)$$

откуда по извлечении корня квадратного

$$a = \sqrt{2(1 - \mathrm{Cos}\, a)}$$

Полученное соотношение позволяет определить значение аргумента по данному значению косинуса его.

Задача. Доказать, что при замене косинуса малой дуги a через $1 - \frac{a^2}{2}$ погрешность не превосходит $\frac{a^4}{16}$

Задача. Вычислить $\mathrm{Cos}\, 10''$ и определить предел погрешности ($\pi = 3,14159$).

§ 36. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УСТРОЙСТВЕ ТАБЛИЦ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

Таблицы тригонометрических функций или непосредственно содержат тригонометрические функции (натуральные величины тригонометрических функций) или их логарифмы. Логарифмические таблицы тригонометрических функций в практическом отношении являются гораздо более удобными, так как почти все тригонометрические функции, являясь иррациональными числами, выражаются в таблицах десятичными дробями, с более или менее значительным количеством десятичных знаков, что и представляет существенные затруднения при производстве различных арифметических действий и в особенности умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. При пользовании логарифмами затруднения эти значительно уменьшаются.

Во всяких таблицах помещаются через определенные промежутки, например, через $1'$, $10''$ и т. п., значения аргумента, и против этих значений — соответствующие им величины всех или некоторых тригонометрических функций или их логарифмов. Так как всякий аргумент может быть приведен к простейшему аргументу (§§ 19—26), то в таблицы необходимо поместить тригонометрические функции или их логарифмы для значений аргумента от 0^0 до 45^0, причем эти же значения функций

или логарифмы будут сходными тригонометрическими функциями или их логарифмами для значений дополнительного аргумента (§ 21).

В таблицы достаточно поместить значение только одной какой-либо тригонометрической функции, так как все остальные функции могут быть вычислены по основным и вспомогательным формулам гониометрии (§§ 14 и 15). Однако, во избежание этих вычислений в таблицы помещаются обычно значения тригонометрических функций синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Что же касается функций секанса и косеканса, то в виду весьма редкого применения этих функций в практических вычислениях функции секанса и косеканса в таблицы не помещаются, а в тех случаях, когда эти функции входят в подлежащие вычислению формулы,—их заменяют функциями синуса и косинуса, так как (§ 14)

$$\sec\alpha = \frac{1}{\operatorname{Cos}\alpha} \quad \text{и} \quad \operatorname{csc}\alpha = \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha}$$

а для логарифмического вычисления, имея в виду, что $\lg 1 = 0$ будет

$$\lg\sec\alpha = -\lg\operatorname{Cos}\alpha \quad \text{и} \quad \lg\operatorname{csc}\alpha = -\lg\operatorname{Sin}\alpha.$$

§ 37. УСТРОЙСТВО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ Е. М. ПРЖЕВАЛЬСКОГО.

При практических вычислениях значительное распространение получили таблицы логарифмов тригонометрических функций Е. М. Пржевальского, в которых даны с пятью десятичными знаками логарифмы синуса и косинуса, тангенса и котангенса для углов от 0° до 45° через $1'$.

Устроены эти таблицы следующим образом. Вверху каждой страницы напечатаны градусы от 0° до 44°, а слева и сверху каждой страницы—минуты, причем на левой странице таблиц минуты идут от $0'$ до $30'$, а на правой—от $30'$ до $60'$, и, таким образом, каждому градусу в таблицах отведено две страницы. Логарифмы синуса и косинуса, тангенса и котангенса помещены на каждой странице в четырех столбцах в одной горизонтальной строке с соответствующим числом минут.

Как уже указывалось выше, тригонометрические функции углов от 0° до 45°, а следовательно, и логарифмы этих функций будут логарифмами сходных функций дополнительных аргументов от 45° до 90°. Поэтому внизу каждой страницы также напечатаны градусы от 45° до 90°, начиная с последней страницы таблиц. Относящиеся же до этих углов минуты напечатаны справа и снизу каждой страницы таблиц, причем на правой странице минуты идут от $0'$ до $30'$, а на левой—от $30'$ до $60'$. Конечно, лишь при таком распределении градусов и минут каждый напечатанный в таблицах логарифм будет одновременно логарифмом той или иной тригонометрической функции для аргумента, меньшего 45°, и логарифмом сходной функции для аргумента дополнительного, и посему этот логарифм не приходится помещать в таблице дважды. Иными словами, на каждой странице таблиц сумма, напечатанных сверху и снизу

градусов и минут, расположенных с левой и с правой стороны в одной горизонтальной строке, всегда равняется 90^0. Столбцы логарифмов тригонометрических функций также озаглавлены снизу, но уже названиями сходных функций по отношению к заглавию столбцов сверху страниц. Конечно, можно было бы в таблицах ограничиться только аргументами от 0^0 до 45^0, но в этом случае всякий угол, меньший 90^0, но больший 45^0 пришлось бы приводить к простейшему аргументу, что иногда значительно замедляло бы вычисление.

Не останавливаясь пока на дальнейших подробностях устройства таблиц Е. М. Пржевальского, отметим лишь следующую их особенность. Синус и косинус любого аргумента не могут быть, как известно (§ 11), больше единицы, и потому для всех углов, помещенных в таблицах, их синусы и косинусы будут правильными дробями. Равным образом, меньше единицы тангенсы углов от 0^0 до 45^0 и котангенсы углов от 45^0 до 90^0, и лишь тангенсы углов от 45^0 до 90^0 и котангенсы углов от 0^0 до 45^0 будут больше единицы. Логарифмы правильных дробей, как известно, отрицательны, причем отрицательный логарифм может быть по известным правилам заменен логарифмом с отрицательной характеристикой и положительной мантиссой. Но в таблицах Е. М. Пржевальского, во избежание неудобств при печатании и главным образом в виду чрезвычайных практических выгод, отрицательные характеристики логарифмов увеличены на 10, а положительные мантиссы оставлены без изменений.

Таким образом, если логарифм некоторой тригонометрической функции равен $-0{,}42331$, то, обратив его в логарифм с отрицательной характеристикой и положительной мантиссой, найдем $\bar{1}{,}57669$, а в таблицах помещено не это число, а $\bar{1}{,}57669+10$, что даст $9{,}57669$. Полученное таким образом число принято называть дополнением до 10 и, во избежание недоразумений, полезно такое дополнение изображать так: $9{,}57669-10$. Для тригонометрических функций, больших 1, в таблицах даны прямо их логарифмы.

§ 38. ПРАВИЛА ПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦАМИ Е. М. ПРЖЕВАЛЬСКОГО.

По таблицам логарифмов тригонометрических функций возможно решить два следующих вопроса, соответственно двум основным задачам гониометрии:

1) по данному аргументу найти логарифм какой-либо из тригонометрических функций, 2) по данному логарифму какой-либо тригонометрической функции найти ее аргумент.

Оба этих вопроса решаются по существу почти одинаково, как в том случае, когда данный или искомый аргумент или логарифм имеется в таблицах, так и тогда, когда данный или искомый логарифм

или аргумент непосредственно в таблицах не помещен. Во всех случаях решение начинается с отыскания в таблицах или прямо данного аргумента или логарифма, или же ближайших меньших величин аргумента или логарифма.

Если данная или искомая величина аргумента или логарифма в таблицах находится непосредственно, то, найдя ее, необходимо выписать из таблиц: 1) при данном аргументе—логарифм искомой тригонометрической функции, расположенный, как это указывалось выше, в одной горизонтальной строке с числом минут данного аргумента, и 2) при данном логарифме—градусы сверху или снизу, а минуты соответственно слева или справа в зависимости от того, найден ли данный логарифм, в каком-либо столбце по названию функций, напечатанному сверху или снизу.

При этом для того, чтобы бесполезно не перелистывать таблицы, разыскивая данный логарифм, полезно запомнить, что

$$\lg \operatorname{Sin} 45^0 = \lg \operatorname{Cos} 45^0 = 9{,}84949$$

или круглым числом 9,85, и, следовательно, согласно характеру изменений синуса и косинуса логарифмы синуса от 0^0 до 45^0 меньше 9,85 и их нужно искать в левом столбце каждой страницы, озаглавленном сверху Sin, в каком столбце, озаглавленном снизу Cos, нужно искать логарифмы косинуса от 45^0 до 90^0. Точно также логарифмы косинуса от 0^0 до 45^0 и синуса от 45^0 до 90^0 больше 9,85, и эти логарифмы помещены в правом столбце каждой страницы, озаглавленном сверху Cos (для логарифмов косинуса от 0^0 до 45^0) и снизу Sin (для логарифмов синуса от 45^0 до 90^0). Аналогичные правила легко установить и для логарифмов тригонометрических функций тангенса и котангенса, имея в виду, что

$$\lg \operatorname{tg} 45^0 = \lg \operatorname{ctg} 45^0 = 0{,}00000$$

Нижеследующие примеры раз'яснят пользование таблицами в случае, когда данный или искомый аргумент или логарифм помещены в таблицах.

Пример № 1. Найти $\lg \operatorname{Sin} 30^0\,42'$.

Открываем таблицы на страницах, где сверху напечатано 30^0, и так как число минут данного аргумента больше 30, то обращаемся к правой странице, где в одной горизонтальной строке с $42'$ в левом столбце, озаглавленном сверху Sin (так как дана такая именно функция и аргумент меньше 45^0), находим искомый логарифм 9,70803, т.-е.

$$\lg \operatorname{Sin} 30^0\,42' = 9{,}70803 - 10$$

Пример № 2. Найти $\lg \operatorname{tg} 71^0\,19'$.

Так как данный аргумент больше 45^0, то открываем таблицу на страницах, где снизу напечатано 71^0, а $19'$ ищем, следовательно, справа, и в одной горизонтальной строке с этим числом минут в столбце,

озаглавленном снизу tg (так как дана именно эта функция и аргумент больше 45^0), находим искомый логарифм 0,47088. Итак

$$\lg \operatorname{tg} 71^0 19' = 0{,}47088.$$

Пример № 3. Найти угол α, если $\lg \cos \alpha = 9{,}86844 - 10$.

Так как данный логарифм косинуса больше 9,85, то его следует искать в правом столбце какой-либо страницы, озаглавленном сверху Cos (ибо если $\cos \alpha > 9{,}85$, то $\alpha < 45^0$). Найдя страницу таблиц, на которой логарифмы, напечатанные в правом столбце, близко подходят к данному, разыскиваем этот логарифм и находим его в одной горизонтальной строке с числом минут 23 слева (так как $\alpha < 45^0$). Наверху этой страницы напечатано 42^0, и поэтому

$$\alpha = 42^0 23'.$$

Пример № 4. Найти угол α, если $\lg \operatorname{ctg} \alpha = 9{,}61148 - 10$.

Так как котангенсы углов, больших 45^0, меньше 1, то их логарифмы меньше 0, что и имеем в данном примере. Поэтому данный логарифм должен находиться на какой-либо странице таблиц в столбце, озаглавленном снизу ctg. Найдя страницу таблиц, на которой логарифмы, напечатанные в указанном столбце, близко подходят к данному, ищем этот логарифм и находим его в одной горизонтальной строке с числом минут 46 справа (т. к., согласно об'ясненному, $\alpha > 45^0$). Внизу этой страницы напечатано 67^0, и поэтому

$$\alpha = 67^0 46'.$$

Относительно последних двух примеров следует иметь в виду, что одной и той же тригонометрической функции соответствует бесчисленное множество углов и по таблицам определяется из них лишь наименьший положительный угол (§§ 9 и 13).

Переходя теперь к рассмотрению того случая, когда данный аргумент или логарифм прямо в таблицах не помещен, легко прежде всего сообразить, что этот аргумент или логарифм непременно заключается между двумя помещенными в таблицах аргументами или логарифмами, из которых один меньше данного, а другой больше его. Затем, при изменении угла на 1 (наименьший угол, через который даны в таблицах аргументы), конечно, изменяется и логарифм каждой функции, причем, при увеличении угла на $1'$ логарифмы синуса и тангенса увеличиваются, а логарифм косинуса и котангенса уменьшаются. Разность логарифмов какой-либо тригонометрической функции при изменении угла на $1'$ называется табличной разностью, и эта разность помещена в таблицах вслед за каждым столбцом, содержащим логарифмы какой-либо функции, в столбце, озаглавленном сверху и снизу d (начальная буква слова differentia, что значит разность). Лишь для столбцов, содержащих логарифмы тангенса и котангенса, в таблицах имеется

не два, а один столбец табличных разностей, озаглавленный буквами d . c (начальные буквы слов differentia communis, что значит общая разность). Это обстоятельство об'ясняется следующим образом. Так как (§ 15)

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

то

$$\lg \operatorname{tg}\alpha + \lg \operatorname{ctg}\alpha = 0$$

А это значит, что на сколько при увеличении α логарифм тангенса увеличивается, на столько же логарифм котангенса уменьшается; иными словами, табличная разность для логарифмов тангенса и котангенса при одинаковом изменении аргумента равна по величине и противоположна по знаку.

Во избежание увеличения об'ема таблиц для каждой табличной разности напечатаны лишь значащие цифры, а нули, стоящие впереди этих цифр, опущены. Так, если два стоящих один перед другим логарифма суть

$$8{,}69654 \text{ и } 8{,}69907$$

то их табличная разность равна $8{,}69907 - 8{,}69654 = 0{,}00253$, но в таблицах напечатано только 253. Это обстоятельство необходимо иметь в виду.

Внимательно рассматривая табличные разности можно заметить, что для значительного большинства аргументов они изменяются пропорционально изменению аргумента. Лишь для синусов, тангенсов и котангенсов углов, близких к 0^0, а, следовательно, для косинусов, котангенсов и тангенсоов углов, близких к 90^0, табличная разность их логарифмов, изменяясь довольно быстро, не может считаться пропорциональной изменению аргумента. Но, оставляя этот случай для последующего подробного рассмотрения, будем считать, конечно, с некоторой малой ошибкой, что изменения логарифмов тригонометрических функций пропорциональны изменениям аргументов. Это допущение позволит весьма просто пользоваться таблицами для отыскания и таких аргументов или логарифмов функций, которые прямо в таблицах не даны.

Выясним это на примерах.

Пример № 5. Найти $\lg \operatorname{tg} 23^0\,17'\,46''$.

В таблицах нет угла $23^0\,17'\,46''$, но есть аргументы $23^0\,17'$ и $23^0\,18'$ между которыми заключается данный аргумент. Найдя по таблице, на основании изложенных выше правил, $\lg \operatorname{tg} 23^0\,17'$ получим

$$\lg \operatorname{tg} 23^0\,17' = 9{,}63379 - 10$$

и заметим, что при увеличении угла $23^0\,17$ на $1'$ логарифм тангенса увеличивается на 35 (число это, представляющее табличную разность находим в столбце, озаглавленном d. c.). Поэтому, принимая изменения

логарифма пропорциональными изменениям аргумента, составим следующую пропорцию, имея в виду, что изменения аргумента равно не 1′ или 60″, а 46″,

$$60'' : 35 = 46'' : x$$

Отсюда

$$x = \frac{35 \cdot 46}{60} = 26{,}8\,(3)$$

Но так как, согласно сделанному выше замечанию, числа 35, а, следовательно, и 26, представляют значащие цифры соответствующей разности логарифмов, т.-е. четвертый и пятый знак мантиссы, то следующие цифры будут шестым, седьмым и т. д. знаками этой мантиссы, каковые можно отбросить, так как мы имеем дело, лишь с пятизначными таблицами логарифмов. При этом отбрасывании нужно иметь в виду, что шестой знак мантиссы может получиться меньше 5, равным 5 и больше 5. Для увеличения точности вычисления нужно в том случае, когда знак этот больше 5, увеличивать пятый знак (в данном случае 6) на 1. Когда же шестой знак меньше 5, то пятый знак оставляется без изменения и, наконец, когда шестой знак равен 5, то пятый знак можно или увеличивать на 1 или же оставлять без изменения по желанию.

Итак, при изменении аргумента на 46″ (с 23° 17′ на 23° 17′ 46″) логарифм тангенса изменяется на 27 (или вернее на 0,00027), а потому для нахождения $\lg \operatorname{tg} 23^\circ 17' 46''$ нужно к найденному выше $\lg \operatorname{tg} 23^\circ 17'$ прибавить (т. к. при увеличении аргумента логарифм тангенса увеличивается) 0,00027. Окончательно выйдет:

$$\lg \operatorname{tg} 23^\circ 27' 46'' = 9{,}63406 - 10$$

Во избежание вычисления в каждом отдельном случае вышеприведенной пропорции, в таблицах Е. М. Пржевальского приведены с правой стороны почти каждой страницы особые таблички, озаглавленные P. P. (Partes proportionales—пропорциональные части), которыми весьма удобно пользоваться. Во всех этих табличках слева напечатаны секунды от 1 до 9, а справа—величина изменения логарифма, при изменении аргумента на 1″, 2″.....9″ для данной табличной разности, которая и напечатана вверху каждой таблички. При отыскании изменения логарифма на десятки секунд, соответствующие изменения на единицы секунд увеличиваются в 10 раз, а при необходимости отыскания изменения на десятые доли секунды, помещенные в табличках величины уменьшаются в 10 раз. Такие таблички не помещены лишь в самом начале таблиц Е. М. Пржевальского (от 0° до 3°), т. к., с одной стороны, табличные разности логарифмов синуса, тангенса и котангенса малых аргументов весьма значительны и не пропорциональны изменениям аргумента, а с другой—табличные разности косинуса малых аргументов очень малы, и нужное изменение логарифма получается весьма просто путем непосредственного вычисления. Соответствующие рассуждения применимы и к табличным

разностям косинуса, котангенса и тангенса аргументов, близких к 90° (от 90° до 87°). Применяя изложенное к определению изменения логарифма при изменении аргумента на 46″, на той же странице таблиц, где был найден $\lg \operatorname{tg} 23^0 17'$, находим справа табличку, озаглавленную сверху 35, и из этой таблички, согласно об'ясненному, выпишем

4″	2,33

откуда

40″	23,3

и из этой же таблички

6″	3,5

а всего

46″	26,80

или, по правилу отбрасывания десятичных знаков, получим 27, т.-е. то же самое число, которое было получено из решения пропорции.

Пример № 6. Найти $\lg \operatorname{Cos} 49^0 37' 23''$

Искомый логарифм заключается между имеющимися в таблицах

$$\lg \operatorname{Cos} 49^0\ 37' \text{ и } \lg \operatorname{Cos} 49^0 38'$$

причем

$$\lg \operatorname{Cos} 49^0 37' = 9{,}81151 - 10,$$

а соответствующая табличная разность равна 15. Обращаясь к напечатанной с правой стороны страницы табличке, озаглавленной 15, находим изменение логарифма, соответствующее изменению аргумента на 23. Именно

2″	0,50

а, следовательно,

20″	5,0

и

3″	0,75

а всего

23″	5,75

или по предыдущему 6 (0,00006).

Найденное число необходимо вычесть из $\lg \operatorname{Cos} 49^0 37'$, так как с увеличением дуги логарифм косинуса уменьшается. Окончательно будем иметь

$$\lg \operatorname{Cos} 49^0 37' 23'' = 9{,}81145 - 10$$

Пример № 7. Найти наименьший положительный угол x, если $\lg \operatorname{Sin} x = 9{,}45136 - 10$.

Так как $9{,}45136 < 9{,}85$, то искомый угол меньше 45°, и данный логарифм следует искать в каком-либо из левых столбцов, озаглавленных сверху Sin. Данного логарифма в таблицах нет, и этот логарифм заключается между двумя имеющимися в таблицах логарифмами,

из которых меньший равен 9,45120, а больший — 9,45163, причем первому из них соответствует угол в $16^0\,25'$. Разность между найденными в таблицах логарифмами (табличная разность) равна 43, а разность между меньшим из них и данным логарифмом равна 16. Поэтому, принимая изменения логарифма пропорциональными изменению аргумента, нетрудно будет рассчитать, насколько изменится аргумент при изменении логарифма на 16, если при изменении аргумента на 60″ логарифм изменяется на 43. Таким образом, будем иметь следующую пропорцию:

$$43 : 16 = 60 : x''$$

и отсюда

$$x = \frac{16 \cdot 60''}{43}$$

а, ограничиваясь целыми секундами, окончательно получим, что

$$x = 22''$$

Полученная величина и представляет изменение аргумента $16^0\,25'$ при изменении $\lg \sin 16^0\,25'$ на 16 (0,00016). А так как при увеличении синуса увеличивается и дуга, то 22″ необходимо прибавить к $16^0\,25'$, что и дает для искомого угла α величину $16^0\,25'\,22''$.

Возможно и в этом случае не решать пропорции, а для определения изменения аргумента пользоваться известными нам табличками, помещенными справа каждой страницы таблиц. Но данными в рассматриваемом примере будет уже правая часть соответствующей таблички (изменения логарифма), а искомыми—левая часть той же таблички (изменения аргумента), причем для пользования табличкой будем применять в надлежащих случаях умножение и деление на 10, имеющихся в табличках изменений логарифма и числа секунд.

Применяя изложенное к данному примеру, возьмем табличку, озаглавленную сверху 43, и в правой ее части будем искать определенное выше изменение логарифма, равное 16. Однако, такого числа в табличках нет, и поэтому умножим на 10 имеющееся в табличке число 1,43, соответствующее изменению аргумента, на 2″. Будем, следовательно, иметь

$$14{,}3 \ldots . 20''$$

Но так как мы должны были найти изменение аргумента, соответствующее изменению логарифма на 16, а нашли пока только для 14,3, то необходимо найти еще изменение аргумента при изменении логарифма на 1,7 (16 — 14,3). В табличке найдем 1,43 — ближайшее меньшее число к 1,7 и соответствующее ему изменение аргумента будет равно 2″, т.-е.

$$1{,}43 \ldots . 2''$$

Возможно было бы продолжать разыскание по табличке и дальше, поступая как указано выше, но при этом разыскании получились бы

десятые, сотые и т. д. доли секунд, каковые не принимаются нами во внимание. Таким образом, ограничиваясь целыми секундами, изменение аргумента будет равно 22″, т.-е. тому же числу, какое получилось из решения пропорции.

Пример № 8. Найти наименьший положительный угол α, если $\lg \operatorname{ctg} \alpha = 9{,}17244 - 10$

Так как

$$\lg \operatorname{ctg} \alpha < 0, \text{ то } \alpha > 45$$

и, следовательно, данный логарифм нужно искать в одном из столбцов, озаглавленном снизу ctg.

Наиближе подходящий к данному логарифму и меньший его логарифм равен 9,17190 — 10, причем этот логарифм соответствует углу в $81^0 33'$, а табличная разность будет равна 87. Так как данный логарифм отличается от 9,17190 на 54 (в значащих цифрах) то, пользуясь табличкой, сверху озаглавленной 87, найдем по предыдущим правилам соответствующее изменение аргумента. Будем иметь:

$$4{,}35 \ldots . 3''$$

а

$$43{,}5 \ldots . 30''$$

Вычитая 43,5 из 54, найдем 10,5 и вновь, обращаясь к табличке, получим

$$10{,}15 \ldots . 7''$$

Дальнейшее разыскание дало бы десятые, сотые и т. д. доли секунды, каковыми пренебрегаем и, ограничиваясь целыми секундами, искомое изменение аргумента будет равно 37″. Эту величину надо вычесть из $81^0 33'$, т. к. с увеличением котангенса угол уменьшается, а потому окончательно будем иметь, что

$$\alpha = 81^0 32' 23''$$

Переходим теперь к рассмотрению того случая, когда табличные разности, изменяясь весьма быстро, не могут считаться пропорциональными изменению аргумента. Это обстоятельство, как указывалось выше, имеет место для логарифмов синусов, тангенсов и котангенсов углов, близких к 0^0, также, следовательно, и для логарифмов косинусов, котангенсов и тангенсов углов, близких к 90^0.

Пользование таблицами Е. М. Пржевальского в этих случаях основывается на следующих соображениях.

Пусть имеем близкий к 0^0 и помещенный в таблицах аргумент, который по обращении в секунды обозначим через α''. Вспоминая теперь (§ 33), что для малых аргументов справедливо соотношение

$$\operatorname{Sin} \alpha'' = \alpha'' \operatorname{Sin} 1'' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

увеличим α'' на величину $\Delta\alpha''$, меньшую $1'$ Тогда предыдущее соотношение будет справедливо в виду малого увеличения аргумента и для угла $\alpha'' + \Delta\alpha''$, т.-е.

$$\mathrm{Sin}\,(\alpha'' + \Delta\alpha'') = (\alpha'' + \Delta\alpha'')\,.\,\mathrm{Sin}\,1'' \qquad (2)$$

При этом аргумента $\alpha'' + \Delta\alpha''$ в таблицах уже не будет. Разделив теперь почленно равенство (2) на равенство (1), получим

$$\frac{\mathrm{Sin}\,(\alpha'' + \Delta\alpha'')}{\mathrm{Sin}\,\alpha''} = \frac{\alpha'' + \Delta\alpha''}{\alpha''}$$

а по логарифмировании обеих частей найденного выражения найдем:

$$\lg \mathrm{Sin}\,(\alpha'' + \Delta\alpha'') - \lg \mathrm{Sin}\,\alpha'' = \lg (\alpha'' + \Delta\alpha'') - \lg \alpha''$$

Из этого равенства можно, во-первых, определить $\lg \mathrm{Sin}\,(\alpha'' + \Delta\alpha'')$ Именно

$$\lg \mathrm{Sin}\,(\alpha'' + \Delta\alpha'') = \lg \mathrm{Sin}\,\alpha'' + \lg (\alpha'' + \Delta\alpha'') - \lg \alpha'' \qquad (3)$$

Полученная формула заключает в себе решение вопроса об определении непомещенного в таблицах логарифма синуса малого аргумента по этому аргументу.

Во-вторых, из того же равенства можно определить $\lg (\alpha'' + \Delta\alpha'')$:

$$\lg (\alpha'' + \Delta\alpha'') = \lg \alpha'' + \lg \mathrm{Sin}\,(\alpha'' + \Delta\alpha'') - \lg \mathrm{Sin}\,\alpha'' \qquad (4)$$

По этой формуле определяется малый и выраженный в секундах аргумент по данному логарифму синуса этого аргумента.

Пример № 9. Найти $\lg \mathrm{Sin}\,0^0\,14'\,23''$.

Применяя данные выше обозначения, получим, что

$$\alpha'' = 14'\,.\,60 = 840''$$

$$\Delta\alpha'' = 23'' \qquad \alpha'' + \Delta\alpha'' = 863''$$

следовательно, формула (3) напишется в виде

$$\lg \mathrm{Sin}\,0''\,14'\,23'' = \lg \mathrm{Sin}\,840'' + \lg 863 - \lg 840$$

откуда, по извлечении из таблиц необходимых данных, найдем

$$\lg \mathrm{Sin}\,0^0\,14'\,23'' = (7{,}60985 - 10) + 2{,}93601 - 2{,}92428;$$

окончательно:

$$\lg \mathrm{Sin}\,0^0\,14'\,23'' = 7{,}62158 - 10$$

Пример № 10. Найти наименьший положительный угол $\alpha'' + \Delta\alpha''$, если $\lg \mathrm{Sin}\,(\alpha'' + \Delta\alpha'') = 7{,}95862 - 10$.

Наиближе подходящий к данному логарифму и меньший его логарифм равен 7,95508, соответствующий аргументу $0^0 31'$, а, следовательно, придерживаясь наших обозначений, будем иметь, что

$$\lg \operatorname{Sin} \alpha'' = 7{,}95508 \text{ и } \alpha'' = 31' . 60 = 1860''$$

Применяя же формулу (4) получим:

$$\lg (\alpha'' + \Delta\alpha'') = \lg 1860'' + \lg \operatorname{Sin} (\alpha'' + \Delta\alpha'') - \lg \operatorname{Sin} \alpha''$$

откуда, по извлечении из таблиц необходимых данных и подстановке, найдем:

$$\lg (\alpha'' + \Delta\alpha'') = 3{,}26951 + (7{,}95862 - 10) - (7{,}95508 - 10);$$

или

$$\lg (\alpha'' + \Delta\alpha'') = 3{,}27305$$

Наконец, разыскав по полученному логарифму число и ограничиваясь десятыми долями секунды, получим что

$$\alpha'' + \Delta\alpha'' = 1875''. 2$$

или окончательно

$$\alpha'' + \Delta\alpha'' = 0^0 31' 15''. 2$$

Так как, согласно изложенному выше (§ 33), для тангенса малого аргумента справедливо соотношение

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \alpha'' . \operatorname{tg} 1'' = \alpha'' \operatorname{Sin} 1''$$

то, повторяя предыдущие рассуждения, легко получатся при прежних обозначениях следующие формулы:

$$\lg \operatorname{tg} (\alpha'' + \Delta\alpha'') = \lg \operatorname{tg} \alpha'' + \lg (\alpha'' + \Delta\alpha'') - \lg \alpha'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\lg (\alpha'' + \Delta\alpha'') = \lg \alpha'' + \lg \operatorname{tg} (\alpha'' + \Delta\alpha'') - \lg \operatorname{tg} \alpha'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Пользование этими формулами совершенно одинаково с пользованием формулами (3) и (4), но, конечно, в таблицах придется обращаться к столбцу, озаглавленному сверху tg.

Задача. Доказать, что при прежних обозначениях

$$\lg \operatorname{ctg} (\alpha'' + \Delta\alpha'') = \lg \operatorname{ctg} \alpha'' + \lg \alpha'' - \lg (\alpha'' + \Delta\alpha'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

и

$$\lg (\alpha'' + \Delta\alpha'') = \lg \alpha'' + \lg \operatorname{ctg} \alpha'' - \lg \operatorname{ctg} (\alpha'' + \Delta\alpha'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Что касается теперь того случая, когда нам даются близкие к 90^0 аргументы косинуса, котангенса и тангенса, то, предварительно применения формул (3)—(8), необходимо перейти по формулам приведения дополнительного аргумента (§ 21) к функциям синуса, тангенса и котангенса малых дуг.

Величина аргумента, при которой полезно применение формул (3)—(8), должна заключаться в пределах от 0^0 до 3^0 для малых аргументов и соответственно этому—от 87^0 до 90^0 для аргументов, близких к 90^0. При всяких же иных значениях аргумента вполне возможно допущение пропорциональности между изменением логарифма и аргумента.

§ 38[1]. ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПО ТАБЛИЦАМ Е. М. ПРЖЕВАЛЬСКОГО.

Логарифмы почти всех тригонометрических функций являются числами иррациональными, и при составлении пятизначных таблиц логарифмов приходится отбрасывать шестой, седьмой и т. д. десятичные знаки. Таким образом, каждый пятизначный логарифм ошибочен на величину отброшенной бесконечной десятичной дроби, значащие цифры которой могут начаться лишь с шестого десятичного знака. Иными словами, эта ошибка не может превосходить 0,00001 или в значащих цифрах 1. Так как каждому изменению аргумента на $1'$ или $60''$ соответствует некоторая табличная разность d (в значащих цифрах), то, принимая эту разность пропорциональной изменению аргумента, возможно рассчитать, на какую величину будет изменяться аргумент, если логарифм изменяется на 1. Будем по предыдущему иметь пропорцию

$$d : 1 = 60'' : x$$

откуда

$$x = \frac{60''}{d}$$

Найденная величина x представляет наибольшую ошибку в аргументе, определяемом по пятизначным таблицам, считая наибольшей ошибкой в логарифме 0,00001. Из формулы, определяющей x, видно, что чем более табличная разность d, тем менее ошибка в аргументе и, пока $d > 60$, ошибка x меньше $1''$.

Из дальнейшего рассмотрения вопроса необходимо исключить табличные разности логарифмов синуса, тангенса и котангенса малых аргументов (от 0^0 до 3^0) и аргументов, близких к 90^0 (от 90^0 до 87^0) косинуса, котангенса и тангенса, как не пропорциональные изменениям аргумента.

Обращаясь теперь к остальным напечатанным в таблицах табличным разностям, увидим, что для логарифмов синуса, тангенса и котангенса аргументов в пределах от 3^0 до 12^0, а следовательно и для косинусов, котангенсов и тангенсов аргументов в пределах от 87^0 до 78^0 табличные разности всегда больше 60, а следовательно $x < 1''$.

Что же касается табличных разностей логарифмов косинуса от 3^0 до 12^0, а также и синуса от 87^0 до 78^0, то таковые не превышают 4 и следовательно $x \leqslant 15''$. При этом имея в виду, что для различных аргументов, заключающихся в указанных пределах, логарифмы их косинусов так же, как и синусов, оказываются иногда одинаковыми, следует придти к выводу о том, что предел совершаемых в этих случаях ошибок может

значительно превосходить указанную выше величину. Так, например, $9{,}99932 - 10$ является одновременно логарифмом косинуса углов в $3^0\,12'$ и $3^0\,13'$.

При изменении аргументов синуса, тангенса и котангенса в пределах от 12^0 до 45^0, а аргументов косинуса, котангенса и тангенса в пределах от 78^0 до 45^0, табличная разность оказывается уже меньше 60, причем для логарифмов синуса и косинуса в указанных пределах она всегда больше 12, что для x дает наибольшую величину в $5''$, а для логарифмов тангенса и котангенса в тех же пределах табличные разности всегда больше или равны 25, т.-е. выйдет, что $x < 3''$.

Наконец, табличные разности логарифмов косинуса от 12^0 до 45^0, а следовательно и синуса от 78^0 до 45^0 не превышают 12 и, таким образом,

$$x \geqslant 5''.$$

Из всего изложенного следует, что: 1) наиболее выгодным в отношении точности вычислений будет вычисление углов в пределах от 3^0 и до 87^0 по логарифмам тангенсов, так как совершаемая при этом ошибка никогда не превзойдет $3''$, и 2) наименее выгодным в отношении точности вычислений будет определение углов в пределах от 3^0 до 87^0 по логарифмам синусов и косинусов и в особенности неточным окажется определение малых углов по логарифмам косинуса и углов, близких к 90^0 — по логарифмам синуса.

§ 39. О ДОПОЛНЕНИИ ДО 10 И ДЕЙСТВИЯХ С НИМ.

Выше (§ 37) уже указывалось, что для тригонометрических функций, меньших 1, в таблицах Е. М. Пржевальского даны не их логарифмы, а дополнение этих логарифмов до 10.

Существенная выгода замены логарифмов чисел, меньших 1, их дополнениями до 10 заключается в том, что вместо действий с положительными и отрицательными числами приходится действия эти производить только с числами положительными, что, конечно, упрощает вычисление. Пусть, например, требуется найти произведение

$$x = 23{,}64 \,.\, 0{,}857 \,.\, 0{,}021$$

Логарифмируя это произведение, найдем, что

$$\lg x = 1{,}37365 + \bar{1}{,}93298 + \bar{2}{,}32222 = \bar{1}{,}62885$$

Как видим, для получения $\lg x$ пришлось складывать положительные и отрицательные числа. Между тем, заменив $\lg 0{,}857$ и $\lg 0{,}21$ их дополнениями до 10, получим, что

$$\lg x = 1{,}37365 + 9 \,.\, 93298 - 10 + 8{,}32222 - 10 = 19{,}62885 - 20$$

или после вычитания и прибавления по 10

$$\lg x = 9{,}62885 - 10 = \bar{1}{,}62885$$

Этот последний способ вычисления гораздо проще, так как приходится складывать числа только положительные; вычитаемым всегда является число 10, повторенное один или несколько раз, что, конечно, не может представить никаких затруднений.

Замена логарифмов чисел, меньших единицы, их дополнениями до 10, равно как разыскание числа, меньшего единицы, по дополнению его логарифма до 10 совершается, как это можно было видеть из предыдущего, весьма просто. Именно:

1) целая часть дополнения логарифма до 10 для числа, меньшого 1, будет равна разности между 10 и числом нулей в данном числе, стоящих до первой значащей цифры; дробная же часть дополнения является всегда мантиссой логарифма данного числа, которая находится по известным из алгебры правилам, и

2) число стоящих до первой значащей цифры нулей в искомом числе, меньшем 1, равно разности между 10 и целой частью дополнения логарифма этого числа до 10, а значащие цифры числа определяются по известным из алгебры правилам по дробной части дополнения, представляющей, согласно предыдущему, прямо мантиссу логарифма.

На этом основании

$$\lg 0{,}000275 = 6{,}43933 - 10 \text{ и } 7{,}99352 - 10 = \lg 0{,}009852.$$

Для получения же дополнения до 10 логарифма числа, большего 1, необходимо все цифры логарифма за исключением последней вычесть из 9, а последнюю — из 10.

Например,

$$\lg 67{,}51 = 1{,}82937,$$

а дополнение этого логарифма до 10 будет 8,17063. Точно также

$$\lg 1{,}27 = 0{,}10380,$$

а дополнение будет 9,89320.

С особой практической пользой дополнение логарифмов до 10 применяется для замены действия вычитания действием сложения, что позволяет вовсе избежать получения при вычислениях отрицательных чисел. Эта замена основывается на следующем. Пусть

$$\lg x = \lg a - \lg b$$

Так как всегда логарифм любого числа, встречающегося при практических вычислениях, меньше 10, то $10 - \lg b$ всегда число положительное; прибавляя же к обеим частям равенства по 10, получим:

$$\lg x + 10 = \lg a + 10 - \lg b;$$

но, имея в виду, что $10 - \lg b > 0$, действительно окажется, что вычитание $\lg b$ из $\lg a$ свелось к сложению $\lg a$ и $10 - \lg b$. Обозначая же теперь $10 - \lg b$ через Compl $\lg b$ (от латинского слова Complementum, что значит дополнение), будем иметь

$$\lg x + 10 = \lg a + \text{Compl}\lg b$$

Конечно, найденный результат необходимо уменьшить на 10. Если напр.,

$$\lg x = 2{,}67894 - 2{,}95762,$$

то, произведя вычитание, найдем:

$$\lg x = \bar{1}{,}72132$$

а заменяя 2,95752 дополнением до 10, получим:

$$\lg x + 10 = 2{,}67894 + 7{,}04238$$

или

$$\lg x + 10 = 9{,}72132$$

и окончательно

$$\lg x = \bar{1}{,}72132$$

Точно также, если

$$\lg x = 1{,}37894 - 1{,}92117 - 2{,}87571$$

то

$$\lg x = 1{,}37894 - 4{,}79688$$

и отсюда

$$\lg x = \bar{4}{,}58206$$

Заменяя же 1,92117 и 2,87571 их дополнениями до 10, получим

$$\lg x + 10 + 10 = 1{,}37894 + 8{,}07883 + 7{,}12429$$

откуда

$$\lg x + 10 + 10 = 16{,}58206$$

или, по уменьшении обеих частей равенства на 10, выйдет

$$\lg x + 10 = 6{,}58206$$

и окончательно

$$\lg x = \bar{4}{,}58206$$

В тех случаях, когда полученное в результате некоторых действий дополнение логарифма число до 10 оказывается необходимым множить или делить на целое число, например, при логарифмировании степени или корня, то эти действия, как легко показать, вновь приведут нас также к дополнению логарифма до 10. Пусть дополнение логарифма некоторого числа до 10 получилось в виде $9{,}27692 - 10$ и это дополнение необходимо умножить на 4. Будем иметь:

$$(9{,}27692 - 10)\,4 = 37{,}10768 - 40$$

или, прибавляя и отнимая по 30, найдем окончательный результат в виде дополнения до 10, именно:

$$7{,}10768 - 10$$

Если теперь данное дополнение $8{,}63248 - 10$ нужно разделить на 3, то прежде деления прибавляя к дополнению и вычитая из него по 20, получим

$$28{,}63248 - 30,$$

а по разделении на 3 найдем:

$$\frac{28{,}63248 - 30}{3} = 9{,}54416 - 10$$

Таким образом, и в этом случае получилось дополнение логарифма до 10.

Если приходится вычислять выражение вида

$$x = \frac{a}{\operatorname{Sin} \alpha}$$

то по логарифмировании найдем:

$$\lg x = \lg a - \lg \operatorname{Sin} \alpha$$

но так как в таблицах дано дополнение $\lg \operatorname{Sin} \alpha$ до 10, т.-е.

$$\operatorname{Compl} \lg \operatorname{Sin} \alpha$$

то

$$\lg \operatorname{Sin} \alpha = \operatorname{Compl} \lg \operatorname{Sin} \alpha - 10$$

откуда

$$\lg x = \lg a - (\operatorname{Compl} \lg \operatorname{Sin} \alpha - 10)$$

или

$$\lg x = \lg a + (10 - \operatorname{Compl} \lg \operatorname{Sin} \alpha)$$

Таким образом, когда вычитаемое оказывается дополнением логарифма до 10, то для замены действия вычитания действием сложения нужно прямо вычесть из 10 это дополнение и полученный результат рассматривать, как слагаемое.

Для пояснения изложенных выше правил действий с дополнением логарифмов до 10 и их преимуществ перед обычно употребляемыми правилами вычислений, решим следующий пример.

Пример № 1. Найти наименьший положительный угол удовлетворяющий равенству

$$\lg \operatorname{tg} x = \frac{0{,}0824 \cdot \operatorname{Cos}^2 41^\circ 17'}{0{,}299 \cdot \sqrt[3]{7 \operatorname{Sin} 17^\circ 10'}}$$

Логарифмируя это выражение, получим:

$$\lg \operatorname{tg} x = \lg 0{,}0824 + 2 \lg \operatorname{Cos} 41^\circ 17' - \lg 0{,}299 - \frac{1}{3} \lg 7 - \frac{1}{3} \lg \operatorname{Sin} 17^\circ 10'$$

Применяя обычно употребляющийся способ вычислений, найдем:

$$\lg \operatorname{tg} x = \bar{2},91593 + 2 \cdot \bar{1},87590 - \bar{1},47567 - \frac{1}{3} \cdot 0,84510 - \frac{1}{3} \cdot \bar{1},47005$$

Постепенно преобразовывая получившееся довольно сложное выражение, будем иметь:

$$\lg \operatorname{tg} x = \bar{2},91593 + \bar{1},75180 - \bar{1},47567 - 0,28170 - \frac{1}{3}(-0,52995)$$

или

$$\lg \operatorname{tg} x = \bar{2},91593 + \bar{1},75180 - \bar{1},47567 - 0,28170 + 0,17665$$

откуда, складывая отдельно слагаемые и вычитаемые логарифмы, получим:

$$+ \begin{array}{r} \bar{2},91593 \\ \bar{1},75180 \\ 0,17665 \\ \hline \bar{2},84438 \end{array} \quad \text{и} \quad + \begin{array}{r} \bar{1},47567 \\ 0,28170 \\ \hline \bar{1},75737 \end{array}$$

т.-е.

$$\lg \operatorname{tg} x = \bar{2},84438 - \bar{1},75737$$

и окончательно

$$\lg x = \bar{1},08701$$

Для применения таблиц Е. М. Пржевальского необходимо предварительно найти дополнение этого логарифма до 10; будем иметь:

$$\lg \operatorname{tg} x = 9,08701 - 10$$

и отсюда

$$x = 6^0\,57'\,57'' \cdot 7$$

Выполненные вычисления с несомненностью удостоверяют в крайнем неудобстве этого способа, т. к. при вычислениях встречаются как положительные и отрицательные числа, так и числа с положительной дробной частью и с отрицательной целой частью, причем со всеми этими числами приходится производить действия сложения и вычитания.

Применим теперь способ дополнений до 10 как для логарифмов чисел, меньших 1, так и для вычитаемых логарифмов. Получим:

$$\lg \operatorname{tg} x = \lg 0,0824 + 2 \lg \operatorname{Cos} 41^0\,17' + \operatorname{Compl} \lg 0,299 + \operatorname{Compl} \frac{1}{3} \lg 7 +$$

отсюда

$$+ \operatorname{Compl} \frac{1}{3} \lg \operatorname{Sin} 17^0 10'$$

$$\lg \operatorname{tg} x = 8,91593 - 10 + 2\,(9,87590 - 10) + \operatorname{Compl}\,(9,47567 - 10) +$$

или

$$+ \operatorname{Compl}\left(\frac{1}{3} \cdot 0,84510\right) + \operatorname{Compl}\left[\frac{1}{3}(9,47005 - 10)\right]$$

$$\lg \operatorname{tg} x = 8,91593 - 10 + 19,75180 - 20 + 0,52433 + \operatorname{Compl} 0,28170 +$$

$$+ \operatorname{Compl}\,(9,82335 - 10)$$

или

$$\lg \operatorname{tg} x = 8,91593 - 10 + 19,75180 - 20 + 0,52433 + 9,71830 - 10 + 0,17665$$

Выражение это, служащее для окончательного вычисления x получилось скорее, чем при предыдущем способе, и, что самое главное, оно весьма просто, т. к. содержит десятичные дроби только для сложения; вычитаемыми же являются исключительно числа 10 или кратные им.

Из этого выражения прямо будем иметь:

$$\lg \operatorname{tg} x = 39{,}08701 - 40$$

а по уменьшении и увеличении на 30 окончательно выйдет:

$$\lg \operatorname{tg} x = 9{,}08701 - 10$$

и непосредственно из таблиц

$$x = 6^0\,57'\,57'',7$$

§ 40. ПРИВЕДЕНИЕ ФОРМУЛ К ВИДУ, УДОБНОМУ ДЛЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ.

Для удобства и простоты применения к вычислениям логарифмических таблиц необходимо, чтобы подлежащие вычислению формулы имели вид одночленов. В том же случае, когда эти формулы многочленны, стремятся преобразовать их в одночленные, что и называется приведением формул к виду, удобному для логарифмических вычислений. Общих правил для такого приведения не существует, и навык в преобразовании многочленных выражений в одночленные достигается практикой в решении задач и твердым усвоением тригонометрических формул. Однако, возможно указать некоторые наиболее часто применяемые для указанных преобразований способы.

1) Если подлежащая вычислению формула имеет вид суммы или разности синусов или косинусов, то, как мы видели (§ 29), эти формулы весьма просто преобразуются в одночлены.

Возможно при преобразовании многочленных выражений в одночлены пользоваться и иными формулами гониометрии, например, формулами двойных, половинных дуг, основными соотношениями между тригонометрическими функциями одной и той же дуги и пр.

Пример № 1. Привести к логарифмическому виду $\operatorname{sc}\alpha - 1$.

Так как (§ 14)

$$\operatorname{sc}\alpha = \frac{1}{\operatorname{Cos}\alpha}$$

то

$$\operatorname{sc}\alpha - 1 = \frac{1}{\operatorname{Cos}\alpha} - 1 = \frac{1 - \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha}$$

Но (§ 28)

$$1 - \operatorname{Cos}\alpha = 2\operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2}$$

и поэтому

$$\operatorname{sc}\alpha - 1 = \frac{2\operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{Cos}\alpha} = \frac{2\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{Cos}\alpha}$$

Умножая и деля правую часть последнего равенства на $\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}$, получим:

$$\operatorname{sc}\alpha - 1 = \frac{2\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{Cos}\alpha.\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}}$$

Согласно § 28

$$\operatorname{Sin}\alpha = 2\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sc}\alpha - 1 = \frac{\operatorname{Sin}\alpha.\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{Cos}\alpha.\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}}$$

и отсюда, зная, что (§ 14)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha} \text{ и } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}}$$

окончательно получим, что

$$\operatorname{sc}\alpha - 1 = \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

2) Выражение вида $\operatorname{Sin}\alpha \pm \operatorname{Cos}\beta$ легко приводится к сумме или разности двух синусов или двух косинусов при помощи правила приведения дополнительного аргумента (§ 21), согласно которому

$$\operatorname{Sin}\alpha = \operatorname{Cos}(90 - \alpha) \text{ и } \operatorname{Cos}\beta = \operatorname{Sin}(90 - \beta)$$

и поэтому

$$\operatorname{Sin}\alpha \pm \operatorname{Cos}\beta = \operatorname{Cos}(90^0 - \alpha) \pm \operatorname{Cos}\beta = \operatorname{Sin}\alpha \pm \operatorname{Sin}(90 - \beta)$$

Эти же формулы, как известно (§ 29), легко преобразуются в одночлены.

3) В некоторых случаях оказывается полезным заменять входящую в данную многочленную формулу единицу через $\operatorname{Sin}90^0$, $\operatorname{Cos}0^0$ или $\operatorname{tg}45^0$. Равным образом, пользуясь тригонометрическими функциями некоторых углов ($30^0, 60^0, 45^0$), возможно этими функциями заменять входящие в формулы числа; например, (§ 18) $\sqrt{2}$ можно заменить через $2\operatorname{Sin}45^0$ или через $2\operatorname{Cos}45^0$, а 2 можно заменить через $\frac{1}{\operatorname{Cos}60^0}$ или, следовательно, через $\operatorname{sc}60^0$ и т. д.

Пример № 2. Привести к логарифмическому виду

$$\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$$

Заменяя 1 через $\operatorname{tg} 45^0$ получим:

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}45^0+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}45^0-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\frac{\operatorname{Sin}45^0}{\operatorname{Cos}45^0}+\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha}}{\frac{\operatorname{Sin}45^0}{\operatorname{Cos}45^0}-\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha}}$$

Отсюда, по приведении к общему знаменателю и сокращении на и найдем:

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{Sin}45^0\cdot\operatorname{Cos}\alpha+\operatorname{Cos}45^0\cdot\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}45^0\cdot\operatorname{Cos}\alpha-\operatorname{Cos}45^0\operatorname{Sin}\alpha}$$

Но (§ 27)

$$\operatorname{Sin}45^0\cdot\operatorname{Cos}\alpha+\operatorname{Cos}45^0\cdot\operatorname{Sin}\alpha=\operatorname{Sin}(45^0+\alpha)$$

и

$$\operatorname{Sin}45^0\cdot\operatorname{Cos}\alpha-\operatorname{Cos}45^0\cdot\operatorname{Sin}\alpha=\operatorname{Sin}(45^0-\alpha)$$

и, следовательно,

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{Sin}(45^0+\alpha)}{\operatorname{Sin}(45^0-\alpha)}$$

По правилу приведения дополнительного аргумента (§ 21)

$$\operatorname{Sin}(45^0-\alpha)=\operatorname{Cos}[90-(45^0-\alpha)]=\operatorname{Cos}(45^0+\alpha)$$

поэтому

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{Sin}(45^0+\alpha)}{\operatorname{Cos}(45^0+\alpha)}$$

и окончательно

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45^0+\alpha)$$

4) В тех случаях, когда изложенные в предыдущем искусственные способы оказываются недостаточными для преобразования данной формулы в одночлен, возможно довольно часто применить следующий прием, называемый способом введения вспомогательного угла.

Пусть для вычисления дана формула

$$x=A\pm B$$

где A и B — произвольные выражения, в частных случаях могущие быть и весьма сложными.

Выставляя A за скобку, получим:

$$x=A\left(1\pm\frac{B}{A}\right)$$

Принимая, что

$$\frac{B}{A}=\operatorname{tg}\varphi$$

будем иметь

$$x=A(1\pm\operatorname{tg}\varphi)$$

Равенство

$$\frac{B}{A}=\operatorname{tg}\varphi$$

всегда возможно, так как $\operatorname{tg}\varphi$ может иметь всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$

Для дальнейшего преобразования будем иметь

$$x = A(1 \pm \operatorname{tg}\varphi)$$

Но, согласно предыдущему,

$$\operatorname{tg} 45^0 = 1$$

и поэтому

$$1 \pm \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 45^0 \pm \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Sin} 45^0}{\operatorname{Cos} 45^0} \pm \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}$$

Отсюда, по приведении к общему знаменателю, получим

$$1 \pm \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Sin} 45^0 \cdot \operatorname{Cos}\varphi \pm \operatorname{Cos} 45^0 \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos} 45^0 \cdot \operatorname{Cos}\varphi}$$

или, одинаково с изложенным выше,

$$1 \pm \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Sin}(45^0 \pm \varphi)}{\operatorname{Cos} 45^0 \cdot \operatorname{Cos}\varphi}$$

а, принимая во внимание, что

$$\operatorname{Cos} 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

найдем

$$1 \pm \operatorname{tg}\varphi = \frac{2 \operatorname{Sin}(45^0 \pm \varphi)}{\sqrt{2} \operatorname{Cos}\varphi} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{Sin}(45^0 \pm \varphi)}{\operatorname{Cos}\varphi}$$

Следовательно

$$x = A \frac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{Sin}(45^0 \pm \varphi)}{\operatorname{Cos}\varphi}$$

где φ (вспомогательный угол) предварительно вычисляется по формуле

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\varphi$$

В тех формулах, для которых известно, что A и B положительны, преобразование может быть выполнено проще: именно, если попрежнему,

$$x = A\left(1 \pm \frac{B}{A}\right)$$

то, принимая, в виду положительности B и A, что

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tg}^2\varphi$$

получим отдельно

$$x = A(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)$$

и

$$x = A(1 - \operatorname{tg}^2\varphi)$$

Но (§ 15)

$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \operatorname{sc}^2\varphi$$

(§ 14)

$$\sec\varphi = \frac{1}{\operatorname{Cos}\varphi}$$

поэтому

$$x = A\sec^2\varphi = \frac{A}{\operatorname{Cos}^2\varphi}$$

Для формулы же

$$x = A(1 - \operatorname{tg}^2\varphi)$$

будем иметь (§§ 14 и 28)

$$1 - \operatorname{tg}^2\varphi = 1 - \frac{\operatorname{Sin}^2\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi} = \frac{\operatorname{Cos}^2\varphi - \operatorname{Sin}^2\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi} = \frac{\operatorname{Cos}2\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi}$$

и следовательно

$$x = \frac{A\operatorname{Cos}2\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi}$$

При этом вспомогательный угол определяется по формуле

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tg}^2\varphi$$

Задача. Привести к логарифмическому виду

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

§ 40[1]. ПОНЯТИЕ О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ И РЕШЕНИИ ИХ.

Равенство, содержащее тригонометрические функции, называется тригонометрическим.

Необходимо существенно отличать тригонометрические равенства справедливые при всяком значении аргумента, и равенства, справедливые лишь при некоторых значениях аргумента.

Первые называются тригонометрическими тождествами, а вторые—тригонометрическими уравнениями. Тождествами являются все выведенные выше соотношения между тригонометрическими функциями одного и многих аргументов. Примером тригонометрического уравнения может служить равенство

$$2\operatorname{Sin}^2 x - 3\operatorname{Sin}x + 1 = 0,$$

справедливое, как оказывается, лишь при значениях x, равных

$$x_1 = 2k\pi + 90^0 \text{ и } x_2 = 2k\pi + 30^0$$

где k—целое положительное или отрицательное количество (в том числе и 0).

Не следует считать тригонометрическим равенством соотношение, которое входят тригонометрические функции, известные по своей вели чине; напр., выражение

$$x^2 \operatorname{Sin} 60^0 - x \operatorname{Cos} 180^0 + \operatorname{tg} 45^0 = 1$$

не будет тригонометрическим уравнением, ибо может быть написан виде алгебраического уравнения

$$\frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + x + 1 = 0$$

Вообще, если в тригонометрическом равенстве входящие тригонометр ческие функции могут быть рассматриваемы, как известные коэфф циенты, то такое равенство будет алгебраическим, а не тригон метрическим равенством.

Отыскание тех значений аргумента, при которых тригонометриче ское уравнение обращается в тождество, называется решением уравнен а эти значения аргумента—корнями его.

Решением уравнения определяется лишь наименьшее значение удовлетворяющее данному уравнению, и затем на основании в периодичности тригонометрических функций составляется формула всех аргументов, соответствующих значению данной функци каковая функция и будет, точнее говоря, называться корнем уравнен

Тригонометрические уравнения, подобно алгебраическим, по степеням на уравнения первой, второй и т. д. степеней и числу неизвестных—на уравнения с одним, двумя и т. д. неизвестны составляя в случае двух, трех и т. д. неизвестных систему тригон метрических уравнений. Найденные корни тригонометрического уравн ния необходимо исследовать, т. к. некоторые из них могут не творять данному уравнению. Это происходит, например, при про водстве над данным уравнением действия возведения в степень, могут быть получены излишние корни. Обратно, действие извлечен корня из общих частей уравнения или деление на выражение, ее неизвестные, может повести к потере корней. Очевидно, если решение тригонометрического уравнения приведет к таким функции, каких они иметь не могут, например,

$$\operatorname{Sin} x = 2; \operatorname{Cos} x = -\frac{7}{5}$$

и т. п., то нахождение значений аргумента в таких случаях невозмож

Вследствие разнообразия видов тригонометрических уравнен общих правил решения их не существует; некоторые же правила, полезно руководствоваться при решении тригонометр уравнений, заключаются в следующем.

I. Тригонометрическое уравнение, в которое входит какая-либо одна тригонометрическая функция одного и того же аргумента, решается как уравнение алгебраическое, принимая за неизвестное эту функцию с последующим определением неизвестного аргумента по найденному значению функции.

Пример № 1. Решить тригонометрическое уравнение

$$\frac{\operatorname{Cos} x}{4\operatorname{Cos}^2 x - 1} = \frac{1}{3}$$

Освобождаясь от знаменателя и перенеся все члены в одну часть уравнения, получим:

$$4\operatorname{Cos}^2 x - 3\operatorname{Cos} x - 1 = 0$$

а принимая Cos x за неизвестное и решая найденное квадратное уравнение, окажется, что

$$\operatorname{Cos} x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8}$$

и

$$\operatorname{Cos} x_1 = +1;\ \operatorname{Cos} x_2 = -\frac{1}{4}$$

Оба корня удовлетворяют данному уравнению.

Отсюда $x_1 = 0^0$ или, на основании правил периодически, $x_1 = 360^0 . k$, где k — положительное или отрицательное (в том числе и 0) целое количество. Для определения x_2 применяем логарифмические таблицы и находим, что $x_2 = 104^0 28' 39''$ или $x_2 = 360^0 . k + 104^0 28' 39''$.

Задача. Решить тригонометрическое уравнение

$$\frac{1 + \operatorname{Sin} x}{\sqrt{3}} = \sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2 x}$$

Задача. Решить тригонометрическое уравнение

$$2\operatorname{Cos} x \sqrt{2} = 1.$$

II. Если в тригонометрические уравнения входят различные тригонометрические функции, то для решения такого уравнения стремятся преобразовать его помощью соотношений между функциями одного и того же или разных аргументов в уравнение, содержащее только одну какую-либо функцию одного аргумента, после чего уравнение решается, как алгебраическое.

Пример № 2. Решить тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{Cos} x = \operatorname{tg} \alpha$$

Так как

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x},$$

то

$$\operatorname{Cos} x = \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}$$

или

$$\operatorname{Cos}^2 x = \operatorname{Sin} x$$

Но

$$\operatorname{Cos}^2 x = 1 - \operatorname{Sin}^2 x$$

и значит

$$1 - \operatorname{Sin}^2 x = \operatorname{Sin} x$$

или

$$\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Sin} x - 1 = 0$$

отсюда

$$\operatorname{Sin} x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

т.-е.

$$\operatorname{Sin} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\operatorname{Sin} x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Так как $\operatorname{Sin} x \leqslant 1$ или $\operatorname{Sin} x \geqslant -1$, то первый из найденных корней возможен, ибо

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$$

и при посредстве логарифмических таблиц x может быть определен. Что же касается второго корня, то он невозможен, так как

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{1} < -1$$

Пример № 3. Решить тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$$

Вспоминая, что

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

получим

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 3 \operatorname{tg} x$$

или

$$2 \operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} x (1 - \operatorname{tg}^2 x)$$

откуда

$$\operatorname{tg} x\,[\,2-3\,(1-\operatorname{tg}^2 x)\,]=0$$

и значит

$$\operatorname{tg} x=0 \qquad (1)$$

и

$$2-3\,(1-\operatorname{tg}^2 x)=0 \qquad (2)$$

Из уравнения (1) находим, что $x_1=0$, т.-е. по правилу периодичности $x_1=180^0\,k$, где k—целое положительное число.

Решая уравнение (2), получим

$$2-3+3\operatorname{tg}^2 x=0$$

или

$$3\operatorname{tg}^2 x=1,$$

а отсюда

$$\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

и значит

$$x_2=30^0$$

или по предыдущему

$$180^0\,.\,k+30^0,$$

а также $x=150^0$, т.-е.

$$x_3=180^0\,.\,k+150^0$$

Подстановка найденных корней в данное уравнение удостоверяет в том, что все они удовлетворяют уравнению.

Задача. Решить тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{Sin}\,(x-a)=\operatorname{Cos}(x+a)$$

Задача. Решить тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{Sin}(x+30^0)\,.\,\operatorname{Sin}(x-30^0)=\operatorname{Sin}30^0.$$

Задача. Решить тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{Cos} x=\operatorname{Sin}^2 x-\operatorname{Cos}^2 x$$

III. В некоторых случаях тригонометрические уравнения легко решаются помощью замены одного из коэффициентов уравнения тригонометрической функцией (чаще всего tangens'ом) некоторого угла, называемого вспомогательным, каковая замена и позволяет преобразовать уравнение к виду, удобному для решения.

Пример № 4. Решить тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{Cos} x+\sqrt{3}\operatorname{Sin} x=\sqrt{2}$$

Разделив обе части уравнения на $\sqrt{3}$, найдем

$$\frac{\operatorname{Cos} x}{\sqrt{3}}+\operatorname{Sin} x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Приняв теперь, что

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\varphi$$

где φ — вспомогательный угол, будем иметь

$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Но так как

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}$$

то получится

$$\frac{\operatorname{Sin}\varphi \cdot \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Cos}\varphi} + \operatorname{Sin} x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

или, освобождаясь от знаменателя

$$\operatorname{Sin}\varphi \cdot \operatorname{Cos} x + \operatorname{Cos}\varphi \cdot \operatorname{Sin} x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{Cos}\varphi$$

и отсюда, на основании формул тригонометрических функций суммы двух дуг, найдем

$$\operatorname{Sin}(\varphi + x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{Cos}\varphi$$

Из написанного выше равенства

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\varphi$$

прямо найдем, что

$$\varphi = 30^0,$$

а следовательно

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и значит

$$\operatorname{Sin}(\varphi + x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Но так как

$$\operatorname{Sin} 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ледовательно,

$$\varphi + x = 45^0$$

и окончательно

$$x = 15^0$$

или по правилу периодичности

$$x = 360^0 \cdot k + 15^0$$

IV. Иногда путем различных преобразований, обе части уравнения выражаются через одну и ту же тригонометрическую функцию и тогда корни уравнения получаются путем сравнения аргументов.

Пример № 5. Решить тригонометрическое уравнение

$$\sqrt{3}\,\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x = \sqrt{2}$$

Разделяя обе части уравнения на 2, получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{Sin}\,x + \frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Но так как

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{Cos}\,30^0; \quad \frac{1}{2} = \mathrm{Sin}\,30^0$$

и

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{Sin}\,45^0$$

то будем иметь

$$\mathrm{Sin}\,x \,.\, \mathrm{Cos}\,30^0 + \mathrm{Cos}\,x \,.\, \mathrm{Sin}\,30^0 = \mathrm{Sin}\,45^0$$

или

$$\mathrm{Sin}\,(x + 30)^0 = \mathrm{Sin}\,45^0$$

откуда, приравнивая аргументы, получим

$$x + 30^0 = 45^0$$

и окончательно

$$x = 15^0,$$

а по правилу периодичности

$$x = 360^0 \,.\, k + 15^0$$

С другой стороны

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{Sin}\,60^0; \quad \frac{1}{2} = \cos 60^0 \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{Cos}\,45^0$$

и значит

$$\mathrm{Sin}\,x \,.\, \mathrm{Sin}\,60^0 + \mathrm{Cos}\,x \,.\, \mathrm{Cos}\,60^0 = \mathrm{Cos}\,45^0$$

откуда найдем

$$\mathrm{Cos}\,(x - 60^0) = \mathrm{Cos}\,45^0$$

а приравнивая агументы, получим

$$x - 60^0 = 45^0$$

и следовательно

$$x = 105^0$$

а по правилу периодичности $x = 360^0 \;\; k + 105^0$

Таким образом, данное уравнение имеет два корня.

V. Решение системы тригонометрических уравнений обычно производится применяемыми в алгебре приемами (подстановки, сравнения коэффициентов, сравнения неизвестных) после предварительного упрощения данных уравнений.

Пример № 6. Решить систему тригонометрических уравнений:

$$5^{\operatorname{Sin} x} + 3^{\operatorname{Sin} y} = 4$$

$$3(5^{\operatorname{Sin} x}) - 2(3^{\operatorname{Sin} y}) = 5$$

Обозначая $5^{\operatorname{Sin} x}$ через z, $3^{\operatorname{Sin} y}$ через t, будем иметь

$$z + t = 4$$

$$3z - 2t = 5$$

и решая эту систему алгебраических уравнений способом сравнения коэффициентов, получим,

$$t = \frac{7}{5} \text{ и } z = \frac{13}{5}$$

и значит

$$5^{\operatorname{Sin} x} = \frac{13}{5} \text{ и } 3^{\operatorname{Sin} y} = \frac{7}{5}$$

Отсюда по логарифмировании написанных показательных уравнений найдем

$$\operatorname{Sin} x \lg 5 = \lg 13 - \lg 5 \text{ и } \operatorname{Sin} y \lg 3 = \lg 7 - \lg 5$$

откуда

$$\operatorname{Sin} x = \frac{\lg 13}{\lg 5} - 1$$

и

$$\operatorname{Sin} y = \frac{\lg 7}{\lg 3} - \frac{\lg 5}{\lg 3}$$

Обычным применением таблиц логарифмов легко найти искомые x и y.

Задача. Решить систему тригонометрических уравнений:

$$\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Cos}^2 y = a$$
$$\operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 y = b$$

Задача. Решить систему тригонометрических уравнений:

$$\operatorname{Sin}(x - y) = \frac{1}{2} \text{ и } \operatorname{Cos}(x + y) = \frac{1}{2}$$

Глава II.

ТРИГОНОМЕТРИЯ.

ОТДЕЛ VI. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О РЕШЕНИИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 41. РАЗЛИЧНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Аналитическое решение треугольников (§ 1), т.-е. вычисление его элементов по некоторым данным из них, возможно во всех тех случаях когда возможно геометрическое построение треугольников по тем же данным. Из геометрии же известно, что, считая основными элементами треугольника его стороны и углы, треугольник может быть построен в следующих случаях:

1) по трем сторонам;

2) по двум сторонам и углу между ними;

3) по стороне и двум прилежащим к ней углам и

4) по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

При этом построение треугольника, а следовательно и решение его, возможно лишь тогда, когда данные величины удовлетворяют всем геометрическим условиям, выполнение коих обязательно для треугольника.

Поэтому решение треугольника по трем сторонам возможно в тех случаях, когда сумма двух сторон более третьей стороны и разность двух сторон меньше третьей стороны. Равным образом, нельзя решить треугольника, если данный угол его больше 180^0 или два данные угла в отдельности больше 90^0. Наконец, при решении треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, задача оказывается невозможной, если данный угол—тупой, а противолежащая ему сторона меньше другой данной стороны. В этом случае, имея в виду, что против большей стороны лежит и больший угол, оказалось бы, что в треугольнике два тупых угла. Та же задача может иметь и два решения и именно тогда, когда данный угол—острый, а противолежащая сторона меньше другой данной стороны. Единственное же решение эта задача будет иметь тогда, когда данный угол—острый или тупой, а противолежащая сторона больше другой данной стороны. На основании изложенного следует придти к выводу о необходимости, предварительно решения треугольника, удостовериться в возможности существования треугольника, который требуется решить. Приведенные выше соображения применимы как к косоугольным, так и к прямоугольным треугольника

Однако же в отношении этих последних все выводы оказываются значительно более простыми, так как один из элементов треугольника, прямой угол всегда известен и, кроме того, по теореме Пифагора, квадрат гипотенузы равняется сумме квадратов катетов. Поэтому и соответственно указанным выше случаям решения треугольников, прямоугольный треугольник может быть решен в следующих случаях:

1) по гипотенузе и катету (второй катет непосредственно определяется по теореме Пифагора);

2) по двум катетам (между ними заключается прямой угол),

3) по катету и острому углу (второй угол, прилежащий к катету, будет прямой) и

4) по гипотенузе и острому углу (угол, противолежащий гипотенузе, будет прямой).

Конечно, и перед решением прямоугольного треугольника необходимо удостовериться в возможности его существования.

§ 42. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА РЕШЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

При решении треугольников необходимо стремиться к достижению: 1) наибольшей точности искомых величин; 2) отсутствию ошибок в вычислениях, 3) возможному уменьшению вычислительного труда. Принимая во внимание, что решение треугольников производится исключительно при посредстве логарифмических таблиц, для достижения наибольшей точности нужно из имеющихся формул выбирать такие, которые могут обеспечить эту точность при данных логарифмических таблицах. Поэтому те формулы, в кои входят тригонометрические функции тангенса или котангенса в этом отношении представляются предпочтительными (§ 38). Равным образом, непосредственное определение искомых величин по данным тоже увеличивает точность вычислений, так как данные величины следует считать безошибочными и значит при непосредственном определении по этим данным искомых вычислений будет сопровождаться лишь ошибками логарифмических таблиц. Если же искомые величины определять по тем или иным вспомогательным величинам, в свою очередь вычисленным по данным, то в этом случае ошибки вычисления могут оказаться значительно большими, вследствие того, что будут уже ошибочны те вспомогательные величины, которые служат для определения искомых.

Что касается теперь отсутствия ошибок в вычислениях, то это достигается прежде всего контролем или поверкой вычислений. Под контролем вычислений подразумевается вторичное определение искомых величин, причем таковое определение наиболее полезно производить по иным формулам чем те, которые служили для первого вычисления. Это обстоятельство находит себе об'яснение в том, что повторение вычислений с одними и теми же количествами, входящими в прежнем порядке, легко приводит к повторению ошибок, допущенных в первом вычислении, и, следовательно, даст основание признать правильным неверный результат.

При контроле вычислений возможно не только вторично определять искомые величины, но также вычислять данные величины по данным уже искомым и определенным из первого вычисления. В этом случае о правильности вычисления придется судить, сравнивая непосредственно данные величины с теми величинами, которые получились при контрольном вычислении.

В некоторых случаях возможным оказывается применить для контроля вычислений ту или иную формулу, связывающую все искомые величины. Этот способ контроля является наиболее удобным, так как весьма быстро приводит к поставленной цели поверки вычислений.

Правильности вычислений в значительной мере способствует соблюдение тщательности и аккуратности вычислений, выражающихся в отчетливом написании цифр, правильном подписании их одна под другой для сложений и вычитаний, ясном и однообразном отделении (точкой или запятой) целой части десятичной дроби от дробной, разделении основных вычислений от вспомогательных и т. д.

Правильность вычислений достигается также применением при вычислениях так называемых схем, в особенности полезных в целях уменьшения вычислительного труда.

Схемы представляют собою заранее составленное при помощи проводимых на бумаге горизонтальных и вертикальных линий, расположение всех входящих в вычисление формул, причем это расположение производится таким образом, чтобы удобно было производить все действия с входящими в вычисления величинами. Если же одна и та же величина входит в вычисление несколько раз, то необходимо стремиться к тому, чтобы, внеся эту величину в схему один раз, оказалось возможным вычислить все формулы, связанные с этой величиной.

Пусть, например, требуется вычислить при

$$d = 141{,}7 \text{ и } \alpha = 26^0\,10'$$

формулы

$$x = d\,\mathrm{Cos}\,\alpha \text{ и } y = d\,\mathrm{Sin}\,\alpha$$

Логарифмируя эти формулы получим:

$$\lg x = \lg 141{,}7 + \lg \mathrm{Cos}\, 26^0\,10' \text{ и } \lg y = \lg 141{,}7 + \lg \mathrm{Sin}\, 26^0\,10'$$

а производя вычисления, последовательно найдем:

$$\lg x = 2{,}15137 + 9{,}95304 - 10 = 2{,}10441 \text{ и } \lg y = 2{,}15137 + 9{,}64442 - 10 = 1{,}79579$$

И отсюда

$$x = 127{,}18;\ y = 62{,}49$$

Замечая, однако, что lg 141,7 входит в обе формулы, возможно вычисление расположить в следующую схему, которая нагляднее представит ход вычисления, а также несколько сократит и упростит его.

(6)	x	127,18
(4)	lg x	2,10441
(2)	lg Cos 26° 10′	9 . 95304 — 10
(1)	lg 141,7	2,15137
(3)	lg Sin 26° 10′.	9 . 64442 — 10
(5)	lg y	1 . 79579
(7)	y	62 . 49

Порядок вписывания в эту схему величин указан поставленными в скобках слева цифрами, а именно: выписывается один только раз lg 141,7 и затем выше его

lg Cos 26° 10′ (2)

а ниже

lg Sin 26° 10′ (3);

складывая (1 и 2) получим вверху lg x (4), а складывая (1) и (3) получим внизу lg y (5), после чего найдем

x (6) и y (7)

Таким образом, можно сказать, что при помощи схем ход вычислений оказывается более последовательным и наглядным, сокращается и в некоторых случаях весьма значительно вычислительный труд, так как возможно избежать многократного выписывания одних и тех же величин и наконец, вследствие большей наглядности уменьшается возможность ошибок и упрощается само вычисление. При пользовании схемами необходимо некоторые, так называемые вспомогательные вычисления производить на особом листке, а самое лучшее в уме и в схему вписывать только окончательные результаты. К вспомогательным вычислениям относятся: пользование пропорциональными частями логарифмических таблиц, вычисление дополнений логарифмов до 10, сложение и вычитание логарифмов, подписанных непосредственно один под другим, умножение логарифмов, взятых из таблиц, на целые числа (в практических вычислениях чаще всего на 2), деление на целые числа как табличных логарифмов, так и логарифмов, вписанных в схему.

При разыскании углов по логарифмам тригонометрических функций полезно помнить о тех ошибках, коими сопровождается это разыскание (§ 38) и в этом отношении почти всегда оказывается достаточным ограничиваться в определяемых углах целыми секундами.

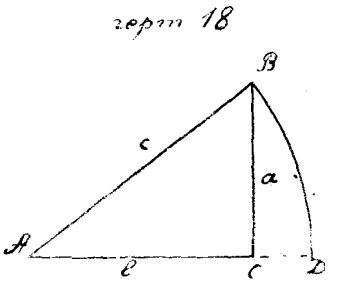
Равным образом, при нахождении чисел по их логарифмам нужно выписывать только пять цифр искомого числа, определяя пятую цифру в зависимости от шестого знака (§ 37), так как при пользовании пятизначными таблицами цифры числа, начиная с шестого знака, будут неверными.

ОТДЕЛ VII. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

§ 43. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Выше (§ 41) указывалось, что решение прямоугольного треугольника возможно:

1) по гипотенузе и катету,
2) по двум катетам,
3) по катету и острому углу и
4) по гипотенузе и острому углу



Таким образом, называя, по предыдущему, элементами треугольника его стороны и углы, для прямоугольного треугольника будем иметь всего пять элементов (три стороны и два острых угла, а третий угол будет прямой) и из них, согласно перечисленным случаям решения, должно быть известно два элемента (в том числе обязательно хотя бы одна сторона) для того, чтобы возможно было вычислить отдельные три элемента. Следовательно, для решения прямоугольного треугольника необходимо иметь три независимых между собой уравнения, связывающие пять названных выше элементов прямоугольного треугольника. Обозначим (черт. 18) углы прямоугольного треугольника буквами A, B и C, а стороны, противолежащие этим углам, — соответственно буквами a, b и c. Непосредственно из чертежа имеем:

$$A + B = 90^0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

и отсюда

$$A = 90^0 - B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

и

$$B = 90^0 - A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Проведя далее из точки A радиусом, равным C, дугу и обозначив точку пересечения ее с продолжением линии AC через D, получим, на основании определения тригонометрических линий и функций что

$$\mathrm{Sin}\, A = \frac{a}{c} \quad (4)$$

и

$$\mathrm{Cos}\, A = \frac{b}{c} \quad (5)$$

А из этих равенств найдем:

$$a = c\, \mathrm{Sin}\, A \quad (6)$$

и

$$b = c\, \mathrm{Cos}\, A \quad (7)$$

и точно также

$$c = \frac{a}{\mathrm{Sin}\, A} \quad (8)$$

$$c = \frac{b}{\mathrm{Cos}\, A} \qquad 9)$$

Уравнения (1), (6) и (7) и представляют собой три основные независимые соотношения между элементами прямоугольного треугольника. Остальные же уравнения (2) — (5), (8) и (9), как полученные из основных, можно называть вспомогательными соотношениями.

Разделив теперь почленно равенство (6) на (7) найдем

$$\frac{a}{b} = \frac{c\,\mathrm{Sin}\, A}{c\,\mathrm{Cos}\, A}$$

или по преобразовании

$$\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\, A$$

и отсюда

$$a = b\,\mathrm{tg}\, A \qquad 10)$$

и точно также

$$b = \frac{a}{\mathrm{tg}\, A}$$

Но, так как (§ 15)

$$\mathrm{ctg}\, A = \frac{1}{\mathrm{tg}\, A}$$

то

$$b = a\,\mathrm{ctg}\, A \qquad 11)$$

Равенства (10) и (11) весьма важны, так как в них входят наиболее точно вычисляемые функции тангенса и котангенса.

Воспользовавшись теперь формулой (2) для подстановки во все формулы $90^0 - B$ вместо угла A, получим по правилам приведения дополнительного аргумента следующий ряд формул:

$$\mathrm{Cos}\, B = \frac{a}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4')$$

$$\mathrm{Sin}\, B = \frac{b}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5')$$

$$a = c\,\mathrm{Cos}\, B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6')$$

$$b = c\,\mathrm{Sin}\, B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7')$$

$$c = \frac{a}{\mathrm{Cos}\, B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8')$$

$$c = \frac{b}{\mathrm{Sin}\, B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9')$$

$$a = b\,\mathrm{ctg}\, B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10')$$

$$b = a\,\mathrm{tg}\, B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11')$$

Легко видеть, что смысл этих формул не изменился по сравнению с формулами (4) — (11) и каждая пара соответствующих формул выражает одно и то же соотношение между элементами прямоугольного треугольника.

В дальнейшем оказывается полезным применение теоремы Пифагора, что при наших обозначениях даст:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \ldots \ldots \quad 12)$$

и отсюда

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)(c-b)} \quad \ldots \quad 13)$$

и

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)} \quad \ldots \quad 13')$$

Наконец, по формулам половинного аргумента (§ 28)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\operatorname{Cos} A}{1+\operatorname{Cos} A}}$$

откуда, на основании формулы (5) этого параграфа, выйдет, что

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{b}{c}}{1+\frac{b}{c}}}$$

или, по приведении к общему знаменателю и сокращении на него получим:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}} \qquad 14)$$

Точно также найдем:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}} \qquad 14')$$

В формулах (14) и (14′) перед радикалом следует брать только знак + так как углы A и B, а следовательно и их половины, всегда острые.

Для удобства запоминания выведенных выше формул дадим некоторым из них словесное выражение. Формулы (6), (7) и (6′), (7′) могут быть выражены следующим образом: катет равняется гипотенузе, умноженной на синус угла, противолежащего катету, или на косинус угла, прилежащего катету.

Формулы (10), (11) и (10′), (11′) выразим так: катет равняется другому катету, умноженному на тангенс угла противолежащего первому катету или на котангенс угла, прилежащего первому катету.

§ 44. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ПЛОЩАДИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Для полного решения треугольника необходимо вычислить, кроме его сторон и углов, также и площадь, которую будем обозначать через s.

Из геометрии известно, что площадь прямоугольного треугольника равняется половине произведения двух катетов. Поэтому, придерживаясь наших обозначений, будем иметь:

$$s = \frac{ab}{2} \qquad 1)$$

Заменяя же теперь a и b по формулам (6) и (7) предыдущего параграфа получим:

$$s = \frac{c\,\mathrm{Sin}\,A \,.\, c\,\mathrm{Cos}\,A}{2}$$

или

$$s = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,A.\,\mathrm{Cos}\,A}{2} \qquad (2)$$

Соответственно этому по формулам (6′) и (7′) того же параграфа найдем

$$s = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,B \,.\, \mathrm{Cos}\,B}{2} \qquad (2')$$

Наконец, имея в виду, что по формуле (10) § 43

$$a = b\,\mathrm{tg}\,A$$

и подставляя $b\,\mathrm{tg}\,A$ вместо a в равенство (1), получим:

$$s = \frac{b^2\,\mathrm{tg}\,A}{2} \qquad (3)$$

и точно также

$$s = \frac{a^2\,\mathrm{tg}\,B}{2} \qquad (3')$$

или

$$s = \frac{b^2\,\mathrm{ctg}\,B}{2} \qquad (4)$$

и

$$s = \frac{a^2\,\mathrm{ctg}\,A}{2} \qquad (4')$$

§ 45. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ГИПОТЕНУЗЕ И КАТЕТУ.

Пусть дано c и a и требуется, следозательно, определить b, A, B и s

Ссылаясь на §§ 43 и 44, в которых выведены все соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, возьмем для данного случая те формулы, в которых неизвестные выражены через данные.

Будем иметь:

$$1)\ b = \sqrt{(c-a)(c+a)}\ ;\ 2)\ \mathrm{tg}\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}\ ;\ 3)\ A = 90^0 - B\ ;\ 4)\ s = \frac{ab}{2}$$

Контрольное вычисление для рассматриваемого случая полезно выполнить по формулам:

$$5)\ \mathrm{tg}\,A = \frac{a}{b} \text{ и } 6)\ s = \frac{c^2}{2}\,\mathrm{Sin}\,A \,.\, \mathrm{Cos}\,A$$

Логарифмируя все написанные формулы, получим последовательно:

$$1)\ 2\lg b = \lg(c-a) + \lg(c+a);\ 2)\ 2\lg \mathrm{tg}\,\frac{B}{2} = \lg(c-a) - \lg(c+a);$$

4) $\lg s = \lg a + \lg b + \text{Compl}\lg 2$; 5) $\lg \operatorname{tg} A = \lg a - \lg b$ и 6) $\lg s = 2\lg c + \lg \operatorname{Sin} A + \lg \operatorname{Cos} A + \text{Compl}\lg 2$

Все эти формулы удобно размещаются в приводимую ниже схему, заполненную примером решения треугольника, причем поставленные слева и справа схемы цифры обозначают порядок вычисления.

Пример № 1. Решить прямоугольный треугольник $c = 415{,}9$ и $a = 93\,6$.

1	c	415,9			
2	a	93,6	A	13° 0′ 23″	16
			lg tg A	9,36358	15
3	c — a	322,3	lg s	4,27795	21
4	c + a	509,5			
24	b	405,2			
7	2 lg b	5,21540	lg a	1,97128	14
			lg b	2,60770	8
5	lg (c — a)	2,50876	Compl lg 2	9,69897	20
6	lg (c + a)	2,70714	2 lg c	5,23798	19
			lg Sin A	9,35230	17
			lg Cos A	9,98871	18
9	$2 \lg \operatorname{tg} \frac{B}{2}$	9,80112			
10	$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2}$	9,90056			
11	$\frac{B}{2}$	38° 29′ 49″	lg s	4,27796	22
12	B	76° 59′ 38″	s	18965	23
13	A	13° 0′ 22″			

По поводу этого вычисления, как, впрочем, и всех последующих, необходимо заметить, что при двукратном вычислении угла A получилась разница в 1″, а при двукратном вычислении $\lg s$ — разница в 0,00001, что вполне об'ясняется ошибками логарифмических таблиц.

§ 46. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ДВУМ КАТЕТАМ.

Если в прямоугольном треугольнике даны катеты a и b и требуется, следовательно, найти c, A, B и S, то из формул §§ 43 и 44 для этого случая окажутся полезными следующие:

$$1)\ \operatorname{tg} A = \frac{a}{b};\ 2)\ \operatorname{tg} B = \frac{b}{a};\ 3)\ c = \frac{a}{\operatorname{Sin} A};\ 4)\ S = \frac{ab}{2}$$

Для проверки вычислений припомним формулы:

$$5)\ A + B = 90^0 \text{ и } 6)\ S = \frac{c^2}{2} \operatorname{Sin} A \,.\, \operatorname{Cos} A$$

Логарифмирование этих формул дает:

1) $\lg \operatorname{tg} A = \lg a - \lg B$; 2) $\lg \operatorname{tg} B = \lg b - \lg a$; 3) $\lg c = \lg a - \lg \operatorname{Sin} A$
4) $\lg s = \lg a + \lg b + \operatorname{Compl} \lg 2$ и 6) $\lg s = 2 \lg c + \lg \operatorname{Sin} A + \lg \operatorname{Cos} A + \operatorname{Compl} \lg 2$

Удобная для рассматриваемого случая схема приведена ниже и заполнена решением треугольника по двум катетам.

Пример № 1. Решить прямоугольный треугольник если $a = 127{,}4$ и $b = 214{,}3$

17	S	13651	c	249,3	18
15	lg S	4,13516	lg c	2,39673	11
13	Compl lg 2	9,69897			
1	lg a	2,10517	lg a	2,10517	2
3	lg b	2,33102	lg Sin A	9,70844	9
			2 lg c	4,79346	12
4	lg tg A	9,77415	lg Cos A	9,93428	10
5	lg tg B	0,22585	Compl lg 2	9,69897	14
6	A	30° 43′ 54″	lg S	4,13515	16
7	B	59° 16′ 06″			
8	A + B	90° 0′ 0″			

Замечание. Для выражения гипотенузы непосредственно через данные величины следовало бы воспользоваться формулой $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Однако, эта формула неудобна для логарифмического вычисления и требует предварительного приведения к логарифмическому виду (помощью введения вспомогательного угла), что привело бы нас (§ 40) к выше взятой для определения гипотенузы формуле:

$$c = \frac{a}{\operatorname{Sin} A}$$

§ 47. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО КАТЕТУ И ОСТРОМУ УГЛУ.

Пусть дано a и A и требуется определить b, c, B и s
Возьмем для этого случая формулы

$$1)\ B = 90^0 - A;\ 2)\ c = \frac{a}{\operatorname{Sin} A};\ 3)\ b = a\operatorname{tg} B;\ 4)\ s = \frac{ab}{2}$$

Контрольное вычисление удобно произвести по формулам

$$5)\ \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} \text{ и } 6)\ s = \frac{c^2}{2}\operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} A$$

По логарифмировании всех этих формул получим:

$$2)\ \lg c = \lg a - \lg \operatorname{Sin} A;\ 3)\ \lg b = \lg a + \lg \operatorname{tg} B;\ 4)\ \lg s = \lg a + \lg b + \operatorname{Compl} \lg 2;\ 5)\ \lg c \operatorname{tg} A = \lg b - \lg a;\ 6)\ \lg s = 2\lg c + \lg \operatorname{Sin} A + \lg \operatorname{Cos} A + \operatorname{Compl} \lg 2$$

Ниже приводится вместе с примером схема решения треугольника в рассматриваемом случае.

Пример № 1. Решить прямоугольный треугольник, если $a = 129{,}7$ и $A = 29^0\,47'$

1	B	$60^0\,13'$			
16	c	261,11			
7	lg c	2,4 683	lg S	4,16721	14
2	lg a	2,11294	Compl lg 2	9,69897	10
4	lg Sin A	9 69611	lg b	2,35530	12
8	2 lg c	4,83306	lg a	2,11294	3
5	lg Cos A	9,93847	lg tg B	0,24236	6
9	Compl lg 2	9,69897			
			lg ctg A	0,24236	13
11	lg S	4,16721	b	226,62	15
17	S	14696			

§ 48. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ГИПОТЕНУЗЕ И ОСТРОМУ УГЛУ.

Если дано c и A и требуется определить a, b, B и S, то для этого случая послужат формулы (§§ 43 и 44)

$$1)\ B = 90^0 - A;\ 2)\ a = c \operatorname{Sin} A;\ 3)\ b = c \operatorname{Cos} A;\ 4)\ s = \frac{c^2}{2}\operatorname{Sin} A \,.\, \operatorname{Cos} A$$

Контрольное вычисление выполнится по формулам:

$$5)\ \operatorname{tg} A = \frac{a}{b};\ s = \frac{ab}{2}$$

Логарифмируя получим:

2) $\lg a = \lg c + \lg \operatorname{Sin} A$; 3) $\lg b = \lg c + \lg \operatorname{Cos} A$; 4) $\lg s = 2\lg c + \lg \operatorname{Sin} A + \lg \operatorname{Cos} A + \operatorname{Compl} \lg 2$; 5) $\lg \operatorname{tg} A = \lg a - \lg b$; 6) $\lg s = \lg a + \lg b + \operatorname{Compl} \lg 2$.

В помещенной ниже схеме решен треугольник по гипотенузе и острому углу.

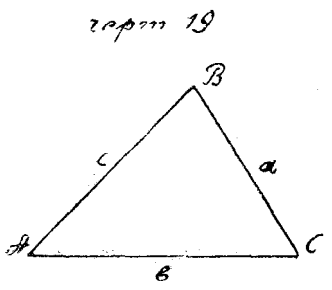
Пример № 1. Решить прямоугольный треугольник, если $c = 246,7$ и $A = 50^0 15'$

1	B	39°45′			
19	a	189,67	lg S	4,17495	16
8	lg a	2,27801			
			lg a	2,27801	12
4	lg Sin A	9,88584	lg b	2,19797	13
2	lg c	2,39217	Compl lg 2	9,69897	14
6	lg Cos A	9,80580	2lg c	4,78434	3
			lg Sin A	9,88584	5
9	lg b	2,19797	lg Cos A	9,80580	7
10	lg tg A	0,08004			
11	A	50°15′	lg S	4,17495	15
18	b	157,75	S	14961	17

ОТДЕЛ VIII. РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

§ 49. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ КОСОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Обозначив по предыдущему углы треугольниика (черт. 19) через A, B и C, а противолежащие им стороны соответственно через a, b и c и считая элементами треугольника только стороны и углы, будем иметь всего шесть элементов и из них, согласно изложенному выше (§ 41), должно быть известно три элемента (в том числе обязательно хотя бы одна сторона) для того, чтобы возможно было решить треугольник.



Таким образом, для решения косоугольного (остроугольного или тупоугольного) треугольника необходимо иметь три независимых соотношения между шестью его элементами.

Прежде всего из геометрии известно, что сумма внутренних углов треугольника равна 180°; поэтому, применяясь к нашим обозначениям получим:

$$A + B + C = 180^0 \qquad 1)$$

а отсюда, по разделении на 2

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^0 \qquad 1')$$

Из формулы (1) также имеем:

$$A + B = 180^0 - C,$$

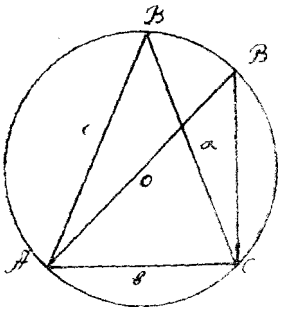
а разделив обе части равенства на 2, найдем:

$$\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}$$

и, на основании правил приведения дополнительного аргумента, можем между прочим, написать, что

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \operatorname{ctg}\frac{C}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1'')$$

черт. 20



Далее, взяв (черт. 20) остроугольный треугольник ABC и описав около него окружность, проведем через точку A диаметр AB_1 и точку B_1 соединим с точкой C. Полученный треугольник AB_1C будет прямоугольный, так как угол ACB_1 опирается на диаметр и поэтому, обозначая радиус круга через R и применяя наши обозначения, найдем по формулам для решения прямоугольных треугольников (§ 43), что

$$b = 2R \operatorname{Sin} B_1$$

Но так как $B_1 = B$, как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, то окончательно

$$b = 2R \operatorname{Sin} B \qquad (2)$$

Доказательство это может быть легко распространено как на стороны a и c взятого остроугольного треугольника, так будет справедливо и для треугольника тупоугольного.

Поэтому можно написать, что

$$a = 2R \operatorname{Sin} A \qquad (3)$$

и

$$c = 2R \operatorname{Sin} C \qquad (4)$$

Определяя теперь 2R из равенства (2) — (4), найдем:

$$2R = \frac{a}{\operatorname{Sin} A}; \quad 2R = \frac{b}{\operatorname{Sin} B} \text{ и } 2R = \frac{c}{\operatorname{Sin} C}$$

Соотношения эти прежде всего позволяют утверждать, что во всяком треугольнике отношение стороны к синусу угла противолежащего есть величина постоянная и равная диаметру описанного круга.

Таким образом

$$\frac{a}{\text{Sin A}} = \frac{в}{\text{Sin B}} = \frac{c}{\text{Sin C}} = 2R$$

Взяв теперь написанные геометрические соотношения попарно и переставив в то же время средние их члены, получим:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Sin A}}{\text{Sin B}} \qquad (5)$$

а также

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{Sin B}}{\text{Sin C}} \qquad (6)$$

и

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{Sin A}}{\text{Sin C}} \qquad (6')$$

Соотношения (5), (6) и (6') в словесной форме выражаются так: во всяком треугольнике стороны относятся, как синусы противолежащих им углов.

Полученные выше равенства (1), (5) и (6) называются основными, и все остальные могут быть выведены из них.

Задача. Доказать, что в тупоугольном треугольнике стороны относятся, как синусы противолежащих углов.

Переходя к доказательству вспомогательных соотношений между элементами косоугольного треугольника, прежде всего вспомним, что квадрат стороны, лежащей против острого угла треугольника, равняется сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения основания на отрезок от вершины острого угла до высоты. Поэтому, применительно к черт. 21, можно написать, что

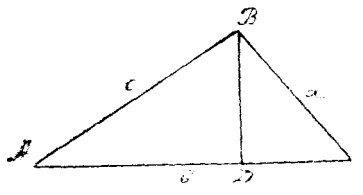
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \,.\, AD$$

Но, на основании формул для решения прямоугольного треугольника (§ 43), из треугольника ABD выйдет, что

$$AD = c \,\text{Cos A}$$

и поэтому

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \text{Cos A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$



Это соотношение для удобства запоминания читается так: квадрат стороны треугольника равняется сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения их на косину, с угла между ними.

Приведенное выше доказательство может быть распространено как на стороны b и c взятого остроугольного треугольника, так окажется справедливым и для треугольника тупоугольного.

Задача. Доказать, что в тупоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен

сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения их на косинус угла между ними.

Выведенное выше соотношение (7) не имеет логарифмического вида и поэтому неудобно для вычислений. Приведение этого соотношения к логарифмическому виду, весьма важное в практическом отношении, выполняется следующим образом.

Определяя Cos A из соотношения (7), получим:

$$\operatorname{Cos} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{8}$$

Вычитая теперь обе части этого равенства из 1, найдем:

$$1 - \operatorname{Cos} A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Но на основании формул для половинного аргумента (§ 28)

$$1 - \operatorname{Cos} A = 2 \operatorname{Sin}^2 \frac{A}{2}$$

и поэтому

$$2 \operatorname{Sin}^2 \frac{A}{2} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

Простые алгебраические преобразования правой части этого равенства последовательно дадут:

$$2 \operatorname{Sin}^2 \frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)}{2bc}$$

или

$$2 \operatorname{Sin}^2 \frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

но, на основании формулы для разности квадратов, получим

$$2 \operatorname{Sin}^2 \frac{A}{2} = \frac{(a + b - c)\ (a - b + c)}{2bc}$$

Принимая теперь, что

$$a + b + c = 2\rho$$

и вычитая из обоих частей этого равенства по 2b, будем иметь:

$$a + b + c - 2b = 2\rho - 2b$$

или

$$a - b + c = 2(\rho - b)$$

Точно также, вычитая по 2c, найдем:

$$a + b - c = 2(\rho - c)$$

А по подстановке получим

$$2 \operatorname{Sin}^2 \frac{A}{2} = \frac{2(\rho - b)\ 2(\rho - p)}{2bc}$$

Наконец, по сокращении и извлечении корня квадратного, выйдет что

$$\operatorname{Sin} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\rho - b)\ (\rho - c)}{bc}} \tag{9}$$

Если теперь к обеим частям равенства (8) прибавим по 1, то получим что

$$1 + \operatorname{Cos} A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Но на основании формул для половинного аргумента (§ 28)

$$1 + \operatorname{Cos} A = 2 \operatorname{Cos}^2 \frac{A}{2}$$

поэтому

$$2 \operatorname{Cos}^2 \frac{A}{2} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Преобразования, однородные с предыдущими дадут:

$$2 \operatorname{Cos}^2 \frac{A}{2} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$$

или

$$2 \operatorname{Cos}^2 \frac{A}{2} = \frac{(b + c + a)\ (b + c - a)}{2bc}$$

Но так как

$$a + b + c = 2p$$

то, по вычитании из общих частей этого равенства по 2a, найдем:

$$b + c - a = 2(p - a)$$

и, следовательно,

$$2 \operatorname{Cos}^2 \frac{A}{2} = \frac{2p \cdot 2(p - a)}{2bc}$$

а по сокращении и извлечении корня, окончательно выйдет, что

$$\operatorname{Cos} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}} \qquad (10)$$

Формулы (9) и (10) уже имеют логарифмический вид; однако, зная, что вычисление углов по тангенсам производится точнее, разделим почленно равенство (9) на равенство (10) и получим:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)\ (p - c)}{p(p - a)}} \qquad (11)$$

Очевидно, подобные выражения могут быть написаны и для углов $\frac{B}{2}$ и $\frac{C}{2}$

и именно:

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)\ (p - c)}{p(p - b)}} \qquad (11')$$

и

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)\ (p - b)}{p(p - c)}} \qquad (11'')$$

Выражения (11) — (11″) весьма важны, так как позволяют вычислить углы треугольника по его сторонам. Вычисление это содержит и

контроль, заключающийся в том, что сумма углов $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ и $\frac{C}{2}$ должна равняться, на основании формулы (11), 90^0. Для удобства вычисления подкоренное выражение формул (11)—(11″) может быть сделано одинаковым умножением и делением его для формулы (11) на (ρ—a), для формулы (11′)—на (ρ—b) и для формулы (11″)—на (ρ—c).

В самом деле, умножая и разделяя подкоренное выражение формулы (11) на ρ—a получим:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\rho-b)(\rho-c)(\rho-a)}{\rho(\rho-a)(\rho-a)}}$$

или, по вынесении (ρ—a) из-под знака радикала, найдем:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{\rho-a}\cdot\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}{\rho}}$$

И. очевидно, точно также

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{\rho-b}\cdot\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}{\rho}}$$

и

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{\rho-c}\cdot\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}{\rho}}$$

Во всех предыдущих выводах перед корнем квадратным взят знак +, так как определяется половина угла треугольника, всегда меньшая 90^0.

Замечание. Необходимо помнить, что входящая в формулы величина ρ есть полупериметр треугольника.

Выведем теперь еще одно соотношение, которое понадобится при решении косоугольных треугольников.

Так как на основании формул (2) и (3) этого параграфа

$$a=2R\operatorname{Sin}A$$

и

$$b=2R\operatorname{Sin}B$$

то по сложении и вычитании этих равенств найдем:

$$a+b=2R(\operatorname{Sin}A+\operatorname{Sin}B)\text{ и }a-b=2R(\operatorname{Sin}A-\operatorname{Sin}B)$$

Разделив теперь почленно полученные равенства одно на другое получим:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{Sin}A+\operatorname{Sin}B}{\operatorname{Sin}A-\operatorname{Sin}B}$$

На основании формул, для суммы и разности синусов двух дуг, (§ 29) будем иметь:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2\operatorname{Sin}\frac{A+B}{2}\cdot\operatorname{Cos}\frac{A-B}{2}}{2\operatorname{Cos}\frac{A+B}{2}\cdot\operatorname{Sin}\frac{A-B}{2}}$$

или, по сокращении и введении функций тангенса и котангенса, найдем

$$\frac{a+b}{a-b}=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{A-B}{2}$$

Но так как для всякого аргумента (§ 15),

$$\operatorname{ctg}\frac{A-B}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$$

то окончательно

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} \qquad (12)$$

Это и есть нужное нам соотношение. Словесное его выражение таково: сумма двух сторон треугольника так относится к их разности, как тангенс полусуммы противолежащих углов относится к тангенсу полуразности их.

Соотношение (12) имеет соответственное применение к любой паре сторон треугольника, причем для удобства вычислений необходимо стремиться к тому, чтобы входящая в формулу разность сторон была положительна. Поэтому, если $b>a$, то формуле (12) следует дать такой вид:

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B+A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}}$$

Из формулы (12) можно написать, что

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{a+b}$$

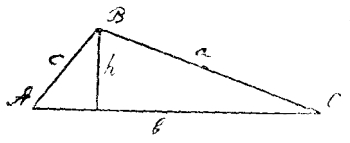
или, на основании формулы (1″), найдем, что

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{a+b} \qquad (12')$$

§ 50. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПЛОЩАДИ КОСОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Если обозначим в треугольнике ABC (черт. 22) высоту, опущенную на сторону b через h, а периметр через 2p, то из геометрии известны следующие выражения для площади треугольника

черт. 22



$$s=\frac{bh}{2} \qquad (1)$$

и

$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (2)$$

При этом в формуле (2) p означает полупериметр треугольника. На основании формул решения прямоугольного треугольника, можно написать, что

$$h=c\sin A$$

а по подстановке в формулу (1), получим

$$s = \frac{bc\,Sin\,A}{2} \tag{3}$$

т.-е. площадь треугольника равняется половине произведения двух сторон на синус угла между ними.

Очевидно, что подобные формулы могут быть написаны и для других сторон и именно:

$$s = \frac{ac\,Sin\,B}{2} \tag{3'}$$

и

$$s = \frac{ab\,Sin\,C}{2} \tag{3''}$$

Так как (§ 49)

$$\frac{a}{b} = \frac{Sin\,A}{Sin\,B} \text{ и } \frac{a}{c} = \frac{Sin\,A}{Sin\,C}$$

то

$$b = \frac{a\,Sin\,B}{Sin\,A} \text{ и } c = \frac{a\,Sin\,C}{Sin\,A}$$

А подставляя найденные величины b и c в формулу (3), получим новое выражение для площади треугольника:

$$s = \frac{a\,Sin\,B \,.\, a\,Sin\,C \,.\, Sin\,A}{2\,Sin\,A \,.\, Sin\,A}$$

или по сокращении

$$s = \frac{a^2\,Sin\,B\,Sin\,C}{2\,Sin\,A} \tag{4}$$

Соответствующие подстановки в формулы (3') и (3'') дадут

$$s = \frac{c^2\,Sin\,A\,Sin\,B}{2\,Sin\,C} \tag{4'}$$

и

$$s = \frac{b^2\,Sin\,A \,.\, Sin\,C}{2\,Sin\,B} \tag{4''}$$

Возьмем теперь выражения для тангенсов половин углов треугольника (§ 49)

$$tg\frac{A}{2} = \frac{1}{\rho - a}\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}{\rho}}$$

$$tg\frac{B}{2} = \frac{1}{\rho - b}\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}{\rho}}$$

$$tg\frac{C}{2} = \frac{1}{\rho - c}\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}{\rho}}$$

Перемножив эти выражения почленно, будем иметь:

$$tg\frac{A}{2}\,.\,tg\frac{B}{2}\,.\,tg\frac{C}{2} = \frac{1}{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}\left[\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}{\rho}}\right.$$

или, по правилу возведения корня в степень, найдем:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}\sqrt{\frac{(\rho-a)^3\cdot(\rho-b)^3(\rho-c)^3}{\rho^3}}$$

а по выведении множителей из под знака радикала окажется

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)\cdot\rho}\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-b)\rho-c)}{\rho}}$$

Уничтожив теперь иррациональность в знаменателе подкоренного выражения и сократив множителя, стоящего перед корнем, будем иметь:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{\rho^2}\cdot\sqrt{\rho(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}$$

Принимая же во внимание формулу (2) этого параграфа, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{s}{\rho^2}$$

и отсюда окончательно

$$s=\rho^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Это выражение для площади треугольника весьма важно в практическом отношении, так как, применяя его при контрольном вычислении, мы при помощи этой формулы контролируем правильность вычисления и сторон и углов. Не нужно забывать, что в этой формуле ρ—полупериметр треугольника.

ОТДЕЛ VIII. РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

§ 51. РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ТРЕМ СТОРОНАМ.

Пусть даны a, b и c и требуется определить A, B, C и s.

Ссылаясь на §§ 49 и 50, возьмем для рассматриваемого случая формулы:

$$1)\ \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{\rho-a}\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}{\rho}}$$

$$2)\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{\rho-b}\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}{\rho}}$$

$$3)\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{\rho-c}\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}{\rho}}$$

$$4)\ s=\sqrt{\rho(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}$$

Контрольное вычисление в этом случае весьма удобно выполняется по формулам:

$$5)\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ \text{ и } 6)\ s=\rho^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Логарифмируя все эти формулы и обозначая для сокращения письма $\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}{\rho}}$ через k, последовательно найдем:

$$1)\ \lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \lg k - \lg(\rho - a);$$

$$2)\ \lg \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \lg k - \lg(\rho - b);$$

$$3)\ \lg \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \lg k - \lg(\rho - c);$$

$$4)\quad \lg S = \lg \rho + \lg(\rho - a) + \lg(\rho - b) + (\rho - c)$$

и $6)\ \lg S = 2\lg\rho + \lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \lg \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \lg \operatorname{tg}\frac{C}{2}$

При этом

$$2\lg k = \lg(\rho - a) + \lg(\rho - b) + \lg(\rho - c) + \operatorname{Compl}\lg\rho.$$

Полученные формулы удобно располагаются в следующую схему, которая заполнена решением треугольника по трем сторонам.

Пример № 1. Решить треугольник, если a = 249,3; b = 860,7 c = 1070,

					lg k	1.77333	17
5	p	1090.1			2 lg k	3.54666	16
1	a	249.3					
2	b	860 7			Compl lg p	6.96253	15
3	c	1070.2			lg (p — a)	2.92469	10
					lg (p — b)	2.36059	11
4	2p	2180 2			lg (p — c)	1.29885	12
					lg p	3.03747	13
6	p — a	840.8					
7	p — b	229.4			2 lg S	9.62160	26
8	p — c	19.9			lg S	4.81080	26
9	p	1090.1			S	64684	28
21	$\frac{A}{2}$	4° 2′ 12″ . 6	A	8° 4′ 25″ . 2	$\lg \operatorname{tg}\frac{A}{2}$	8.84864	18
22	$\frac{B}{2}$	14° 30′ 9″ . 2	B	29° 0′ 18″ . 4	$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2}$	9.41274	19
23	$\frac{C}{2}$	71° 27′ 37″ . 2	C	142° 55′ 14″ . 4	$\lg \operatorname{tg}\frac{C}{2}$	0.47448	20
					2 lg p	6.07494	14
24		89° 59′ 59″		179° 59′ 58″	lg S	4.81080	27

§ 52. РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ МЕЖДУ НИМИ.

Если даны a, b и C и требуется определить A, B, c и S, то из формул §§ 40 и 50 полезными оказываются следующие:

$$1)\ \frac{A+B}{2}=90-\frac{C}{2};\quad 2)\ \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{a+b}$$

$$3)\ c=\frac{a\sin C}{\sin A};\quad 4)\ s=\frac{ab\sin C}{2}$$

При этом, предварительно вычисления формулы (3) необходимо вычислить углы A и B, что легко выполняется, зная $\frac{A+B}{2}$ из формулы (1) и определив $\frac{A-B}{2}$ из формулы (2). Тогда, если обозначим $\frac{A+B}{2}$ через m и $\frac{A-B}{2}$ через n, то

$$\frac{A+B}{2}=m$$

$$\frac{A-B}{2}=n$$

и отсюда по сложении

$$A=m+n$$

а вычитая

$$B=m-n$$

Для проверочного вычисления применим формулу

$$5)\ s=\rho^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

По логарифмировании написанных формул окажется:

2) $\lg\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\lg(a-b)+\operatorname{Compl}\lg(a+b)+\lg\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$; 3) $\lg c=\lg a+$ $+\lg\sin C+\operatorname{Compl}\lg\sin A$; 4) $\lg s=\lg a+\lg b+\lg\sin C+\operatorname{Compl}\lg 2$ и 5) $\lg s=2\lg\rho+\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

Для данного случая возможна нижеприведенная схема, заполненная примером решения треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Пример № 1. Решить треугольник, если $a = 96{,}8$; $b = 74{,}5$; $C = 67^\circ\,24'$.

23	p	134 07			
22	2p	268.14			
21	c	96.84	S	3 329	30
1	a	96.8	lg S	3.52231	29
2	b	74.5	Compl lg 2	9.69897	15
4	a — b	22.3	lg b	1.87216	16
5	a + b	171.3	lg a	1.98588	17
			lg Sin C	9 96530	18
6	lg (a — b)	1.34830	Compl lg Sin A	0.03488	19
7	Compl lg (a + b)	7.76624			
8	$\lg \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$	0.17593	lg c	1.98606	20
9	$\lg \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}$	9.29047	2 lg p	4.25466	24
			$\lg \operatorname{tg} \frac{A}{2}$	9.82362	25
11	$\frac{A+B}{2}$	56° 18′	$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2}$	9.61995	26
10	$\frac{A-B}{2}$	11° 2′ 42″	$\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2}$	9.82407	27
12	A	67° 20′ 42″ $\frac{A}{2}$	33° 40′ 21″	lg S	3.52230 28
13	B	45° 15′ 18″ $\frac{B}{2}$	22° 37′ 39″		
3	C	67° 24 $\frac{C}{2}$	33° 42′		
14		180°	90°		

§ 53. РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО СТОРОНЕ И ДВУМ ПРИЛЕЖАЩИМ УГЛАМ.

Пусть даны a, B и C и требуется определить b, c, A и S. Для этого случая из формул §§ 49 и 50 возьмем следующие:

$$1)\ A = 180^0 - (B + C);\ 2)\ b = \frac{a \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} A};\ 3) c = \frac{a \operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin} A}$$

$$4)\ S = \frac{a^2 \operatorname{Sin} B \,.\, \operatorname{Sin} C}{2 \operatorname{Sin} A}$$

Контрольное вычисление произведем по формуле

$$5)\ S = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Прологарифмировав эти формулы, найдем:

2) $\lg b = \lg a + \lg \operatorname{Sin} B + \operatorname{Compl}\lg \operatorname{Sin} A$; 3) $\lg c = \lg a + \lg \operatorname{Sin} C + \operatorname{Compl}\lg \operatorname{Sin} A$; 4) $\lg S = 2\lg a + \lg \operatorname{Sin} B + \lg \operatorname{Sin} C + \operatorname{Compl}\lg 2 + \operatorname{Compl}\lg \operatorname{Sin} A$ и 5) $\lg S = 2\lg p + \lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \lg \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \lg \operatorname{tg}\frac{C}{2}$

Ниже приведена схема с примером решения треугольника по стороне и двум прилежащим углам.

Пример № 1. Решить треугольник, если $a = 196,5$; $B = 94\ 18'$ и $C = 17^0\ 14'$.

25	S	33962					
24	lg S	4.53100					
7	Compl lg 2	9.69897	B + C	151° 32′			4
8	lg a	2.29336	B	94° 18′	$\frac{B}{2}$	47° 9′	2
10	lg Sin B	9.99878	C	57° 14′	$\frac{C}{2}$	28° 37′	3
9	2 lg a	4.58672	A	28° 28′	$\frac{A}{2}$	14° 14′	5
11	Compl lg Sin A	0.32180					
12	lg Sin C	9.92473		180°		90°	6
13	lg c	2.53689	2 lg p		5.35726		19
14	lg b	2.61394	$\lg \operatorname{tg}\frac{A}{2}$		9.40125		20
15	c	346.65	$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2}$		0.03262		21
16	b	411.09					
1	a	196.5	$\lg \operatorname{tg}\frac{C}{2}$		9,73687		22
17	2p	954.24	lg S		4.53100		23
18	p	477.12					

§ 54. РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ, ПРОТИВОЛЕЖАЩЕМУ ОДНОЙ ИЗ НИХ.

Если дано a, b и A и требуется определить B, C, c и s, то из формул §§ 49 и 50 следует применить:

$$1)\ \operatorname{Sin} B = \frac{b \operatorname{Sin} A}{a};\ 2)\ C = 180^0 - (A + B);\ 3)\ c = \frac{a \operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin} A}$$

$$4)\ s = \frac{ab \operatorname{Sin} C}{2}$$

Контрольное вычисление вновь выполним по формуле:

$$5)\ s = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Прежде чем логарифмировать написанные формулы и располагать полученные логарифмы в схему, остановимся на формуле для определения угла B. Угол этот определяется по функции синуса, а, согласно § 13, одному и тому же синусу соответствует два угла, один из коих оканчивается в первой четверти, а другой—во второй. Иными словами, оба эти угла меньше 180^0 и могут, следовательно, быть углами треугольника. Необходимо поэтому, предварительно решения, исследовать формулу для определения угла B и установить, какой из двух указанных выше углов или оба соответствуют условиям задачи. Выше (§ 41) излагались те основания, по которым возможно установить, сколько именно решений имеет задача, когда данными являются две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них. Однако, теперь полезно исследовать для тех же целей формулу:

$$\operatorname{Sin} B = \frac{b \operatorname{Sin} A}{a}$$

Наибольшее значение синуса есть $+1$, когда угол равен 90^0 и, следовательно, если

$$\operatorname{Sin} B = 1 \text{ или } \frac{b \operatorname{Sin} A}{a} = 1, \text{ т.-е. } b \operatorname{Sin} A = a$$

то рассматриваемый треугольник — прямоугольный. Таким образом, и переходя к логарифмам, если

$$\lg b + \lg \operatorname{Sin} A = \lg a,$$

то мы имеем дело с прямоугольным треугольником, для решения которого должны применяться соответствующие формулы (§ 47).

Функция синуса не может быть больше $+1$ и поэтому, если

$$\operatorname{Sin} B > 1$$

или, значит

$$\frac{b \operatorname{Sin} A}{a} > 1$$

т.-е.

$$b \operatorname{Sin} A > a$$

а логарифмируя

$$\lg b + \lg \operatorname{Sin} A > \lg a$$

то задача невозможна.

Наконец, если

$$\text{Sin B} < 1$$

или, что то же,

$$\frac{\text{b Sin A}}{\text{a}} < 1$$

т.-е.

$$\text{b Sin A} < \text{a},$$

а логарифмируя

$$\lg \text{b} + \lg \text{Sin A} < \lg \text{a},$$

то задача оказывается или возможной и имеющей одно или два решения, или невозможной, в зависимости от величины угла A и длины сторон a и b. Если данный угол A—тупой, а противолежащая ему сторона меньше другой данной стороны b, то задача, очевидно, невозможна. (§ 41). Если же при тупом угле A сторона a больше стороны b, то задача имеет одно решение и именно то, при котором угол B—острый. В самом деле, так как

$$\text{Sin B} = \frac{\text{b Sin A}}{\text{a}}$$

а по условию

$$\text{a} > \text{b} \text{ или } \text{b} < \text{a}$$

то, имея в виду, что $\text{Sin A} < 1$, очевидно, найдем, что $\text{b Sin A} < \text{a}$ или

$$\frac{\text{b Sin A}}{\text{a}} < 1$$

т.-е.

$$\text{Sin B} < 1$$

и задача действительно возможна, а угол B, как лежащий против меньшей стороны, будет острый.

Наконец, при тупом угле A и равных сторонах a и b задача вновь невозможна, т. к. треугольник окажется равнобедренным и, следовательно, углы A и B будут равными, что невозможно, так как в треугольнике не может быть двух тупых углов. Если теперь угол A—острый и $\text{a} > \text{b}$, то, очевидно, и угол B, как лежащий против меньшей стороны, будет также острый, а задача будет иметь одно решение. При остром угле A и при $\text{a} < \text{b}$ задача, в случае ее возможности, имеет два решения, т.-е. угол B, может быть и острым и тупым. Действительно для возможности задачи нужно по предыдущему, чтобы

$$\text{b Sin A} < \text{a}$$

и тогда

$$\text{Sin B} < 1$$

а угол, B, как лежащий против большей стороны, может быть и острым и тупым и, согласно предыдущему, если острый угол будет B, то тупой угол будет 180^0—B. В этом случае мы будем иметь два треугольника с элементами:

для первого a, b, A, B, C, c и S

и для второго a, b, A, 180 — B, C′, c′ и S′

Наконец, если угол A острый и a = b, то треугольник окажется равнобедренным, и прямо A = B.

После приведенного исследования перейдем к логарифмированию формул, взятых для решения треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

Будем иметь:

1) $\lg \operatorname{Sin} B = \lg b + \lg \operatorname{Sin} A + \operatorname{Compl} \lg a$; 2) $\lg c = \lg a + \lg \operatorname{Sin} C + \operatorname{Compl} \lg \operatorname{Sin} A$, 3) $\lg S = \lg a + \lg b + \lg \operatorname{Sin} C + \operatorname{Compl} \lg 2$

и 4) $$\lg S = 2 \lg \rho + \lg \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \lg \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Решим несколько примеров для рассматриваемого случая решения треугольника, сопровождая их исследованием и схемами.

Пример № 1. Решить треугольник, если a = 17,7; b = 84,4 и $A = 81^0 19'$.

Для исследования задачи служит, как мы видели, неравенство

$$\lg b + \lg \operatorname{Sin} A < \lg a.$$

Для данного примера будем иметь

$\lg b$	1.92634
$+ \lg \operatorname{Sin} A$	9.99499
	1.92133

$$\lg a = 1.24797.$$

Задача невозможна, так как

$$1.92133 > 1.24797.$$

Пример № 2. Решить треугольник, если a = 118,6; b = 91,7 $A = 114^0 48'$.

Произведя необходимые для исследования вычисления, получим

$\lg b$	1.96237
$\lg \operatorname{Sin} A$	9.95798
	1.92035

$$\lg a = 2.07408.$$

Задача возможна, так как

$$1.92035 < 2.07408.$$

и имеет одно решение, при котором угол B—острый, потому что угол A—тупой, а сторона, противолежащая углу B, меньше стороны a.

Решение расположим в следующую схему:

12	A+B	$159^0\,22'\,45''$				
3	A	$114^0\,48'$	$\frac{A}{2}$	$57^0\,24'$		
11	B	$44^0\,34'\,45''$	$\frac{B}{2}$	$22^0\,17'\,22''.5$		
13	C	$20^0\,37'\,15''$	$\frac{C}{2}$	$10^0\,18'\,37''.5$		
14		180^0		90^0	a	118.6 1
					b	91.7 2
10	lg Sin B	9.84627			c	46.01 17
6	Compl lg a	7.92592			2p	256.31 18
8	lg Sin A	9.95798			p	128.155 19
7	lg b	1.96237				
4	Compl lg 2	9.69897			2 lg p	4.21548 20
5	lg a	2.07408			lg tg $A\frac{A}{2}$	0.19414 21
15	lg Sin C	9.54677			lg tg $\frac{B}{2}$	9.61269 22
9	Compl lg Sin A	0.04202			lg tg $\frac{C}{2}$	9.25988 23
16	lg c	1.66 87			lg S	3.28219 24
25	lg S	3.28219				
26	S	1915.1				

Пример № 3. Решить треугольник, если $a=164{,}5$; $b=187{,}3$ и $A=47^0$.

Исследование задачи в применении к условиям примера даст

lg b	2.27254
lg Sin A	9.86413
	2.13667

$$\lg a = 2.21617$$

Задача возможна, так как

$$2.13667 < 2.21617$$

и имеет два решения, потому что угол A — острый, а угол B, лежащий против большей стороны, может быть и острым и тупым.

Соответственно двум решениям будем иметь и схему, несколько отличающуюся от схемы примера № 2.

12	A + B	103° 22′47″.1			A+180°—B	170° 37′12″.9							
3	A	47°	$\frac{A}{2}$	23° 30′	A	47°	$\frac{A}{2}$	23° 30′					
11	B	56° 22′47″.1	$\frac{B}{2}$	28° 11′23″.55	180° — B	123° 37′12″ 9	$\frac{180° - B}{2}$	61° 48′36″.45					
13	C	76° 37′12″.9	$\frac{C}{2}$	38° 18′36″.45	C′	9° 22′47″.1	$\frac{C'}{2}$	4° 41′23″.55	a	164.5	a	164.5	1
									b	187.3	b	187.3	2
14		180°		90°		180°		90°	c	218.82	c′	36.66	17
10	lg Sin B	9.92050							2p	570.62	2p′	388.46	18
									p	285.31	p′	194.23	19
6	Compl lg a	7.78383											
8	lg Sin A	9.86413			Compl lg 2	9.69897			2 lg p	4.91064	2 lg p′	4.57664	20
7	lg b	2.27254			lg a	2.21617			lg tg $\frac{A}{2}$	9.63830	lg tg $\frac{A}{2}$	9.63830	21
4	Compl lg 2	9.69897			lg Sin C′	9.21213			lg tg $\frac{B}{2}$	9.72914	lg tg $\frac{180° - B}{2}$	0.27086	22
5	lg a	2.21617			compl lg Sin A	0.13587			lg tg $\frac{C}{2}$	9.89765	lg tg $\frac{C'}{2}$	8.91401	23
15	lg Sin C	9.98805			lg b	2.27254			lg S	4.17573	lg S′	3.39981	24
9	compl lg Sin A	0.13587											
16	lg c	2.34009			lg c′	1.56417							
25	lg S	4.17573			lg S′	3.39981							
26	S	1.4988			S′	2510.8							

Примечание. При решении примеров №№ 1—3 необходимо найденные для исследования логарифмы выписать в схему непосредственно, не производя уже их разыскания второй раз Равным образом и в примере № 3 целый ряд логарифмов входит в вычисление дважды и их следует отыскивать по таблицам только один раз.

Глава III.

ОСНОВНЫЕ НАЧАЛА СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ.

ОТДЕЛ IX. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ.

§ 55. СФЕРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ.

Шаром или сферою называется геометрическое тело, получаемое от вращения полуокружности около диаметра, соединяющего ее концы.

Сферическая поверхность есть геометрическое место точек в пространстве, одинаково удаленных от одной общей точки, называемой центром поверхности. Пространство же, ограниченное со всех сторон сферической поверхностью, также называется шаром или сферою.

Расстояние центра шара от его поверхности называется радиусом шара, а прямая линия, соединяющая две точки его на поверхности и проходящая через центр, называется диаметром шара.

Прямая линия, проходящая через центр шара и продолженная в обе стороны до пересечения с поверхностью шара будет очевидно также диаметром шара, а упомянутые точки называются полюсами. Таким образом, любой диаметр шара образует на его поверхности два полюса. В геометрии доказывается, что сечение шара плоскостью есть круг, причем сечение, не проходящее через центр шара, называется малым кругом, а сечение, проходящее через центр,—большим кругом. Все большие круги шара равны между собой и, пересекаясь, делятся пополам. Малые круги равны между собой, если одинаково удалены от центра.

Большой круг, перпендикулярный к данному диаметру, называется экватором, причем данные полюсы, т.-е. точки, в которых диаметр пересекает поверхность шара, отстоят от экватора, считая по поверхности шара на 90^0. Это ясно из того, что если через данные полюсы провести большой круг, то окружность его разделится окружностью эквотора на четыре равные части.

§ 56. СФЕРИЧЕСКИЙ ДВУСТОРОННИК И УГОЛ.

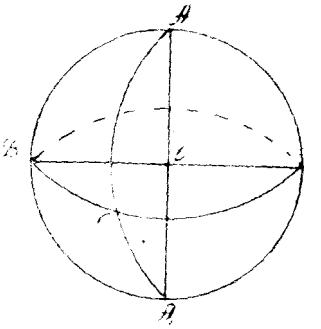
Часть шаровой поверхности, заключенная между полуокружностями двух больших кругов называется сферическим двусторонником или фюзо.

Сферическим углом называется угол, образуемый на сфере пересечением двух дуг больших кругов. Например, если в точке A

черт. 23) пересекаются дуги больших кругов—ABA_1 и ACA_1, то поверхность ABA_1CA будет сферическим двусторонником или фюзо, а угол BAC будет сферическим углом.

Точка пересечения дуг больших кругов, образующих сферический угол, называется его вершиной, а самые дуги, содержащие сферический угол, называются сторонами.

Мерою сферического угла служит двугранный угол, составленный плоскостями больших кругов, дуги которых образуют сферический угол. Так, мерою сферического угла ABA_1CA (черт. 23) является двугранный угол, имеющий ребро AA_1, происшедшее от пересечения двух больших кругов ABA_1 и ACA_1.



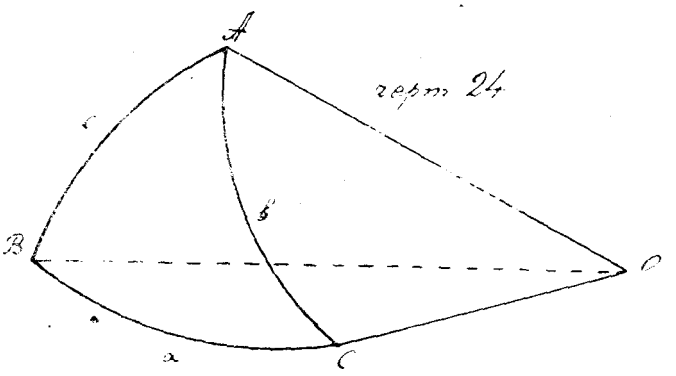
Из геометрии известно, что двугранный угол измеряется линейным углом, образованным из перпендикуляров, проведенных из общей точки O в плоскостях сторон двугранного угла к его ребру. Поэтому если линии OB и OC (черт. 23)—перпендикуляры к ребру двугранного угла, проведенные в плоскости его сторон, то мерой двугранного угла, а следовательно и сферического угла будет линейный угол BOC. Наконец, если через точки B и C провести большой круг, перпендикулярный к диаметру AA_1 (экватор), то угол BOC будет центральным углом, измеряемым дугою BC. Таким образом, сферический угол измеряется дугою большого круга, содержащегося между его сторонами, в отношении какового круга вершина угла есть полюс.

§ 57. СФЕРИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК.

Пусть на сферической поверхности даны три точки A, B и C. Соединим их попарно (A и B, A и C и B и C) дугами больших кругов. На сферической поверхности образуется фигура, называемая сферическим треугольником. Таким образом, сферическим треугольником называется часть шаровой поверхности, ограниченная тремя пересекающимися по две дугами больших кругов. Точки пересечения больших кругов называются вершинами сферического треугольника. Дуги больших кругов, образующие сферический треугольник, называются его сторонами. Длину сторон сферического треугольника обозначают, обыкновенно, малыми буквами, одинаковыми с большими буквами, обозначающими противолежащие сторонам вершины сферического треугольника. Так (черт. 24), сторонами сферического треугольника ABC будут $AB = c$, $BC = a$ и $AC = b$.

В вершинах сферического треугольника образуются сферические углы, которые называются углами сферического треугольника и обычно обозначаются большими буквами, поставленными при вершинах.

Если (черт. 24) O есть центр сферы, на которой построен сферический треугольник ABC, то, соединив вершины его с центром радиусами AO, BO и CO, при центре образуется трехгранный угол с вершиной в точке O. Линейные углы этого трехгранного угла измеряются

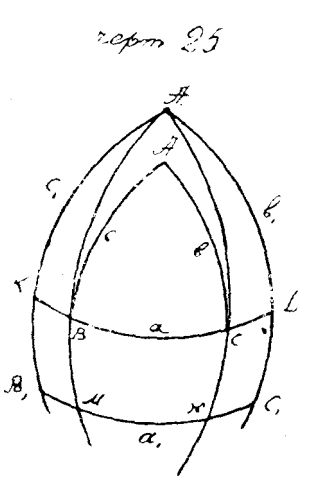


сторонами сферического треугольника, а углы двугранные, ребра которых суть AO, BO и CO равны сферическим углам BAC, ACB и ABC, т.-е. углам сферического треугольника. А это позволяет заключить, что все предложения и теоремы, справедливые для трехгранных углов, будут справедливы и для сферических треугольников.

Задача. Доказать, что в сферическом треугольнике не может быть более двух сторон, больших 180^0.

§ 58. ПОЛЯРНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ.

Примем (черт. 25) вершины данного сферического треугольника ABC за полюсы больших кругов (экваторов) и проведем на поверхности сферы эти круги. В пересечении по два указанные экваторы образуют на шаре сферический треугольник $A_1B_1C_1$, который по отношению к данному называется полярным.



Данный сферический треугольник и соответствующий ему полярный имеют следующие свойства:

1) Вершины данного треугольника служат полюсами противолежащих сторон треугольника полярного.

Справедливость этого предложения вытекает из способа построения полярного треугольника, для кототрого вершины данного треугольника выбираются за полюсы.

II. Вершины полярного треугольника служат полюсами противолежащих сторон треугольника данного.

Для подтверждения справедливости этого свойства необходимо доказать, что расстояние вершин полярного треугольника от соответствующих сторон данного треугольника, считая эти расстояния по дугам больших кругов, всегда равны 90^0.

Проведем (черт. 25) большой круг через точки A_1 и B. Дуга A_1B этого большого круга равна 90^0, так как она представляет расстояние от точки B до точки A_1, расположенной на стороне полярного треугольника A_1C_1, в отношении которой точка B по построению есть полюс. Точно также, если мы проведем через точки A_1 и C дугу большого круга, то и эта дуга A_1C будет равна 90^0, потому что она представляет расстояние от точки C до точки A_1, находящейся на стороне полярного треугольника A_1B_1, для которой точка C является полюсом. Таким образом, точки B и C стороны BC данного треугольника отстоят от вершины A_1 полярного треугольника на 90^0, а потому и всякая другая точка этой стороны будет отстоять от точки A_1 на 90^0; это же доказывает, что A_1 есть полюс для стороны данного сферического треугольника BC.

Подобным образом доказательство можно распространить на вершину B_1 и сторону AC и на вершину C_1 и сторону AB.

III. Угол данного треугольника, сложенный со стороной полярного треугольника, в отношении которой вершина угла есть полюс, равняется 180^0.

Согласно изложенному свойству необходимо доказать, что (черт. 25)

$$A + a_1 = 180^0$$
$$B + b_1 = 180^0$$
$$C + c_1 = 180^0$$

Продолжим большие круги AB и AC до пересечения со стороной полярного треугольника B_1C_1 в точках M и N. Сферический угол A, как указывалось выше, измеряется дугою большого круга, заключающейся между его сторонами, в отношении которой вершина угла есть полюс. А так как по построению вершина A есть полюс дуги B_1C_1 то дуга MN измеряет сферический угол A. Далее из чертежа видим, что

$$A + a_1 = MN + a_1 = B_1N - B_1M + B_1M + MC_1 = B_1N + MC_1$$

Но так как по второму свойству точки B_1 и C_1 являются полюсами для сторон A_1C_1 и A_1B_1, то дуги B_1N и MC_1 равны 90^0, как расстояния полюсов от соответствующих экваторов. Таким образом

$$A + a_1 = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

Изложенным способом можно доказать и справедливость равенств

$$B + b_1 = 180^0 \text{ и } C + c_1 = 180^0$$

IV. Угол полярного треугольника, сложенный со стороною треугольника данного, в отношении которого вершина угла есть полюс, равняется 180^0.

Требуется доказать, что

$$A_1 + a = 180^0$$
$$B_1 + b = 180^0$$
$$C_1 + c = 180^0$$

Продолжим (черт. 25) сторону BC данного треугольника до пересечения со сторонами A_1B_1 и A_1C_1 соответственно в точках K и L. Так как, согласно свойству второму, точка A_1 есть полюс стороны BC, то сферический угол A_1 согласно предыдущего, измеряется дугой KL, заключенной между его сторонами. Поэтому и пользуясь чертежом получим что

$$A_1 + a = KL + a = KB + BL + KC - KB = BL + KC$$

Но дуги BL и KC представляют расстояния от полюсов B и C до сторон полярного треугольника A_1C_1 и A_1B_1 и поэтому каждая из двух дуг равна 90^0, а следовательно

$$A_1 + a = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

Аналогично можно доказать и равенства $B_1 + b = 180^0$ и $C_1 + c = 180^0$.

Доказанное выше свойство позволяет заключить, что если полярный треугольник имеет некоторые свойства (II и IV) в отношении треугольника данного, то и данный треугольник имеет аналогичные свойства (I и III) в отношении треугольника полярного. Поэтому таких два сферических треугольника называются взаимно-полярными.

§ 59. ПОНЯТИЕ О СФЕРИЧЕСКОМ ЭКСЦЕССЕ.

В § 57 указывалось, что все теоремы, доказанные для трехгранного угла, справедливы и для сферического треугольника, стороны которого измеряют линейные углы, а углы измеряют двугранные углы этого трехгранного угла. Из геометрии известно, что сумма линейных углов трехгранного угла менее четырех прямых углов (360^0), поэтому и, придерживаясь прежних обозначений, можно написать, что

$$360^0 > a + b + c$$

и так как очевидно, что сумма сторон сферического треугольника больше 0, то

$$360^0 > a + b + c > 0$$

Заменим теперь стороны a, b и c углами A_1, B_1 и C_1 соответствующего полярного треугольника на основании доказанных в § 58 равенств $A_1 + a = 180^0$, $B_1 + b = 180^0$ и $C_1 + c = 180^0$ получим:

$$360^0 > 180^0 - A_1 + 180^0 - B_1 + 180^0 - C_1 > 0 \text{ или } 360^0 > 540^0 -$$
$$-(A_1 + B_1 + C_1) > 0$$

Из этого двойного неравенства можно написать два таких неравенства

$$540^0 - (A_1 + B_1 + C_1) > 0 \text{ и } 540^0 - (A_1 + B_1 + C_1) > 360^0$$

откуда

$$A_1 + B_1 + C_1 > 540^0 \text{ и } A_1 + B_1 + C_1 > 180^0$$

Второе из этих неравенств приводит нас к выводу, что сумма углов сферического треугольника всегда больше 180^0. Разность между суммой углов сферического треугольника и 180^0 называется *сферическим избытком* или *эксцессом* и обычно обозначается буквой ε. Таким образом для всякого сферического треугольника

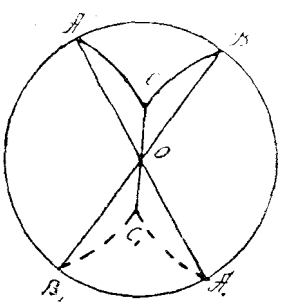
$$(A + B + C) - 180^0 = \varepsilon$$

§ 60. ПОНЯТИЕ О РАВЕНСТВЕ И СИММЕТРИИ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Два сферических треугольника, совпадающие при наложении всеми своими частями, называются *равными*. Очевидно, что равные треугольники имеют и равные площади. Если через вершины данного сферического треугольника ABC провести диаметры шара и соединить по две дугами больших кругов точки A_1, B_1, C_1 пересечения диаметров—с поверхностью шара, то получится сферический треугольник $A_1B_1C_1$, противолежащий данному и называемый *симметричным*.

Из чертежа 26 легко видеть, что все элементы данного треугольника порознь равны соответствующими элементами симметричного треугольника; однако, треугольники эти при наложении не совместимы, чем они и отличаются от равных сферических треугольников. Поэтому же, хотя симметричные треугольники, состоящие из равных элементов и имеют одинаковые свойства, эти треугольники будут лишь *равновелики*, а не равны, т. к. площади их при наложении не совпадают.

Черт. 26



Сферические треугольники, элементы которых одинаково расположены, будут равны в следующих случаях:

1) если имеют равными по две стороны и углу между ними;

2) если имеют равными по стороне и по два угла к ним прилежащим;

3) если имеют равными по три стороны и

4) если имеют равными по три угла.

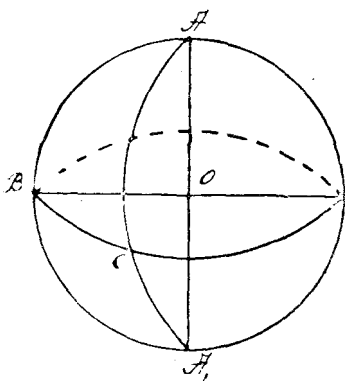
Если в указанных случаях элементы сферических треугольников имеют обратное (симметричное) расположение, то такие треугольники, будут симметричными и равновеликими, а не равными. Первые три случая равенства сферических треугольников, расположенных одинаково, доказываются обычным способом наложения фигур; для доказательства

случая четвертого необходимо от данных треугольников перейти к треугольникам полярным, которые, очевидно, будут иметь равными и одинаково расположенными по три стороны, т.-е. будут равными и у них будут равные углы, а следовательно, по свойству полярных треугольников и три стороны одного данного треугольника будут равны трем сторонам другого данного треугольника, что и докажет равенство этих треугольников.

§ 61. ПОВЕРХНОСТЬ (площадь) СФЕРИЧЕСКОГО ДВУСТОРОННИКА (ФЮЗО).

Пусть (черт. 27) на поверхности шара через концы диаметра $A\,A_1$ проведены две дуги больших кругов, образующих, как известно, фюзо. Сферический угол A попрежнему будет измеряться дугою большого круга BC, и очевидно, что угол A, а следовательно, и поверхность фюзо составят такую же часть поверхности шара, какую дуга BC составляет от целой окружности. Поэтому, обозначая поверхность фюзо через S и вспоминая, что поверхность шара равняется $4\pi R^2$, где R — радиус шара, можем написать

черт. 27



$$S : 4\pi R^2 = BC : 360^0$$

Но т. к. дуга BC служит мерой сферического угла A, то

$$S : 4\pi R^2 = A^0 : 360^0$$

откуда

$$S = \frac{4\pi R^2 \cdot A^0}{360^0}$$

или по сокращении

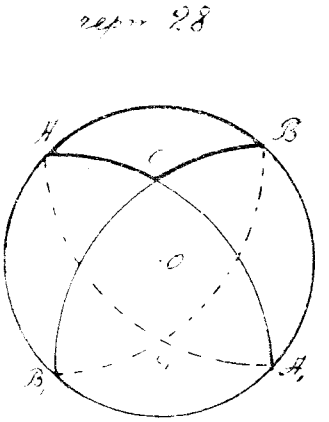
$$S = \pi R^2 \cdot \frac{A^0}{90^0}$$

Так как из геометрии известно, что выражение πR^2 представляет площадь круга, то предыдущая формула читается так: поверхность фюзо равна площади большого круга, умноженной на отношение угла фюзо к 90^0.

§ 62. ПОВЕРХНОСТЬ (площадь) СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Пусть (черт. 28) на поверхности шара имеем сферический треугольник ABC. Дополним его стороны до больших кругов, и тогда на поверхности шара получим три фюзо с углами при вершинах треугольника A, B и C.

Из чертежа видно, что



$$\text{тр. } ABC + \text{тр. } ACB_1 = \text{фюзо } B$$

$$\text{тр. } ABC + \text{тр. } CBA_1 = \text{фюзо } A$$

$$\text{тр. } BC + \text{тр. } BC_1A = \text{фюзо } C.$$

Зная, чему равняется поверхность фюзо и принимая радиус шара за R, можем написать

$$\text{тр. } ABC + \text{тр. } ACB_1 = \pi R^2 \cdot \frac{B^0}{90^0}$$

$$\text{тр. } ABC + \text{тр. } CBA_1 = \pi R^2 \cdot \frac{A^0}{90^0}$$

$$\text{тр. } ABC + \text{тр. } BC_1A = \pi R^2 \cdot \frac{C^0}{90^0}$$

Складывая вышенаписанные равенства, можем написать

$$2 \text{ тр. } ABC + (\text{тр. } ABC + \text{тр. } ACB_1 + \text{тр. } CBA_1 + \text{тр. } BCA_1) =$$

$$= \pi R^2 \left(\frac{A^0 + B^0 + C^0}{90^0} \right)$$

Но треугольник BC_1A будет симметричным с треугольником B_1CA_1 и по свойству симметрии площади этих треугольников равновелики, т.-е.

$$2 \text{ тр. } ABC + (\text{тр. } ABC + \text{тр. } ACB_1 + \text{тр. } CBA_1 + \text{тр. } B_1CA_1) =$$

$$= \pi R^2 \frac{A^0 + B^0 + C^0}{90^0}$$

Из чертежа убедимся, что выражение, стоящее в скобках в левой части вышенаписанного равенства, представляет поверхность полусферы т.-е. $2\pi R^2$ и значит

$$2 \text{ тр. } ABC + 2\pi R^2 = \pi R^2 \cdot \frac{A^0 + B^0 + C^0}{90^0}$$

откуда, обозначая поверхность сферического треугольника ABC через Δ по разделении на 2 обеих частей равенства, найдем

$$\Delta = \pi R^2 \frac{A^0 + B^0 + C^0}{180^0} - \pi R^2$$

или

$$\Delta = \pi R^2 \frac{A^0 + B^0 + C^0 - 180^0}{180^0}$$

Но так как (§ 61) разность между суммой углов сферического треугольника и 180^0 есть сферический эксцесс E, то

$$\Delta = \pi R^2 \cdot \frac{E}{180^0}$$

Таким образом поверхность (площадь) сферического треугольника равна площади большого круга, умноженной на отношение эксцесса к 180^0.

Если известна площадь сферического треугольника Δ, из предидущего равенства можно определить сферический эксцесс именно:

$$E^0 = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{\Delta}{R^2}$$

В написанной формуле эксцесс выражен в градусах; чтобы выразить E в минутах или секундах, надо соответственно обратить 180^0 в минуты или секунды. Будем иметь

$$E' = \frac{180.60'}{\pi} \cdot \frac{\Delta}{R^2}$$

и

$$E'' = \frac{180.60.60''}{\pi} \cdot \frac{\Delta}{R^2}$$

Из плоской тригонометрии известно, что для получения отвлеченного выражения дуги a, градусная мера которой равна α, необходимо решить пропорцию

$$\frac{2\pi}{360^0} = \frac{a}{\alpha}$$

откуда

$$a = 2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} = \pi \frac{\alpha^0}{180^0}$$

или, если α выражена в секундах,

$$a = \pi \frac{\alpha''}{180.60.60''}$$

Очевидно, если мы хотим найти отвлеченную длину дуги градусная мера которой есть $1''$, то обозначая в этом случае a через arc $1''$ и полагая что $\alpha'' = 1$ получим

$$\text{arc } 1'' = \frac{\pi}{180.60.60''}$$

а значит

$$\frac{1}{\text{arc } 1''} = \frac{180.60.60''}{\pi}$$

Отсюда вышенаписанное выражение для эксцесса E примет вид

$$E'' = \frac{1}{\text{arc } 1''} \cdot \frac{\Delta}{R^2}$$

Или так как для малых дуг можно допустить равенство между дугой выраженной в отвлеченной мере и ее синусом, т.-е. можно принять, что

$$\text{arc } 1'' = \text{Sin } 1''$$

то для эксцесса E получится

$$E'' = \frac{\Delta}{R^2 \operatorname{Sin} 1''}$$

Таким образом, сферический эксцесс равен площади сферического треугольника, разделенной на произведение квадрата радиуса на Sin 1″.

Обратно можем написать, что

$$\Delta = E'' R^2 \operatorname{Sin} 1''$$

т.-е. площадь сферического треугольника равняется произведению выраженного в секундах эксцесса на квадрат радиуса шара и Sin 1″

При действительном вычислении нужно помнить, что

$$\operatorname{Sin} 1'' = \frac{1}{206265}$$

§ 63. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ МАЛОГО КРУГА.

Выше (§ 62) указывалось, что для вычисления отвлеченного выражения дуги a, имеющей градусную меру α, необходимо составить пропорцию

$$\frac{a}{2\pi} = \frac{\alpha''}{360 \cdot 60 \cdot 60''}$$

откуда и получится

$$a = \frac{\pi \alpha''}{180 \cdot 60 \cdot 60''}$$

или, согласно предыдущему,

$$a = \alpha'' \cdot \operatorname{Sin} 1''.$$

Очевидно, если радиус круга примем равным R, то выражение для a в частях радиуса получится в виде

$$a = R\alpha'' \operatorname{Sin} 1''$$

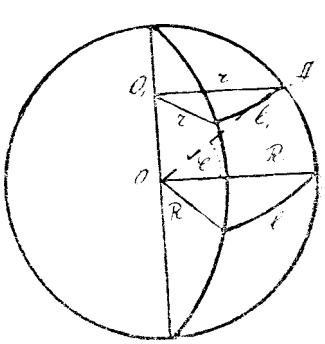
Пусть (черт. 29) на шаре радиуса R имеем дугу большого круга l и параллельную ей дугу l_1 малого круга радиуса r. Дуги эти, имеющие одинаковое число градусов, будут относиться, как радиусы, т.-е.

$$\frac{l_1}{l} = \frac{r}{R}$$

откуда

$$l_1 = l \cdot \frac{r}{R}$$

черт. 29



но из прямоугольного треугольника OO_1A, в котором согласно обозначений чертежа $\angle O_1AO = \varphi$ будем иметь

$$r = R\,Cos\,\varphi$$

или

$$\frac{r}{R} = Cos\,\varphi$$

Таким образом

$$l_1 = l\,Cos\,\varphi$$

т.-е. имея в виду, что дуга l_1 удалена по окружности большого круга от дуги l на φ^0, можем сказать, что дуга малого круга равна имеющей такое же число градусов и параллельной ей дуге большого круга, умноженной на cosinus углового расстояния между этими кругами.

Задача. Определить под широтой в 60^0 длину дуги параллели, если соответствующая ей дуга экватора равна 25 километрам.

ОТДЕЛ X. ФОРМУЛЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ.

§ 64. ПРЕДМЕТ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ.

Сферическая тригонометрия занимается решением сферических треугольников, т.-е. определением неизвестных его элементов по элементам данным. Элементами сферического треугольника служат, как известно, три стороны и три угла его, причем, как оказывается, по трем известным элементам можно определить остальные три элемента сферического треугольника.

§ 65. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОСИНУСА СТОРОНЫ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Пусть (черт. 30) имеем сферический треугольник ABC, вершины которого соединим с центром O шара.

Допустим, что в треугольнике ABC сторона A произвольна, а каждая из сторон b и c меньше 90^0, и проведем в точке A к дугам AB и AC касательные, которые продолжим до пересечения с продолженными радиусами OC и OB соответственно в точках M и N.

Из треугольника AMN можем написать, что

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN\,Cos\,A$$

Точно так же из треугольника OMN получим, что

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON\,Cos\,a$$

Сравнивая теперь правые части этих двух равенств, найдем, что

$$AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN\,Cos\,A = OM^2 + ON^2 - 20M \cdot ON\,Cos\,a$$

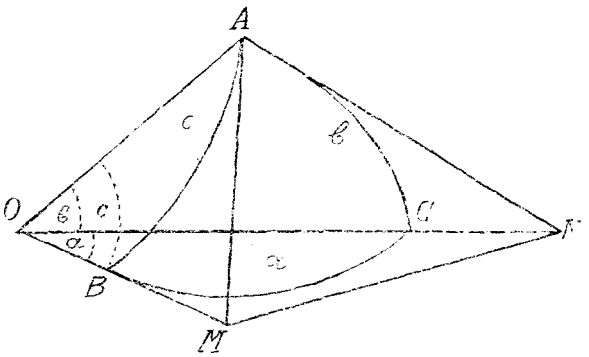
или по перенесении членов из одной части равенства в другую

$$2OM \cdot ON\,Cos\,a = OM^2 + ON^2 - AM^2 - AN^2 + 2AM \cdot AN\,Cos\,A$$

На основании того, что касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку прикосновения, заключаем, что треугольники OAM и OAN будут прямоугольны при точке A, и значит на основании теоремы Пифагора,

$$OM^2 - AM^2 = OA^2 \text{ и } ON^2 - AN^2 = OA^2$$

Черт. 30



По подстановке в предшествующее равенство и сокращении на 2 выйдет, что

$$OM \cdot ON \cos a = OA^2 + AM \cdot AN \cos A$$

или

$$\cos a = \frac{OA}{OM} \cdot \frac{OA}{ON} + \frac{AM}{OM} \cdot \frac{AN}{ON} \cdot \cos A$$

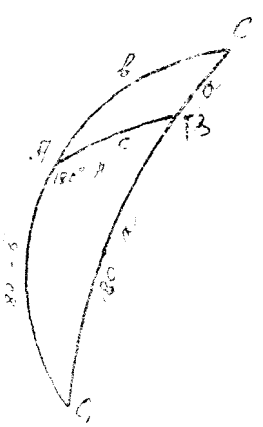
но из тех же прямоугольных треугольников OAM и OAN на основании определений плоской тригонометрии получим, что

$$\frac{OA}{OM} = \cos c; \quad \frac{OA}{ON} = \cos b; \quad \frac{AM}{OM} = \sin c; \quad \frac{AN}{ON} = \sin b$$

и следовательно окончательно

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

Предположим теперь (черт. 31), что в сферическом треугольнике ABC при прежнем значении сторон a и c сторона b больше 90^0. Тогда, продолжив стороны треугольника AC и BC до пересечения в точке C_1, получим сферический треугольник ABC_1, в котором сторона BC_1, равная $180^0 - a$, будет произвольна, сторона $AC_1 = 180^0 - b$ и будет меньше 90^0, т. к. $b > 90^0$, сторона $AB = c$ будет общей с треугольником ABC, т.-е. $c < 90^0$; значит к треугольнику ABC_1 приложимо предшествующее доказательство, и мы можем написать, что



$$\text{Cos}\,(180^0 - a) = \text{Cos}\,(180^0 - b)\,\text{Cos}\,c + \text{Sin}\,(180^0 - b)\,\text{Sin}\,c\,\text{Cos}\,(180^0 - A)$$

так как для всякой дуги

$$\text{Cos}\,(180^0 - a) = -\,\text{Cos}\,a \text{ и } \text{Sin}\,(180^0 - a) = \text{Sin}\,a$$

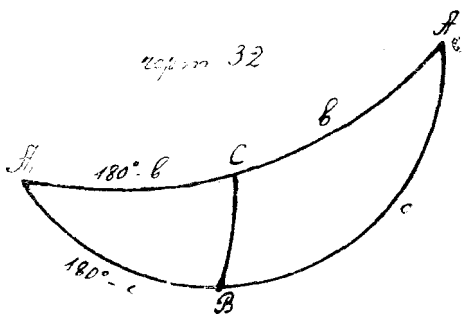
получим, что

$$-\,\text{Cos}\,a = -\,\text{Cos}\,b\,.\,\text{Cos}\,c - \text{Sin}\,b\,\text{Sin}\,c\,\text{Cos}\,A$$

а по умножении на -1 обеих частей равенства найдем, как и в первом случае, что

$$\text{Cos}\,a = \text{Cos}\,b\,.\,\text{Cos}\,c + \text{Sin}\,b\,.\,\text{Sin}\,c.\,\text{Cos}\,A.$$

Пусть, наконец, (черт. 32) в треугольнике ABC при произвольной стороне a каждая из сторон b и c больше 90^0; тогда, дополнив стороны AC и AB треугольника ABC до полуокружности, получим треугольник CBA_1, в котором сторона a общая с треугольником ABC и по условию произвольна, сторона A_1C, равная $180^0 - b$, будет меньше 90^0, т. к. $b > 90^0$ и сторона A_1B, равная $180^0 - c$, будет меньше 90^0, т. к. $c > 90^0$. Затем сферический угол A_1 равняется сферическому углу A, как противолежащие углы фюзо. Поэтому для треугольника A_1BC справедлива выведенная выше формула, т.-е.



$$\text{Cos}\,a = \text{Cos}\,(180^0 - b)\;\text{Cos}\,(180^0 - c) + \text{Sin}\,(180^0 - b)\,\text{Sin}\,(180^0 - c)\;\text{Cos}\,A$$

и значит по прежнему

$$\text{Cos}\,a = \text{Cos}\,b\,.\,\text{Cos}\,c + \text{Sin}\,b\,.\,\text{Sin}\,c\,.\,\text{Cos}\,A.$$

Таким образом, для произвольного сферического треугольника выведенное выше соотношение справедливо и так как, очевидно, об'ясненное доказательство может быть применено к любой стороне треугольника, то будем иметь

$$\text{Cos}\,a = \text{Cos}\,b\,.\,\text{Cos}\,c + \text{Sin}\,b\,.\,\text{Sin}\,c\,.\,\text{Cos}\,A$$
$$\text{Cos}\,b = \text{Cos}\,a\,.\,\text{Cos}\,c + \text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,c\,.\,\text{Cos}\,B$$
$$\text{Cos}\,c = \text{Cos}\,a\,.\,\text{Cos}\,b + \text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,b\,.\,\text{Cos}\,C$$

Формула эта, известная под именем формулы Альбатегния, читается так: **косинус стороны сферического треугольника равняется произведению косинусов двух других сторон, сложенному с произведением синусов этих сторон, умноженным на косинус угла, противолежащего первой стороне.**

Задача. Пользуясь свойствами полярных сферических треугольников, доказать, что

$$\text{Cos A} = -\text{ Cos B . Cos C} + \text{Sin B . Sin C . Cos a}$$
$$\text{Cos B} = -\text{Cos A . Cos C} + \text{Sin B . Sin C . Cos b}$$
$$\text{Cos C} = -\text{Cos A . Cos B} + \text{Sin A . Sin B . Cos c}$$

§ 66. ВЫВОД ФОРМУЛ ЧЕТЫРЕХ СИНУСОВ.

Возьмем выведенные в § 65 формулы Альбатегния для сторон a и b сферического треугольника:

$$\text{Cos a} = \text{Cos b . Cos c} + \text{Sin b . Sin c . Cos A}$$
$$\text{Cos b} = \text{Cos a . Cos c} + \text{Sin a . Sin c . Cos B}$$

Сложим и вычтем почленно эти формулы:

$$\text{Cos a} + \text{Cos b} = \text{Cos c (Cos b} + \text{Cos a)} + \text{Sin c (Sin b . Cos A} + \text{Sin a . Cos B)}$$
$$\text{Cos a} - \text{Cos b} = -\text{Cos c(Cos a} - \text{Cos b)} + \text{Sin c (Sin b . Cos A} - \text{Sin a . Cos B)}$$

По соединении подобных членов, получим:

$$\text{(Cos a} + \text{Cos b) (1} - \text{Cos c)} = \text{Sin c (Sin b . Cos A} + \text{Sin a . Cos B)}$$
$$\text{(Cos a} - \text{Cos b) (1} + \text{Cos c)} = \text{Sin c (Sin b . Cos A} - \text{Sin a . Cos B)}$$

Перемножив почленно полученные равенства, будем иметь

$$\text{(Cos}^2\text{ a} - \text{Cos}^2\text{ b) (1} - \text{Cos}^2\text{ c)} = \text{Sin}^2\text{ c (Sin}^2\text{ b . Cos}^2\text{ A} - \text{Sin}^2\text{ a . Cos}^2\text{ B)}$$

Но так как

$$\text{Cos}^2\text{ a} = 1 - \text{Sin}^2\text{ a};\ \text{Cos}^2\text{ b} = 1 - \text{Sin}^2\text{ b};\ 1 - \text{Cos}^2\text{ c} = \text{Sin}^2\text{ c};$$
$$\text{Cos}^2\text{ A} = 1 - \text{Sin}^2\text{ A и Cos}^2\text{ B} = 1 - \text{Sin}^2\text{ B}$$

то, подставляя и сокращая левую часть равенства на $1 - \text{Cos}^2\text{ c}$, а правую на $\text{Sin}^2\text{ c}$, выйдет, что

$$1 - \text{Sin}^2\text{ a} - 1 + \text{Sin}^2\text{ b} = \text{Sin}^2\text{ b} - \text{Sin}^2\text{ b . Sin}^2\text{ A} - \text{Sin}^2\text{ a} + \text{Sin}^2\text{ a . Sin}^2\text{ B}$$

или по приведении подобных членов

$$\text{Sin}^2\text{ b . Sin}^2\text{ A} = \text{Sin}^2\text{ a . Sin}^2\text{ B}$$

Извлекая из обеих частей корень квадратный, получим

$$\text{Sin b . Sin A} = \text{Sin a . Sin B}$$

или окончательно в виде пропорции

$$\frac{\text{Sin b}}{\text{Sin a}} = \frac{\text{Sin B}}{\text{Sin A}}$$

Приведенное доказательство очевидно можно распространить на любую пару сторон сферического треугольника и значит

$$\frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin} c} = \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} C}$$

и

$$\frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} c} = \frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} C}$$

Выведенные формулы называются формулами четырех синусов и читается каждая из этих формул так: синусы сторон сферического треугольника относятся, как синусы противолежащих им углов.

Переставляя в написанных формулах средние члены, получим:

$$\frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} B} = \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin} A}$$

и

$$\frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} C}$$

а отсюда

$$\frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} B} = \frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} C}$$

т.-е. во всяком сферическом треугольнике отношение синуса стороны к синусу противолежащего угла есть величина постоянная.

§ 67. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СИНУСА СТОРОНЫ НА КОСИНУС УГЛА ПРОТИВОЛЕЖАЩЕГО.

Вновь возьмем формулы Альбатегния для сторон b и a сферического треугольника

$$\operatorname{Cos} a = \operatorname{Cos} b \,.\, \operatorname{Cos} c + \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} c \,.\, \operatorname{Cos} A$$

$$\operatorname{Cos} b = \operatorname{Cos} a \,.\, \operatorname{Cos} c + \operatorname{Sin} a \,.\, \operatorname{Sin} c \,.\, \operatorname{Cos} B$$

подставим во вторую из них выражение для Cos a. Будем иметь

$$\operatorname{Cos} b = (\operatorname{Cos} b \,.\, \operatorname{Cos} c + \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} c \,.\, \operatorname{Cos} A)\ \operatorname{Cos} c + \operatorname{Sin} a \,.\, \operatorname{Sin} c \,.\, \operatorname{Cos} B$$

или, раскрывая скобки,

$$\operatorname{Cos} b = \operatorname{Cos} b \,.\, \operatorname{Cos}^2 c + \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} c \,.\, \operatorname{Cos} A \,.\, \operatorname{Cos} c + \operatorname{Sin} a \,.\, \operatorname{Sin} c \,.\, \operatorname{Cos} B$$

По соединении подобных членов выйдет, что

$$\operatorname{Cos} b\,(1 - \operatorname{Cos}^2 c) = \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} c \,.\, \operatorname{Cos} A \,.\, \operatorname{Cos} c + \operatorname{Sin} a \,.\, \operatorname{Sin} c \,.\, \operatorname{Cos} B$$

Но так как

$$1 - \operatorname{Cos}^2 c = \operatorname{Sin}^2 c$$

то сокращая обе части равенства на Sin c, найдем:

$$\text{Sin c} = \text{Sin b} \cdot \text{Cos c} \cdot \text{Cos A} + \text{Sin a} \cdot \text{Cos B}$$

или по перестановке членов из одной части равенства в другую, получим нужную нам формулу:

$$\text{Sin a} \cdot \text{Cos B} = \text{Cos b} \cdot \text{Sin c} - \text{Sin b} \cdot \text{Cos c} \cdot \text{Cos A}$$

Так как к каждой стороне прилегает по два угла, а сторон в сферическом треугольнике три, то, применяя предыдущий вывод, можно получить всего шесть формул для произведения синуса стороны на косинус угла прилежащего. Эти формулы таковы:

$$\text{Sin a} \cdot \text{Cos B} = \text{Cos b} \cdot \text{Sin c} - \text{Sin b} \cdot \text{Cos c} \cdot \text{Cos A}$$

$$\text{Sin a} \cdot \text{Cos C} = \text{Sin b} \cdot \text{Cos c} - \text{Cos b} \cdot \text{Sin c} \cdot \text{Cos A}$$

$$\text{Sin b} \cdot \text{Cos C} = \text{Sin a} \cdot \text{Cos c} - \text{Cos a} \cdot \text{Sin c} \cdot \text{Cos B}$$

$$\text{Sin b} \cdot \text{Cos A} = \text{Sin c} \cdot \text{Cos a} - \text{Cos c} \cdot \text{Sin a} \cdot \text{Cos B}$$

$$\text{Sin c} \cdot \text{Cos B} = \text{Sin a} \cdot \text{Cos b} - \text{Cos a} \cdot \text{Sin b} \cdot \text{Cos C}$$

$$\text{Sin c} \cdot \text{Cos A} = \text{Sin b} \cdot \text{Cos a} - \text{Cos b} \cdot \text{Sin a} \cdot \text{Cos C}$$

Если принять во внимание, что функции синуса и косинуса называются в плоской тригонометрии сходными, то написанные выше формулы для удобства запоминания читаются так: произведение синуса стороны на косинус прилежащего угла в сферическом треугольнике, равняется произведению синуса другой стороны, ограничивающей тот же угол, на косинус третьей стороны минус произведение сходных функций этих сторон, умноженное на косинус угла противолежащего первой стороне.

Выведенными в §§ 65—67 формулами не исчерпываются соотношения между элементами сферического треугольника, и путем различных преобразований можно вывести еще некоторые формулы. Однако, эти формулы на практике применяются очень редко, и поэтому на выводе их останавливаться не будем.

§ 68. ВЫВОД ФОРМУЛ, СВЯЗЫВАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Если один из углов сферического треугольника ABC (черт. 33) равен 90^0, то такой треугольник называется прямоугольным сферическим треугольником.

Пусть угол A равен 90^0, тогда лежащая против угла A сторона называется гипотенузой, а стороны b и c—катетами.

Для вывода формул, связывающих элементы прямоугольного сферического треугольника можно воспользоваться доказанными выше (§§ 65—67), формулами для произвольного сферического треугольника, положив в них один из углов, например, A равным 90^0 и следовательно,

$$\mathrm{Cos}\,A = 0 \text{ и } \mathrm{Sin}\,A = 1.$$

Выпишем из выведенных раньше формул все те, в которые входит угол A; будем иметь

$$\mathrm{Cos}\,a = \mathrm{Cos}\,b \,.\, \mathrm{Cos}\,c + \mathrm{Sin}\,b \,.\, \mathrm{Sin}\,c \,.\, \mathrm{Cos}\,A \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{Sin}\,a}{\mathrm{Sin}\,b} = \frac{\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Sin}\,B} \tag{2}$$

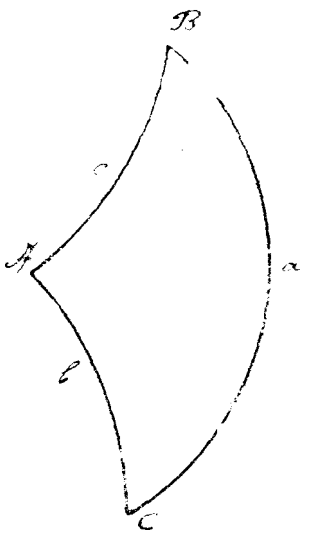
$$\frac{\mathrm{Sin}\,a}{\mathrm{Sin}\,c} = \frac{\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Sin}\,C} \tag{3}$$

$$\mathrm{Sin}\,a \,.\, \mathrm{Cos}\,B = \mathrm{Sin}\,c \,.\, \mathrm{Cos}\,b - \mathrm{Cos}\,c \,.\, \mathrm{Sin}\,b \,.\, \mathrm{Cos}\,A \tag{4}$$

$$\mathrm{Sin}\,a \,.\, \mathrm{Cos}\,C = \mathrm{Sin}\,b \,.\, \mathrm{Cos}\,c - \mathrm{Cos}\,b \,.\, \mathrm{Sin}\,c \,.\, \mathrm{Cos}\,A \tag{5}$$

$$\mathrm{Sin}\,b \,.\, \mathrm{Cos}\,A = \mathrm{Sin}\,c \,.\, \mathrm{Cos}\,a - \mathrm{Cos}\,c \,.\, \mathrm{Sin}\,a \,.\, \mathrm{Cos}\,B \tag{6}$$

$$\mathrm{Sin}\,c \,.\, \mathrm{Cos}\,A = \mathrm{Sin}\,b \,.\, \mathrm{Cos}\,a - \mathrm{Cos}\,b \,.\, \mathrm{Sin}\,a \,.\, \mathrm{Cos}\,C \tag{7}$$



Принимая угол A равным 90^0 из первой формулы, получим:

$$\mathrm{Cos}\,a = \mathrm{Cos}\,b \,.\, \mathrm{Cos}\,c$$

т.-е. косинус гипотенузы прямоугольного сферического треугольника равняется произведению косинусов его катетов.

Из второй формулы найдем

$$\mathrm{Sin}\,b = \mathrm{Sin}\,a \,.\, \mathrm{Sin}\,B$$

точно также из третьей формулы

$$\mathrm{Sin}\,c = \mathrm{Sin}\,a \,.\, \mathrm{Sin}\,C$$

т.-е. синус каждого из катетов прямоугольного сферического треугольника равняется синусу гипотенузы, умноженному на синус противолежащего угла.

Из формул четвертой и пятой выйдет, что

$$\mathrm{Sin}\,a \,.\, \mathrm{Cos}\,B = \mathrm{Sin}\,c \,.\, \mathrm{Cos}\,b$$

и

$$\mathrm{Sin}\,a \,.\, \mathrm{Cos}\,C = \mathrm{Sin}\,b \,.\, \mathrm{Cos}\,c$$

Эти формулы на практике не применяются.

Наконец, из формул шестой и седьмой получим, что

$$O = \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} c . \operatorname{Sin} a . \operatorname{Cos} B$$
$$O = \operatorname{Sin} b . \operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b . \operatorname{Sin} a . \operatorname{Cos} C$$

откуда

$$\operatorname{Cos} B = -\frac{\operatorname{Sin} c . \operatorname{Cos} a}{\operatorname{Cos} c . \operatorname{Sin} a}$$

$$\operatorname{Cos} C = -\frac{\operatorname{Sin} b . \operatorname{Coc} a}{\operatorname{Sin} a . \operatorname{Cos} b}$$

и так как для всякой дуги

$$\frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

то

$$\operatorname{Cos} B = \operatorname{tg} c . \operatorname{ctg} a$$
$$\operatorname{Cos} C = \operatorname{tg} b . \operatorname{ctg} a$$

косинус угла прямоугольного сферического треугольника равняется произведению тангенса прилежащего катета на котангенс гипотенузы.

Те формулы для косоугольного сферического треугольника, которых мы выше, в виду малого их применения, не выводили, позволили бы получить соответствующие формулы для прямоугольного сферического треугольника. Однако, в таком выводе нет никакой надобности, ибо все без исключения формулы, связывающие элементы прямоугольного треугольника, подчиняются одному общему правилу, которое называется мнемоническим правилом Модюи, по имени французского математика, его открывшего. Мнемоническим это правило называется потому, что позволяет не запоминать всех формул, связывающих элементы прямоугольного сферического треугольника.

Правило Модюи заключается в следующем. Рассматривая элементы прямоугольного сферического треугольника ABC (черт. 33) по три, заметим, что три элемента могут лежать рядом, например c, B и a, B, a и C и т. д. или два элемента могут лежать рядом и один отдельно, например, c, a и C, b, a и B и т. д. Принимая теперь дополнительно, что катеты b и c также лежат рядом, или что прямой угол не нарушает смежности и условившись вместо катетов брать их дополнения до 90^0, т.-е. $90^0 - b$ и $90^0 - c$, мнемоническое правило Модюи выразится так:

1) если два элемента прямоугольного сферического треугольника лежат рядом, а третий — отдельно, то косинус отдельно лежащего элемента равняется произведению синусов элементов, лежащих рядом, и

2) если три элемента прямоугольного сферического треугольника лежат рядом, то косинус среднего элемента равняется произведению котангенсов крайних элементов.

Применим это правило к прямоугольному сферическому треугольнику ABC (черт. 33).

Возьмем, например, два катета b и c (они будут лежат рядом, т. к. прямой угол не нарушает смежности) и отдельно лежа элемент гипотенузу a. Тогда по первой части правила Модюи получим

$$\operatorname{Cos} a = \operatorname{Sin}(90^0 - b) \cdot \operatorname{Sin}(90^0 - c)$$

или зная, что

$$\operatorname{Sin}(90^0 - b) = \operatorname{Cos} b \text{ и } \operatorname{Sin}(90^0 - c) = \operatorname{Cos} c$$

найдем, что

$$\operatorname{Cos} a = \operatorname{Cos} b \cdot \operatorname{Cos} c$$

Эту формулу мы вывели раньше.

Пусть теперь имеем отдельно лежащий элемент c и два элемента a и C, лежащих рядом. Применяя опять первую часть правила Модюи, можем написать, то

$$\operatorname{Cos}(90^0 - c) = \operatorname{Sin} a \cdot \operatorname{Sin} C$$

или так как

$$\operatorname{Cos}(90^0 - c) = \operatorname{Sin} c,$$

то

$$\operatorname{Sin} c = \operatorname{Sin} a \cdot \operatorname{Sin} C$$

Такая именно формула тоже была получена нами.

Если будем рассматривать три рядом лежащих элемента c, B и a то, на основании второй части правила Модюи, получим

$$\operatorname{Cos} B = \operatorname{ctg}(90^0 - c) \cdot \operatorname{ctg} a$$

или, зная, что

$$\operatorname{ctg}(90^0 - c) = \operatorname{tg} c$$

найдем выведенную выше формулу

$$\operatorname{Cos} B = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{ctg} a$$

Применим теперь правило Модюи к трем рядом лежащим элементам B, c и b. Будем иметь

$$\operatorname{Cos}(90^0 - c) = \operatorname{ctg}(90^0 - b) \operatorname{ctg} B$$

или имея в виду, что

$$\operatorname{Cos}(90^0 - c) = \operatorname{Sin} c; \ \operatorname{ctg}(90^0 - b) = \operatorname{tg} b \text{ и } \operatorname{ctg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} B}$$

получим

$$\operatorname{Sin} c = \operatorname{tg} b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} B}$$

откуда

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{Sin} c \cdot \operatorname{tg} B.$$

Точно также, применяя правило Модюи к трем рядом лежащим элементам c, b и C, получим

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{tg} C$$

Эти формулы для прямоугольного сферического треугольника нами не были выведены и читаются они так: тангенс катета прямоугольного сферического треугольника равняется синусу другого катета, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету.

Возьмем еще три рядом лежащих элемента B, a и C и, по применении правила Модюи, найдем, что

$$\operatorname{Cos} a = \operatorname{ctg} B \,.\, \operatorname{ctg} C$$

Эта формула тоже новая и читается она так: косинус гипотенузы равняется произведению котангенсов прилежащих к ней углов.

Пусть еще имеем два рядом лежащих элемента b и C и B, отдельно лежащий. По правилу Модюи, выйдет, что

$$\operatorname{Cos} B = \operatorname{Sin}(90^0 - b) \operatorname{Sin} C$$

или

$$\operatorname{Cos} B = \operatorname{Cos} b \,.\, \operatorname{Sin} C$$

Точно такими же рассуждениями, но применяемыми к двум элементам c и B и третьему, отдельно лежащему, C получим:

$$\operatorname{Cos} C = \operatorname{Sin}(90^0 - c) \operatorname{Sin} B$$

или

$$\operatorname{Cos} C = \operatorname{Cos} c \,.\, \operatorname{Sin} B$$

И эти две формулы не были выведены нами. Читаются они так: косинус одного из углов равняется косинусу противолежащего катета, умноженному на синус другого угла.

§ 69. О РЕШЕНИИ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Сферические треугольники могут быть решаемы по трем данным элементам и основными считаются следующие случаи решения сферических треугольников:

1) по двум сторонам и углу между ними;
2) по стороне и двум прилегающим к ней углам;
3) по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них;
4) по трем сторонам и
5) по трем углам.

Что касается прямоугольных сферических треугольников, то решить их возможно по двум данным элементам (считая, конечно, известным и прямой угол) и основными случаями будут решения прямоугольных сферических треугольников:

1) по двум катетам;
2) по гипотенузе и катету;
3) по гипотенузе и одному из прилежащих углов;
4) по катету и прилежащему углу;

5) по катету и противолежащему углу и

6) по двум углам.

Для всех этих случаев решения прямоугольных треугольников, по правилу Модюи, легко получить простые формулы, которые будут к тому же иметь логарифмический вид. Несколько иначе стоит вопрос о решении косоугольных сферических треугольников, для которых выше были выведены различные формулы, за исключением формулы четырех синусов, не имеющие логарифмического вида. Практическое применение этих формул крайне неудобно и поэтому для всех перечисленных случаев решения косоугольных сферических треугольников выводят формулы, имеющие логарифмический вид, преобразуя для этого данные выше основные формулы.

Само собой разумеется, что все изложенные, при решении плоских треугольников указания о правилах расположения вычислений в схемы, контроле вычислений, преимущественного применения формул, выражающих неизвестные величины через функции тангенса, имеют соответствующее применение и при решении сферических треугольников.

Не останавливаясь на разборе всех перечисленных случаев решения косоугольных сферических треугольников, выведем лишь формулы для решения таких треугольников по трем сторонам и по трем углам.

Задача. Доказать, что три угла сферического треугольника определяют не только его вид (форму), но размеры.

§ 70. РЕШЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ТРЕМ СТОРОНАМ.

Пусть даны три стороны a, b и c сферического треугольника требуется определить его углы A, B и C.

Из формулы Альбатегния для стороны a, т.-е. из равенств

$$\operatorname{Cos} a = \operatorname{Cos} b \,.\, \operatorname{Cos} c + \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} c \,.\, \operatorname{Cos} A$$

определим Cos A. Будем иметь

$$\operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b \,.\, \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} C}$$

Вычитая обе части равенства из единицы и приводя правую часть общему знаменателю, получим:

$$1 - \operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} c + \operatorname{Cos} b \,.\, \operatorname{Cos} c - \operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} c}$$

Из плоской тригонометрии известно, что

$$1 - \operatorname{Cos} A = 2 \operatorname{Sin}^2 \frac{A}{2}$$

$$\operatorname{Cos} (b - c) = \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} c + \operatorname{Cos} b \,.\, \operatorname{Cos} c$$

следовательно,

$$2 \operatorname{Sin}^2 \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{Cos} (b - c) - \operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} c}$$

но так как разность косинусов двух дуг равняется удвоенному произведению синуса полусуммы на синус обратной полуразности, то по сокращении частей на 2 выйдет, что

$$\operatorname{Sin}^2\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{b-c+a}{2}\right).\operatorname{Sin}\left(\frac{a-b+c}{2}\right)}{\operatorname{Sin} b\,.\,\operatorname{Sin} c}$$

Обозначив теперь периметр сферического треугольника через 2p, т.-е. приняв, что

$$a+b+c=2p$$

вычтем из обеих частей этого равенства последовательно по 2a, 2b и 2c. Тогда по разделении на 2, получим:

$$\frac{b+c-a}{2}=p-a$$

$$\frac{a+c-b}{2}=p-b$$

$$\frac{a+b-c}{2}=p-c$$

Подставляя же в правую часть написанного выше значения для $\operatorname{Sin}^2\frac{A}{2}$ найденные величины и извлекая корень квадратный из обеих частей равенства, будем иметь:

$$\operatorname{Sin}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(p-b)\operatorname{Sin}(p-c)}{\operatorname{Sin} b\,.\,\operatorname{Sin} c}} \qquad 1$$

Очевидно, выполнив изложенный план преобразования для углов B и C, мы получим следующие формулы:

$$\operatorname{Sin}\frac{B}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(p-a)\operatorname{Sin}(p-c)}{\operatorname{Sin} a\,.\,\operatorname{Sin} c}} \qquad 2$$

$$\operatorname{Sin}\frac{C}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(p-a)\operatorname{Sin}(p-b)}{\operatorname{Sin} a\,.\,\operatorname{Sin} b}} \qquad 3$$

Возвращаясь к полученному выше значению для Cos A прибавим по единице к обеим частям равенства. По приведении правой части к общему знаменателю, найдем

$$1+\operatorname{Cos} A=\frac{\operatorname{Sin} b\,.\,\operatorname{Sin} c-\operatorname{Cos} b\,.\,\operatorname{Cos} c+\operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} b\,.\,\operatorname{Sin} c}$$

Но так как по формулам плоской тригонометрии

$$1+\operatorname{Cos} A=2\operatorname{Cos}^2\frac{A}{2}$$

$$\operatorname{Cos}(b+c)=\operatorname{Cos} b\,.\,\operatorname{Cos} c-\operatorname{Sin} b\,.\,\operatorname{Sin} c$$

то получим:

$$\mathrm{Cos}^2\frac{A}{2}=\frac{\mathrm{Cos}\,a-\mathrm{Cos}\,(b+c)}{\mathrm{Sin}\,b\,.\,\mathrm{Sin}\,c}$$

вспоминая, как и выше, что

$$\mathrm{Cos}\,a-\mathrm{Cos}\,(b+c)=2\,\mathrm{Sin}\left(\frac{a+b+c}{2}\right).\,\mathrm{Sin}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)$$

подстановке и сокращении на 2, будем иметь:

$$\mathrm{Cos}^2\frac{A}{2}=\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{a+b+c}{2}\right).\,\mathrm{Sin}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}{\mathrm{Sin}\,b\,.\,\mathrm{Sin}\,c}$$

Пользуясь же теперь обозначениями, введенными для периметра и извлекая из обеих частей равенства корень квадратный, окончательно найдем:

$$\mathrm{Cos}\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\,p\,.\,\mathrm{Sin}\,(p-a)}{\mathrm{Sin}\,b\,.\,\mathrm{Sin}\,c}}\qquad\ldots\ldots\qquad(4)$$

Применив эти преобразования к углам B и C, очевидно, получим следующие формулы:

$$\mathrm{Cos}\frac{B}{2}=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\,p\,.\,\mathrm{Sin}\,(p-b)}{\mathrm{Sin}\,a\,.\,\mathrm{Sin}\,c}}\qquad\ldots\ldots\qquad(5)$$

$$\mathrm{Cos}\frac{C}{2}=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\,p\,.\,\mathrm{Sin}\,(p-c)}{\mathrm{Sin}\,a\,.\,\mathrm{Sin}\,b}}\qquad\ldots\ldots\qquad(6)$$

Выведенные формулы (1—6), определяющие синусы и косинусы половины углов сферического треугольника имеют логарифмический вид и по этим формулам и можно вычислить углы A, B и C. При этом из двух стоящих перед корнем квадратным знаков нужно брать знак плюс, так как в сферической тригонометрии обычно рассматриваются треугольники, углы которых меньше 180^0, а, следовательно, половины углов меньше 90^0. Если же дается сферический треугольник с углами, большими 180^0, то этот треугольник заменяют другим, дополняющим данный до полусферы и после вычисления искомых элементов для этого треугольника легко получить искомые элементы данного треугольника.

Вычисление аргумента по функциям синуса и косинуса не всегда, как известно, выполняется точно. Поэтому от выведенных выше формул (1—6) полезно перейти к формулам, определяющим углы по тангенсам. Разделяя соответственно формулы (1) на (4), (2) на (5) и (3) на (6) и оставляя перед корнем только знак плюс, получим:

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\,(p-b)\,.\,\mathrm{Sin}\,(p-c)}{\mathrm{Sin}\,p\,.\,\mathrm{Sin}\,(p-a)}}\qquad(I)$$

$$\mathrm{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\,(p-a)\,.\,\mathrm{Sin}\,(p-c)}{\mathrm{Sin}\,p\,.\,\mathrm{Sin}\,(p-b)}}\qquad(II)$$

$$\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\,(p-a)\,.\,\mathrm{Sin}\,(p-b)}{\mathrm{Sin}\,p\,.\,\mathrm{Sin}\,(p-c)}}\qquad(III)$$

По этим формулам в действительности и производится решение сферических треугольников по трем сторонам. Произведение формул (I—III) дает весьма удобное выражение для контроля вычислений. Именно, перемножая почленно эти формулы и сокращая общих множителей, будем иметь:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{\operatorname{Sin}p}\Big|\quad \operatorname{Sin}(p-a)\cdot\operatorname{Sin}(p-b)\cdot\operatorname{Sin}(p-c)$$

Задача. Доказать, что если в прямоугольном сферическом треугольнике угол $A=90^0$ и $2p$ равно периметру его, то

$$\frac{\operatorname{Sin}(p-a)}{\operatorname{Sin}(p-b)}=\frac{\operatorname{Sin}(p-c)}{\operatorname{Sin}p}$$

§ 71. РЕШЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ТРЕМ УГЛАМ.

Пусть даны три угла A, B и C сферического треугольника и требуется определить его стороны a, b и c.

Перейдем к полярному сферическому треугольнику, обозначив его стороны через a_1, b_1 и c_1, углы — через A_1, B_1 и C_1. На основании свойств полярных треугольников будем иметь ряд следующих равенств

$$a_1=180^0-A;\ b_1=180^0-B\ \text{и}\ c_1=180^0-C$$

и

$$A_1=180^0-a;\ B_1=180^0-b\ \text{и}\ C_1=180^0-c$$

или

$$\frac{A_1}{2}=90^0-\frac{a}{2};\ \frac{B_1}{2}=90^0-\frac{b}{2}\ \text{и}\ \frac{C_1}{2}=90^0-\frac{c}{2}$$

Введем теперь обозначение периметра полярного треугольника через $2p_1$, положив, что

$$2p_1=a_1+b_1+c_1$$

или

$$p_1=\frac{a_1+b_1+c_1}{2}=\frac{180^0-A+180^0-B+180^0-C}{2}$$

можем написать, что

$$p_1=\frac{360^0-(A+B+C-180^0)}{2}$$

Но так как разность между суммой углов сферического треугольника 180^0 есть его эксцесс, который обозначим через E, то, очевидно, получим

$$p_1=180^0-\frac{E}{2}$$

Вычитая из обеих частей этого равенства последовательно, по a_1, b_1 и c_1 или на основании написанных выше соотношений по $180^0 - A$, $180^0 - B$ и $180^0 - C$, найдем, что

$$p_1 - a_1 = 180^0 - \frac{E}{2} - 180^0 + A = A - \frac{E}{2}$$

$$p_1 - b_1 = 180^0 - \frac{E}{2} - 180^0 + B = B - \frac{E}{2}$$

$$p_1 - c_1 = 180^0 - \frac{E}{2} - 180^0 + C = C - \frac{E}{2}$$

После этих предварительных преобразований напишем для тангенса половины угла A_1, полярного треугольника выведенную в предыдущем параграфе формулу I. Будем иметь:

$$\operatorname{tg}\frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(p_1 - b_1)\cdot\operatorname{Sin}(p_1 - c_1)}{\operatorname{Sin} p_1 \cdot \operatorname{Sin}(p_1 - a_1)}}$$

и отсюда, пользуясь данными выше соотношениями получим:

$$\operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\left(B - \frac{E}{2}\right)\cdot\operatorname{Sin}\left(C - \frac{E}{2}\right)}{\operatorname{Sin}\frac{E}{2}\cdot\operatorname{Sin}\left(A - \frac{E}{2}\right)}}$$

Но так как

$$\operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{a}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{a}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}$$

то из предыдущей формулы легко получится, что

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{E}{2}\cdot\operatorname{Sin}\left(A - \frac{E}{2}\right)}{\operatorname{Sin}\left(B - \frac{E}{2}\right)\operatorname{Sin}\left(C - \frac{E}{2}\right)}} \qquad (I)$$

и по тому же самому плану для сторон b и c, найдем

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{E}{2}\cdot\operatorname{Sin}\left(B - \frac{E}{2}\right)}{\operatorname{Sin}\left(A - \frac{E}{2}\right)\operatorname{Sin}\left(C - \frac{E}{2}\right)}} \qquad (II)$$

и

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{E}{2}\cdot\operatorname{Sin}\left(C - \frac{E}{2}\right)}{\operatorname{Sin}\left(A - \frac{E}{2}\right)\operatorname{Sin}\left(B - \frac{E}{2}\right)}} \qquad (III)$$

Почленное произведение формул (I—III) приведет нас к формуле

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{Sin}\frac{E}{2}\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{E}{2}}{\operatorname{Sin}\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\operatorname{Sin}\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\operatorname{Sin}\left(C-\frac{E}{2}\right)}}$$

Формулы (I—III) и разрешают задачу определения трех сторон треугольника по трем углам, причем последняя формула служит для контроля вычислений.

Согласно предыдущего параграфа для треугольника полярного по отношению к данному можно, придерживаясь принятых обозначений, написать

$$\operatorname{Sin}\frac{A_1}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(p_1-b_1)(p_1-c_1)}{\operatorname{Sin}b_1\cdot\operatorname{Sin}c_1}}$$

или по подстановке

$$\operatorname{Sin}\left(90^0-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\operatorname{Sin}\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\operatorname{Sin}(180^0-B)\cdot(\operatorname{Sin}180^0-C)}}$$

и отсюда

$$\operatorname{Cos}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\operatorname{Sin}\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\operatorname{Sin}B\cdot\operatorname{Sin}C}} \qquad (IV)$$

и точно также

$$\operatorname{Cos}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\operatorname{Sin}\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\operatorname{Sin}A\cdot\operatorname{Sin}C}} \qquad (V)$$

и

$$\operatorname{Cos}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\operatorname{Sin}\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\operatorname{Sin}A\cdot\operatorname{Sin}B}} \qquad (VI)$$

Равным образом имеем

$$\operatorname{Cos}\frac{A_1}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}p_1\cdot\operatorname{Sin}(p_1-a_1)}{\operatorname{Sin}b_1\cdot\operatorname{Sin}c}}$$

откуда по замене элементов полярного треугольника найдем:

$$\operatorname{Cos}\left(90^0-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\left(180^0-\frac{E}{2}\right)\operatorname{Sin}\left(A-\frac{E}{2}\right)}{\operatorname{Sin}(180-B)\cdot\operatorname{Sin}(180-C)}}$$

или

$$\operatorname{Sin}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{E}{2}\cdot\operatorname{Sin}\left(A-\frac{E}{2}\right)}{\operatorname{Sin}B\cdot\operatorname{Sin}C}} \qquad (VII)$$

и по тому же плану

$$\operatorname{Sin}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{E}{2}\cdot\operatorname{Sin}\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\operatorname{Sin}A\cdot\operatorname{Sin}C}} \qquad \text{(VIII)}$$

и

$$\operatorname{Sin}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{E}{2}\cdot\operatorname{Sin}\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\operatorname{Sin}A\cdot\operatorname{Sin}B}} \qquad \text{(IX)}$$

§ 72. ФОРМУЛЫ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО ЭКСЦЕССА.

Из определения сферического эксцесса следует, что если даны три угла A, B и C сферического треугольника, то величина эксцесса определяется из формулы

$$E=(A+B+C)-180^{\circ}$$

Если теперь даны три стороны a, b и c сферического треугольника то его эксцесс E может быть вычислен следующем образом:

Выше (§ 71) мы, между прочим, имели формулы VI—VIII.

Перемножая почленно формулы (VII) и (VIII) и разделив произведение на формулу (VI), получим

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{Sin}\frac{b}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{c}{2}}=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}^2\frac{E}{2}\cdot\operatorname{Sin}\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\operatorname{Sin}\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\operatorname{Sin}A\cdot\operatorname{Sin}B}{\operatorname{Sin}A\cdot\operatorname{Sin}B\cdot\operatorname{Sin}^2C\cdot\operatorname{Sin}\left(A-\frac{E}{2}\right)\cdot\operatorname{Sin}\left(B-\frac{E}{2}\right)}}$$

или по сокращении и извлечении корня

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{Sin}\frac{b}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{c}{2}}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{E}{2}}{\operatorname{Sin}C}$$

а отсюда

$$\operatorname{Sin}\frac{E}{2}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{Sin}\frac{b}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{c}{2}}\cdot\operatorname{Sin}C$$

Из плоской тригонометрии известно, что

$$\operatorname{Sin}C=\operatorname{Sin}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{Cos}\frac{C}{2}$$

а на основании формул (3) и (6) § 70, имеем:

$$\operatorname{Sin}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(p-a)\cdot\operatorname{Sin}(p-b)}{\operatorname{Sin}a\cdot\operatorname{Sin}b}}$$

$$\operatorname{Cos}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}p\cdot\operatorname{Sin}(p-c)}{\operatorname{Sin}a\cdot\operatorname{Sin}b}}$$

значит

$$\rho\sqrt{\frac{\operatorname{Sin} p \cdot \operatorname{Sin}(p-a) \cdot \operatorname{Sin}(p-b) \cdot \operatorname{Sin}(p-c)}{\operatorname{Sin}^2 a \cdot \operatorname{Sin}^2 b}}$$

эти выражения в выше написанную формулу, для $\operatorname{Sin}\frac{E}{2}$, получим:

$$\operatorname{Sin}\frac{E}{2} = \frac{2\operatorname{Sin}\frac{a}{2} \cdot \operatorname{Sin}\frac{b}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{c}{2} \cdot \operatorname{Sin} a \cdot \operatorname{Sin} b}\sqrt{\operatorname{Sin} p \cdot \operatorname{Sin}(p-a) \cdot \operatorname{Sin}(p-b) \cdot \operatorname{Sin}(p-c)}$$

но так как

$$\operatorname{Sin} a = 2\operatorname{Sin}\frac{a}{2} \cdot \operatorname{Cos}\frac{a}{2}$$

и

$$\operatorname{Sin} b = 2\operatorname{Sin}\frac{b}{2} \cdot \operatorname{Cos}\frac{b}{2}$$

то

$$\operatorname{Sin}\frac{E}{2} = \frac{2\operatorname{Sin}\frac{a}{2} \cdot \operatorname{Sin}\frac{b}{2}}{4\operatorname{Cos}\frac{c}{2} \cdot \operatorname{Sin}\frac{a}{2} \cdot \operatorname{Cos}\frac{a}{2} \cdot \operatorname{Sin}\frac{b}{2} \cdot \operatorname{Cos}\frac{b}{2}}\sqrt{\operatorname{Sin} p \cdot \operatorname{Sin}(p-a) \cdot \operatorname{Sin}(p-b) \cdot \operatorname{Sin}(p-c)}$$

или, по сокращении, найдем окончательно

$$\operatorname{Sin}\frac{E}{2} = \frac{\sqrt{\operatorname{Sin} p \cdot \operatorname{Sin}(p-a) \cdot \operatorname{Sin}(p-b) \cdot \operatorname{Sin}(p-c)}}{2\operatorname{Cos}\frac{a}{2} \cdot \operatorname{Cos}\frac{b}{2} \cdot \operatorname{Cos}\frac{c}{2}} \qquad \text{(II)}$$

Это и есть формула для вычисления эксцесса сферического треугольника по трем сторонам, причем p в формуле обозначает полупериметр его, т.-е.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

При с'емках больших районов, равно как в целях изучения размеров и формы земли, на земной поверхности прокладываются так называемые тригонометрические сети, представляющие ряд примыкающих один к другому треугольников. В этих треугольниках измеряются все углы и одна из сторон какого-нибудь треугольника (базис). Стороны указанных треугольников, расположенные на сферической поверхности земли будут, очевидно, дугами больших кругов, а сами треугольники—сферическими.

Однако, незначительность сторон этих треугольников, по сравнению с радиусом земли (стороны редко превосходят 100 верст, соответствующих на земле, примерно, дуге в один градус), во многих случаях позволяет считать треугольники сети плоскими и применять к вычислениям

формулы плоской тригонометрии. Но и принимать треугольники сети за сферические, то все же в виду малой градусной чины сторон их, при вычислениях применяют формы ферической тригонометрии. В частности имеется упрощенная для вычисления эксцесса малых сферических треугольников. Конечно, если известны из измерения в натуре все три угла малого сферического треугольника, то эксцесс его мог бы определяться их выше написанной формулы 1. Однако, величина эксцесса для малых сферических треугольников столь мала, что ошибки, допускаемые при измерении углов, значительно превышают эксцесс. Например, при длине сторон в 20 верст, эксцесс треугольника равен 1″, для треугольника со сторонами в 150 верст эксцесс не превосходит 1′. Поэтому в этих случаях эксцесс вычисляют на основании следующих рассуждений.

Пусть для малого сферического треугольника на земной поверхности, радиус которой обозначим через R, линейная длина сторон равна α, β γ, а угловая—a, b и c. Тогда известно, что для малых дуг

$$\mathrm{Sin}\, a'' = a'' \mathrm{Sin}\, 1''; \mathrm{Sin}'' b = b'' \mathrm{Sin}\, 1''; \mathrm{Sin}\, c'' = \mathrm{Sin}\, 1''$$

Но так как по известной формуле для определения длины дуги по ее градусной величине

$$a'' = \frac{\alpha}{R} \cdot \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi}; \quad b'' = \frac{\beta}{R} \cdot \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} \text{ и } c'' = \frac{\gamma}{R} \cdot \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi}$$

то зная, что

$$\frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} = \frac{1}{\mathrm{Sin}\, 1}$$

получим

$$a'' \cdot \mathrm{Sin}\, 1'' = \frac{\alpha}{R}; b'' \mathrm{Sin}\, 1'' = \frac{\beta}{R} \text{ и } c'' \mathrm{Sin}\, 1'' = \frac{\gamma}{R}$$

значит

$$\mathrm{Sin}\, a'' = \frac{\alpha}{R}; \mathrm{Sin}\, b'' = \frac{\beta}{R} \text{ и } \mathrm{Sin}\, c = \frac{\gamma}{R}$$

Очевидно по тем же соображениям

$$\mathrm{Sin}\, \frac{a}{2} = \frac{\alpha}{2R} \mathrm{Sin}\, \frac{b}{2} = \frac{\beta}{2R} \text{ и } \mathrm{Sin}\, \frac{c}{2} = \frac{\gamma}{2R}$$

Подставив теперь эти величины в полученное выше при выводе формулы эксцесса выражение

$$\mathrm{Sin}\, \frac{E}{2} = \frac{\mathrm{Sin}\, \frac{a}{2} \cdot \mathrm{Sin}\, \frac{b}{2}}{\mathrm{Cos}\, \frac{c}{2}} \mathrm{Sin}\, C$$

приняв приближенно по малости c, что

$$\mathrm{Cos}\, \frac{c}{2} = 1$$

получим

$$\mathrm{Sin}\, \frac{E}{2} = \frac{\alpha\beta}{4R^2} \mathrm{Sin}\, C$$

Рассматривая данный треугольник за плоский, можно написать известную из стереометрии формулу отношения сторон к синусам противолежащих углов. Именно, что углы плоского треугольника равны углам сферического, и, обозначая их попрежнему через A и B, будем иметь

$$\frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\sin B}$$

откуда

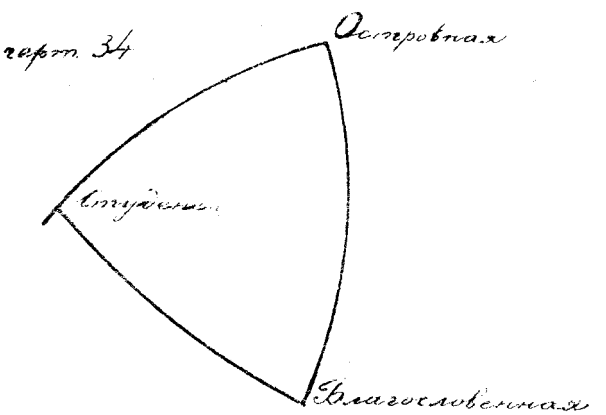
$$\beta = \frac{\alpha \sin B}{\sin A}$$

а по подстановке в выражение для эксцесса найдем

$$\sin \frac{E}{2} = \frac{\alpha^2 . \sin B . \sin C}{4R^2 . \sin A}$$

или окончательно, полагая по малости эксцесса E, что

$$\sin \frac{E}{2} = \frac{E''}{2} \sin 1''$$



выйдет, что

$$E'' = \frac{\alpha^2 . \sin B . \sin C}{R^2 . \sin A . \sin 1''} \qquad III$$

По этой формуле и вычисляется эксцесс для малых сферических треугольников.

Приведем в заключение без вывода формулу французского математика Люилье.

Если в сферическом треугольнике a, b и c—градусная величина сторон и p—полупериметр, т.-е.

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

то формула Люилье имеет следующий вид

$$\operatorname{tg} \frac{E}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} . \operatorname{tg} \frac{p - a}{2} . \operatorname{tg} \frac{p - b}{2} . \operatorname{tg} \frac{p - c}{2}} \qquad IV)$$

Эта формула применяется для вычисления эксцесса когда даны три стороны сферического треугольника.

Пример. На черт. 34 изображен треугольн русского градусного измерения по 52 параллели Для угольника углы равны: Студенец $90^0\,14''\,55'',02$; Островная $55^0\,11'\,8''.6$ и Благословенная $34^0\,33'\,57'',26$ и длина стороны Островная-Студенец равна 19447,1 метра. Вычислить эксцесс. Радиус земли принимается в 6383731 метр. Формула III для данного примера примет вид

$$\frac{19447,1^2 \operatorname{Sin} 90^0\,14'\,55'',02 \operatorname{Sin} 55^0\,11'\,8'',86}{2\,.\,(6383731)^2 \operatorname{Sin} 34^0\,33'\,57'',26}$$

Применяя пятизначные таблицы логарифмов, последовательно получим,

	$\lg 2 = 0.30103$
$2 \lg 19.447,1 = 8.57771$	$2 \lg 6383731 = 13.61015$
$\lg \operatorname{Sin} 90^0\,14'\,55''.02\,. = 0.00000$	$\lg \operatorname{Sin} 34^0\,33'\,57''.26 = 9.75385$
$\lg \operatorname{Sin} 55^0\,11'\,8''.86 = 9.91434 - 10$	$\lg \operatorname{Sin} 1'' = 4.68558 - 10$
$\lg$ числителя $8.49205 - 10$	$\lg$ знаменателя $18.35061 - 10$

Следовательно,

$$\lg \varepsilon'' = 0\,.\,14144$$

значит

$$\varepsilon'' = 1''\,.\,385.$$