БИБЛИОТЕКА ТЕХНИКА

МЕЛЕНТЬЕВ П. В.

БЫСТРЫЕ
и
УСТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Москва.

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

Библиотека техника

МЕЛЕНТЬЕВ П. В.

БЫСТРЫЕ И УСТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Москва

Просьба прислать Ваш отзыв об этой книге по адресу: Москва, ГСП2, проезд им. Владимирова (б. Юшков пер.), 4, Гостехиздат (отзыв).

Т. Серия 14.

Главлит № А—60988. Зак. № 855 1980 г. Тираж 7100 экз

ГЛАВА I.

Умножение.

Возьмем два трехзначных числа

327 и 456

перемножим их:

```
   × 327
     456
  ------
    1962
+  1635
   1308
  ------
  149112
```

Разобьем это действие на отдельные

```
   × 327
     456
  ------
      42 }
     12  } I
    18   }
     35 }
+   10  } II
   15   }
    28 }
    8  } III
  12   }
  ------
  149112
```

Произведение не изменится, если мы, оставив элементы изменными, разместим их иначе:

```
   × 3 2 7
     4 5 6
  ---------
        4 2        I
      1 2 }
      3 5 } II
    1 8   }
+   1 0   } III
    2 8   }
  1 5     }
    8     } IV
1 2         V
---------
1 4 9 1 1 2
```

Мы видим, что, при определенном расположении элементов они могут дать группы, обладающие следующим свойством:

Группа I дает возможность определить первую цифру произведения, группа II определяет собою вторую цифру произведения и т. д. Следовательно, для получения некоторой последующей цифры произведения нужно сложить остаток от предыдущего числа с произведениями соответствующей группы. Так, в нашем примере, для получения первой цифры произведения имеем в группе I одно число 42, количество единиц которого 2 и дает первую цифру произведения. Число десятков 4 — остаток для следующей цифры. Вторая цифра получится, если сложим остаток 4 с произведениями группы II.

$$\begin{array}{r} 4 \\ +\ 12 \\ 35 \\ \hline 51 \end{array}$$

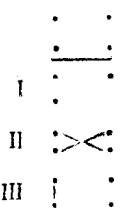
Следовательно, вторая цифра будет 1, а остаток для следующей цифры—5

Если складывать остаток с числами, составляющими группу, в уме, без записи, то все перемножение можно будет записать так:

$$\begin{array}{r} \times\ \begin{array}{r} 327 \\ 456 \end{array} \\ \hline 149112 \end{array}$$

Перейдем к тому, как составлять группы.

Начнем с перемножения двузначных чисел, для чего составим следующий график:



В этом графике точками обозначены цифры сомножителей

Из графика следует:

Первую (крайнюю правую) цифру (I) произведения дает произведение единиц сомножителей.

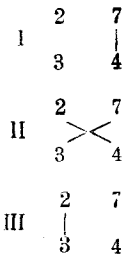
Вторую цифру (II) дает сумма из остатка от первой цифры, произведения десятков множимого на единицы множителя и произведения единиц множимого на десятки множителя.

Третью цифру (III) дает сумма из остатка от второй цифры и произведения десятков, множимого на десятки множителя

Решим пример:

$$\begin{array}{r} \times\ 27 \\ 34 \\ \hline 918 \end{array}$$

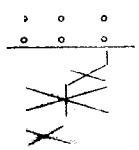
График:



Место I $7 \times 4 = 28$, 8 пишем, 2 — в уме (остаток).
„ II $2 + 2 \times 4 + 7 \times 3 = 31$, 1 „ 3 — „ „ „
„ III $3 + 2 \times 3 = 9$, 9 „

Перейдем к перемножению трехзначных чисел. Если график для двузначных чисел был:

то для трехзначных он будет иметь следующий вид:

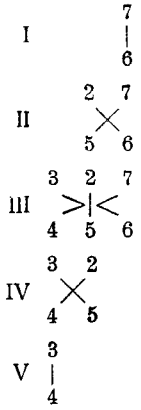


Символические обозначения те же, что и в предыдущем графике: точка обозначает цифру, черточка — произведение двух соответствующих цифр сомножителей, группа из черточек — сумму произведений, определяющую, по прибавлении к ней остатка от предыдущего числа, цифру последующую.

Решим пример:

$$\begin{array}{r} \times\ 327 \\ 456 \\ \hline 149112 \end{array}$$

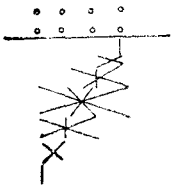
График:



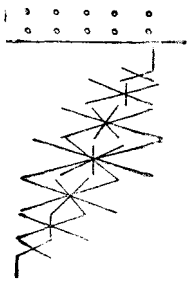
			Пишем:	Остаток:
Место	I	$7 \times 6 = 42$	2	4
„	II	$4 + 2 \times 6 + 7 \times 5 = 51$	1	5
„	III	$5 + 3 \times 6 + 2 \times 5 + 7 \times 4 = 61$	1	6
„	IV	$6 + 3 \times 5 + 2 \times 4 = 29$	9	2
„	V	$2 + 3 \times 4 = 14$	4	1
„	VI		1	

Продолжая разрабатывать график для многозначных сомножителей, получим:

Для перемножения четырехзначных чисел:



Для пятизначных:



и т. д.

Если число знаков у сомножителей неодинаковое, то меньший из них мысленно дополняют нулями. Например:

$$\begin{array}{r} \times\ 51342 \\ 245 \end{array}$$

Можно считать двояко:

$$\text{либо}\quad \begin{array}{r} \times\ 51342 \\ 245.00 \end{array} \qquad \text{либо}\quad \begin{array}{r} \times\ 51342 \\ 00245 \end{array}$$

В виду того, что при многозначных сомножителях число произведений, суммируемых в одну группу, довольно велико и делать это в уме без подготовки весьма трудно (можно неправильно составить группу, перемножив не на надлежащую цифру), для овладения этим способом нужно начинать с перемножения двузначных чисел, как следует усвоить его, затем лишь перейти к трехзначным и т. д.

Способ этот основан на том же принципе, что и перемножение многочленов. Когда мы перемножим, например:

$$\begin{array}{r} \times\ a_1x^2 + b_1x + c_1 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \\ \hline a_1c_2x^2 + b_1c_2x + c_1c_2 \\ + \quad a_1b_2x^3 + b_1b_2x^2 + c_1b_2x \\ a_1a_2x^4 + b_1a_2x^3 + c_1a_2x^2 \\ \hline a_1a_2x^4 + (a_1b_2 + b_1a_2)x^3 + (a_1c_2 + b_1b_2 + c_1a_2)x^2 + (b_1c_2 + c_1b_2)x + c_1c_2 \end{array}$$

то коэффициенты при степенях x получаются в виде сумм нескольких произведений

Если мы примем, что $x = 10$, а цифры числа являются коэффициентами при степенях 10-ти, т.-е. изобразим, например, число 327 в виде:

$$\begin{aligned} 327 &= 3\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0 \\ &\quad 3x^2 + 2x + 7, \end{aligned}$$

а число 456 — в виде:

$$\begin{aligned} 456 &= 4\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 6\cdot 10^0 \\ &\quad 4x^2 + 5x + 6, \end{aligned}$$

то перемножение чисел заменится перемножением многочленов:

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2x + 7 \\ 4x^2 + 5x + 6 \\ \hline 12x^4 + 23x^3 + 56x^2 + 47x + 42 \end{array}$$

Подставив вместо x его значение $x = 10$, получим:

$$\begin{array}{r} 42 \\ 470 \\ +\quad 5600 \\ 23000 \\ 120000 \\ \hline 237 \times 456 = 149112 \end{array}$$

Разница замечается лишь в том, что при перемножении многочленов коэффициенты записываются полностью, при перемножении же чисел записываются лишь единицы, десятки же добавляются к следующей степени десяти в виде единиц.

Изложенный способ перемножения может быть с удобством применен в случае, если дано несколько пар сомножителей, и нужно найти сумму всех произведений, не вычисляя каждого произведения в отдельности.

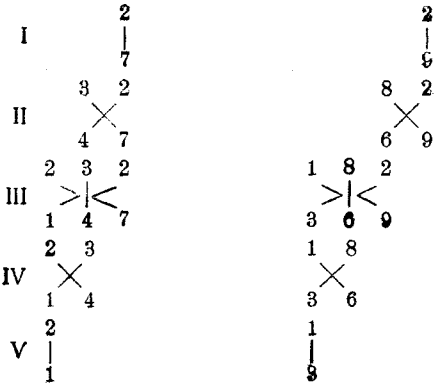
В этом случае для получения некоторой цифры результата берется сумма всех групп, определяющих соответствующую же цифру в каждом произведении пары чисел.

Решим пример:

Найти:

$$232 \times 147 + 182 \times 369$$

Графики:



Цифры получаем:

			Пишем:	Остаток:
I	$2 \times 7 + 2 \times 9$	$= 32$	2	3
II	$3 + (3 \times 7 + 2 \times 4) + (8 \times 9 + 2 \times 6)$	$= 116$	6	11
III	$11 + (2 \times 7 + 3 \times 4 + 2 \times 1) + (1 \times 9 + 8 \times 6 + 2 \times 3)$	$= 102$	2	10
IV	$10 + (2 \times 4 + 1 \times 3) + (1 \times 6 + 8 \times 3)$	$= 51$	1	5
V	$5 + (2 \times 1) + (1 \times 3)$	$= 10$	0	1
VI			1	

Итак:

$$232 \times 147 + 182 \times 369 = 101262.$$

Перемножим в отдельности и сложим произведения:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 232 \\ 147 \end{array} \\ \hline 34104 \end{array} + \begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 182 \\ 369 \end{array} \\ \hline 67158 \end{array} = 101262$$

Изложенный способ умножения может быть видоизменен. Тогда мы получим новый метод, еще более простой и удобный.

Рассмотрим, что получится, если мы напишем множимое в обратном порядке, т.-е. напишем сомножители не так (для примера взяты четырехзначные сомножители):

IV III II I
IV III II I.

а так (наоборот):

I II III IV
IV III II I

Сравним графики перемножения в обоих случаях:

нормальный график

IV III II I
IV III II I

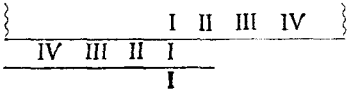
I
II
III
IV
V
VI
VII

обратный график

I II III IV
IV III II I

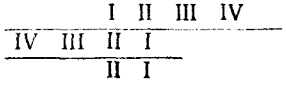
Мы видим, что в каждой группе обратного графика в черточки параллельны. Поясним теперь, как воспользовать этим обстоятельством.

Если заданы два сомножителя, то один из них мы записываем в обычном виде, а другой — в перевернутом виде на краю другого куска бумаги, а затем приставляем этот кусок бумаги над первым сомножителем, как указано на чертеже:



Перемножаем стоящие друг над другом цифры (I — I) и записываем первую цифру произведения так же, как и в предыдущем способе. Запоминаем остаток.

Затем переставляем бумажку на один знак левее:



Складываем с остатком произведения стоящих друг над другом цифр (I — II и II — I), записываем вторую цифру произведения, запоминаем остаток.

Снова передвигаем бумажку на один знак левее, складываем с остатком произведения I — III, II — II и III — I и т. д. до конца перемножения.

Поясним сказанное на примере.

Помножим:

4327 × 1634.

Число 4327 записываем в обратном порядке на краю бумажки, а 1634 — обычным способом.

Накладываем бумажку:

		Пишем:	Остаток:
7234 1634 8	$7 \times 4 = 28$	8	2

Передвигаем на один знак:

7234 1634 18	$2 + 7 \times 3 + 2 \times 4 = 31$	1	3

И так далее:

7234 1634 318	$3 + 7 \times 6 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 63$	3	6
7234 1634 0318	$6 + 7 \times 1 + 2 \times 6 + 3 \times 3 + 4 \times 4 = 50$	0	5
7234 1634 70318	$5 + 2 \times 1 + 3 \times 6 + 4 \times 3 = 37$	7	3
7234 1634 070318	$3 + 3 \times 1 + 4 \times 6 = 30$	0	3
7234 1634 7070318	$3 + 4 \times 1 = 7$	7	0

Итак:

$$1634 \times 4327 = 7070318.$$

Этот способ умножения, повидимому, представляет собою предел упрощения и облегчения перемножения без помощи счетных машин. После одного-двух дней тренировки он дает возможность перемножать со скоростью, близкой к скорости работы на арифмометре. Применение этого способа находится, как ясно видно, вне зависимости от количества цифр в сомножителях, так как это количество лишь обусловливает количество перестановок бумажки.

При помощи такого приема можно вычислять и сумму нескольких произведений. Возьмем пример, рассмотренный выше.

Найти:

$$232 \times 147 + 182 \times 369.$$

В каждой паре чисел одно число записываем в обычном виде, а одно, на краю бумажки, — в обратном. Располагаем обе пары рядом с просветом, равным (не меньше; больше — можно) ширине записи числа:

```
232     281
147     369
```

Затем начинаем вычислять, суммируя произведения стоящих друг над другом цифр сразу в обеих парах чисел:

	Пишем:	Остаток:
232 281 / 147 369 / 2 — $2 \times 7 + 2 \times 9 = 32$	2	3
Дальше:		
232 281 / 147 369 / 62 — $3 + 2 \times 4 + 3 \times 7 + 2 \times 6 + 8 \times 9 = 116$	6	11
232 281 / 147 369 / 262 — $11 + 2 \times 1 + 3 \times 4 + 2 \times 7 + 2 \times 3 + 8 \times 6 + 1 \times 9 = 102$	2	10
232 281 / 147 369 / 1262 — $10 + 3 \times 1 + 2 \times 4 + 8 \times 3 + 1 \times 6 = 51$	1	5
232 281 / 147 369 / 01262 — $5 + 2 \times 1 + 1 \times 3 = 10$	0	1
232 281 / 147 369 / 101262		

Из описанных двух способов (по графику и с бумажкой) умножения первый был известен еще арабам тысячу лет назад, уре он встречается весьма вообще, кажется, нигде зыке) не изложен. Первым , но достоверно ручаться чно передавался изустно.

ГЛАВА II

Проверка произведения

Для того, чтобы быть абсолютно уверенным в правильности цифр полученного произведения, можно прибегнуть лишь к одному средству—попросить другое лицо перемножить заданные сомножители и сравнить результаты обоих подсчетов.

Но есть более простые приемы, не заставляющие делать двойной работы и дающие, хотя и не абсолютную, но все-таки весьма большую гарантию правильности проверки. Это—так называемые способы девяти и одиннадцати.

Способ девяти заключается в следующем: у обоих сомножителей берут остатки от деления этих сомножителей на 9, или,—что то же самое,—остатки от деления на 9 сумм цифр сомножителей. Эти остатки перемножают, и берут остаток от деления на 9 этого произведения остатков.

Пусть, например, даны сомножители A и B. Пусть:

$$A = 9A_1 + a,$$

$$B = 9B_1 + b.$$

Находим:

$$a \cdot b = 9n + d.$$

Если остаток c от деления на 9 произведения C сомножителей (или—что то же самое—его суммы цифр) равен числу d, то мы имеем долю гарантии в правильности перемножения.

Мы имеем:

$$A \cdot B = (9\,A_1 + a)\,(9\,B_1 + b) =$$
$$= 9\,(9\,A_1B_1 + A_1b + B_1a) + ab =$$
$$= 9\,(9\,A_1B_1 + A_1b + B_1a + n) + d.$$

Но $A \cdot B = C = 9\,C_1 + c$, значит

$$9\,(9\,A_1B_1 + A_1b + B_1a + n) + d = 9\,C_1 + c,$$
$$9\,(9\,A_1B_1 + A_1b + B_1a + n - C_1) + d - c = 0$$

Мы имеем:

$$d < 9$$
$$c < 9.$$

Следовательно, для возможности существования последнего уравнения должно быть:

$$9\,A_1B_1 + A_1b + B_1a + n - C_1 = 0$$
$$d - c = 0,$$

откуда:

$$d = c.$$

Покажем на примере:

$$327 \times 456 = 149112 \quad (?)$$

1) $327;\ \ 3 + 2 + 7 = 12,\ \ a = 3$

2) $456;\ \ 4 + 5 + 6 = 15,\ \ b = 6$

$$ab = 18,\ \ d = 0.$$

3) $1 + 4 + 9 + 1 + 1 + 2 = 18,\ \ c = 0$

$$c = d$$

Значит перемножение, повидимому, правильно.

Рассмотрим причину, по которой правильность возможна но не безусловна.

Предположим, что мы написали бы вместо 149112 число 140112. Тогда:

$$1 + 4 + 0 + 1 + 1 + 2 = 9,\ \ c = 0.$$

Однако, результат неверен. Точно так же мы могли бы написать вместо 149112 число 194112, и опять: $c = 0$, а результат неверен. Однако, среди всех возможных вариаций ошибок эти два случая и им подобные дают весьма небольшую вероятность—около 10%.

Проверка по способу одиннадцати аналогична. Берутся статки от деления чисел на 11:

$$A \cdot B = (11\,A_1 + a)\,(11\,B_1 + b) =$$
$$= 11\,(11\,A_1B_1 + A_1b + B_1a) + ab =$$
$$= 11\,(11\,A_1B_1 + A_1b + B_1a + n) + d$$
$$C = 11\,C_1 + c.$$

Если $c = d$, то перемножение, повидимому, правильно.

Если числа A и B велики, то непосредственное деление на 11 затруднительно, и для нахождения чисел a и b лучше воспользоваться признаком делимости на 11, выражаемым так:

Если разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах (по порядку, считая справа), и цифр, стоящих на четных местах (в том же порядке), какого-либо числа делится на 11, то и число делится на 11.

Пример: 2732807. Нечетные цифры — $2 + 3 + 8 + 7 = 20$, четные—$7 + 2 + 0 = 9$; $20 - 9 = 11$. Значит, 2732807 делится на одиннадцать.

Отсюда выводим следующее:

Остаток от деления числа на 11 равен остатку от деления на 11 разности между суммами цифр, стоящих на нечетных справа) и четных местах.

Возьмем теперь пример:

$$4327 \times 1634 = 7070318$$

1) 4327—Сумма цифр на нечетных местах справа . $7 + 3 = 10$
„ „ „ четных „ „ . $4 + 2 = 6$
Разность . . . $4 = a$

2) 1634—Сумма цифр на нечетных местах . . . . . $4 + 6 = 10$
„ „ „ четных „ . . . . . $1 + 3 = 4$
Разность . . . $6 = b$

$$ab = 4 \times 6 = 24, \quad d = 2$$

7070318—Сумма цифр на нечетных местах . $7 + 7 + 3 + 8 = 25$
„ „ „ „ „ $0 + 0 + 1 = 1$
Разность . . . 24, $c = 2$

$$d = c = 2.$$

Проверка по способу одиннадцати дает 91% гарантии. 9% возможных ошибок, происходящих от неправильности или от перестановки цифр, найдены быть не могут.

Из сравнения обоих способов проверки мы видим, что способ одиннадцати сложен. Способ девяти проще, а следовательно, предпочтительнее.

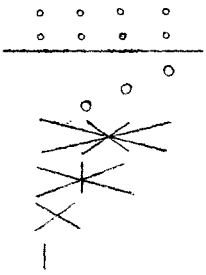
ГЛАВА III.

Приближенное умножение.

Если мы перемножаем два n-значных числа, то в произведении мы получим $2n$ или $2n-1$ цифр. Между тем, нам нужно из этих цифр иметь значущих лишь n цифр, остальные же мы можем с удобством заменить нулями без ущерба для точности вычисления.

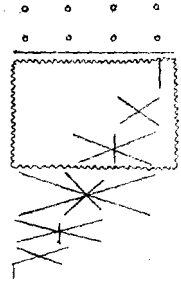
В таком случае графики для перемножения примут иной вид. Условимся не вычислять всегда $(n-1)$ цифр (при произведении, состоящем из $2n$ цифр, мы будем иметь при этом некоторую излишнюю точность). Тогда график четырехзначных сомножителей примет вид:

Приближенный график.



В случае приближенного вычисления эти элементы вычисления отсутствуют.

Точный график.



Первая слева из непринимаемых во внимание цифр образуется из суммы $(n-1)$ произведений. Не вычисляя этой суммы, мы игнорируем остаток, который из отброшенной цифры переходит к крайней правой из вычисляемых цифр. При многозначных сомножителях этот остаток довольно велик, и отбрасывать его—значит, заведомо уменьшить произведение.

Вычислим вероятное значение этого остатка. В таблице умножения от 0 до 9 имеется 100 чисел. Все они с одинаковой вероятностью могут встретиться в любом из произведений отброшенной суммы.

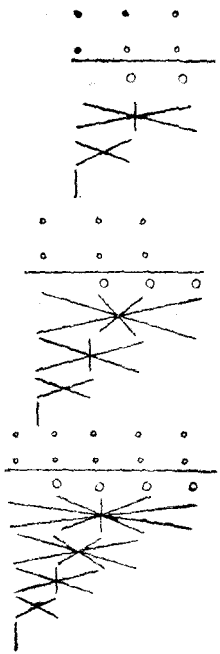
Сумма всех этих чисел:

$$0+0\times1+\ldots+0\times9+1\times0+1\times1+\ldots+1\times9+\ldots$$
$$+9\times0+9\times1+\ldots+9\times9)=2025.$$

Значит, среднее возможное значение одного произведения около 20.

Сумма $(n-1)$ произведений дает вероятное значение 20 $(n-1)$, т.-е. в крайнюю пару из вычисленных цифр перейдет статок 2 $(n-1)$, который мы и будем прибавлять. Чем больше в сомножителях, тем меньше будет расхождения между действительным отброшенным остатком и прибавленным (вероятным).

Графики приближенного вычисления для $(n-1)$ цифр, заменяемых нулями при прибавляемом к n-ой цифре вероятном остатке в 2 $(n-1)$ единиц, примут вид:



Рассмотрим несколько примеров:

Точно	Приблизительно
$\begin{array}{r} \times\ 14234 \\ 12869 \\ \hline 183177346 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 14234 \\ 12869 \\ \hline 18317^{0000} \end{array}$
$\begin{array}{r} \times\ 4528 \\ 3483 \\ \hline 15771024 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 4528 \\ 3483 \\ \hline 1577 0^{000} \end{array}$

Все сказанное здесь применимо и к приближенному умно жению с пользованием приставной бумажкой.

В этом случае бумажку продвигают справа налево чтобы друг над другом стали сразу n пар цифр, и к сум этих n произведений прибавляют $2(n-1)$ единиц. Наприме в рассмотренном нами случае перемножения:

$$4327 \times 1634$$

мы начнем сразу с n-го (4-го) положения бумажки:

$$\begin{array}{r} 7234 \\ 1634 \\ \hline 0^{000} \end{array} \qquad 6+7\times1+2\times6+3\times3+4\times4=50$$

и т. д. В итоге получим:

$$4327 \times 1634 = 7070^{000}$$

Само собой разумеется, приближение произведения не может быть проверено способом девяти или одиннадцати. Поэтому единственную гарантию правильности может дать внимательность, проявленная во время подсчета.

ГЛАВА IV

Деление

Деление одного числа на другое можно (помимо обычного способа) производить еще двумя способами. При первом из них сокращается лишь половина записей, но зато он весьма прост. Второй же способ весьма сложен, но зато позволяет вычислять частное без каких-либо промежуточных записей

Сущность первого способа состоит в том, что обыкновен запись деления, например:

```
        7326 | 314
I        628 |-------
        ----   23,331
        1046
II       942
        ----
        1040
III      942
        ----
         980
IV       942
        ----
         380
V        314
        ----
          66  ...и т. д.
```

заменяют такой записью:

```
7326 | 314
1046 |-------
 1040   23,331
  980
   380
    66  ...и т. д.
```

Разница заключается в том, что вычитаемые из делимого произведения делителя на последовательные цифры частного произведения I, II . . . . . V . . . .) не записываются, записываются же лишь остатки.

Покажем, как это сделать.

Разделим, например, 3245 на 438:

```
 3245 | 438
-3066 |-----
------  7,...
  1790
```

Вычитаемое 3066 может быть вычтено по частям таким образом:

```
  3245 | 438
-   56 |-----
-   21   7,
-  28
------
  1790
```

Для того, чтобы вычесть из 3245 первое произведение $7 \times 8 = 56$, мы должны занять у следующего влево за 5

числа 6 единиц. Тогда получим цифру остатка 65—56 = 9
Эти 6 единиц мы прибавляем к следующему вычитаемому:

$7 \times 3 = 21;\ 21 + 6 = 27$

```
        — 3245 | 438
            56 |-----
(занято 6)  9  |  7
```

$7 \times 8 = 56$
$65 - 56 = 9$

```
        — 3245 | 438
            27 |-----
(занято 3)  79 |  7
```

$6 + 7 \times 3 = 27$
$34 - 27 = 7$

Чтобы вычесть 27, мы должны занять 3 единицы. Получи цифру остатка $34 - 27 = 7$. Занятые 3 единицы прибавляе к следующему произведению:

$4 \times 7 = 28,\ \ 28 + 3 = 31$

```
        — 3245 | 438
            31 |-----
        ------ |  7
        1790
```

$3 + 4 \times 7 = 31$
$32 - 31 = 1$

Идем таким же путем дальше:

```
          32453 | 438
        —  1790 |-----
             32 |  7,4
(занято 4)   8
          3245 | 438
        —  1790 |-----
             16 |  7,4
(занято 1)  38
          3245 | 438
        —  1790 |-----
             17 |  7,4
          ------
            38
         3245  | 438
         1790  |-------
       —  3800 |  7,408
             64
       -------
(7)         6
        — 3800
           31
       -------
(4)       96
        — 3800
           36
       -------
         296
```

$4 \times 8 = 32$
$40 - 32 = 8$

$4 + 4 \times 3 = 16$
$19 - 16 = 3$

$1 + 4 \times 4 = 17$
$17 - 17 = 0$

$8 \times 8 = 64$
$70 - 64 = 6$

$7 + 8 \times 3 = 31$
$40 - 31 = 9$

$4 + 8 \times 4 \quad 36$
$38 - 36 \quad 2$

т. д.

Все эти вычисления не трудно делать в уме. Рассмотрим один пример.

```
7284 | 319
904  |------
2660 | 22,8338.
 1080
  1230
   2730
    1780..
```

Ход вычислений таков:

1)	$2 \times 9 = 18$,	$18 - 18 = 0$,	заняли 1
	$1 + 2 \times 1 = 3$,	$12 - 3 = 9$	„ 1
	$1 + 2 \times 3 = 7$,	$7 - 7 = 0$	
2)	$2 \times 9 = 18$,	$24 - 18 = 6$	„ 2
	$2 + 2 \times 1 = 4$,	$10 - 4 = 6$	„ 1
	$1 + 2 \times 3 = 7$,	$9 - 7 = 2$	
3)	$8 \times 9 = 72$,	$80 - 72 = 8$	„ 8
	$8 + 8 \times 1 = 16$,	$16 - 16 = 0$	„ 1
	$1 + 8 \times 3 = 25$,	$25 - 25 = 0$	

т. д.

После сравнительно непродолжительной тренировки этот кажется не труднее обычного, времени же он экономит около 30—40%.

Второй способ состоит в следующем:

Делитель подписывается под делимым так, чтобы, если не обращать внимания на количество знаков, наверху стоящее (делимое) было бы больше.

Например:

1) 7284 : 319

Пишем:

```
7284
319        7 > 3.
```

2) 4352 : 563

Пишем:

```
4352
 563       43 > 5
```

```
4352
563,
```

как $4 < 5$.

Под числами проводим черту, к которой прикладыва край вспомогательной бумажки, на которой в обратном поряд (не слева направо, а справа налево) будем записывать частно

$$\begin{array}{r} 7284 \\ 319 \\ \hline \end{array}$$

Первую цифру частного вычисляем, как и в обычном деля делимое на делителя:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7284 \\ 319 \\ \hline 2 \end{array}$$

Из первой цифры делимого вычитаем произведение стоя щих под ней цифр:

$$7 - 3 \times 2 = 1$$

и остаток приписываем над следующей цифрой делимого а затем передвигаем на одну цифру вправо вспомогательную бумажку.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7284 \\ 319 \\ \hline 2 \end{array}$$

Остаток и стоящая под ним цифра делимого читается как двузначное число, например:

$$\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} = 54 \qquad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} = 12 \text{ и т. д.}$$

Из этого числа вычитаем произведение стоящих под ним цифр:

$$12 - 1 \times 2 = 10.$$

Оставшееся число делим на делитель для получения следующей цифры частного:

$$10 : 319 = 3$$

Записываем эту цифру на бумажке:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1284 \\ : \; 319 \\ \hline 32 \end{array}$$

От записи этой цифры образуется новая пара цифр — над и под чертой. Произведение их $3 \times 3 = 9$ вычитаем из оставшегося числа 10; $10 - 9 = 1$. Этот остаток подписываем над следующей вправо цифрой делимого.

Переставляем бумажку на один знак правее. Из двузначного числа, образуемого последним остатком и стоящей под ним цифрой делимого, вычитаем все произведение стоящих над и под чертой пар цифр:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 7284 \\ : \; 319 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$18 - 9 \times 2 - 1 \times 3 = -3.$$

Полученная отрицательная разность указывает, что предыдущая цифра частного была взята слишком великой и надо ее на единицу уменьшить. В остатке при этом прибавляется первая (левая) цифра делителя. Получим после поправки:

$$\begin{array}{r} 14 \\ 7284 \\ : \; 319 \\ \hline 22 \end{array}$$

$$48 - 9 \times 2 - 1 \times 2 = \underline{28}.$$

Опять делим оставшееся число на делитель для нахождения следующей цифры частного:

$$28 : 319 = 8 \ldots$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 7284 \\ 319 \\ \hline 822 \end{array}$$

Вычитаем произведение новой пары цифр из оставшего числа:

$$28 - 3 \times 8 = 4.$$

Приписываем остаток над делителем и передвигаем на знак вправо бумажку:

```
  144
 7284
 319
 ----
  822
```

Снова продолжаем те же манипуляции:

$$44 - 9 \times 2 - 1 \times 8 = 18; \quad 8 : 319 = 5$$

$$18 - 3 \times 5 = 3.$$

```
   1443
  72840
  319
  -----
   5822
```

$$30 - 9 \times 8 - 1 \times 5 = -57.$$

Если мы убавим последнюю из полученных цифр частного на 1, то остающееся число будет все-таки отрицательным. Значит, надо убавить эту цифру на 2. Тогда получим:

```
   1449
  72840
  319
  -----
  43822
```

$$90 - 9 \times 8 - 1 \times 3 = 15; \quad 15 : 319 = 4 \ldots$$

и т. д. Получив достаточное количество знаков, оборачиваем частное и получаем:

```
 7284
 319
-----
-22.8338
```

Рассмотрим еще пример:

```
  8532
: 723
=====
    1
```

$8 - 7 \times 1 = 1$

```
    1
  8532
: 723
=====
   11
```

$15 - 2 \times 1 + 13;\quad 13 : 723 = 1$
$13 - 7 \times 1 = 6$

```
   16
  8532
: 723
=====
  811
```

$63 - 3 \times 1 - 2 \times 1 = 58;\quad 58 : 723 = 8$
$58 - 7 \times 8 = 2$

```
  162
: 8532
  723
=====
 0811
```

$22 - 2 \times 8 - 3 \times 1 = 3;\quad 3 : 723 = 0$
$3 - 7 \times 0 = 3$

```
  1623
 85320
 723
=======
 00811
```

$30 - 2 \times 0 - 3 \times 8 = 6;\quad 6 : 723 \times 0$
$6 - 7 \times 0 = 6$

```
  16236
 853200
 723
=======
 800811
```

$$60 - 2 \times 0 - 3 \times 0 = 60; \quad 60 : 723 = 8$$
$$60 - 7 \times 8 = 4$$

и так далее.

$$\begin{array}{r} 8532 \\ 723 \\ \hline 11{,}8008 \end{array}$$

Этот способ, безусловно, весьма сложен и требует большого навыка для такого выбора цифр частного, при котором не было бы отрицательных оставшихся чисел. Однако, при наличии такого навыка, являющегося после довольно продолжительной тренировки, пользование этим способом весьма ускоряет работу при большой экономии в бумаге.

Способ этот, в сущности, является обратным ходом способа умножения со вспомогательной бумажкой, так как записываемое наизнанку частное соответствует аналогично записываемому множителю.

Впервые этот способ был применен Ферролем и описан Меннхеном, но с применением отрицательных знаков; потому он и был пересмотрен автором настоящей работы, в чьей редакции и изложен.

ГЛАВА V

Извлечение квадратного корня.

Извлечение квадратного корня из некоторого числа в том виде, который преподается в средней школе, имеет много теоретических плюсов и практических минусов. Плюсы состоят в том, что последовательно получаются все цифры, и точность вычисления может быть весьма удобно выяснена, минусы же — в том, что для получения, например, 7-ми знаков нужно проделать весьма большую вычислительную работу, и к тому же при определении цифр корня приходится иногда прикидывать на глаз — не велика ли цифра.

Извлечем, например, $\sqrt{425}$.

$$\sqrt{425} = 20{,}61552, \text{ ближе к } 20{,}61553.$$

$\times$ 406	$-$ 2500
6	2436
2436	
$\times$ 4121	$-$ 6400
1	4121
4121	
$\times$ 41225	$-$ 227900
5	206125
206125	
$\times$ 412305	$-$ 2177500
5	2061525
2061525	
$\times$ 4123102	11597500
2	
8246201	

Между тем, извлечь $\sqrt{}$ можно при помощи несколько приемов.

Наиболее простой из них заключается в том, что сперва уме находят с точностью 1—2 знаков приближенное значение $\sqrt{N}$, где N — заданное число.

Пусть первое приближение будет:

$$\sqrt{N} \approx a \text{ (с точностью } k \text{ знаков)}$$

Тогда второе приближение, более точное, будет:

$$\sqrt{N} = \frac{a + \frac{N}{a}}{2} = b \text{ (с точностью } 2\ k \text{ знаков)}$$

Третье приближение будет:

$$\sqrt{N} = \frac{b + \frac{N}{b}}{2} = c \text{ (с точностью } 2^2\ k \text{ знаков)}$$

Идя дальше тем же путем, получим n-е приближение

$$\sqrt{N} = \frac{p + \frac{N}{p}}{2} = r \text{ (с точностью } 2^{(n-1)} k \text{ знаков).}$$

Возьмем уже рассмотренный пример. Найдем 425 с тех же 7 знаков.

Первое приближение:

$$\sqrt{425} \approx 20 \text{ с точностью 2 знаков.}$$

Второе приближение вычисляем, следовательно, с точность 4 знаков.

$$\begin{array}{r|l} 425 & 20 \\ \cline{2-2} 25 & 21{,}25 \\ 50 & \\ 100 & \end{array}$$

$$\frac{20 + 21{,}25}{2} \approx 20{,}62.$$

Третье приближение нам дает уже 8 знаков,

$$\begin{array}{r|l} 4250 & 20{,}62 \\ \cline{2-2} 12600 & 20{,}61106 \\ 2280 & \\ 2180 & \\ 11800 & \end{array}$$

$$\frac{20{,}62 + 20{,}61106}{2} = \frac{41{,}23106}{2} = 20{,}61553.$$

Решим еще пример:

Найти $\sqrt{358}$.

Первое приближение 19 — 2 знака.

Второе приближение:

$$\begin{array}{r|l} 358 & 19 \\ \cline{2-2} 168 & 18{,}84 \\ 160 & \\ 80 & \end{array}$$

$$19 + 18{,}84 = 37{,}84; \qquad \frac{37{,}84}{2} = 18{,}92 \text{ (4 знака).}$$

Третье приближение:

$$\begin{array}{l|l} 358{,}0 & 18{,}92 \\ \cline{2-2} 16880 & 18{,}927061 \\ \quad 17440 & \\ \qquad 5120 & \\ \qquad 13360 & \\ \qquad\quad 11600 & \\ \qquad\qquad 2480 & \end{array}$$

$$18{,}92 + 18{,}927061 = 37{,}847061$$

$$\frac{37{,}847061}{2} = 18{,}923580 \text{ (8 знаков).}$$

Извлекать $\sqrt{}$ можно и таким способом.
Пусть первое приближение будет:

$$\sqrt{N} \approx a \ (k \text{ знаков}).$$

Вычисляем $N - a^2 = x$.
Второе приближение будет:

$$\sqrt{N} = a + \frac{x}{2a} = b \ (2k \text{ знаков})$$

Вычисляем $N - b^2 = x_1$.
Третье приближение будет:

$$\sqrt{N} = b + \frac{x_1}{2b} = c \ (2^2 k \text{ знаков})$$

и т. д.

Найдем опять также $\sqrt{425}$
Первое приближение:

$$\begin{array}{r} \sqrt{425} \approx \ 20 = a \text{ (2 знака)} \\ \times \ 20 \\ \hline 425 - 400 = 25 = x \end{array}$$

Второе приближение:

$$\begin{array}{r} \sqrt{425} \approx 20 + \frac{25}{40} = \ 20{,}62 \ = b \text{ (4 знака)} \\ \times \ 20{,}62 \\ \hline 425{,}1844 = b^2; - 0{,}1844 - x_1 \end{array}$$

Третье приближение:

$$\sqrt{425} \approx 20{,}62 - \frac{0{,}1844}{41{,}24} = 2062 - 0{,}004471 =$$
$$= 30{,}615529 = c \text{ (8 знаков)}$$

Можно извлекать $\sqrt{}$ еще иным способом.

Пусть первое приближение будет:

$$\sqrt{N} = a$$

Вычислим:

$$N - a^2 = x$$

Второе приближение, так же, как и в предыдущем способе, будет:

$$\sqrt{N} = a + \frac{x}{2a} = b$$

Но третье и дальнейшие приближения получаются иным путем.

Третье приближение будет:

$$\sqrt{N} = a + \frac{x}{a+b} = c.$$

Четвертое:

$$\sqrt{N} = a + \frac{x}{a+c} = d.$$

При каждом следующем приближении ошибка будет уменьшаться примерно в

$$\frac{8a^2}{x} \text{ раз,}$$

и, следовательно, способ этот удобен при малых по сравнению с a значениях x.

Вычислим опять $\sqrt{425}$.

Первое приближение:

$$\sqrt{425} \approx 20; \; x = 25; \; a = 20.$$

Второе приближение:

$$\sqrt{425} \approx 20 + \frac{25}{40} \approx 20{,}62$$

У первого приближения ошибка была около 0,62. Значит, второго она будет около:

$$0{,}62 \cdot \frac{25}{8 \cdot 20^2} = 0{,}62 \cdot \frac{1}{128} = 0{,}005.$$

Третье приближение:

$$\sqrt{425} = 20 + \frac{25}{40{,}62} = 20{,}61546.$$

```
25,000      4062
  6280     -------
  22180     61546
   18700
    24520
```

Ошибка около $0{,}005 \cdot \frac{1}{128} \approx 0{,}00005$

Как видим, при вычислении большого количества знаков этот способ представляет лишь чисто отвлеченный интерес, так как более или менее сложен и дает сравнительно медленно возрастающую точность.

Удобнее пользоваться еще следующим способом.

Пусть точное значение $\sqrt{N}$ будет:

$$\sqrt{N} = a + \beta,$$

где a — первое приближение.

В таком случае:

$$N = (a + \beta)^2 = a^2 + 2\,a\beta + \beta^2$$

Пусть:

$$2\,a\beta + \beta^2 = N - a^2 = x$$

Тогда:

$$x - \beta^2 = 2\,a\beta$$

и

$$\frac{x - \beta^2}{2\,a} = \beta,$$

значит:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x - \beta^2}{2\,a} = a + \beta.$$

Первое приближение величины β дает член

$$\frac{x}{2a}$$

Таким образом, мы получаем для вычисления $\sqrt{N}$ следующие приближения.

$$1)\ \sqrt{N} = a;\ N - a^2 = x$$

$$2)\ \sqrt{N} = a + \frac{x}{2a} = a + b_1$$

$$3)\ \sqrt{N} = a + \frac{x - b_1^2}{2a} = a + b_2$$

. . . . . .

$$n)\ \sqrt{N} = a + \frac{x - b^2_{n-1}}{2a} = a + b_{n-1}$$

Точность вычисленных приближений при этом способе возрастает так же, как и при предыдущем, но само вычисление легче, так как в делителе второго члена стоит все время число одно или двузначное, в предыдущем же способе в делителе все время возрастает число значущих цифр.

Вычислим еще раз $\sqrt{425}$.

$$\sqrt{425} = 20; \qquad a = 20; \qquad x = 25.$$

$$\sqrt{425} = 20 + \frac{25}{40} = 20{,}62; \qquad \begin{array}{r} \times\ 0{,}62 \\ 0{,}62 \\ \hline 0{,}3844 \end{array}$$

$$\sqrt{425} = 20 + \frac{25 - 0{,}3844}{40} = 20 + \frac{24{,}6156}{40} \cong 20{,}6154$$

и т. д.

Применим теперь к последнему примеру два простейшие способа из описанных применительно к вычислению с шестизначной точностью (больше которой почти никогда не требуется).

Вычислим

$$\sqrt{743}$$

способом деления и последним способом, взяв за первое приближение число 27.

Способ деления:

$$\begin{array}{l|l} 743 & 27 \\ 203 & \overline{27{,}52} + 27 = 54{,}52 \\ \;\;140 & \\ \;\;\;50 & \end{array} \quad \begin{array}{|l} 2 \\ \overline{27{,}3} \end{array}$$

В виду того, что нам нужно в третьем приближении иметь лишь 6 знаков, мы берем второе приближение с точностью $\frac{6}{2} =$ $= 3$-х знаков, вместо 4-х

$$\begin{array}{l|l} 743 & 27{,}3 \\ 1970 & \overline{27{,}2161} + 27{,}3 = 54{,}5161 \\ \;\;590 & \\ \;\;\;440 & \\ \;\;\;1670 & \\ \;\;\;\;320 & \end{array} \quad \begin{array}{|l} 2 \\ \overline{27{,}2580} \end{array}$$

Способ вычитания из числителя:

$$1)\ \sqrt{743} = \begin{array}{l} 27 \\ \;\;27 \\ \overline{743 - 729} = 14{,}0 \\ \qquad\qquad 320 \end{array} \begin{array}{|l} 54 \\ \overline{0{,}26} \\ \;\;0{,}26 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overline{14{,}0 - 0{,}0676} = 13{,}93 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 313 \\ \qquad\qquad\qquad\;\; 430 \\ \qquad\qquad\qquad\;\;\;\; 520 \\ \qquad\qquad\qquad\;\;\;\;\;\; 340 \end{array} \quad \begin{array}{|l} 54 \\ \overline{0{,}25796} \end{array}$$

Округляем — 0,2580:

$$\sqrt{743} = 27{,}2580.$$

Оба способа удобны. Выбирать любой из них представляется читателю.

Изложенные способы разработаны автором за исключением второго, предложенного Ньютоном.

ГЛАВА VI.

Извлечение кубичного корня.

Извлечение кубичного корня школьным способом слишком сложно. Можно делать это извлечение значительно проще, пользуясь одним из четырех изложенных ниже способов аналогичных способам извлечения квадратного корня.

Первый способ—способ деления.

Пусть дано число N и первое приближение с точностью 1—2 знаков.

Значения

$$\sqrt[3]{N} \approx a \ (k \text{ знаков}).$$

Находим с точностью $2k$ знаков величину

$$\frac{2a + \frac{N}{a^2}}{3} = b_1$$

являющуюся вторым приближением.

Третье приближение с точностью до $2^2 k$ знаков дает величина:

$$\frac{2b + \frac{N}{b^2}}{3} = c$$

и т. д.

Приведем пример, при чем начнем с приближения точного лишь до 1 знака, так как для двухзначного приближения нужен некоторый навык.

Вычислим $\sqrt[3]{473}$.

Первое приближение

$$\sqrt[3]{473} = 8$$

$$\begin{array}{r|l} 473 & \overline{8} \\ 250 & \overline{64} \\ \hline & 7{,}4 + 2 \times 8 = 23{,}4 \;\Big|\; \overline{3} \\ & \qquad\qquad\quad\;\; 2{,}4 \;\Big|\; \overline{7{,}8} \end{array}$$

Второе приближение имеем — 7,8:

$$\sqrt[3]{473} = 7{,}8$$

$$\begin{array}{r|l} 47300 & \begin{array}{r} 7{,}8 \\ \hline 60{,}84 \end{array} \\ 47120 & \\ 45320 & \\ 27320 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 7{,}774 + 2 \times 7{,}8 = 23{,}374 \\ \quad 2\,3 \\ \quad\quad 27 \\ \quad\quad\quad 4 \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} 3 \\ \hline 7{,}791 \end{array}$$

Третье приближение имеем — 7,791.

Точнее чем до четырех знаков $\sqrt[3]{}$ вычислять не приходится, так что можем принять:

$$\sqrt[3]{473} = 7{,}791$$

Если же нужна большая точность, то берем 4-ое приближение — точное до 8-ми знаков и т. д.

Второй способ заключается в следующем.

Берем первое приближение

$$\sqrt[3]{N} = a \ (k \text{ знаков}).$$

Вычисляем:

$$N - a^3 = x.$$

Вторым приближением будет:

$$\sqrt[3]{N} = a + \frac{x}{3a^2} = b \ (2k \text{ знаков}),$$

Вычисляем:

$$N - b^3 = x_1.$$

Третьим приближением будет:

$$\sqrt[3]{N} = b + \frac{x_1}{3b^2} = c \ (2^2 k \text{ знаков})$$

и т. д.

Найдем $\sqrt[3]{473}$ этим способом.

Первое приближение:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{473} = \ 8 \\ 8 \\ \hline \times \ 64 \times 3 = 192 \\ 8 \\ \hline 473 - 512 = -39{,}0 \\ 60 \end{array} \left| \begin{array}{r} 192 \\ \hline -0{,}20 \end{array} \right.$$

Второе приближение:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{473} = 8 - 0{,}2 = \ 7{,}8 \\ 7{,}8 \\ \hline \times \ 60{,}84 \times 3 = 182{,}52 \\ 7{,}8 \\ \hline 473 - 474{,}552 = -1{,}5520 \end{array} \left| \begin{array}{r} 182{,}5 \\ \hline -0{,}008 \end{array} \right.$$

Третье приближение будет:

$$\sqrt[3]{473} = 7{,}8 - 0{,}008 = 7{,}792.$$

Если принять во внимание, что с пятизначной точностью имеем

$$\sqrt[3]{473} = 7{,}7915,$$

то понятно расхождение между данными 7,791 и 7,792 обоих способов; обе величины одинаково точны, только одна—с недостатком, а другая—с избытком.

Третий способ заключается в следующем.

Пусть первое приближение

$$\sqrt[3]{N} = a \ (k \text{ знаков}).$$

Вычисляем:

$$N - a^3 = x.$$

Второе приближение будет:

$$\sqrt{N} = a + \frac{x}{3a^2} = a + b \ (2k \text{ знаков}).$$

Третье приближение будет:

$$\sqrt[3]{N} = a + \frac{x}{3a^2 + 3ab + b^2} = a + b_1$$

Четвертое:

$$\sqrt[3]{N} = a + \frac{x}{3a^2 + 3ab_1 + b_1^2} = a + b_2$$

т. д.

Вычислим $\sqrt[3]{473}$ этим способом:

$$\begin{array}{rl}
473 = & 8 \\
 & 8 \\
\hline
 & \times\ 64 \times 3 = 192 \\
 & \times\ 8 \\
\hline
473 - 512 = & -39{,}0 \quad \Big| \ \begin{array}{r} 192 \\ \hline -0{,}2 \end{array} \\
 & \phantom{-39{,}0} 60 \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & 192 \\
+3 \times 8 \times (-0{,}2) = & -4{,}8 \\
\hline
 & 187{,}2 \\
+(-0{,}2)^2 \quad = & 0{,}04 \\
\hline
-39{,}000 & 187{,}24 \\
155200 & -0{,}208 \\
\hline
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{473} = 8 - 0{,}208 = 7{,}792.$$

Наконец, четвертый способ извлечения кубичного корня заключается в следующем.

Получив, как и в предыдущем способе, второе прибижение.

$$\sqrt[3]{N} = a + \frac{x}{3a^2} = a + b_1,$$

где:

$$x = N - a^3,$$

мы следующее приближение получаем таким путем.

Третье приближение:

$$\sqrt{N} = a + \frac{x - 3ab^2 - b^3}{3a^2} = a + b_1$$

Четвертое:

$$\sqrt[3]{N} = a + \frac{x - 3\,ab_1^2 - b_1^3}{3\,a^2} = a + b_2$$

и т. д.

Вычислим $\sqrt[3]{473}$, зная, что для второго приближения:

$$\sqrt[3]{473} = 8 + \frac{-39{,}0}{192} = 8 - 0{,}2.$$

Вычислять удобнее всего по такой схеме:

$$x - 3\,ab^2 - b^3 = x - b^2(3\,a + b)$$

$$\begin{array}{rl} 3 \times 8 - 0{,}2 = & \\ (-0{,}2)^2 = & \times \begin{array}{r} 23{,}8 \\ 0{,}04 \end{array} \\ \hline -39{,}0 - & \quad 0{,}952 = -39{,}952 \;\Big|\; \begin{array}{r} 192 \\ \hline 0{,}208 \end{array} \\ & \qquad\qquad\quad 1552 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{473} = 7{,}792.$$

Из всех четырех изложенных способов удобнее, повидимому, последний и способ деления.

Приводим один пример для их сравнения:

Вычислим $\sqrt[3]{412}$.

Способ деления:

Первое приближение — $\sqrt[3]{412} = 7$.

Вычисляем второе приближение:

$$\begin{array}{r|l} 412 & 49 \\ 200 & \hline 8{,}4 + 2 \times 7 = 22{,}4 \;\Big|\; \begin{array}{r} 3 \\ \hline 7{,}5 \end{array} \end{array}$$

Третье приближение:

$$\begin{array}{r|l} & \times \begin{array}{r} 7{,}5 \\ 7{,}5 \end{array} \\ 412{,}00 & \begin{array}{r} 56{,}25 \\ \hline 7{,}324 + 2 \times 7{,}5 = 22{,}324 \end{array} \;\Big|\; \begin{array}{r} 3 \\ \hline 7{,}441 \end{array} \\ 18250 & \\ 13750 & \\ 25000 & \end{array}$$

$$412 = 7{,}441$$

Четвертый способ.

Первое приближение:

$$\sqrt[3]{412} = 7 \qquad \begin{array}{r} 7^3 = 343 \\ 3 \times 7^2 = 147 \end{array}$$

$$412 - 343 = 69{,}0 \;\Big|\; \begin{array}{r} 147 \\ \hline 0{,}47 \end{array}$$
$$ 1020$$

$$\begin{array}{rcr} 3 \times 7 + 0{,}47 = & & 21{,}47 \\ 0{,}47^2 & \cong & \times\; 0{,}221 \\ \hline 69{,}0 & & 4{,}74\ (487) = 64{,}26 \\ & & \phantom{4{,}74\ (487) = } 546 \\ & & \phantom{4{,}74\ (487) = } 1050 \end{array} \;\Big|\; \begin{array}{r} 147 \\ \hline 0{,}437 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{412} = 7{,}437.$$

Действительное значение корня — 7,441. Значит, способ деления точнее, хотя и другой также дает достаточно близкий результат.

На этом пока закончим описание методов извлечения кубичного корня. В дальнейшем мы еще вернемся к слегка похожей операции — нахождению целого трехзначного основания куба по заданному значению куба. Это вычисление практически бесполезно, но демонстрируется в виде эстрадного трюка демонстраторами чудо-математиками. Поэтому стоит объяснить его сущность.

ГЛАВА VII.

Извлечение корня любой степени.

Выше мы рассматривали частные случаи извлечения корней — квадратного и кубичного. Для извлечения корней любой целой степени по первому приближению a, вычисленному в уме с точностью хотя бы одного знака, можно пользоваться составленной автором формулой:

$$\sqrt[n]{N} = \frac{\dfrac{N}{a^{n-1}} + (n-1)\,a}{n}$$

Формула эта после преобразования может быть приведена к формуле Ньютона для нахождения $\sqrt[n]{\ }$ по первому приближению, имеющей вид:

$$\sqrt[n]{a^n+x}=a+\frac{x}{na^{n-1}}$$

Если в формулу автора подставим вместо N его значени из формулы Ньютона

$$N=a^n+x,$$

то получим:

$$\sqrt[n]{N}=\frac{\frac{a^n+x}{a^{n-1}}+(n-1)a}{n}=\frac{a+\frac{x}{n^{n-1}}+(n-1)a}{n}=$$

$$=\frac{na+\frac{x}{a^{n-1}}}{n}=a+\frac{x}{a^{n-1}}$$

т.-е. то же самое, что и по формуле Ньютона.

Для значения $n=2$ (когда извлекается корень квадратный) формула принимает вид:

$$\sqrt{N}=\frac{\frac{N}{a}+a}{2}$$

а для $n=3$ — извлечения корня кубичного:

$$\sqrt[3]{N}=\frac{\frac{N}{a^2}+2a}{3}$$

т.-е. мы получаем формулы, уже рассмотренные нами.

Аналогично имеем:

для $n=4$

$$\sqrt[4]{N}=\frac{\frac{N}{a^3}+3a}{4}$$

для $n=5$

$$\sqrt[5]{N}=\frac{\frac{N}{a^4}+4a}{5}$$

и т. д.

Вычислим для примера $\sqrt[5]{230}$.
На глаз возьмем $a = 3$.
Тогда:

$$\sqrt[5]{230} = \frac{\frac{30}{81} + 4 \cdot 3}{5} = \frac{2{,}84 + 12}{5} = 2{,}37$$

Вычислим еще один пример. Найдем:

$$\sqrt[7]{25000}$$

по формуле автора и формуле Ньютона.

Первое приближение найдем, вычислив примерно

$$4^7 \approx 16000, \text{ и } 5^7 \approx 80000$$

Взяв ближайшее

$$a = 4$$

вычислим:

По Ньютону.

$$\sqrt[7]{a^7 + x = a} + \frac{x}{7a^6}$$

$a = 4$; $a^2 = 16$

$a^6 = 16^3 = 4096$ (по таблицам)

$a^7 = 4096 \times 4 = 16384$

$7a^6 = 4096 \times 7 = 28672 \approx 28700$

$x = 25000 - 16384 = +8616$

$$\frac{7a^6}{x} = \frac{8616}{28700} = 0{,}300$$

$$b = a + \frac{x}{7a^6} = 4 + 0{,}300 = 4{,}300.$$

По Мелентьеву.

$$\sqrt[7]{N} = \frac{\frac{N}{a^6} + 6a}{7}$$

$a = 4$; $a^2 = 16$

$a^6 = 16^3 = 4096 \approx 4100$ (по табл.)

$$\frac{N}{a^6} = -\frac{25000}{4100} = 6{,}098$$

$$6a + \frac{N}{a^6} = 24 + 6{,}098 = 30{,}098$$

$$b = \frac{6a + \frac{N}{a^6}}{7} = -\frac{30{,}098}{7} = 4{,}300$$

Итак, второе приближение равно 4,300.

$a = 4{,}3;$
$a^3 = 79{,}507$ (по таблицам)
$a^6 = 79{,}507 = 6321{,}4$
(по таблицам)

$a^7 = 6321{,}4 \times 4{,}3 = 27182{,}0$

$7a^6 + 6321{,}4 \times 7 =$
$= 44249{,}8 \approx 44250$

$x = 25000 - 27182 = 2182$

$\frac{x}{7a^6} = \frac{-2182}{44250} = -0{,}049$

$b = a + \frac{x}{7a^6} = 4{,}3 - 0{,}049 =$
$= 4{,}251.$

$a = 4{,}3;\ a^3 = 79{,}507$
(по таблицам)
$a^6 = 79{,}507 = 6321{,}4 \approx 6320$
(по таблицам)

$\frac{N}{a^6} = \frac{25000}{6320} = 3{,}956$

$6a + \frac{N}{a^6} = 25{,}8 + 3{,}956 = 29{,}756$

$b = \frac{6a + \frac{N}{a^6}}{7} = \frac{29{,}756}{7} =$
$= 4{,}251$

Значения a^6 взяты по таблицам, чтобы не удлинять записи. Обычно вычисление, конечно, производится без таблиц.

Если присмотримся внимательно к изложенным выше способам извлечения квадратного и кубичного корня, то увидим, что все они основываются на формулах Ньютона или автора с некоторым лишь различием в характере и последовательности вычислений.

ГЛАВА VIII.

Логарифмирование.

Иногда случается, что под рукой нет таблиц логарифмов, а между тем, нужно произвести действие, требующее логарифмирования. Вычислять логарифм по общеизвестной формуле (ряду Мак-Лорена);

$$\mathrm{Log}_{10} N = 0{,}86859 \left[\frac{N-1}{N+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2k+1}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{2k+1} + \cdots \right]$$

настолько сложно, что применение этого ряда можно считать невозможным. Мы вывели свою формулу логарифмирования, для пользования которой нужно лишь знать следующие мантиссы логарифмов (с четырехзначной точностью).

1	0000
2	3010
3	4771
4	6021
5	6990
6	7781_5
7	8451
8	9031
9	9542

Фактически это означает необходимость помнить лишь мантиссы логарифмов 2, 3 и 7, так как:

$$4 = 2^2, \quad \mathrm{Log}_{10} 4 = 2\ \mathrm{Log}_{10} 2$$
$$5 = \frac{10}{2}, \quad \mathrm{Log}_{10} 5 = 1 - \mathrm{Log}_{10} 2$$
$$6 = 2{,}3, \quad \mathrm{Log}_{10} 6 = \mathrm{Log}_{10} 2 + \mathrm{Log}_{10} 3$$
$$8 = 2^3, \quad \mathrm{Log}_{10} 8 = 3\,\mathrm{Log}_{10} 2$$
$$9 = 3^2, \quad \mathrm{Log}_{10} 9 = 2\,\mathrm{Log}_{10} 3$$

Сущность логарифмирования нашим способом сводится к тому, что заданное для логарифмирования число M умножением или делением на однозначное число A преобразовывается в число N, две начальные цифры которого стоят между 39 и 48. Для числа N находим по нашей эмпирической формуре Log N, а затем, отнимая или прибавляя Log A (в зависимости от того, множим ли мы или же делим), получаем Log M.

Формула для нахождения $\mathrm{Log}\ N_{3900 \angle N \angle 4800}$ такова:

$$10^4\,\mathrm{Log}\ N_{\substack{10 \\ 3900 \angle N \angle 4800}} = N + 2035 - \left(1 + \frac{1}{6}\right)\left[\frac{N - 4350}{100}\right]^2$$

Здесь множитель 10^4 перед Log N означает, что мантисса логарифма вычисляется в виде некоторого четырехзначного целого

числа. Множитель $\frac{7}{6}$ в последнем члене представлен в виде $\left(1+\frac{1}{6}\right)$ для удобства вычисления, что будет видно дальше.

Формула распространяется на все числа, начинающиеся от цифр 33 до 48, так как характеристику она не затрагивает, мантисса же будет одинакова и у числа 4,4, и у 44, и у 440, и у 4400 и $4{,}4\cdot 10^n$ для любого n.

Вычислим, например, логарифм 461. Характеристика будет 2. Для вычисления же мантиссы мы рассмотрим число 4610, к которому может быть применена формула, так как число это имеет ту же мантиссу, что и 461.

Имеем:

$$10^4 \operatorname{Log}_{10} 4610 = 4610 + 2035 - \left(1+\frac{1}{6}\right)\left[\frac{4610-4350}{100}\right]^2$$

$$\frac{4610-4350}{100} = 2{,}6; \quad 2{,}6^2 \approx 6{,}8$$

$$\frac{6{,}8}{6} \approx 1{,}1; \quad 6{,}8 + 1{,}1 \approx 8.$$

Теперь мы видим, что удобнее прибавить к полученному квадрату одну шестую часть его, чем множить его на $\frac{7}{6}$.

Все члены вычисляются с точностью до 1. Десятичный знак за запятой округляется отбрасыванием или округлением до 1.

Имеем:

$$\begin{array}{r} +\ 4610 \\ 2035 \\ \hline -\ 6645 \\ 8 \\ \hline 6637 \end{array}$$

Значит, $10^4 \operatorname{Log}_{10} 4610 = 6637$ (без характеристики), а с характеристикой:

$$\operatorname{Log}_{10} 461 = 2{,}6637$$

что и стоит в таблице логарифмов.

Формула эта верна до 3-х единиц в 5-м десятичном знаке. Основана она на том, что прямая:

$$Y = 2035 + N,$$

и кривая:

$$Y = 10^4 \operatorname{Log}_{10} N \quad \text{(без характеристики)},$$

касаются у $N = 4343$ (или, округленно со вполне достаточной точностью — $N = 4350$), а в пределах между 3900 и 4800 расхождение между ординатами прямой и кривой с большой точностью следует параболическому закону. Это и учтено при составлении формулы.

Найдем еще один логарифм для числа 4,5.

Характеристика = 0. Для вычисления же мантиссы берем равносильное число 4500 и находим:

$$\begin{array}{r} +\ 4500 \\ 2035 \\ \hline -\ 6535 \\ 3 \\ \hline 6532 \end{array} \qquad -4350 = 150 \quad \left|\begin{array}{r} 100 \\ \hline \times\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ \hline \approx\ 2{,}2 \\ +\ 0{,}4 \\ \hline \approx\ 3 \end{array}\right. \begin{array}{r} 6 \\ \hline \approx\ 0{,}4 \end{array}$$

Итак: $\operatorname{Log}_{10} 4{,}5 = 0{,}6532$

Теперь перейдем к вычислению логарифма любого числа M.

Вычислим $\operatorname{Log}_{10} 68{,}5$.

Для приведения к виду N помножим 68,5 на 6:

$$68{,}5 \times 6 = 411.0$$

Число 411 дает:

Характеристика = 2

Мантисса — та же, что и у числа 4110:

$$\begin{array}{r} 4350 \quad -\ 4110 \\ +\ 2035 \\ \hline 6145 \\ -\ 7 \\ \hline 6138 \end{array} \quad = 240 \quad \left|\begin{array}{r} 100 \\ \hline \times\ 2{,}4 \\ 2{,}4 \\ \hline \approx\ 5{,}8 \\ +\ 1{,}0 \\ \hline \approx\ 7 \end{array}\right. \begin{array}{r} 6 \\ \hline \approx\ 1 \end{array}$$

$\operatorname{Log}_{10} 411 = 2{,}6138.$

Теперь:

$$\mathrm{Log}_{10}(68{,}5 \times 6) = \mathrm{Log}\,411{,}0.$$

Значит:

$$\mathrm{Log}_{10}(68{,}5) = \mathrm{Log}_{10}\,411{,}0 - \mathrm{Log}\,6 = 2{,}6138 - 0{,}7781_5 = \\ = 1{,}8356_5.$$

С одинаковой точностью можем принять и 1,8357 и 1,8356

Рассмотрим еще пример:

Вычислим $\mathrm{Log}_{10}\,35{,}4$.

Для приведения к виду N делим на 8:

```
35,4 | 8
 34  |----
     | 4,425
  20
   40
```

Характеристика = 0.

Мантисса — та же, что и у числа 4425:

```
  4425 — 4350 = 75   | 100
+ 2035               |-----
-------              |  0,75
- 6460               × 0,75
-------              -------
     1               ≈ 0,6 | 6
-------                0,1 |----
  6459                 ≈ 1 | 0,1
```

$\mathrm{Log}_{10}\,4{,}425 = 0{,}6459$

Но:

$$35{,}4 = 4{,}425 \times 8$$

$$\mathrm{Log}_{10}\,35{,}4 = \mathrm{Log}_{10}\,4{,}425 + \mathrm{Log}_{10}\,8 = 0{,}6459 + 0{,}9031 = \\ = 1{,}5490.$$

Можно ограничиться вычислением характеристики лишь числа M.

Вычислим, например $\mathrm{Log}_{10}\,62456$.

$$62456 \times 7 = 437132 \approx 437200$$

```
  4372 — 4350 = 22   | 100
+ 2035               |-----
-------              |  0,2   — поправка = c
(1) 6407
- 8451  (Log10 7)
-------
  7956
```

Для вычитания нам пришлось занять единицу в 5-м знаке. Но эта единица уже относится к характеристике и не играет роли, так как для числа 62456 мы непосредственно определяем характеристику 4.

Значит:

$$\mathrm{Log}_{10}\, 62\,456 = 4{,}7956.$$

Но одного лишь логарифмирования слишком мало для производства вычислений без помощи логарифмических таблиц. Необходимо иметь возможность и антилогарифмировать, т.-е. находить по данному логарифму соответствующее ему число. Важно и здесь лишь соответствие между числом и мантиссой логарифма, характеристика же лишь определяет положение запятой.

Формулу для антилогарифмирования легко получить из формулы для логарифмирования.

Пусть:

$$10^4\, \mathrm{Log}_{10}\, N = L.$$

Тогда:

$$\underset{3900 \angle N \angle 4800}{L} = N + 2035 - \frac{7}{6}\left[\frac{N-4343}{100}\right]^2$$

Отсюда:

$$N = L - 2035 + \frac{7}{6}\left[\frac{N-4343}{100}\right]^2$$

Последний член меньше $\frac{1}{200}$ доли мантиссы.

Следовательно, равенство:

$$N = L - 2035$$

точно до 0,5%.

Поставив в последнем члене вместо N его значение:

$$L - 2035,$$

мы получим в последнем члене ошибку, доходящую до $\frac{1}{200}$ его величин. А так как величина последнего члена не превосходит 30 единиц, то ошибка не будет больше, чем $\frac{30}{200} = \frac{1}{6}$ доли единицы, т.-е. вполне может быть не принята во внимание.

Тогда последний член будет:

$$\frac{7}{6}\left[\frac{N-4343}{100}\right]^2=\frac{7}{6}\left[\frac{L-6378}{100}\right]^2\approx\frac{7}{6}\left[\frac{L-6380}{100}\right]^2$$

Представив $\frac{7}{6}$, как и раньше в виде $\left[1+\frac{1}{6}\right]$, получи

$$N=\operatorname{Anti}\operatorname{Log}_{10}L_{5900\angle L\angle 6800}=L-2035+\left(1+\frac{1}{6}\right)\left[\frac{L-6380}{100}\right]^2$$

Если L не находится между 5900 и 6800 (эти пределы примерно, соответствуют пределам числа N — 3900 и 4800; а имеет какое-то иное значение l, то, прибавляя или отнимая $\operatorname{Log}_{10}A$, где A — некоторое однозначное число, получим:

$$l\pm\operatorname{Log}_{10}A=L.$$

Чтобы число L заключалось в указанных пределах, находим:

$$N=\operatorname{Anti}\operatorname{Log}_{10}L.$$

Затем получаем:

$$M=\frac{N}{A}\text{ или }M=N\cdot A$$

(если $\operatorname{Log}_{10}A$ прибавляли, то делим — и обратно).

Вычислим, например, $\operatorname{Anti}\operatorname{Log}_{10}$ 2,4286. Для приведения к виду L вычитаем логарифм шести:

$$\begin{array}{r} (1)\ 4286 \\ -\ 7781 \\ \hline 6505 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6505 \\ -\ 2035 \\ \hline 4470 \\ +\ \ \ \ 2 \\ \hline 4472 \end{array}\qquad -6380=125\ \Big|\ \begin{array}{r} 100 \\ \hline 1{,}25 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1{,}25 \\ \hline \approx 1{,}6 \\ +\ 0{,}3 \\ \hline \approx\ 2 \end{array}\ \Big|\ \begin{array}{r} \cdot\ 6 \\ \hline \approx 0{,}3 \end{array}$$

В виду того, что логарифм был вычтен, множим на 6:

$$\begin{array}{r} 4472 \\ \times\ 6 \\ \hline 26832 \end{array}\quad \cong 26830.$$

Итак:

$$\operatorname{Anti}\operatorname{Log}_{10}2{,}4286=268{,}3.$$

Решим еще один пример.

Вычислим $\text{Anti}\,\text{Log}_{10}\,0{,}3562$:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 3562 & \\
+\,\text{Log}_{10}\,2 & 3010 & \\
\hline
 & 6572 & -\,6380 \approx 190 \;\Big|\; \begin{array}{r} 100 \\ \hline 1{,}9 \end{array} \\
 & -\;2035 & \\
\hline
 & 4537 & \\
 & +\;\;4 & \\
\hline
 & 4541 \;\Big|\; \begin{array}{r} 2 \\ \hline 22708 \end{array} & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1{,}9 & \\
\hline
\approx 3{,}6 & \\
+\;0{,}6 & \begin{array}{r} 6 \\ \hline \approx 0{,}6 \end{array} \\
\hline
\approx\;\;4 &
\end{array}
$$

Делим на 2, так как $\text{Log}_{10}\,2$ был прибавлен.

Итак:

$$\text{Anti}\,\text{Log}_{10}\,0{,}3562 = 2{,}2705.$$

Владея обеими формулами (логарифмической и антилогарифмической), мы можем решать с четырехзначной точностью любые сложнейшие задачи.

Вычислим, например:

$$x = \sqrt{\frac{67{,}5^2}{\sqrt[3]{23750}}}:$$

$$\text{Log}\,x = \frac{1}{2}\left(2\,\text{Log}\,67{,}5 - \frac{1}{3}\,\text{Log}\,23750\right) =$$

$$= \text{Log}\,67{,}5 - \frac{1}{6}\,\text{Log}\,23750.$$

1) Log 67,5.

$$
\begin{array}{r|l}
67{,}5 & \\
+\;\;\;\;7 & \\
\hline
472{,}5 & -\,4350 = 375 \;\Big|\; \begin{array}{r} 10 \\ \hline \times\;3{,}75 \\ 3{,}75 \end{array} \\
2035 & \\
\hline
6760 & \\
-\;\;\;16 & \\
\hline
(1)\;6744 & \\
-\;8451 & \\
\hline
8293 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\approx 14 & \\
\hline
+\;2{,}3 & \begin{array}{r} 6 \\ \hline \approx 2{,}3 \end{array} \\
\hline
\approx 16 &
\end{array}
$$

$\text{Log}\;67{,}5 = 1{,}8293.$

2) Log 23750

```
        23750
      ×     2
      ------
      + 4750(0) — 4350 = 400 | 100
        2035                 |------
      ------                 × 4
        785                  ---
      — 19                   × 4
      ------                 ---
        6766                 + 16  | 6
Log 2 — 3010                 + 2,7 |------
      ------                 ≈ 19  | ≈ 2,7
        3756
```

Log 23750 = 4,3756.

Log x 1,8293 — $\frac{1}{6}\cdot 4{,}3756 \approx 1{,}8293 - 0{,}7293 = 1{,}1000$.

Log $x = 1{,}1000$.

```
          (1) 1000
            — 4771
6380 —        6229   ≈   150 | 100
            — 2035           |------
              4194           × 1,5
            + 3              × 1,5
              4197           ---
            + 3              ~ 2,25 | 6
              12591  ≈ 12540 + 0,4  |------
                               ~ 3  | ~ 0,4
```

$x = 12{,}59$.

Вычислим то же самое выражение арифметически:

1) $6{,}75^2$.

```
  × 67,5
    67,5
  ------
  4556,25  ≈ 4556
```

2) $\sqrt[3]{23750} \approx 30$.

```
23750 | 900
57    |------
      | ≈ 26 + 2 × 30 = 86 | 3
                          |------
                          | ≈ 29
                          × 29
                          ---
                          841
```

```
23750 | 841
6930  |------
2020  | 28,24 + 2 × 29 = 8624 | 3
3380                     26   |------
                          22   | 28,75
                           14
```

3)

$$\begin{array}{r|l} 4556 & 28{,}75 \\ \cline{2-2} 16810 & 158{,}5 \\ 24350 & \\ 13500 & \end{array}$$

4) $\sqrt{158{,}5} \approx 13.$

$$\begin{array}{r|l} 158{,}5 & 13 \\ \cline{2-2} 28 & 12{,}19 + 13 = 25{,}19 \\ 25 & \\ 120 & \end{array} \qquad \begin{array}{|l} 2 \\ \hline 12{,}59 \end{array}$$

$$x = 12{,}59.$$

Результат в обоих случаях получился совершенно одинаковый.

Читатель может спросить: зачем пользоваться логарифмической формулой, если и так можно вычислить?

Здесь был нарочно дан пример, который можно было проверить. А попробуйте без логарифмов вычислить $3{,}83^{1{,}18}$?

ГЛАВА IX.

Определение дня недели по дате.

Лет 30 тому назад в Париже слушался процесс о дележе наследства одного богача. Одна из сторон оспаривала подлинность какого то договора, будто бы составленного покойным и дававшего преимущества другой стороне. Договор этот был составлен в государственном учреждении и подписан 12 октября 1873 года. Лица, подписавшие договор, все к тому времени умерли, и не было никакой возможности проверить что-либо. Поэтому суд собрался уже признать документ действительным, как вдруг поднялся один человек из публики и заявил: „Позвольте. Я 12 октября 1873 года венчался. Помню, как сейчас,

что было воскресенье. Как же можно было в этот день подписать договор, когда все учреждения были закрыты". Подложность документа стала очевидной.

Этот случай особенно типичен—никто не догадался проверить дня недели, и не будь случайности, подлог не был бы обнаружен.

Но и вообще можно привести не мало случаев в жизни каждого человека, когда ему нужно знать: какой день недели приходится или придется на данную дату.

Для этой цели существует много таблиц так называемого вечного календаря. Однако, таблицы эти без громадной тренировки и богатой одаренности удержать в памяти почти невозможно.

На основании таблицы французского математика Люка нами составлены две формулы для нахождения дня недели по новому (Грегорианскому) стилю и старому (Юлианскому) стилю.

Формулы эти следующие:

для старого стиля

$$D = \left(ч_7 + M + г_7 + \left[\frac{г}{4}\right]_7 + 11 - B_7\right)_7$$

для нового стиля

$$D = \left(ч_7 + M + г_7 + \left[\frac{г}{4}\right]_7 + 6 - 2B_4\right)_7$$

Обозначение здесь следующее:

D—число, соответствующее дню недели.

$D = 1$ — Понедельник
$D = 2$ — Вторник
$D = 3$ — Среда
$D = 4$ — Четверг
$D = 5$ — Пятница
$D = 6$ — Суббота
$D = 7 = 0$ — Воскресенье.

$(\ldots)_7$—большие скобки со знаком $_7$ при них обозначают остаток от деления на 7 суммы, стоящей в скобках. Например:

$$(5 + 2 + 1 + 3 + 6 - 2 \times 2)_7 = (13)_7 = 6$$

$ч_7$—остаток от деления на 7 числа месяца.

Например:

$$25_7 = 18_7 = 11_7 = 4.$$

M—число, обозначаюшее данный месяц

Январь	$M = 0 = 7$	для невисокосных лет
Февраль	$M = 3$	
Январь	$M = 6$	для високосных лет
Февраль	$M = 2$	
Март	$M = 3$	для любого года
Апрель	$M = 6$	
Май	$M = 1$	
Июнь	$M = 4$	
Июль	$M = 6$	
Август	$M = 2$	
Сентябрь	$M = 5$	
Октябрь	$M = 7 = 0$	
Ноябрь	$M = 3$	
Декабрь	$M = 5$	

Вместо того, чтобы запоминать последовательность этих цифр, удобнее запомнить некоторую фразу из двенадцати слов, в каждом из которых столько букв, сколько единиц в M данного месяца.

Фраза эта составлена для невисокосных лет. Для високосных лет нужно для января и февраля вычитать единицу, для остальных месяцев все остается без перемен.

Фраза такова:

„Скажите мне дни, месяцы и годы; каждое из чисел назвать вам смогу“

Январь	Февраль	Март	Апрель
$7 = 0$	3	3	6
Скажите	мне	дни,	месяцы
Май	Июнь	Июль	Август
1	4	6	2
и	годы;	каждое	из
Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
5	$7 = 0$	3	5
чисел	назвать	вам	смогу.

Необходимо лишь твердо помнить, что для високосных лет из числа дней января и февраля следует вычитать по единице.

$г_7$ — остаток от деления на 7 числа, состоящего из двух последних цифр года.

Например, для 1893 года $г = 93$; $г_7 = 93_7 = 2$.

$\frac{г}{4}$ — целое частное от деления числа $г$ на 4.

Например, для $г = 93$:

$$\frac{г}{4} = \frac{93}{4} = 23.$$

$\left[\frac{г}{4}\right]_7$ — остаток от деления этого частного на 7

Например, для $г = 93$, когда $\frac{г}{4} = 23$,

$$\left[\frac{г}{4}\right]_7 = 23_7 = 2$$

B_4 — остаток от деления числа, состоящего из двух первых цифр года, на 4.

Например, для 1853 года $B = 18$.

$$B_4 = 18_4 = 2.$$

B_7 — остаток от деления этого же числа B на 7

Например, для 1893 года $B = 18$

$$B_7 = 18_7 = 4.$$

Теперь решим несколько примеров:

20 июля 1914 года старого стиля.

$$ч_7 = 20_7 = 6; \left\{ \begin{matrix} \text{июль} \\ 6 \\ \text{каждое} \end{matrix} \right. = M; \quad г_7 = 14 = 0.$$

$$\left[\frac{г}{4}\right]_7 = \left[\frac{14}{4}\right]_7 = 3_7 = 3; \quad B_7 = 19_7 = 5.$$

$$D = [6 + 6 + 0 + 3 + (11 - 5)]_7 = 21_7 = 0 = \text{воскресенье}.$$

7 ноября 1927 года нового стиля:

$$ч_7 = 7_7 = 0 \left\{ \begin{array}{c} \text{ноябрь} \\ 3 = M; \\ \text{вам} \end{array} \right. \quad г_7 = 27_7 = 6;$$

$$\left[\frac{г}{4}\right]_7 = \left[\frac{27}{4}\right]_7 = 6_7 = 6; \quad B_4 = 19_4 = 3.$$

$$D = [0 + 3 + 6 + 6 + (6 - 2 \times 3)]_7 = 15_7 = 1 = \text{понедельник.}$$

18 января 1872 года.

Год—високосный, месяц—январь. Вносим поправку для M:

$$ч_7 = 18_7 = 4; \left\{ \begin{array}{c} \text{Январь} \\ 7 \\ \text{Скажите} \end{array} \right. - 1 = 6 = M; \quad г_7 = 72 = 2$$

$$\left[\frac{г}{4}\right]_7 = \left[\frac{72}{4}\right]_7 = 18_7 = 4; \; B_7 = 18_7 = 4; \quad B_4 = 18_4 = 2.$$

По старому стилю:

$$D = [4 + 6 + 2 + 4 + (11 - 4)]_7 = 23_7 = 2 = \text{вторник.}$$

По новому стилю:

$$D = [4 + 6 + 2 + 4 + (6 - 2 \times 2)]_7 = 18_7 = 4 = \text{четверг.}$$

ГЛАВА X.

Запоминание рядов цифр.

При запоминании сложных формул, математических рядов и так далее, самым трудным является запоминание числовых коэффициентов в виду того, что величина каждой отдельной цифры коэффициента не зависит от остальных цифр.

Это уже давно подало мысль к замене (для запоминания) многозначного числа фразой из стольких слов, сколько знаков в числе. Каждое слово должно при этом иметь столько букв. сколько единиц в замененной им цифре.

Всем известно, что существует подобная фраза для запоминания числа π — отношение длины окружности к длине ее диаметра:

$$\pi = 3{,}1415926536.$$

На русском языке имеется фраза (по старой орфографии составленная):

„Кто и шутя и скоро пожелаетъ „пи“ узнать число, ужъ знаетъ“.

На французском языке есть такая фраза:

„Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux hommes“.

В предыдущей главе нами была приведена фраза собственного сочинения для вычисления коэффициента *M* при определении по дате дня недели.

В таких фразах помимо того, что все слова связаны друг с другом, еще и общий смысл самой фразы помогает запоминанию.

Подбор подобной фразы не слишком труден. Например, для основания логарифмов *e*

$$(e = 2{,}718281828)$$

можно воспользоваться хотя бы такой зашифровкой:

„Не забудем, а запомним мы значение *e*. Запомнив же — повторим“

Однако, составление все же требует времени, и если нужно, например, запомнить телефон какого-либо знакомого, предположим, номер:

6 - 65 - 66,

то составлять фразу, вроде: „Бегите скорей, кошка молоко выпила“ — не резонно. Можно сделать проще.

Известно, что память разделяется на зрительную, слуховую и двигательную. Двигательная память в запоминании цифр участвует лишь тогда, когда эти цифры прежде были записаны. Обычно же приходится запоминать на слух или читая. В этих случаях двигательная память помочь не может. Остаются — зрительная и слуховая.

При зрительной памяти человек как бы видит перед глазами воображаемую запись цифр, когда-то им запомненных. Зрительной памятью, например, обладает большинство хороших шахматистов, играющих вслепую (à l'aveugle), не глядя на доску. Однако, вообще зрительная память встречается сравнительно редко.

Гораздо чаще у людей бывает память слуховая, когда они поминают сказанное им на слух без записи. Это видно из того, что почти все люди сравнительно прилично помнят имена, отчества и фамилии своих знакомых, и весьма немногие помнят телефоны этих знакомых, что сравнительно трудно удержать в слуховой памяти, но весьма легко — при наличии зрительной.

Упростить запоминание цифр можно, укоротив их звуковые названия. Условимся произносить вместо названия цифры лишь одну или две определенные буквы. Тогда четырехзначное число (дающее при обычном произношении пять слов) произнесется нами в виде одного небольшого слова.

Каким должен быть звуковой шифр? Он должен не зависеть от сочетания цифр в числе, т.-е. любая комбинация цифр должна произноситься в зашифрованном виде, по возможности, одинаково легко. Поэтому в шифре не могут быть для всех 10 цифр только согласные значения, так как их не выговорить. Не могут быть и одни лишь гласные зашифрованы, так как их не запомнить, да и нет 10 гласных, легко отличимых друг от друга. Не может быть и смесь гласных с согласными, так как может случайно попасться сочетание цифр лишь одной з двух групп — либо непроизносимое, либо незапоминаемое.

Из этого следует, что должно быть для каждой цифры два значения: одно—согласное, другое—гласно При этом в запоминаемом числе цифры должны быть зашифрованы поочередно: то согласно, то гласно. Тогда получится ряд коротких слогов, сравнительно легко запоминающихся.

Примем следующие зашифровки.

1) Согласная. Для цифр от 1 до 8—начальные буквы их названий.

1 — *р* [аз]
2 — *д* [ва]
3 — *т* [ри]
4 — *ч* [етыре]
5 — *п* [ять]
6 — *ш* [есть]
7 — *с* [емь]
8 — *в* [осемь]

Для девяти буква *д* уже занята при двух. Поэтому возьмем похожую на девять своими очертаниями букву *з*:

Для нуля возьмем не *н* [уль], так как это неудобно, будет видно дальше, а последнюю из согласных — *л*:

0 — [ну] *л* [ь]

2) Гласная. Для первых пяти цифр — пять основ гласных — *а*, *е*, *и*, *о*, *у* в том же порядке, в каком они находятся в алфавите:

1 — *а*
2 — *е*
3 — *и*
4 — *о*
5 — *у*

Для остальных цифр взять другие гласные нельзя, так я сливается при произношении после буквы *ш* с буквой *а*, *ы* в этом же случае сливается с *у*, *ё* сливается и с *е*, и с *о*.

Потому возьмем те же пять гласных букв, но с добавлением буквы *н* (это объясняет, почему в согласной расшифровке мы для нуля взяли не букву *н*, а букву *л*. замены—шифр получился бы неясным):

6 — *ан*
7 — *ен*
8 — *ин*
9 — *он*
0 — *ун*

Итак, весь шифр:

Цифры	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
I. Согласный шифр . .	*р*	*д*	*т*	*ч*	*п*	*ш*	*с*	*в*	*з*	*л*
II. Гласный . .	*а*	*е*	*и*	*о*	*у*	*ан*	*ен*	*ин*	*он*	*ун*

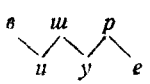
В запоминаемом числе мы будем заменять цифры поочередно их значениями из первого и второго шифров.

Возьмем, например, число

836512.

Мы получим:

8 3 6 5 1 2



Бесспорно, сочетание звуков „вишуре“ запомнить значительно легче, чем фразу: восемьсот тридцать шесть тысяч пятьсот двенадцать. В шифре — шесть букв, а в обычном названии — сорок четыре, т.-е. в семь раз с лишним больше.

Что касается бессмысленности получающегося сочетания, то — вещь весьма условная: ведь слово двенадцать понятнее нам, чем шифрованное сочетание *ре* только потому, что к слову мы привыкли, слыша его десятки тысяч раз. Шифр же — нечто новое и лишь поэтому как-будто бы — нелепое.

Даже, если смотреть с точки зрения логики, то непонятно, почему буква произносится при помощи одного или двух звуков (*а* = *а*, *б* = *бе*, *к* = *ка* и т. д.), а цифра — в виде целого слова. Вспомним, что во времена, давно прошедшие, и буквы обозначались у нас словами: *аз*, *буки*, *веди*, *глаголь*, *добро*, *есть*, *живете* и т. д. Однако, от этого отошли, в виду неудобства.

Почему же не упростить бы и счисления?

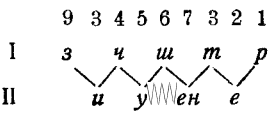
Уже при самом незначительном навыке и при памяти, не выше нормальной, не трудно запомнить 8 слогов, составленных каждый двумя цифрами, т.-е. 16 цифр, даже не видя их, а — под диктовку. Между тем, запомнить без шифра не только 16 цифр, а и 8 — трудно.

Происходит это от того, что каждое расшифрованное число дает совершенно своеобразное сочетание — слово. При запоминании же непосредственно цифр возможны комбинации лишь из десяти слов, повторяющихся в совершенно произвольной последовательности.

Возьмем, например, число

934 567 321

Шифр дает нам:



зичушентер — 10 букв.

Девятьсот тридцать четыре миллиона пятьсот шестьдесят семь тысяч триста двадцать один— 75 букв (в $7^1/_2$ раз больше).

Попробуйте хоть час потренироваться с предлагаемым мною шифром, и вы увидите, как просто и легко будет вам запомнить числа.

С другой стороны, зашифрованные сочетания, благодаря своему необычному звучанию, долго и прочно удерживаются в памяти.

Запомнив шифром номер телефона, легче забыть, кому по этому телефону надо звонить, чем самый номер.

Безусловно, можно составить шифр и еще более удобный для запоминания весьма больших рядов цифр. Нам пришлось слышать об одном русском инженере, запоминавшем до 150 цифр. К сожалению, он не объяснял применяемого им метода запоминания, хотя и говорил, что тут налицо был именно метод, а не беспредельная зрительная память (запоминались цифры не под диктовку, а написанные).

Самое главное—это суметь выражать числа, состоящие из нескольких знаков, одной или двумя буквами, т.-е. так, чтобы в среднем на каждую цифру приходилось бы менее одной буквы. В нашем способе этого не достигнуто, и в среднем на 4 цифры приходится 5 букв.

Быть может, тут можно придумать что-либо в отношении акустическом, соответствующее тому, чем стенография является в отношении зрительном.

Чрезвычайно обидно, что лица, добившиеся индивидуальными исследованиями в области мнемотехники (техники запоминания) чрезвычайно больших результатов, либо не придавали этому большого значения, либо держали свои знания для спекуляции ими демонстрированием их путем публичных выступлений циркового-эстрадного характера.

Просим читателей, работающих в области мнемотехники, не отказать в сообщении нам своих достижений. Ведь улучшение памяти при помощи технических приемов должно стать возможным не только для авторов этих приемов, а и для всех интересующихся данным вопросом лиц.

ГЛАВА XI.

Математические трюки.

До сих пор нами излагались приемы вычислений, служащих для личного пользования. В них часть выкладок производилась в уме, часть же—записывалась.

Теперь же мы остановимся на таких вычислениях, которые демонстрируются в виде чудес математики на эстрадах.

Об этих демонстрациях необходимо предварительно сказать следующее.

Частично они, безусловно, основаны на прекрасной зрительной памяти, чрезвычайно развитом уменьи демонстратора вычислять и на большом его навыке, приобретенном за долгие годы выступлений. Частично они зависят от применения методов, и, наконец, отчасти они зависят от более или менее ловких трюков.

Демонстрируются следующие вычисления и манипуляции числами: 1) моментальное сложение, 2) моментальное умножение, 3) моментальное извлечение кубичных корней, 4) запоминание громадного количества цифр, 5) моментальное определение дня недели.

1. Моментальное сложение.

Это вычисление в большинстве случаев трюковано. Правда, есть некоторые лица, которые, благодаря особенной остроте мышления могут, сосредоточившись до максимума, суммировать с громадной быстротой. Но это сосредоточение настолько разрушительно действует на нервную систему, что даже и эти лица (без крайней необходимости) предпочитают заменять вычисление моментальное—трюкованным.

Трюк заключается в отвлечении внимания публики в те моменты, когда это вычисление производится. Существуют два главных приема. Оба они требуют наличия на сцене, кроме самого вычислителя, еще одного помощника — ассистента.

Первый прием таков. Помощник объявляет: „Сейчас я попрошу публику дать 4 четырехзначных числа для того, чтобы гр. *N* моментально их сложил. Гр. *N* не будет видеть ни одного из чисел до начала сложения, так как будет стоять спиной к доске (или за доской). Попрошу дать мне числа“ (из пуб-

лики называют числа)... „Итак: тысяча семьсот тридцать два две тысячи триста девятнадцать, пять тысяч семьсот три, тысяч сто тридцать девять“

После этого вычислитель подходит к доске, мельком на нее и скороговоркой произносит: „пятьдесят восемьсот девяносто три“

С такой же легкостью вычислитель мог бы назвать результат и вообще не глядя на доску. Все заключается в произнесении вслух (отчетливо и медленно) суммируемых чисел. Во время действия вычислитель на слух суммирует их.

Техника суммирования на слух такова. Числа представляются в уме разбитыми на две части по две цифры в каждой. Например, число семь тысяч триста восемьдесят два будет семьдесят три восемьдесят два:

7382 — 73 82.

Действие должно вестись с такою скоростью, чтобы вычислитель, услышав произнесенную цифру, успел прибавить к сумме всех предыдущих.

Возьмем рассмотренные числа:

Ассистент: Тысяча семьсот тридцать два . .
Вычислитель в уме произносит: Семнадцать тридцать два...
А. : Две тысячи . . .
В. : Тридцать семь тридцать два.
А. : . . . Триста . . .
В. : Сорок тридцать два
А. : . . . Девятнадцать,
В. : Сорок пятьдесят один.
А. : Пять тысяч . . .
В. : Девяносто пятьдесят один.
А. : . . . Семьсот . . .
В. : Девяносто семь пятьдесят один.
А. : . . . Три . . .
В. : Девяносто семь пятьдесят четыре.
А. : Шесть тысяч . . .
В. : Сто пятьдесят семь пятьдесят четыре.
А. : . . , Сто . . .
В. : Сто пятьдесят восемь пятьдесят четыре.
А. : . . . Тридцать . . .
В. : Сто пятьдесят восемь восемьдесят четыре.
А. : . . . Девять
В. : Сто пятьдесят восемь девяносто три.

= 158 93 = 15 893.

Перед этим вычислением необходимо довольно долго тренироваться для достижения быстроты. В начале тренировки интервалы между отдельными словами ассистента (лишь количество тысяч и само слово тысяч должны произноситься вместе) должны быть около пяти секунд, а к концу подготовки их нужно уменьшить до двух секунд, что соответствует средней скорости отчетливого письма на доске: в две секунды—одну цифру.

Во время записи ассистент должен держать себя так, как будто бы он произносит числа лишь для того, чтобы дать публике задних рядов, плохо видящей запись на доске, возможность проверить, те ли числа пишутся, которые ассистенту диктует публика.

Вычислитель при этом спокойно ходит за доской или стоит спиной к ней.

Ходить лучше, так как у неподвижного человека публика скорее может заметить напряженность лицевых мускулов, свидетельствующую о кипящей в этот момент в мозгу вычислителя напряженной работе.

Второй прием менее красив, чем первый. Числа записываются молча и закрываются полотенцем. Затем вычислитель выходит на сцену и становится в некотором отдалении сбоку доски, однако, так, чтобы, скосив глаза, иметь возможность видеть написанные числа.

После этого ассистент снимает покрывало с доски и начинает, обращаясь к публике, говорить в течение 20—25 секунд о том, что, мол, гр. *N* сейчас продемонстрирует моментальное сложение, подобного которому не видывал еще мир, что даже знаменитый математик Раймонди, живший в XVI веке не мог делать этого, и т. д. и т. д.

Во время речи ассистента вычислитель, как бы невзначай, скашивает глаза на доску и вычисляет сумму записанных чисел. Когда ассистент кончает говорить, то он передает вычислителю мел, и вычислитель моментально записывает сумму.

Во время записи и вычисления вычислитель держит себя с напущенной нервозностью. Сумма же записывается им в припадочном аффекте. Поэтому даже те лица из публики, которые видели косые взгляды, бросаемые вычислителем на доску, жалея его и без того истерзанные нервы, молчат и не протестуют.

После нескольких лет выступлений ненормальная нервозность поведения перед публикой входит у вычислителей в привычку, и конечно, действуя на публику, усиливают ее удивление перед видимыми чудесами.

2. Моментальное умножение.

Моментальное умножение оформляется таким образом. Ассистент пишет продиктованные публикою числа на доске. Затем к доске подходит вычислитель с мелом, смотрит на доску в течение нескольких десятков секунд и затем быстро выписывает произведение, записывая цифры слева направо, а не справа налево, как это сделали бы мы, выписывая произведение цифра за цифрой, при помощи изложенного выше способа.

Без какого-либо особого вспомогательного приема умножать так может лишь человек с чрезвычайно сильно развитой зрительной памятью, могущий удерживать в ней вычисленные цифры произведения. Но и человек, такой памятью не обладающий, может выписывать произведение сразу в направлении слева направо, пользуясь мнемотехническим приемом, изложенным выше, состоящим в замене цифр буквами.

По мере получения цифр произведения составляется из них шифрованное слово, которое, легко удерживаясь в памяти, не мешает цифровым вычислениям.

Возьмем пример:

	×		3	2	7	
			4	5	6	
(4)					2	
					е	(последнюю цифру зашифровываем всегда гласно).
(5)				1	2	
				р	*е*	
(6)			1	1	2	
			а	*р*	*е*	
(2)		9	1	1	2	
		з	*а*	*р*	*е*	
	1	4	9	1	2	
	р	*о*	*з*	*а*	*р*	*е*

Получив полностью слово—шифр произведения, мы записываем его цифрами сразу и слева направо.

Моментальное извлечение кубичного корня

Это вычисление—одно из самых эффектных в смысле поражения публики, одновременно—и одно из самых легких. Заключается оно в том, что ассистент диктует вычислителю некоторое девятизначное число, являющееся кубом целого трехзначного числа. Вычисление $\sqrt[3]{}$ из данного числа сводится, таким образом, к нахождению основания куба.

Это обстоятельство значительно облегчает вычисление. Дело то для нахождения трехзначного основания куба очно вычислить лишь две цифры, так как третья цифра—число единиц основания—совершенно точно определяется последней цифрой—числом единиц куба.

Зависимость эта такова. Пусть a_1—число единиц основания, а a_3—число единиц куба. Связь между ними

a_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
a_3	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0,

т.-е. у всех цифр, кроме 2, 3, 7 и 8, число единиц и в основании и в кубе одинаково, а при 2, 3, 7 и 8 число единиц в кубе и основании дополняют друг друга до 10.

Для нахождения первой цифры—количества сотен основания—нужно помнить кубы первых десяти чисел

число миллионов в кубе	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
сотен в основании	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Это запомнить, безусловно, не трудно.

Для нахождения второй цифры—количества десятков основания—мы обратимся к формуле, служащей для извлечения дробного кубичного корня.

Пусть $\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + x} = a + \frac{x}{3a^2}$

где

a — первое приближение $\sqrt[3]{N}$

$x = N - a^3$.

Взяв с одним знаком первое приближение a и зная по только что приведенной таблице величину a^3, нам не трудно вычислить $x = N - a^3$ с точностью двух знаков, из которых второй может быть даже не совсем точным. Чтобы получить $\frac{x}{3a^2}$ нам надо знать числа $3a^2$:

(сотни) $a =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(миллионы) $3a^2 =$	0,03	0,02	0,3	0,5	0,75	1,1	1,5	1,9	2,4	3

В виду того, что нам надо получить число десятков, т.-е. число

$$y = \frac{x}{10},$$

мы должны вычислить:

$$y = \frac{x}{30a^2}$$

сотни a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
миллионы $30a^2$	0,3	1,2	2,7	5	7,5	11	15	19	24	30

Последняя цифра основания определится, как было сказано, последней цифрой куба.

Всего, следовательно, нужно помнить:

1) кубы десяти чисел;
2) величины $30a^2$ для десяти чисел;
3) связь между a_1 и a_3.

Предположим надо найти:

$$\sqrt[3]{263'374'721}$$

1) Число миллионов 263 больше 216, но меньше 343. Значит, $a = 6$, т.-е. $6^3 = 216$.

2) $x \approx 263 - 216 = 47$ (миллионов).

3) $y = 47 : 11 \approx 4$ (десятки).

4) $a_3 = 1$. Значит, и $a_1 = 1$.

Имеем: $a = 6$, $y = 4$, $a_1 = 1$.

$$\sqrt[3]{263374721} = 641$$

Мы видим, что подчеркнутые пять цифр при вычислении основания не играют абсолютно никакой роли. Мы можем задать их заведомо неверными, и вычислитель не сможет проверить.

В этом заключается вся несерьезность предлагаемого опыта. Ведь для получения $\sqrt[3]{N}$ с точностью трех знаков достаточно задать и само число N с той же точностью трех знаков. Возьмем, например,

$$\sqrt[3]{263000000} = 100\sqrt[3]{263}$$

Первое приближение будет, примерно, 6,5:

$$\begin{array}{r|l|l}
 & \times\ 6{,}5 & \\
 & \times\ 6{,}5 & \\
263{,}0 & 42{,}2 & \\
980 & \multicolumn{2}{l}{6{,}23 + 2 \times 6{,}5 = 19{,}23} \quad \Big|\ \dfrac{3}{6{,}41} \\
136 &
\end{array}$$

Итак:

$$\sqrt[3]{263} \approx 6{,}41$$

$$\sqrt[3]{263\,000\,000} \approx 641.$$

Точнее, получим:

$$\sqrt[3]{263\,000\,000} = 640{,}70.$$

Как видим, при определении до трех знаков мы и получим то, что у нас вышло. Зачем же в таком случае задавать N с девятизначной точностью?

Возьмем еще один последний пример.

Вычислим

$$\sqrt[6]{183250432}.$$

1) $125 < 183 < 216$.

Число N ближе к 216. Поэтому возьмем

$$x = 183 - 216 = -33, \text{ при } a = 6.$$

2) $y = \frac{-33}{11} \approx -3$.

Значит, число $\sqrt{N}$ близко к $6 \cdot 100 - 3 \cdot 10 = 570$.

3) $a_3 = 2$. Значит, $a = 8$. Ближайшее к 570 число, оканчивающееся на 8, будет 568.

Итак:

$$\sqrt{183250432} = 568.$$

4. Запоминание громадного количества цифр.

Тут дело заключается также в трюке.

Сперва ассистент обходит публику и под диктовку набирает по несколько цифр от каждого. Вернувшись на сцену, он записывает на доске сперва 10—12 по порядку из заданных чисел для того, чтобы лица из публики, видевшие начало записи, не могли чего-либо заподозрить: большее число цифр никто из публики все равно запомнить сам не сможет. После этого ассистент возобновляет в памяти своей заранее условленное с вычислителем стихотворение и, пользуясь шифром, соответствия букв и цифр все подходящие буквы по порядку записывает цифрами до определенного места.

Затем вычислитель смотрит на доску столько времени, сколько ему нужно, чтобы запомнить шифром первые 10—12 чужих чисел. После этого он отворачивается от доски, пропускает зашифрованные цифры и дальше переходит также на условленное с ассистентом стихотворение, называя соответствующие по шифру буквам стихотворения цифры. Разумеется, получится все то же, что получилось и у ассистента. Впечатление у публики создается при этом совершенно исключительное.

Задачей ассистента в этом опыте является запись после первых 10—12 чисел остальных не сразу (т.-е. от одного человека из публики—нескольких цифр), а вразбивку: одну от одного человека, другую — от другого и т. д.; этим совершенно устраняется возможность проверки.

Конечно, нужно принять еще одну предосторожность.

Записав числа как бы с бумажки на доску, ассистент должен уничтожить бумажку, потеряв ее или выбросив, как ненужную. Сделать это, конечно, надо непринужденно.

Для этого опыта, или, вернее, фокуса, ассистент и вычислитель должны оба прекрасно знать зашифровываемое стихотворение.

Возьмем, например, „Ветку Палестины“ и зашифруем ее нашим способом:

С к а ж и м н е в е т к а П а л е с т и н ы,

7 1 3 2 8 2 3 1 5 1 0 2 7 3 3

г д е т ы р о с л а, г д е т ы ц в е л а

2 2 3 1 4 7 0 1 2 2 3 8 2 0 1

и т. д.

Пользуясь только согласным шрифтом и первой половиной гласного, не применяя зашифровок *ан*, *ен*, *ин*, *он* и *ун*, получим вместо двух первых строк ряд цифр:

7 1 3 2 8 2 3 1 5 1 0 2 7 3 3 2 2 3 1 4 7 0 1 2 2 3 8 2 0 1.

Этим и введем публику в заблуждение в отношении оценки нашей памяти.

5. Моментальное определение дня недели.

Моментальное определение дня недели основывается, главным образом, на тренировке. Кроме того, в формулу вводятся несколько упрощенных моментов.

1) Публика просит обычно установить даты лишь ближайших лет, т.-е. 19-го и 20-го века. В 19-м веке для старого стиля величина

$$11 - B_7 = 11 - 18_7 = 11 - 4 = 7 = 0.$$

Новый стиль для 19-го века почти не спрашивается (в 19-м веке для нового стиля

$$6 - 2\,B_7 = 6 - 2 \times 18_4 = 6 - 2 \times 2 = 2).$$

В 20-м веке для нового стиля имеем:

$$6 - 2B_4 = 6 - 2 \times 19_4 = 6 - 2 \times 3 = 0.$$

Для старого же:

$$11 - B_7 = 1 - 19_7 = 11 - 5 = 6 = -1.$$

Итак, коэффициенты века в прошлом веке для старого стиля и в этом году для нового равны нулю. Для нового стиля в прошлом веке $+2$ и для старого в настоящем веке -1. Это запомнить легко.

2) Коэффициент года составляется из членов

$$г_7 \quad \text{и} \quad \left[\frac{г}{4}\right]_7$$

Заметим, что:

$$г_7 + \left[\frac{г_7}{4}\right] = (г \pm 28)_7 + \left[\frac{г + 28}{4}\right]$$

так как 28 кратно и четырем и семи.

Поэтому, если нам, например, дан 1893 год, то вместо того, чтобы вычислять непосредственно

$$93_7 + \left[\frac{93}{4}\right]_7 = 2 + 23_7 = 2 + 2 = 4,$$

мы вычисляем эти числа не для $г$, а для остатка $г_{28}$ от деления $г$ на 28. Для нахождения остатка достаточно вычесть из $г$ наибольшую из содержащихся в нем величин

$$0, 28, 56 \quad \text{или} \quad 84.$$

В нашем примере:

$$г_{28} = 93_{28} = 93 - 84 = 9,$$

$$(г_{28})_7 + \left[\frac{г_{28}}{4}\right]_7 = 9_7 + \left[\frac{9}{4}\right]_7 = 2 + 2 = 4.$$

Вычесть 84 не трудно. Зато дальнейшие операции над числом 9 производить значительно легче, чем над числом 93.

3) Коэффициенты M нужно знать наизусть уже без применения мнемонической фразы.

При выполнении этих трех условий вычисление дня недели можно делать весьма быстро. Возьмем, например:

19	Май		1916 г.	ст. ст.	
$Ч_7$	M		$г_7 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}_7$		D
5 +	1	+	2 + 4	— 1 = 11	4 = четверг.
25	Август		1876 г.	ст. ст.	
$Ч_7$	M		$г_{28} = 76 - 56 = 20$		D
4 +	2	+	6 + 5	0 = 17	3 = среда.
29	Февраль		1924 г.	н. ст.	D
1 +	3 — 1 висок. год.	+	3 + 6	+ 0 = 12	5 = пятница.

Заключение.

Мы рассмотрели как серьезные методы быстрых вычислений, так и те трюки, при помощи которых можно придать исполнению этих вычислений видимость моментальности.

Читатель, занявшийся серьезно вопросом упрощения вычислений, наверно, сможет и сам найти много интересного. Мы просим его не отказать в любезности сообщить на имя автора письмом, адресованным в Государственное Техническое Издательство (Москва, Ильинка, проезд т. Владимирова, 4) о своих достижениях. Всякие интересные добавления будут нами с благодарностью приняты к сведению и напечатаны с указанием их авторов в следующем издании этой работы (если публика заинтересуется ею настолько, чтобы явилась необходимость во втором издании).

Предостерегаем читателей от увлечения трюками, ничего не дающими ни уму, ни сердцу. Не стоит добиваться показных рекордов в области, представляющей собою бесконечное поле для новых серьезных исследований, могущих принести пользу миллионам работников, имеющим дело с вычислениями.

Литература.

Ф. Меннхен. Некоторые тайны артистов-вычислителей. (Одесса, Изд-во „Mathesis“, 1923 г.).

М. Гетманский. Математические аттракционы. (Изд-во „Теакинопечать“, 1928 г.).

ОГЛАВЛЕНИЕ.

		стр.
Предисловие		3
Глава	I. Умножение	4
„	II. Проверка произведения	15
„	III. Приближенное умножение	18
„	IV. Деление	20
„	V. Извлечение квадратного корня	28
„	VI. Извлечение кубичного корня	36
„	VII. Извлечение корня любой степени	41
„	VIII. Логарифмирование	44
„	IX. Определение дня недели по дате	53
„	X. Запоминание рядов цифр	57
„	XI. Математические трюки	63
Заключение		73