Проф. Д. М. СИНЦОВ

ДИФЕРЕНЦІЯЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

ДВОУ „РАДЯНСЬКА ШКОЛА"

Проф. Д. М. СИНЦОВ

ДИФЕРЕНЦІЯЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

(ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ
КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ)

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО „РАДЯНСЬКА ШКОЛА“
Харків 1931

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літописі Українського друку", „Картковому реєстрі та інших покажчиках Української Книжкової Палати.

Зам. № 584.

Укрголовліт № 2329 (972). Тираж 10000. 15 др. арк. Ост. 364. А 5.

ПЕРЕДМОВА.

В основу цього курсу покладено лекції, що їх я читав від 1903-го року в Харківськім Університеті. Лекції кілька разів літографувалося, а надруковано їх 1908 року в Записках Університету. 2-е видання випустити не вдалося, і 1919-го року курс перевидано літографованим з додатком змін, що повстали з досвіду 15-тирічного викладання. Читаючи далі курс в Інституті Народньої Освіти, я, звичайно, набагато його скорочував, але зате протягом 1923—1926 років, я викладав, як окремий курс, теорію поверхонь, надолужуючи цим скорочення загального курсу. Заходжуючись до нового видання, я дбав внести ті зміни й доповнення, що назбиралися в мене, одначе не виходив за межі можливого. Великою прогалиною в моєму попередньому курсі була відсутність криволінійних координат. Я подбав по змозі поповнити тепер цю прогалину, але зробив це обережно: в самий текст я завів лише лінійний елемент, а в додатку дав у криволінійних координатах елементарні формули, що стосуються кривини поверхонь і рівнання трьох добре відомих типів ліній на поверхні.

Також у окремому додатку я подаю формулу К. Ноймана для Ґавсової кривини та інші формули, що стосуються кривини поверхні, заданої неявним рівнанням.

Не зважаючи на відносну складність, ці формули далеко зручніші в застосованнях до конкретних поверхонь, що задані такими рівняннями.

Я не зважився завести метод векторіяльного числення, як це робить у своєму курсі Blaschke[1]) або хоч в обережнішій формі Julia[2]). Для елементарного курсу, яким має бути мій курс, я не вважаю це в даний час за потрібне. Зате я подбав завести чимало прикладів і подав низку кривих, що трап-

[1]) Vorlesungen über Differentialgeometrie Bd. I 2A, 1924.
[2]) Éléments de géométrie infinitésimale P. 1927.

ляються в застосованнях (Цисоїди, Конхоїди, Циклоїди, Епициклоїди, Watt'ова крива та інші.

Із чужоземних курсів найбільший вплив на мене мав (як колись курс Cesaro) курс Vessiot Leçons de géométrie Supérieure P. 1919, і для кривих у площині H. Hilton Plane algebraie curves Oxford 1920 та Fowler Elementary differential geometry of plane curves Cambr. 1920.

Оформити український текст взяли на себе мої співробітники на катедрі геометрії — П. О. Соловйов, П. М. Дармостук та Х. С. Рябокінь. За це, а також за вказівки на деякі недоліки викладу я й висловлюю їм свою щиру подяку.

Д. Синцов.

Розділ I.

Плоскі криві.

§ 1. Поняття кривої.

Застосовання аналізи до вивчення геометричних питань, починаючись „застосованням альґебри до геометрії“, має своїм продовженням „Аналітичну Геометрію“, що навіть до початку 19-го сторіччя мала першу назву. Група питань, об'єднуваних під першою назвою, має ту відзнаку, що в ній не заводиться поняття координатної методи і трактується питання визначені, які не приводять до геометричних місць і, виходить, не потребують заведення поняття про рівнання лінії, принаймні явним способом. Надалі розвиток аналітичної геометрії йде з одного боку в напрямі ускладнення тих альґебричних теорій, що їх при цьому використовується: заводиться однорідні координати та теорію інваріянтів, що дає змогу вивчати аналітично властивості, які не змінюються при лінійних перетвореннях або геометрично — при проєктуванні, — так звані проєктивні властивості геометричних образів.

З другого боку різноманітність геометричних форм, що визначаються рівнанням між координатами, різноманітність, яка зростає неймовірно швидко зі зростом степеня рівнання — спонукає не йти крок за кроком у вивченні кривих ліній та поверхонь, а утворювати загальну теорію кривих (resp. поверхонь).

За 67 років по тому, як вийшла Декартова „Геометрія“ (1637), Ньютон дав у додатку до трактату з оптики своє Enumeratio linearum tertii ordinis, де відзначає 72 різних види цих кривих, до яких потім додали ще ті 24, які він пропустив. Плюкер у свій, детальнішій, клясифікації нараховує 216 видів. Ще більше різних типів кривих дають рівнання 4-го порядку, що мають 14 довільних коефіцієнтів, а також криві 5-го порядку, що мають 20 довільних коефіцієнтів і т. д. Тому треба утво-

рити загальну теорію альґебричних кривих m-го порядку визначених рівнань m-го степеня в прямокутних (або косокутних) координатах.

Але цим ще не вичерпується вся різноманітність кривих ліній, що ми їх можемо собі уявити і що трапляються при розв'язанні різних питань з геометрії та механіки. Ціла низка таких кривих зв'язана з іменами грецьких геометрів, що придумали їх для розв'язання тих або інших питань. (Досить нагадати Архімедову спіралю та Діностратову квадратриксу). Усі ці неальґебричні криві об'єднуються під назвою трансцендентних.

Вже перші кроки аналізи безконечно-малих були зв'язані з питаннями теорії кривих, і саме поняття похідної виникало в зв'язку з задачею провести дотичну. Поруч збільшення питань, що їх розв'язувалося застосуванням методи безконечно-малих, виникала потреба об'єднати їх в окрему дисципліну, а звідціля й пішли окремі розділи та курси застосування диференціяльного числення до геометрії. Не можна сказати, щоб назва відбивала в собі суть справи, бо вона показує на підлеглість курсу тим дисциплінам, що їх вивчається і на розв'єднання його на частини. Тому в цей курс не заводиться ні геометричних питань, зв'язаних із застосованням теорії визначених інтеґралів (ректифікація та квадратура кривих, комплянація та кубатура поверхонь), і через те їх зараховують до цієї останньої, ні геометричних питань варіяційного числення (задача про геодезичні лінії) та інтеґрування диференціяльних рівнань.

Також чимале обмеження змісту викликає сама метода. Щоб застосовувати методи аналізи безконечно-малих, треба обмежитися вивченням лише тих образів, до яких ці методи можна прикладати. Доводиться припускати, що ті функції, які входять у рівнання кривої, можна диференціювати, іншими словами, що крива має дотичну. Глибше визначення кривої стає можливе лише тоді, коли завести більше обмежень: вивчаючи кривину, треба припускати, що існує 2-га похідна, а теорія дотику кривих вимагає можливости розгортання в Тейлорів ряд. Якщо перший дефект є лише результат традиції й ніщо не перешкоджало б назвати курс ближчою до його змісту назвою: „Диференціяльна Геометрія“, відповідно розмістивши й зміст, то останнього обмеження уникнути не можна. З часів Декарта,

Ньютона й Ляйбніца розвиток самого поняття кривої став у щільний зв'язок з розвитком поняття функції. Коли Декарт, ставлячи питання про те, які лінії можна прийняти в геометрію, хотів обмежитися тим, що ми тепер звемо альґебричними лініями, коли Ойлер ще вважав за функцію лише аналітичний вираз, а довільну функцію утотожнював з графічно заданою кривою, то дальший розвиток поставив питання значно ширше. Декартове обмеження вже Ляйбніц вважав за надто вузьке. Щождо Ойлерового означення, то з одного боку графічно задана крива, (тому що вона не є сукупність ряду математичних точок, тобто числових значінь однієї змінної, що відповідають рядові значень другої, а є власне нарисованою графічно), — являє собою цілу смугу (Flächenstreifen), в яку можна врисувати надто різноманітні криві і, виходить можна, залежно від вимог тої або іншої задачі, наперед установити аналітичну природу зв'язаної з кривою функції; а це становить зміст теорії інтерполювання. З другого боку поняття функції не зв'язується неминуче з аналітичним її визначенням і з цього погляду Euler'ове поняття поширюється в найзагальніше поняття функції згідно з Dirichlet: y зветься, в певному обсязі значень, однозначною функцією x, коли для кожного значення x, що належить до даного обсягу, ґаритметично є відоме певне значіння y. Щоб підійти до звичайного для нас інтуїтивного розуміння кривої, не досить додати лише умову суцільности (безперервности)

$$|f(x_1) - f(x)| < \varepsilon \text{ коли } |x_1 - x| < \delta$$

та умову диференціювальности, тобто існування границі

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$

а треба ще додати, що немає конечного інтервалу, у якому б функція мала безконечно-велике число maximum'ів або minimum'ів.

Тоді крива, визначена рівнанням $y = f(x)$, буде звичайною кривою, до вивчення якої можна прикладати методи аналізи безконечно-малих.

Другий шлях, що ним можна прийти до поняття кривої, це шлях Jordan'ів (див. Cours d'analyse т. I éd. 3)[1]), який виходить з поняття множин і приходить до схожих результатів.

[1]) C. Jordan розглядає замкнені криві.

Точки визначають парою їхніх координат x, y — чисел, в розумінні сучасного поняття про число. Плоскою кривою називають таку множину точок, яку можна зобразити однозначно й однозначно зворотньо точками конечного відтинку прямої, так що

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t),$$

при цьому треба припустити, що ця множина не має подвійних точок, тобто, коли t обмежене інтервалом (a, b), то не може бути при

$$a < t_1 < b \text{ й } a < t_2 < b$$

разом

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2), \; \psi(t_1) = \psi(t_2).$$

Це обмеження конче потрібне, бо інакше крива може вкривати площу квадрата — приклад Пеано. Така „крива" розділяє площину на дві частини так, що перейти площиною з однієї частини в другу не можна, не перетинаючи кривої. Для того, щоб існувала довжина дуги, треба, щоб функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ були функції обмеженої варіяції (fonctions à variation bornée). Але така крива ще може й не мати дотичної, для існування якої треба поставити вимогу, щоб функції диференціювалися.

§ 2. Види рівнання кривої.

В якій завгодно системі координат, напр. у Декартовій (як найбільш вживаній) криву можна визначити, 1) рівнанням, що дає одну з координат (найчастіше y) в явній функції другої що вважається за незалежну змінну

$$y = f(x) \text{ або } x = \varphi(y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

або 2) рівнанням у неявній формі

$$F(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

або зрештою 3) обидві координати бувають визначені як функції допоміжного змінного

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

В механіці, де криві розглядається, як шлях точки, тобто, як геометричне місце різних положень точки, що рухається, в різні моменти часу, за незалежну змінну вважають час. Але нею може бути й кут або дуга кривої s (див. далі).

Так само в полярних координатах

$$1^\circ\ r = f(\theta) \text{ або } \theta = F(r)$$

$$\text{або } 2^\circ\ \Phi(r, \theta) = 0 \text{ або } 3^\circ\ r = \varphi(t),\ \theta = \psi(t).$$

Так, Архімедова спіраля утворюється рухом точки по прямій яка тим часом повертається навколо нерухомої точки. Коли виходячи з початку, точка пересувається на довжину a за одиницю часу, а пряма за той саме час повертається на кут α, то

$$r = a \,.\, t,\ \theta = \alpha \,.\, t$$

виключенням t, одержимо рівнання в 1-й формі

$$r = \left(\frac{a}{\alpha}\right) . \theta;$$

переходячи до прямокутних координат, вносимо до формул переходу це значення r: тоді

$$x = \frac{a}{\alpha}\ \theta \,.\, \mathrm{Cos}\,\theta,\ y = \frac{a}{\alpha}\ \theta \,.\, \sin\theta\ ^{1)}$$

буде рівнання Архімедової спіралі в параметричній формі.

Виключаючи θ, матимемо

$$y = x \,.\, \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{a}\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Отже, від одного виду рівнання кривої до другого можна прийти через виключення. Треба лише пам'ятати, що (1) і (2) не цілком еквівалентні; розв'язуючи (2) відносно y, матимемо не одне, и взагалі декілька розв'язань

$$y = f_1(x),\ y = f_2(x),\ \ldots\ y = f_n(x),$$

із яких кожне визначає лише одну вітину кривої, і щоб мати всю криву, визначену (2), треба взяти до уваги всі вітини. Так, на випадок гіперболі

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

[1]) Взагалі, коли маємо рівнання кривої в полярних координатах в явній формі

$$r = f(\theta)$$

то разом маємо її рівнання в параметричній формі, підставивши в формули перетворення координат

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

замість r за рівнанням кривої $f(\theta)$:

$$x = f(\theta)\cos\theta,\ y = f(\theta)\sin\theta$$

розв'язуючи відносно x, маємо

$$x = \pm a \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}$$

один знак відповідає правій вітині (верхній знак), а другий — лівій вітині.

§ 3. Приклади кривих.

I. Криві, задані рівнанням 3-го порядку

1) Декартів лист:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$ [1])

2) Розбіжні параболи (Ньютонові parabolae divergentes)

$$p \cdot y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$$

(Дослід різних випадків, що може дати це рівнання див. § 15).

3) Цисоїда Діоклесова. Задано коло, точку A, що лежить на колі і дотичну до кола в кінці B діяметра, що проходить через A (рис. 1).

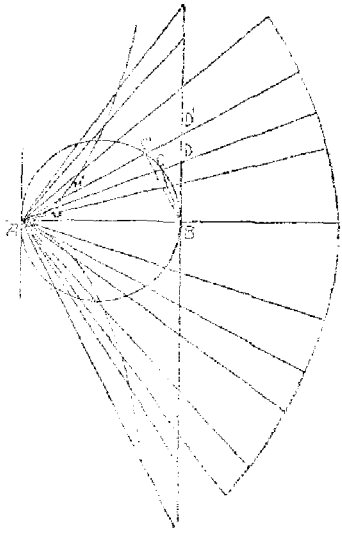


Рис. 1.

Нехай $AB = 2a$ — діяметр кола.

Через A проводимо січну, що зустрічає коло в точці C і дотичну в точці D і відкладаємо $AM = CD$. Геометричне місце точки M зветься цисоїдою (Діоклесовою). Рівнання її зручно одержати в полярних координатах. Взявши A за полюс і AB за полярну вісь, матимемо

$$AM = AD - AC$$

але

$$AD = \frac{2a}{\cos\theta}, \quad AC = 2a \cdot \cos\theta.$$

Отже

$$r = \frac{2a}{\cos\theta} - 2a\cos\theta = \frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

4) Помітивши, що завдяки рівности $AM = CD$, $AD - AM = AD - CD$ або $MD = AC$, тобто на AD в напрямі точки A відкладаємо від D відтинок MD, який дорівнює хорді кола AC.

[1]) Криву спочатку було задано лише рівнанням. Але можна дати й чисто геометричні побудовання. Див. напр. П. О. Соловйов. „Про геометричні побудовання Декартового листа". Зап. Х. І. Н. О. т. III, с. 102—110.

Можна було б відікласти цю хорду в протилежному напрямі і ми мали б на продовженні AD точку M', яка при зміні θ опише нову криву, так звану супутницю цисоїди, що має рівнання

$$r = 2a \frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos \theta}.$$

Переходячи до прямокутних координат, візьмімо A за початок, AB за віс x-ів. Помноживши обидві частини на $r^2 \cos \theta$ і замінивши

$$r \cos \theta = x, \; r \sin \theta = y$$

дістанемо для цисоїди

$$(x^2 + y^2)\, x = 2ay^2$$

і

$$(x^2 + y^2)\, x = 2\,(2x^2 + y^2)$$

для її супутниці.

✓5) Строфоїда[1]). Із точки A проводимо ряд січних, що зустрічають другий бік прямого кута AOC в точці C (рис. 2). Із C радіюсом CO, проводимо коло, що зустрічає січну в точках M та M'. Геометричне місце M та M' і буде шукана крива.

Нехай

$$OA = a$$

Коли

$$\angle CAX = \theta,$$

то

$$CA = -\frac{a}{\cos \theta}, \; CM =$$

$$= CO = -a \,.\, \mathrm{tg}\theta$$

Тоді

$$r = -\frac{a}{\cos \theta} \pm a \,\mathrm{tg}\, \theta$$

або

$$r \cos \theta + a = \pm a \sin \theta.$$

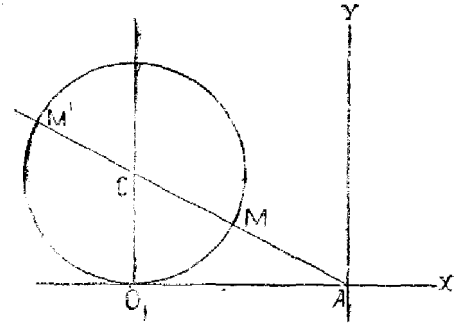


Рис. 2.

Коли піднести до квадрата й помножити на r^2, то матимемо

$$(x + a)(x^2 + y^2) = a^2 y^2$$

віднімаючи по $a^2 y^2$ і скорочуючи на x, остаточно матимемо

$$(x^2 + y^2) \,.\, (x + 2a) + a^2 x = 0$$

[1]) Назву дав Montucci 1846 р. Lehmus називав її Kukumeïde. Booth—logocíclica, Kummer—harmonische Kurve, Reuschle — circulares Folium, J de Vargas y Aquirre — лист Cornu (Див. G. Loria I, c.).

а це можна переписати

$$(x+2a)\,y^2+x\,(x+a)^2=0.$$

6) Строфоїду косу одержуємо, коли в попередньому прикладі замість прямого кута COA візьмемо косий кут $COA=\omega$ (рис. 2).

В трикутнику COA

$$\angle OCA=\theta-\omega$$

і тому

$$\frac{CA}{\sin\omega}=\frac{CO}{\sin\theta}=\frac{OA}{\sin(\theta-\omega)}$$

$$AM=r=CA-CO=\frac{OA\sin\omega}{\sin(\theta-\omega)}-\frac{OA\sin\theta}{\sin(\theta-\omega)}$$

$$AM'=CA+CO$$

тобто

$$r=a\,\frac{\sin\omega+\sin\theta}{\sin(\theta-\omega)};$$

помножаючи на

$$\sin(\theta-\omega)=\sin\theta\,.\,\cos\omega-\cos\theta\sin\omega,$$

одержимо

$$y\cos\omega-x\sin\omega-a\sin\omega-a\sin\theta=0.$$

Підносячи до квадрата й помножаючи на r^2, матимемо

$$(x^2+y^2)\,(x\sin\omega-y\cos\omega+a\sin\omega)^2-a^2\,y^2=0.$$

Це рівнання можна переписати:

$$(x^2+y^2)\,[(x\sin\omega-y\cos\omega)^2+2(x\sin\omega-y\cos\omega)\,.\,a\sin\omega]+$$
$$+(x^2+y^2)\,a^2\sin\omega-a^2\,y^2=0.$$

Останні два члени можна переписати:

$$a^2(x^2\sin^2\omega-y^2\cos^2\omega).$$

Так виявляється спільний чинник

$$(x\sin\omega-y\cos\omega),$$

виділивши його, дістанемо рівнання

$$(x\sin\omega-y\cos\omega+2a\sin\omega)\,(x^2+y^2)+a^2\,(x\sin\omega+y\cos\omega)=0.$$

Цю криву можна одержати, як геометричне місце фокусів еліпс, по яких прямий коловий конус перетинається площинами, що проходять через точку твірної конуса перпендикулярно до площини, проведеної через цю твірну та вісь конуса.

На честь відомого бельгійського математика та статистика Ад. Кетле, що вивчав її властивості 1819 року, ця крива називається фокаль Кетле, хоча вперше її винайшов значно раніше, Roberval та Torricelli в XVIII стор.

Хай AS, $A'S$ дві твірні конуса в площині рисунка, AB' слід від площини еліпси, BB' і AA' сліди від січень перпендикулярних до осі SD конуса (рис. 3).

Хай

$$AS = a, \quad \angle B'AA' = \angle AB'B = t,$$
$$\angle ASA' = 2\alpha$$

$$2a' = AB' = \frac{a \sin 2\alpha}{\cos(\alpha - t)}$$

$$AA' = 2a \sin\alpha, \quad \frac{AB'}{BB'} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha + t)}$$

$$BB' = 2a \sin\alpha \frac{\cos(\alpha + t)}{\cos(\alpha - t)}$$

$$4b'^2 = \overline{AA'} \cdot \overline{BB'} = 4a^2 \sin^2\alpha \frac{\cos(\alpha + t)}{\cos(\alpha - t)}$$

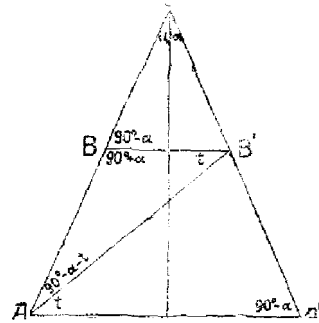


Рис. 3.

Тому

$$c'^2 = a'^2 - b'^2 = a^2 \sin^2\alpha \left(\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha - t)} - \frac{\cos(\alpha + t)}{\cos(\alpha - t)} \right) = \frac{a^2 \sin^2\alpha \sin^2 t}{\cos^2(\alpha - t)}$$

і таким способом

$$c' = \frac{a \sin\alpha \sin t}{\cos(\alpha - t)}$$

а тому

$$r = a' \pm c' = \frac{a \sin\alpha \cos\alpha}{\cos(\alpha - t)} \pm \frac{a \sin\alpha \sin t}{\cos(\alpha - t)}$$

$$r \cos(\alpha - t) = a \sin\alpha \cos\alpha \pm a \sin\alpha \sin t.$$

Рівнання кривої:

$$(x^2 + y^2)(x \cos\alpha + y \sin\alpha - a \sin\alpha \cos\alpha)^2 = a^2 \sin^2\alpha \cdot y^2.$$

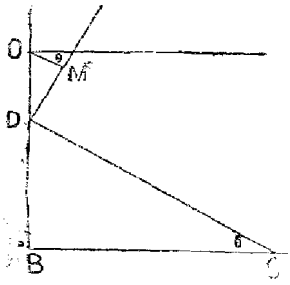


Рис. 4.

6) Офіюрида. Задано прямий кут OBC (рис. 4). На боках цього кута є точки O і C. Через C проводимо промінь DC, що зустрічає OB в точці D. Через D проводимо $DM \perp DC$ і $OM \perp DM$. Офіюрида є геометричне місце точки M. Нехай $OB = a$, $BC = c$,

O — полюс, $OX(\perp OB)$ — полярна вісь. $BD\,c\,.\,\mathrm{tg}\,\theta$, $OD = a - c\,\mathrm{tg}\,\theta$, $OM = OD\,.\sin\theta$. Тому

$$r = a\sin\theta - c\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

Декартове рівнання:

$$x(x^2 + y^2) = y(ax - cy).$$

Цю криву можна також розглядати, як узагальнену цисоїду.

7) Конхоїда Sluse. (Назву запропонував G. Loria l. c. бо криву дав Sluse в листі до Huyghens'a 1662 року).

Задано кут OAM (рис. 5).

Через O проводимо січну, що зустрічає AM в точці M. На січній шукаємо P так, щоб

$$OP\,.\,PM = k^2.$$

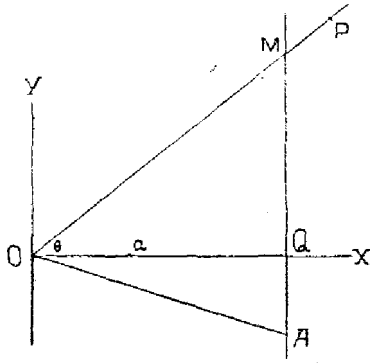


Рис. 5.

Коли $OP = r$, перпендикуляр з O на AM візьмемо за полярну вісь і

$$OQ = a,\ \angle MOQ = \theta,$$

то

$$MP = OP - OM \text{ і } OM = \frac{a}{\cos\theta}.$$

Рівнання кривої

$$\frac{a}{\cos\theta}\,.\left(r - \frac{a}{\cos\theta}\right) = k^2$$

або

$$a(r\cos\theta - a) = k^2\cos^2\theta$$

і в декартових координатах

$$(x^2 + x^2)(x - a) = \frac{k^2}{a}x^2.$$

Коли $k = a$, то ця крива стає цисоїдою.

8) Декартова параболя:

$$y^2 = 2p\left(x - l + \frac{xy_0}{y_0 - y}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

Можна дістати як частинний випадок задачи перетворення фігур.

Крива Γ переноситься так, що точка „A" її площини описує пряму. З'єднуємо A з нерухомою точкою F. Шукане гео-

метричне місце утвориться точками перетину AF і Γ. Коли візьмемо задану пряму за вісь x-ів і точку F на осі y-ків, то матимемо:

$$-\frac{x}{l+c}+\frac{y}{y_0}=1 \text{ — рівнання } AF.$$

Звідціль

$$c=\frac{xy_0}{y_0-y}-l,$$

де l — абсциса точки A з початку руху.

Коли Γ парабола:

$$y^2=2p(x+c)$$

то матимемо (a).

А коли Γ буде

$$y=f(x+c)$$

то рівнання кривої буде

$$y=f\left(x+\frac{xy_0}{y_0-y}-\right)$$

(l — змінний параметр).

9) Панстрофоїда. Задано пучок кіл, що проходять через дві точки B і C, дійсні або уявні спряжені, і пучок променів, що мають за центр точку A прямої — геометричного місця центрів кіл пучка; геометричне місце точок дотику прямих і кіл є панстрофоїда.

Рівнання пучка кіл:

$$x^2+y^2-2\alpha x=k^2,$$

пучка прямих

$$y=\beta(x+q).$$

Умова дотику — умова рівности коренів рівнання:

$$x^2+\beta^2(x+q)^2-2\alpha x-k^2=0,$$

тобто

$$(\beta^2q-\alpha)^2=(1+\beta^2)(\beta^2q^2-k^2)$$

або

$$\beta^2[q^2-k^2+2\alpha q]=\alpha^2+k^2.$$

Виключаючи β і α з допомогою рівнання кола і прямої в'язки, матимемо:

$$[y^2(x-q)+(x^2+k^2)(x+q)]^2=0,$$

або

$$x(x^2+y^2)+q(x^2-y^2)+k^2(x+q)=0.$$

II. Приклади, що ми їх до цього розглядали, давали нам криві 3-го порядку. Розгляньмо кілька прикладів кривих 4-го порядку.

1) Цілу низку кривих визначає загальне рівнання

$$py^2 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

або

$$y^2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

відповідно до того, чи будуть усі корені дійсні й різні, чи два з них або й усі чотири уявні, чи деякі проміж себе рівні. Коли дві пари рівних коренів (дійсних чи уявних), або всі корені рівні, то крива розпадається на пару параболь.

2) Нікомедова конхоїда. Із даної точки O проводимо січні до зустрічі з даною прямою і від точки зустрічі, по обидва її боки, на січній відкладаємо сталу довжину „b“ (рис. 6). Коли віддаль даної точки від даної прямої $= a$ і дану точку взято за полюс, а перпендикуляр із даної точки на дану пряму — за полярну вісь, то

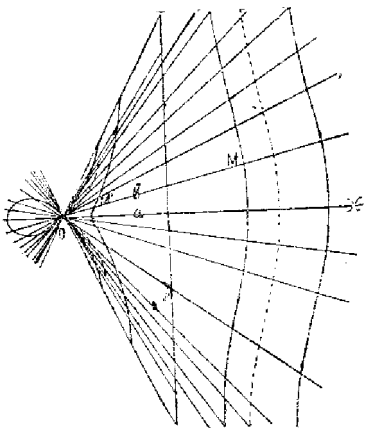


Рис. 6.

$$r = a\sec\theta \pm b$$

а звідціль

$$(x^2+y^2)(x-a)^2 = b^2x^2.$$

Крива матиме різний вигляд залежно від того, чи

$$b > a,\ b = a \text{ чи } b < a.$$

3) Паскалів равлик. (Конхоїда кола). Замість даної прямої береться коло з радіюсом $= 2a$ і точку O на колі

$$r = 2a\,.\cos\theta \pm b,$$

або

$$(x^2+y^2-2ax)^2 = b^2(x^2+y^2).$$

Крива матиме різний вигляд залежно від відношення a до b.

Типи кривих розрізняються при $2a < b$, при $2a = b$ — крива зветься кардіоїдою; інший вигляд має крива, коли $2a > b$, або коли $2b > 2a$, $2a = 2b$ або $2a > 2b$.

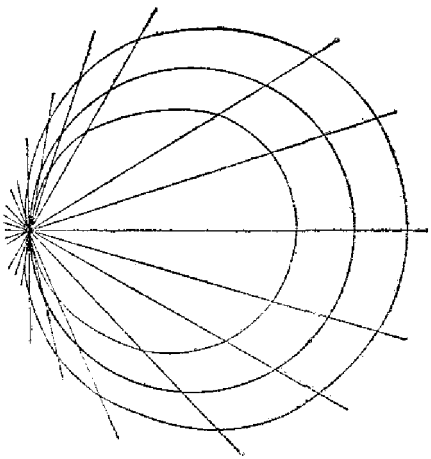


Рис 7.

4) Овали Кассіні — геометричне місце точок, добуток віддалів яких від двох даних точок (F і F') є величина стала ($=4a^2$). Візьмімо FF' (рис. 8) за вісь x-ів, середину FF' за початок координат, тоді рівнання кривої буде

$$[(x-c)^2+y^2].[(x+c)^2+$$
$$+y^2]=16a^4,$$

або

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=16a^4.$$

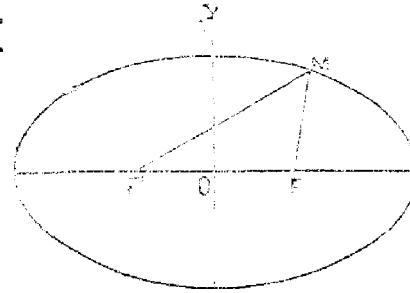


Рис. 8.

Можуть бути різні випадки: $a<c$, $a=c$ (тоді крива зветься лемніската Бернуллі) $a>c$ і при цьому $<c\sqrt{2}, =c\sqrt{2}$ і зрештою $a>c\sqrt{2}$.

5) Прямий дволисник (G. de Longchamps). Задано прямий кут YOX (рис. 9) і на його бокові OX точку A ($OA=a$). Через A проводимо січну і на неї спускаємо перпендикуляр OM з вершини O заданого прямого кута, далі проводимо $HM \parallel OX$ до зустрічі з OY в точці H і $HP \perp OM$ до зустрічі з OM. Крива буде геометричне місце точки P. Її рівнання є

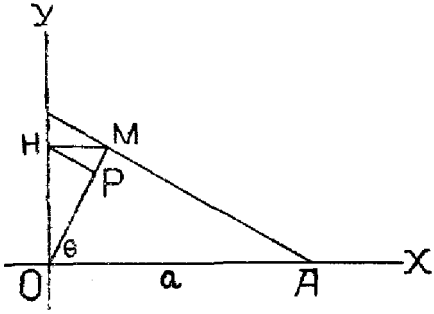


Рис 9.

$$r=a\cos\theta.\sin^2\theta$$

або

$$(x^2+y^2)^2-axy^2=0$$

бо

$$r=OP=OH\sin\theta=OM.\sin^2\theta=OA.\cos\theta.\sin^2\theta.$$

6) Прямий трилисник (G. de Longchamps). Спускаємо з одного кінця O відтинка OC' перпендикуляр на пряму, проведену через другий кінець цього відтинка O (рис. 10). Хай M буде основою перпендикуляра і M' дзеркальний образ її від-

носно OO'. $PM' \perp OM$ і P є точка перетину OM з PM'. Крива є геометричне місце точки P. Нехай $OO' = a$,

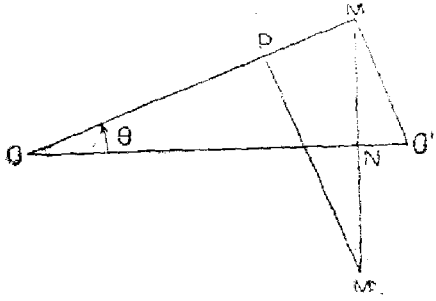


Рис. 10.

$$OM = a. \operatorname{Cos}\theta,$$

$$MN = a \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Sin}\theta,$$

$$MM' = 2. MN = a \operatorname{Sin} 2\theta$$

$$PM = a \operatorname{Sin} 2\theta . \operatorname{Sin}\theta,$$

$$OP = r = OM - PM = a \operatorname{Cos}\theta$$

$$(1 - 2 \operatorname{Sin}^2\theta) = a \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Cos} 2\theta.$$

Декартове рівнання її буде

$$(x^2 + y^2)^2 = ax(x^2 - y^2).$$

7) Равликова лінія А. Дюрера. Відтинок PM має постійну довжину b і рухається так, що один його кінець M описує один бік прямого кута, а другий бік зустрічає в такій точці N, що ON дорівнює AM = віддалі AM від постійної точки A того ж першого боку (рис. 11). Коли $OM = \xi$, $OA = a$, то $ON = a - \xi$. Рівнання прямої NM є

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{a - \xi} = 1 \quad \text{і}$$

$$PM^2 = (x - \xi)^2 + y^2 = b^2$$

виключаючи ξ матимемо

$$(x + y - a)(y^2 - b^2) +$$

$$+ (xy + b^2 - y^2)^2. \text{ (рис. 11).}$$

При чому MN постійно дотикається параболі

$$(x + y - a)^2 - 4ax = 0.$$

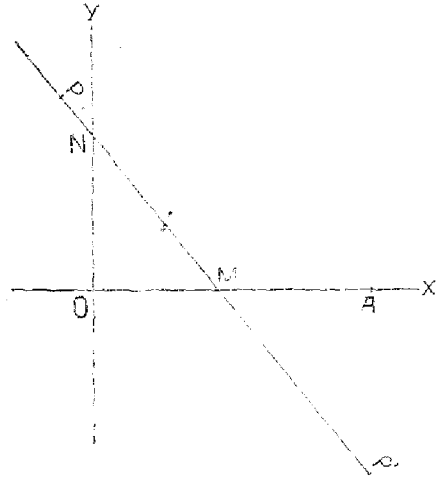


Рис. 11.

III. Подамо ще кілька прикладів кривих із рівнанням ще вищого степеня:

1) Астроїда. Візьмімо коло з радіюсом a і сполучімо точку його M з центром. Спроектуємо (ортогонально) точку M на OX в точку N, точку N на OM в точку P і точку P знову на OX в точку Q (рис. 12).

Те саме проробимо з віссю Y-ків. Проектуємо M на вісь Y-ків у точку N', тоді N' на OM в точку P' і P' на OY в Q'. Шукана крива буде геометричне місце точки T — пересічі PQ з $P'Q'$, коли M описує коло.

$$x = \overline{OQ} = \overline{OP}.\,\mathrm{Cos}\,t = ON.\,\mathrm{Cos}^2 t =$$
$$= OM.\,\mathrm{Cos}^3 t = a.\,\mathrm{Cos}^3\,t$$
$$y = OQ' = \overline{OP'}.\,\mathrm{Sin}\,t = \overline{ON'}.\,\mathrm{Sin}^2 t =$$
$$= OM.\,\mathrm{Sin}^3\,t = a.\,\mathrm{Sin}^3\,t.$$

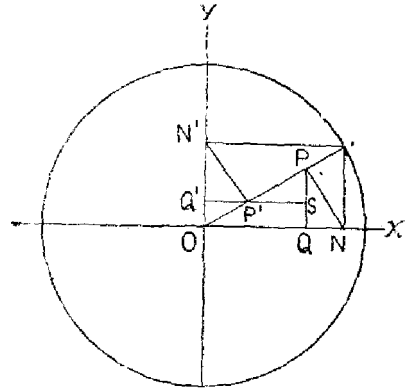


Рис. 12.

Рівнання кривої матиме вигляд

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}}.$$

Це рівнання можна привести до раціонального виду, підносячи до куба:

$$x^2 + 3x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} (x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}) + y^2 = a^2$$

або

$$x^2 + y^2 - a^2 = -3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

тобто підносячи ще раз до куба, матимемо

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0.$$

2) Чотирипелюстковий вінчик. Пряма сталої довжини $= 2a$ рухається, спираючись своїми кінцями на дві взаємно перпендикулярні прямі, із точки пересічі яких спускаємо на неї перпендикуляр. Шукана крива є геометричне місце основ цього перпендикуляра (рис. 13)

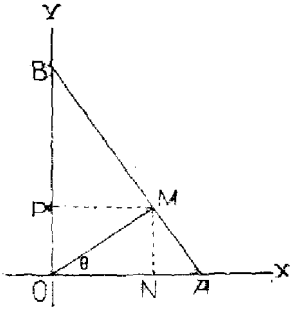


Рис. 13.

$$AB = 2a,\ \ OA = 2a\,\mathrm{Sin}\,\theta,$$
$$OM = r = 2a\,\mathrm{Cos}\,\theta\,\mathrm{Sin}\,\theta$$

або

$$r^3 = 2a.\,r\,\mathrm{Cos}\,\theta.\,r\,\mathrm{Sin}\,\theta.$$

Тому Декартове рівнання кривої є

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2.$$

Ця крива є частковий випадок іншої кривої, яку звуть

3) Scarabea (жук, скарабей). Побудова така сама, лише перпендикуляр спускаємо не з точки O, а з заданої точки бісектора координатного кута. Хай дана точка є (ξ, η), рівнання AB хай

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1,$$

рівнання CM:

$$\frac{y-\eta}{p}-\frac{x-\xi}{q}=0,$$

коли покладемо

$$OA=p,\ OB=q,$$

тоді

$$\frac{1}{q}=\frac{x-\xi}{x(x-\xi)+y(y-\eta)}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{y-\eta}{x(x-\xi)+y(y-\eta)}$$

і тому, що

$$p^2+q^2=4a^2$$

матимемо

$$[x(x-\xi)+y(y-\eta)]^2.\left[\frac{1}{(x-\xi)^2}+\frac{1}{(y-\eta)^2}\right]=4a^2,$$

або

$$[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2][x(x-\xi)+y(y-\eta)]^2=y^2(x-\xi)^2(y-\eta)^2.$$

При $\xi=\eta=0$ рівнання перетворюється в те, що його знайшли ми вище.

Але взагалі для $\xi=\eta\neq 0$ можна координатним перетворенням

$$x=\xi+\frac{x_1-y_1}{\sqrt{2}},\ y=\xi=\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}$$

звести попереднє рівнання до виду

$$(x_1^2+y_1^2)^2(x_1^2+y_1^2+\xi x_1\sqrt{2})^2=a^2(x_1^2-y_1^2)^2.$$

4) Овали Münger'a. Через нерухому точку O проводимо січну, що зустрічає задане коло, зцентром в C, в точках P і P'. З P і P' спускаємо перпендикуляри на OC в точках Q і Q' і ці точки знову проєктуємо ортогонально на PP' в точках P_1 і P'_1.

Крива буде геометричне місце точок P_1 і P_1' (Рис. 14). Нехай

$$OC = d \text{ і } AC = CB = a.$$

Взявши O за полюс і OC за полярну вісь, матимемо:

$\rho^2 - 2d\rho\cos\theta + d^2 - a^2 = 0$, але $r = \rho\cos^2\theta$

звідсіль маємо

$$r^2 - 2dr\,\mathrm{Cos}^2\theta + (d^2 - a^2)\,\mathrm{Cos}^4\theta = 0$$

В прямокутніх координатах це буде

$$(x^2 + y^2)^3 - 2dx^3(x^2 + y^2) + \\ + (d^2 - a^2)x^4 = 0.$$

Крива матиме різний вид залежно від величини d.

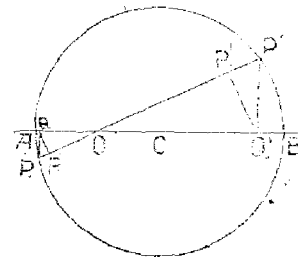


Рис. 14.

Окремі випадки

$$d = 0,\ d < a,\ d = a,\ d > a.$$

5) Побудову, що призводить до Діоклесової цисоїди можна узагальнити, замінивши коло та його дотичну будь-якими двома кривими Γ і Γ' і проводячи до них з постійної точки O січні OMM' (рис. 15)

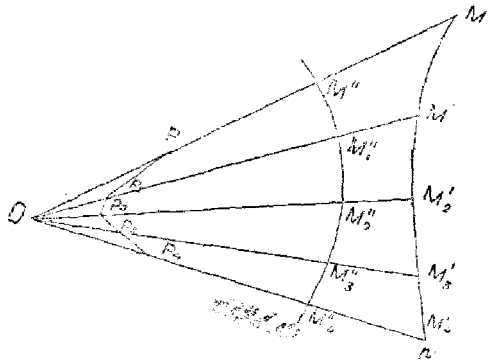


Рис. 15.

Хай M — точка зустрічі січної з кривою Γ, M' — з кривою Γ'. Відкладемо на ній $OP = MM' = OM' - OM$; як геометричне місце точки P, матимемо криву, що також зветься цисоїдою (порівняй Wieleitner [1]).

Коли в полярних координатах з полюсом в O і полярною віссю OX рівнання кривої Γ є $r = \varphi(\theta)$, а кривої Γ' є $r = \psi(\theta)$, то цисоїда, що ми її одержали, має рівнання

$$r = \psi(\theta) - \varphi(\theta).$$

[1]) Spezielle ebene Kurven.

Коли за Γ взяти параболю $y^2 = 2px$,

за Γ'' — коло $(x-p)^2 + y^2 = p^2$

= коло кривини у вершині), а за O візьмемо вершину параболі, то

$$r = \frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta} - 2p\cos\theta,$$

себто

$$r = \frac{2p\,.\cos^3\theta}{\sin^2\theta}$$

або в прямокутних координатах

$$(x^2 + y^2)\ y^2 - 2px^3 = 0.$$

(Цисоїда параболі).

6) Watt'ова крива. Уявімо собі стрижневий чотирикутник, дві вершини якого A і D нерухомі, але стрижні AB і CD можуть обертатися навколо них на шарнірах, також і навколо точок B і C. Криву описує точка M стрижня BC (рис. 16).

Ми розглянемо той частковий випадок, коли

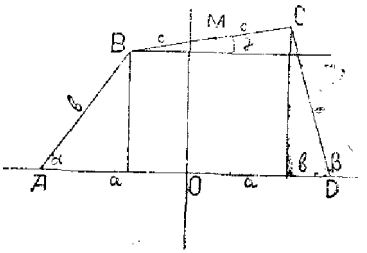


Рис. 16.

$$AB = CD = b$$

і M лежить по середині BC.

Хай $AD = 2a$.

$$BC = 2c,\quad \angle BAO = \alpha,\quad \angle CDX = \beta.$$

$$\angle(CB,\ OX) = \gamma.$$

Взявши за початок координат середину AD, матимемо координати точки B:

$$x = -a + b\cos\alpha,\ y = b\sin\alpha,$$

координати точки C:

$$x = a + b\cos\beta,\ y = b\sin\beta,$$

тому координати точки M:

$$x = \frac{1}{2}b(\cos\beta + \cos\alpha),\qquad \text{(a)}$$

$$y = \frac{1}{2}b(\sin\alpha + \sin\beta).$$

Але кути α, β не є незалежні. Проєкції $ABCD$ на OX та OY дають:

$$2a = b\cos\alpha + 2c\cos\gamma - b\cos\beta;\ 0 = b\sin\alpha + 2c\sin\gamma - b\sin\beta.$$

Звідсіль

$$\left.\begin{aligned} c\,.\,\cos\gamma &= a + \frac{1}{2}\,b\,(\cos\beta - \cos\alpha). \\ c\,.\,\sin\gamma &= \frac{1}{2}\,b\,(\sin\beta - \sin\alpha). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Підносячи до квадрата й додаючи, знайдемо

$$4c^2 = b\,[(\cos\beta - \cos\alpha) + 2a]^2 + b^2\,[\sin\beta - \sin\alpha]^2. \qquad \text{(c)}$$

За допомогою (a) маємо:

$$\left.\begin{aligned} b\cos\beta &= 2x - b\cos\alpha. \\ b\sin\beta &= 2y - b\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(d)}$$

Звідсіль

$$b^2 = 4\,(x^2 + y^2) + b^2 - 4b\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$$

або

$$x^2 + y^2 = b\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha). \qquad \text{(e)}$$

(c) за підстановою з (d) дає

$$c^2 = (x + a - b\cos\alpha)^2 + (y - b\sin\alpha)^2,$$

або

$$b^2 + y^2 + (x + a)^2 - c^2 = 2\,b\,[(x + a)\cos\alpha + y\sin\alpha].$$

Отже щоб виключити матимемо:

$$2\,aby\,.\,\cos\alpha = -\,y\,[x^2 + y^2 - 2ax - a^2 - b^2 + c^2].$$

$$2\,aby\,.\,\sin\alpha = -\,x\,[x^2 + y^2 - 2ax - a^2 - b^2 + c^2] + 2a\,(x^2 + y^2).$$

Звідсіль остаточно

$$(x^2 + y^2 + c^2 - a^2 - b^2)^2\,(x^2 + y^2) + 4a^2\,y^2\,(x^2 + y^2 - b^2) = 0.$$

Коли $AB \neq CD$ і $BM \neq MC$, тоді рівнання (a) заміняться на такі

$$(CD = b',\ MC = ck,\ MD = c\,.\,k',\ k + k' = 2).$$

$$2x = (-\,a + b\,.\,\cos\alpha)\,k' - c - (a + b'\cos\beta)\,k.$$

$$y = k'b\sin\alpha + kb'\sin\beta.$$

Крім того

$$2a = b\cos\alpha + 2c\,.\,\cos\gamma - b'\cos\beta,$$

$$0 = b\sin\alpha + 2c\,.\,\sin\gamma - b'\sin\beta.$$

Виключення α, β, γ тут складніш, але приводить також до рівнання 6-го степеня.

Із інших кривих, що застосовуються в кінематиці механізмів, можна нагадати про криву руху гонка (Koppelkurve).

Згадані криві визначаються рівнанням 3-го 4-го і т. д. степеня; вони звуться кривими 3-го, відповідно 4-го і т. д. порядку. Взагалі порядком кривої зветься число точок зустрічі її з прямою.

Коли криву задано рівнанням у декартових координатах

$$f(x, y) = 0$$

то для визначення її порядку треба знайти число розв'язок (x, y) спільних для її рівнання та рівнання прямої

$$Ax + By + C = 0.$$

Число розв'язок (x, y) дорівнює степеню рівнання, тому крива, що визначається рівнанням m-го степеня в декартових координатах, буде й кривою m-го порядку.

Криві, визначені рівнанням

$$f(x, y) = 0$$

альґебричним, звуться альґебричними кривими.

IV. Криві, що їх рівнання не можна звести до виду

$$f(x, y) = 0,$$

де $f(x, y)$ цілий многочлен, звуться трансцендентними.

Такою буде крива $y = x^n$, коли n буде іраціональне. Покажемо кілька прикладів трансцендентних кривих:

1) Циклоїда — геометричне місце точки обводу кола, що котиться по прямій лінії без сковзання. Візьмемо цю пряму за вісь X-ів, а перпендикуляр у точці цієї осі, де точка M, що описує криву, міститься на початку руху — за вісь Y-ків (рис. 17).

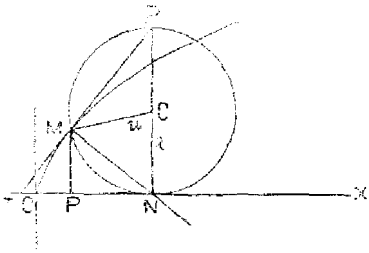


Рис. 17.

Хай коло прокотилося в додатньому напрямі OX на віддаль ON, коли кут $MCN = u$ і радіюс кола $= a$, то

$$ON = a \,.\, u \text{ і } CN = MC = a,$$

$$x = OP = ON - PN,$$

$$y = MP = CN - MC \,.\, \operatorname{Cos} u$$

але

$$PN = a \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = a \sin u,$$

Виходить, що

$$x = au - a \sin u = a(u - \sin u),$$

$$y = a - a \cos u = a(1 - \cos u).$$

Звідсіль

$$\cos u = \frac{a-y}{a}, \ \sin u = \sqrt{1 - \left(\frac{a-y}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2}$$

і виходить, що

$$x = a \,.\, \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

1a) Коли припустити, що точка M, яка описує криву, не лежить на обводі того кола, що котиться, а на віддалі d від центру кола, то рівнання одержимо — маючи ті самі початкові припущення:

$$MC = d, \ PN = d.\sin u, \ MP = CN - MC \cos u = a - d.\cos u.$$

Звідсіль

$$x = au - d.\sin u, \ y = a - d.\cos u.$$

Коли $d < a$, то крива зветься **циклоїдою вкороченою** при $d > a$ **здовженою циклоїдою** або **трохоїдою**.

2) **Епіциклоїда** (та **гіпоциклоїда**): її описує точка кола, що котиться без сковзання по другому колі (рис. 18). Координати центра рухомого кола (радіюса a) будуть

$$\xi = (R + a)\cos t, \ \eta = (R + a)\sin t.$$

При такому положені кіл, коли лінія центрів творить кут t з віссю x

$$x = \xi + a \cos \alpha$$

$$y = \eta - a \sin \alpha$$

де

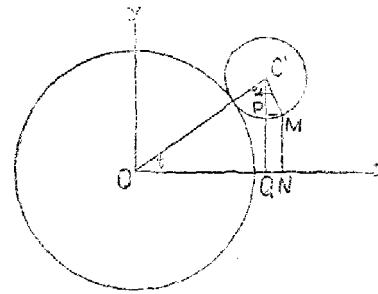


Рис. 18.

$$\alpha = \angle C'MP = \frac{\pi}{2} - \left(u - \frac{\pi}{2} + t\right) = \pi - (u + t).$$

Отож:

$$x = \xi - a \,.\, \cos(u + t)$$

$$y = \eta - a \,.\, \sin(u + t).$$

За відсутности сковзання маємо:

$$R \cdot t = a \cdot u$$

або покладаючи

$$R = na$$

$$u = nt$$

остаточно маємо

$$x = (n+1)\, a \cos t - a \cos (n+1)\, t$$

$$y = (n+1)\, a \sin t - a \sin (n+1)\, t.$$

Гіпоциклоїду матимемо, коли котіння відбувається з внутрішньої сторони кола (рис. 19). Тоді

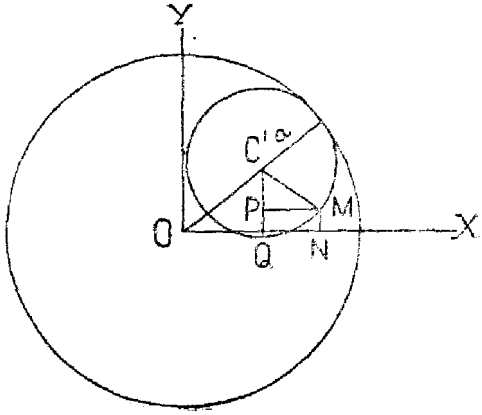


Рис. 19.

$$x = (R-a) \cos t + a \sin \alpha$$

$$y = (R-a) \sin t - a \cos \alpha$$

$$\alpha = \angle MC'P = \pi - u - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - u + t$$

і тому

$$x = (R-a) \cos t + a \cos (u - t)$$

$$y = (R-a) \sin t - \sin (u - t).$$

За відсутности сковзання маємо

$Rt = au$, або покладаючи

$$R = na, \quad u = nt$$

матимемо

$$x = (n-1)\, a \cos t + \cos (n-1)\, t$$

$$y = (n-1)\, a \sin t - a \sin (n-1)\, t.$$

Коли n раціональний дріб, то після конечного числа обертань точка повертається до свого початкового положення і на кожній прямій буде тільки конечне число точок, тому крива буде альґебрична.

Так, при $n = 1$ рівнання епіциклоїди буде

$$x = 2a \cos t - a \cos 2t$$

$$y = 2a \sin t - a \sin 2t,$$

переписавши його у форми

$$x - a = 2a \cos t\, (1 - \cos t)$$

$$y = 2a \sin t\, (1 - \cos t)$$

і поклавши

$$x - a = r \,.\, \cos\theta,\ y = r \sin\theta,$$

матимемо

$$\theta = t \ \text{ і } \ r = 2a - 2a\cos\theta.$$

Тобто одержуємо кардіоїду.

При $n = 2$ рівнання гіпоциклоїди дає

$$x = 2a\cos t,\ y = 0,$$

тобто діяметр нерухомого кола.

При $n = 4$ воно дає

$$x = 4a\cos^3 t,\ \ y = 4a\sin^3 t$$

тобто маємо астроїду.

Цікавий ще випадок коли $n = 3$, коли на обводі нерухомого кола маємо три точки кривої, що лежить цілком всередині його, т. зв. Штайнерова гіпоциклоїда

$$x = a\,(2\cos t - \cos 2t),$$

$$y = a\,(2\sin t - \sin 2t).$$

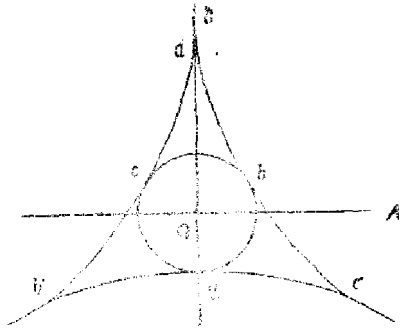


Рис. 20.

Коли n іраціональне, то після досить великого числа обертань, ми одержимо безконечне число закрутин між двома колами радіюсів R і $R + 2a$.

Наведемо ще декілька рівнань знакомитіших кривих.

Синусоїда

$$y = a\sin\frac{\pi x}{a},\ \text{ або } y = \sin x.$$

Танґентоїда

$$y = a\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi x}{a}.$$

Логаритміка

$$y = be^{\frac{x}{a}}$$

її симетрична

$$y = be^{-\frac{x}{a}} \quad \text{(відносно вісі } y\text{-ів).}$$

Лінія склепіння — середня з двох симетричних логаритмік

$$y = \frac{1}{2}b\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = b\,.\,\cos\mathrm{hyp.}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Лінія ланцюгова або провисна — частковий випадок лінії склепів при $b = a$

$$y = a\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right) = a \cdot \cos \text{hyp.}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Квадратико Диностратєва

$$y = x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{a-x}{a}\right)$$

В полярних координатах особливо прості рівнання спіралів. Ми вже бачили, що $\rho = m\theta$ дає Архімедову спіралю

2) $\rho^2 = a^2\theta$ — параболічна спіраля
3) $\rho\theta = a$ — гіперболічна спіраля
4) $\rho = ae^{m\theta}$ — логаритмічна спіраля
5) Lituus Cotes'a $r^2\theta = a^2$
6) Кохлеоїда $r = a\dfrac{\sin\theta}{\theta}$

§ 4. Дотична та нормаля.

Дотичною в точці кривої звемо те граничне положення, (якщо воно є), до якого наближається січна, що сполучає дві точки кривої, коли ці дві точки наближаються злитися (рис. 21). Хай M і M' дві точки кривої $y = f(x)$, що мають координати відповідно (x, y) і (x_1, y_1). Тоді називаючи X, Y поточні координати січної MM', напишемо її рівнання

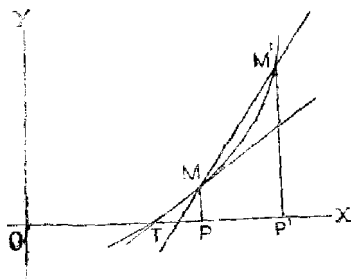


Рис. 21.

$$Y - y = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}(X - x).$$

Коли M' наближається злитися з M, то пряма рухається, обертаючись навколо точки M.

Якщо ця пряма наближається до певного граничного положення, то її кутовий коефіцієнт

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

має за границю похідну $\dfrac{df(x)}{dx}$ (коли, як ми припустили, похідна

існує) і в такий спосіб рівнання дотичної MT (в яку повернулася січна) набуває виду:

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Точка M зветься точкою дотику.

Візьмімо тепер криву задану рівнанням у неявній формі

$$F(x, y)=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Хай поблизу точки (x, y) F'_x, F'_y безперервні і не дорівнюють разом нулеві (таку точку звуть звичайною точкою кривої).

Коли $F'_y \neq 0$ поблизу точки, то рівнання (2) визначає y як неявну функцію від x. За певним правилом

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

і (4) зводиться до виду

$$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

коли помножити на F'_y і перенести члени.

Якщо, зрештою, рівнання кривої задано в параметричній формі (3) § 2, тобто $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$,
то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}$$

якщо для скорочення покласти

$$\frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dx}{dt}=x'.$$

Тоді рівнання (4) набуде виду

$$Y-y=\frac{y'}{x'}(X-x)$$

або поділивши на y'

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Перпендикуляр до дотичної в точці M зветься нормалею кривої в точці M. Рівнання її пишеться так:

$$Y-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x), \text{ або } X-x+\frac{dy}{dx}(Y-y)=0, \quad \ldots (7)$$

коли криву задано рівнанням, розв'язаним відносно y — виду (1) § 2. Або

$$\frac{X-x}{F'_x}=\frac{Y-y}{F'_y}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7')$$

коли криву задано рівнанням (2) § 2. Або зрештою

$$x'(X-x)+y'(Y-y)=0, \quad \ldots\ldots\ldots (7'')$$

коли криву задано рівнанням у параметричній формі (3) § 2. Дотична й нормаль визначають з осями координат відтинки

$$MT,\ MN,\ NP,\ PT,$$

які мають відповідні назви: довжина дотичної або дотична, довжина нормалі або нормаля, піднормаля і піддотична.

Нормаля має два напрями MN і MN'. Останній спрямований у той бік дотичної, по який лежать точки кривої, безконечно близькі до точки дотику. Цей напрям ми назвемо внутрішнім (або внутрішньою нормалею), протилежний напрям зовнішньою нормалею. Коли додатний напрям по дотичній зливається з напрямом руху кривої, тобто з напрямом зростання дуг (на рисунку позначено стрілкою) то MT, як спрямована в протилежний бік, мусить бути від'ємною:

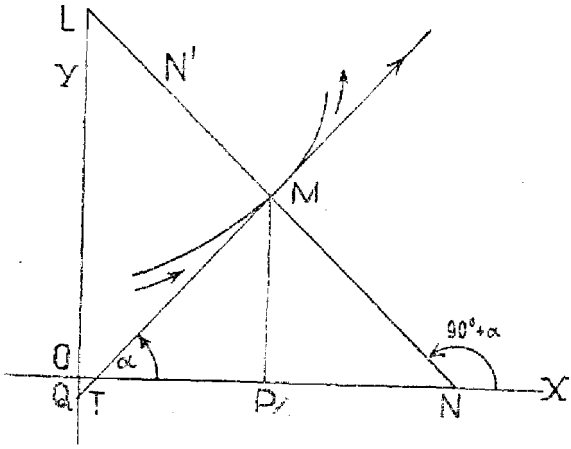


Рис. 22.

$$\overrightarrow{MT}=-\frac{y}{\sin\alpha}=T. \text{ Також і } \overrightarrow{MN}=\frac{y}{\cos\alpha}=N$$

(у бік зовнішньої нормалі) і

$$PN=y\ \operatorname{tg}\alpha=S_n$$

Для визначення всіх цих відтинків треба знати розміщення точок N і T відносно P. Згідно з загальним принципом, вважаємо

$\overrightarrow{PN}$ (відпов. $\overrightarrow{PT}$) за додатні, коли вони зливаються з додатнім напрямом осі X-ів (як на рисунку) і за від'ємні в протилежному випадку. Тому можна одержати S_t із (4) поклавши $Y=0$:

$$\overrightarrow{PT} = X - x = -y\frac{dx}{dy}$$

Отож із (7)

$$\overrightarrow{PN} = X - x = -y\frac{dy}{dx}.$$

Ці значення тотожні з попередніми, бо

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha$$

За допомогою виразів для PN і PT знаходимо MN і MT

$$\overrightarrow{MN} = -\sqrt{S^2_n + y^2} = -y\sqrt{1+y'^2} = N$$

$$\overrightarrow{MT} = +\sqrt{S^2_t + y^2} = -\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} = T$$

бо

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \operatorname{Sin}\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\ ^{1)}.$$

Можна ще вирахувати відтинки OT і ON, які дотична і нормаля утворюють на осі X-ів, а також і відтинки OL і OQ на осі Y-ків,

$$OT = X_T = x - \frac{y}{y'} \equiv \frac{xy'-y}{y'}, \quad ON = X_N = x + yy'$$

$$OL = Y_L = y - xy', \quad OQ = Y_Q = y + \frac{x}{y'} + \frac{x+yy'}{y'}$$

І зрештою перпендикуляр на дотичну з початку координат

$$P = \pm\frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}} = \pm\frac{xdy - ydx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

[1]) Отож беро знаки відтинків.

Dematres, Cours de géométrie infinitésimale Paris 1913.

Навпаки, Чезаро-Поссе ч. II та de la Vallée-Poussin вважають за N і T абсолютні довжини відповідних відтінків. Тоді

$$S_n = yy' \quad S_t = \frac{y}{y'}, \quad N = y\sqrt{1+y'^2}, \quad T = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}$$

Перпендикуляр із початку на нормалю

$$Q = \pm \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \pm \frac{xdx + ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

§ 5. Приклади.

Застосуймо виведені формули до декількох частинних випадків.

1. Параболя: $y^2 = 2\,px$. Звідсіль диференціюванням знаходимо

$$2\,yy' = 2p\,, \text{ або } yy' = p:$$

в параболі віднесеній до осі й дотичної у вершині, піднормаля є стала. Навпаки, можна показати, що ця властивість характеристична для параболь. Справді, з того, що

$$S_n = yy' = \text{Const} = p$$

виходить

$$d(y^2) = 2\,pdx \;\therefore\; y^2 - 2\,px = \text{Const}.$$

— параболі, що мають вісь X-ів за вісь симетрії.

2) Конічне січення, віднесене до осі симетрії і дотичної у вершині, можна визначити рівнанням $y^2 = 2\,px + qx^2$, де $q < 0$ для еліпси, $q > 0$ для гіперболі й $q = 0$ для параболі. Звідсіль

$$yy' = p + qx.$$

Отже, в конічному січенні, що віднесено до осі симетрії і дотичної у вершині, піднормаля є лінійна функція абсциси. Навпаки, конічні січення є єдині криві, що мають цю властивість

3) Еліпса

$$x = a\ \text{Cos}\,t,\ y = b\sin t,$$

$$N = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^2\,\text{Sin}^2\,t + b^2\,\text{Cos}^2 t}\ ,\quad P = \frac{ab}{\sqrt{a^2\,\text{Sin}^2\,t + b^2\,\text{Cos}^2\,t}}$$

Звідсіль $\qquad PN = b^2$

4) Логаритміка:

$$y = be^{\frac{x}{a}}.\quad \text{Тут } y' = \frac{b}{a}\,e^{\frac{x}{a}} = \frac{y}{a}$$

$$S_t = \frac{y}{y'} = a:$$

в логаритміці піддотична постійна.

Навпаки, логаритміка — єдина крива, для якої $S_t = \text{Const}$

бо з $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{a}$ виходить: $\log y = \dfrac{x}{a} + \text{Const}$

показати, що коло з центром на осі X-ів має нормалю постійну. Це очевидно, бо в колі нормаля є радіюс, проведений в точку дотику. За допомогою підрахунку до цього можна прийти так: із рівнання кола

$$(x-c)^2+y^2-a^2=0,$$

виходить

$$x-c+yy'=0,$$

звідсіль

$$y^2+y'^2y^2=y^2+(x-c)^2=a^2,$$

тобто

$$N=\text{Cons}\,t.$$

6) Для кола з центром у початку координат є стала й довжина перпендикуляра з початку на дотичну (найпростіший випадок задачі про подери — див. далі).

7) Ланцюгова лінія

$$y=a.\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

Проекція ординат на нормалю є величина стала і дорівнює найменшій ординаті a.

8) Крива, для якої дотична T є стала і яка, таким способом, задовольняє умові

$$y^2+y^2\left(\frac{ax}{ay}\right)^2=a^2$$

є трактриса. Її рівнання в декартових координатах

$$x=a\log\frac{a\sqrt{a^2-y^2}}{y}+\sqrt{a^2-y^2}$$

9) Крива, для якої перпендикуляр з початку координат на дотичну є сталий, задовольняє умові

$$\frac{(xdy-ydx)^2}{dx^2+dy^2}=a^2.$$

Перетворимо до полярних координат; тоді

$$xdy-ydx=x^2d\left(\frac{y}{x}\right)=r^2d\theta$$

$$dx^2+dy^2=dr^2+r^2d\theta^2.$$

Отже маємо

$$r^4d\theta^2=a^2(dr^2+r^2d\theta^2)$$

або

$$r^2(r^2-a^2)d\theta^2=a^2dr^2.$$

це рівнання задовольняється, поперше, коли

$$r^2 - a^2 = 0, \; r = a, \; dr = 0$$

або

$$d\theta = \pm \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = \pm \frac{a\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2}}$$

$$\theta + C = \pm \arcsin \frac{a}{r}$$

тобто

$$\frac{a}{r} = + \operatorname{Sin}(\theta + C)$$

або в Декартовій системі

$$x \operatorname{Cos} C + y \operatorname{Sin} C = a$$

це є дотична зазначеного кола.

10) Циклоїда. Побудова її дотичної й нормалі.

Із рівнання циклоїди

$$x = a(u - \operatorname{Sin} u), \; y = a(1 - \operatorname{Cos} u)$$

маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Sin} u}{1 - \operatorname{Cos} u} = \operatorname{Cotg} \frac{u}{2}$$

отож

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}.$$

Звідсіль маємо таку побудову дотичної до циклоїди:

Хай точка M циклоїди (рис. 17) D і N — кінці діяметра кола, що котиться; з'єднуючи P з M і N, маємо

$$\angle MDN = \frac{1}{2} \angle MCN = \frac{u}{2}$$

Звідсіль

$$\angle PTN = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2} = \alpha.$$

Отож PM є дотична, MN — нормаля. Довжина нормалі:

$$N = a \frac{1 - \operatorname{Cos} u}{\operatorname{Sin} \frac{u}{2}} = 2a \operatorname{Sin} \frac{u}{2}$$

11) Астроїда має ту властивість, що для неї є стала довжина дотичної, яка лежить між осями координат. Зручно взяти її рівнання в параметричній формі

$$x = a \operatorname{Cos}^3 t, \quad y = a \operatorname{Sin}^3 t$$

і вирахувати вираз

$$\overline{TL}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{OL}^2 = \frac{(xy' - y)^2(1 + y'^2)}{y'^2}$$

$$TL = \frac{(xdy - ydx)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dxdy}$$

Маємо ще у астроїди

$$TL = 3a, —$$

довжина перпендикуляра з початку на дотичну є

$$a \operatorname{Cos} t \operatorname{Sin} t = \sqrt[3]{axy}$$

12) Для ланцюгової лінії можна показати, що рівнання нормалі можна написати так:

$$Y \operatorname{Sin} \beta - X \operatorname{Cos} \beta = a \operatorname{Cos} 2\beta$$

де β — кут нормалі з віссю X — ів.

13) Криві Lamé

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$$

у точці (a, b) мають спільну дотичну, для будь-якого m.

Як що m є число ціле, криві дотикаються в усіх чотирьох точках $(\pm a, \pm b)$.

14) Треба знайти точки кривих

$$y(x-1)(x-2) = x - 3,$$

для яких дотична є паралельна з віссю X — ів.

15) Найбільший кут дотичних еліпси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

та кола

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

в точках з спільною абсцисою є

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{a - b}{2\sqrt{ab}}.$$

Загальна задача про подери.

Подерою (podaire, Fusspunktkurve, pedal curve) даної кривої зветься геометричне місце основ перпендикулярів, спущених з певної точки на дотичну до даної кривої.

Перпендикуляр з даної точки (a, b) на дотичну

$$Y - y = y'(X - x)$$

має рівнання

$$Y - b = -\frac{1}{y'}(X - a).$$

Із двох рівнань треба виключити з допомогою рівнання кривої координати точки дотику.

Часткові випадки:

16) Подера кола відносно його центра є теж коло

17) Подера кола взагалі є Паскалів равлик.

18) Подера параболі відносно її вершини є Діоклесова цисоїда.

19) Подера параболі $y^2 = 2px$ відносно точки $(0, b)$, що лежить на дотичній у вершині, є офіюрида

$$x(x^2 + y^2) = y(bx - py).$$

20) Подера параболи відносно точки $x = x_0$ її осі відмінної від вершини, від підошви директриси й від фокуса, є конхоїда Sluse

$$2x(x - x_0)^2 + 2(x - x_0)y^2 + 2py^2 = 0.$$

21) Подера астроїди

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

відносно початку є чотирипелюстковий вінчик [≡ геометричне місце основ перпендикулярів, спущених з початку на пряму постійної довжини, що спирається на дві взаємно перпендикулярні прямі].

22) Подера кривих Lamé відносно початку є крива

$$(x^2 + y^2)^{\frac{m}{m-1}} = (ax)^{\frac{m}{m-1}} + (by)^{\frac{m}{m-1}}.$$

Зокрема можна вважати, що подера гіперболі є лемніската Бернуллі, подера еліпсу — крива

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

§. 6. Дотична і нормаля в полярних координатах.

Дотична визначається в полярних координатах, коли відомо кут, що його ця дотична утворює з радіюсом вектором точки дотику. Щоб добути вираз цього кута, розглянемо січну, що проходить через точку

$$M=(r,\theta) \text{ і } M'=(r+\Delta r,\theta+\Delta\theta)$$

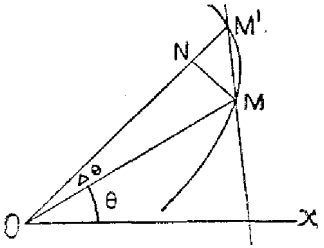


Рис. 23.

Спускаючи з M на OM' перпендикуляр MN, із прямокутного трикутника MNM' маємо

$$\operatorname{tg} NM'M=\frac{MN}{M'N};$$

але

$$MN=r.\operatorname{Sin}\Delta\theta \text{ і } M'N=r+dr-r\operatorname{Cos}\Delta\theta=\Delta\theta+r(1-\operatorname{Cos}\Delta\theta).$$

Отже

$$\operatorname{tg} NM'M=\frac{r\operatorname{Sin}\Delta\theta}{\Delta r+r(1-\operatorname{Cos}\Delta\theta)}.$$

Щоб перейти до границі $\Delta\theta\to 0$ розділимо чисельника й знаменика на $\Delta\theta$. Тоді, зазначаючи границю

$$\angle NM'M=\psi$$

і помічаючи, що

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\operatorname{Sin}\Delta\theta}{\Delta\theta}=1,$$

границя

$$\frac{\frac{\Delta r}{\Delta\theta}}{\frac{dr}{d\theta}}$$

є

і

$$\lim\frac{1-\operatorname{Cos}\Delta\theta}{\Delta\theta}=\lim\frac{2\operatorname{Sin}^2\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}=\lim\frac{\operatorname{Sin}\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}.\operatorname{Sin}\frac{\Delta\theta}{2}=$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0}\operatorname{Sin}\frac{\Delta\theta}{2}=0,$$

матимемо

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} \quad \text{або}=\frac{rd\theta}{dr}.$$

Відтинки, аналогічні тим, що ми вище одержали, в цій системі координат можна дістати так: через полюс O проводимо

пряму, перпендикулярну до полярного радіюса-вектора OM. Нехай вона перетне відповідну дотичну в точці T, а нормалю в точці N. Тоді відтинки MT — полярна дотична, MN — полярна нормаля, їх проекції OT — полярна піддотична NO — полярна піднормаля.

Помітивши, що $\angle OMT = \psi = \angle ONM$ (рис. 24) маємо із $\triangle OMT$:

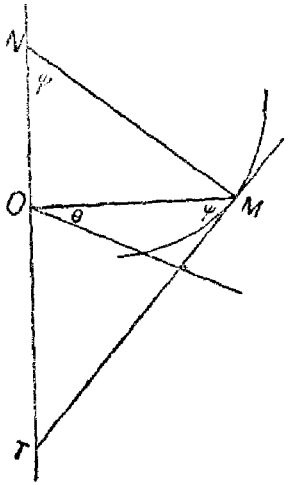


Рис. 24

$$OT = \overline{OM}.\ \mathrm{tg}\,\psi,$$

або

$$S_t = \frac{r^2}{\frac{dr}{d\theta}},$$

$$MT = \sqrt{\overline{OM}^2 + OT^2}$$

або

$$T = r\sqrt{1 + \frac{r^2}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}} =$$

$$= \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

із $\triangle MO.\ NON = OM.\ \mathrm{Cotg}\,\psi$,

або

$$S_n = r : \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{dr}{d\theta};$$

$$MN = N = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr^2}{d\theta}\right)}.$$

Визначимо ще довжину OP — перпендикуляра, спущеного з полюса на дотичну $\triangle$:

$$OP = P = r\,\mathrm{Sin}\,\psi = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}$$

Приклади.

1) Архімедова спіраля: $r = a\theta$ має полярну піднормаль сталу і є єдиною кривою, що має цю властивість.

2) Гіперболічна спіраля: $r\theta = a$ дає сталу піддотичну.

3) Сталу полярну нормалю матиме коло, що проходить через полюс і дотикається до полярної осі.

tractrix complicata і яку можна визначити рівнанням

$$\theta = -\frac{1}{r}\sqrt{a^2 - r^2} = \text{arc Sin}\left(\frac{r}{a}\right)$$

коли стале значіння T зазначимо через a.

В полярних координатах зручно визначити подеру відносно полюса. Справді, полярні координати точки P подери будуть

$$\varphi = -\left(\frac{\pi}{2} - \psi - \theta\right) = \psi + \theta - \frac{\pi}{2} \text{ і } \rho = p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}$$

Так ми знайдемо:

5) Цисоїда є подера параболі відносно вершини,

6) Гіперболічна спіраля має за подеру відносно полюса tractrix complicata (власне, симетричну до вище наведеної).

7) Логаритмічна спіраля має за свою подеру таку саму спіралю, тільки повернуту на деякий кут. Справді

$$\text{cotg}\,\psi = m = \text{const} \text{ і } \frac{dr}{d\theta} = m \,.\, r,$$

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+m^2}} e^{m\theta} = a e^{m\left(\theta - \frac{1}{m}\log\sqrt{1+m^2}\right)}$$

§ 7. Дослід ходу кривої поблизу точки дотику. Опуклість і угнутість.

Задано криву $y = f(x)$ в прямокутних (або косокутних) координатах, і M хай її звичайна точка (x, y), в якій дотична не паралельна з віссю y-ків (тобто $\frac{dy}{dx}$ конечне й визначене). Поблизу точки M (рис. 25) всі точки кривої, взагалі кажучи, лежать по один бік дотичної. Коли вони лежать (як на рисунку з правого боку) по той бік дотичної, куди спрямовано від'ємний напрям осі y-ків, то кажуть, що крива поблизу цієї точки спрямована до цього напряму угнутістю, а до додатнього — опуклістю. Навпаки, коли точки кривої лежать

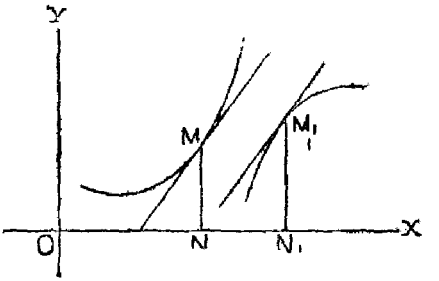


Рис. 25.

то кажуть, що до додатнього напряму осі y-ків вона спрямована угнутістю (рис. 24 зліва), а до від'ємного опуклістю. Аналітична ознака:

Крива спрямована до додатнього напряму осі y-ків опуклістю або угнутістю дивлючись по тому, чи буде $y'' < 0$ чи > 0.

Справді, в першому випадку ординати кривої поблизу точки M мусять бути менші, а в другому більші за відповідні ординати дотичної, тобто

$$y + \Delta y \gtrless y + y'\Delta x, \text{ або } \Delta y - y'\Delta yx \gtrless 0.$$

Але за Тайлоровою формулою

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = y'\Delta x + y'' \frac{(\Delta x)^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$

Отже опуклість або вгнутість залежить від знаку

$$\Delta y - y'\Delta x = \frac{1}{2} y''\Delta x^2 + \frac{1}{6} y'''\Delta x^3 + \ldots,$$

тобто при досить малому Δx, від знаку 1-го члена $\frac{1}{2} y''\Delta x^2$, коли він відмінний від 0, тобто коли $y'' \neq 0$.

§ 8. Точки перегину.

Винятком будуть ті точки кривої, в яких крива переходить з одного боку дотичної на другий. В них крива спочатку повертається в додатній бік осі y-ків, потім у від'ємний бік своєю опуклістю (відповідно угнутістю) і виходить, що для значінь x менших від абсциси M, y'' має один знак, а для значінь більших — протилежний. Але функція змінює знак, переходячи через 0 або через ∞.

Тому, що встановлюючи критерій ми користувалися Тейлоровим рядом, ми маємо право говорити лише про перший випадок (перехід через 0) і маємо, як умову існування точки, в якій дотична перетинає криву $y'' = 0$ (припускаючи, що $y''' \neq 0$).

Коли ж не лише $y'' = 0$, а й $y''' = 0$, то головний член у різниці $\Delta y - y'\Delta x$ буде $y^{IV} \frac{\Delta x^4}{4!}$, і крива поблизу такої точки лежить з одного боку дотичної. Взагалі, коли перша відмінна від нуля похідна є паристого порядку, — точки кривої поблизу точки дотику лежать з одного боку дотичної, коли ж непаристого, то по різні боки від дотичної, — зразу ж до й після точки дотику.

Приклад 1. Кубічна параболя $y = x^3$ має в початку координат за дотичну вісь X-в ($y = 0$), а саму точку (0, 0) — за точку перегину, бо

$$y' = 3x^2 = 0$$

при $x = 0$, $y'' = 6x$, тобто $= 0$, при $x = 0$, $y''' = 6 \neq 0$.

Також крива

$$y = x(x^2 - b^2)$$

має в початку координат (0, 0) $y'' = 0$, але

$$y' = 3x^2 - b^2$$

при $x = 0$ рівне $-b^2 \neq 0$ і $y''' = 6 \neq 0$, — (0,0) є точка перегину.

2. Ньютонова parabola campaniformis cum ovali

$$ay^2 = x(x^2 - a^2),$$

має дві дійсних точки перегину. Справді з

$$2ay\,y' = 3x^2 - a^2$$

маємо

$$a(y'^2 + y\,y'') = 3x,$$

умова $y'' = 0$ дає $ay'^2 = 3x$ і для x маємо рівнання

$$12x(x^2 - a^2) = (3x^2 - a^2)^2$$

або

$$3x^4 - 6x^2a^2 - a^4 = 0,$$

звідкіля

$$x^2 = a^2\left(1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$

дійсне лише

$$x = a\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}},\ y = \pm a\,\frac{\sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}\,.\,\sqrt{2}}{\sqrt[8]{27}}.$$

3. Ньютонова parabola pura

$$py^2 = (x^2 - bx + a^2)\,x$$

при $b^2 < 4a^2$ і $b > 0$ має дві дійсних точки перегину. Справді, також склавши

$$2pyy' = 3x^2 - 2bx + a^2,\ p(y'^2 + yy'') = 3x - b,$$

знайдемо при $y'' = 0$ рівнання

$$3x^4 - 4bx^3 + 6a^2x^2 - a^4 = 0,$$

ліва частина якого при $x=-\infty$ додатня, при $b>0$ уже при $x=-a$, при $x=0$ від'ємна $(=-a^4)$, при $x=+\infty$ знову додатня, тому рівнання має дійсний корінь >0.

4) $y=x_e^{x^{\frac{2}{3}}}$; $y'=e^{x^{\frac{2}{3}}}\left(1+\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)$. В початку $x=0$, $y=0$, $y'=1$, дотична має рівнання $Y=X$

але $y''=e^{x^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{4}{9}x^{\frac{1}{3}}+\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}\right)$ в початку є ∞.

На абсолютну величину $|y|>|x|$. В точці (0,0) крива переходить з одного боку дотичної на другий. Але y повертається в цій точці в ∞ (а також і наступні похідні).

§ 9. Порядок і кляса кривої.

Порядком кривої зветься число точок, у яких крива перетинається з прямою. Коли криву задано рівнанням у декартових координатах, то порядок її дорівнює степеню її рівнання. Деякі з цих точок для даної прямої можуть бути уявні, і при цьому, коли рівнання (2) дійсне, число таких уявних точек перетину з прямою буде паристе. Виходить, що цілком аналітична ознака — альґебричність рівнання — має і геометричний зміст, що й виправдує назву таких кривих альґебричними.

Коли рівнання кривої $\Phi(x, y)=0$ є трансцендентне, то його можна розглядати, як альґебричне безконечно високого степеня і тому говорити про порядок трансцендентних кривих не можна, хоч для окремих таких кривих дійсне число точок перетину з прямою може бути конечне. Напр. ланцюгова лінія ні з якою прямою не має більше від двох спільних точок.

Задача провести дотичну з точки, що не лежить на кривій, призводить до другого важливого поняття — до кляси кривої. Клясою кривої зветься число дотичних, що їх можна провести до кривої з точки, яка не лежить на ній (зрозуміло, що доводиться говорити, переважно про криві альґебричні).

В аналітичній геометрії ми бачили, що крива 2-го порядку є одночасно й кривою 2-ої кляси.

Але взагалі кажучи, порядок і кляса кривої не однакові.

Справді, так само як і для кривих другого порядку, задача провести дотичну через дану точку (ξ, η), яка не лежить на кривій, призводить до визначення числа точок кривої (2), в яких

дотична проходить через дану точку (ξ, η); — цебто до находження числа пар значінь (x, y), що задовольняють систему рівнань

$$\Phi(x, y) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$(\xi - x)\,\Phi'_x + (\eta - y)\,\Phi'_y = 0 + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Обоє рівнань степеня m, але так само як і у випадку кривих 2-го порядку, степінь (8) можна понизити з допомогою (2). Коли (5) переписати так

$$\xi\Phi'_x + \eta\,\Phi'_y - (x\Phi'_x + y\Phi'_y) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5')$$

то видно, що члени m-го порядку входять лише через комбінацію

$$x\Phi'_x + y\Phi'_y,$$

але користуючись з певних властивостей однорідних функцій — (Ойлерова теорема), можна показати, що ці члени зникають з-за рівнання (2). Справді, позначаючи $\Phi_k(x, y)$ (бо просто Φ_k однорідний многочлен од x, y виміру k — сукупність членів виміру k в рівнанні (2), — можемо написати:

$$\Phi(x, y) = \Phi_m(x, y) + \Phi_{m-1}(x, y) + \ldots + \Phi_1(x, y) + \Phi_0$$

і виходить, що

$$x\Phi'_x + y\Phi_y \equiv \left(x\frac{\partial\Phi_m}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi_m}{\partial y}\right) + \left(x\frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y}\right) +$$

$$+ \ldots + \left(x\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right).$$

Але за теоремою Ойлера

$$x\frac{\partial\Phi_k}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi_k}{\partial y} = k\Phi_k$$

тому

$$x\Phi'_x + y\Phi'_y \equiv m\Phi_m = (m-1)\,\Phi_{m-1} + \ldots + 2\,.\,\Phi_2 + 1\,.\,\Phi_1.$$

Коли відняти звідсіль

$$m\Phi_m + m\Phi_{m-1} + \ldots + m\,.\,\Phi_1 + m\Phi_1 + m\Phi_0 = m\Phi = 0$$

то матимемо

$$x\Phi'_x + y'_y - m\Phi \equiv -1\,.\,\Phi_{m-1} - 2\Phi_{m-2} - \ldots - (m-1)\,\Phi_1 - m\,.\,\Phi_0.$$

Отже (5) зводиться до виду:

$$X\Phi'_x + Y'\Phi_y + \Phi_{m-1} + 2\Phi_{m-2} + \ldots + (m-1)\,\Phi_1 + m\,.\,\Phi_0 = 0.$$

Тому (8) можна замінити на таке

$$\xi\Phi'_x + \eta'\Phi_y + 1\,.\,\Phi_{m-1} + 2\,.\,\Phi_{m-2} + \ldots (m-1)\,\Phi_1 + m\Phi_0 = 0 \quad (8'')$$

Рівнання (8″) вже тільки $m-1$ степеня відносно x і y. Тому число розв'язок (2) і (5) є $m(m-1)$.

Крива порядку m є (взагалі кажучи) кривою кляси $n=m(m-1)$. Коли $m=2$, то маємо $n=m(m-1)=2$. Крива 2-го порядку є крива й 2-ої кляси. Але вже при $m=3$, $n=6$, при $m=4$, $n=12$.

Але можуть існувати й криві порядку вищого за 2, але кляса яких не вища за їхній порядок. Ми побачимо, що кляса кривої понижується за наявности, так званих особливих точок (див. далі § 15).

Коли задано ξ, η, а змінні є x, y, то (8″) дає криву лінію, яка відносно даної кривої $\Phi=0$ зветься першою полярою точки (ξ, η). Вона проходить через точки дотику дотичних до кривої $\Phi(x, y)=0$ (2), що проходять через точку (ξ, η). Поляра початку має рівнання

$$\Phi_{m-1}+2\,.\,\Phi_{m-1}+\ldots+(m-1)\,\Phi_1+m_1\Phi_0=0.$$

Рівнання першої поляри набуває простішого й симетричнішого виду, коли завести замість x, y однорідні координати

$$\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}.$$

Рівнання кривої, після помноження на z^m, матиме вигляд

$$\Phi\ (x,\ y,\ z)=0$$

(Φ — однорідна функція виміру m).

Рівнання дотичної

$$\Phi'_x(x,\ y,\ z)(X-x)+\Phi'_y(Y-y)=0.$$

Можна записати

$$X\Phi'_x+Y\Phi'_y-(x\Phi_x+y\Phi'_y)=0.$$

Але за теоремою Ойлера, для точки кривої

$$0=m\Phi=x\Phi'_x+y\Phi'_y+z\Phi'_z$$

тобто

$$-(\Phi'_x+y\Phi_y)=z\Phi'_z.$$

Тому рівнання дотичної в точці $(x,\ y,\ z)$ запишеться

$$X\Phi'_x+Y\Phi'_y+Z\Phi'_z=0,$$

де замісць z написано Z, бо воно заміняє одиницю довжини.

При заданих X, Y, Z і змінних x, y, z це буде рівнання першої поляри.

Зауважмо, що ми могли б одержати це рівнання дотичної точці (x, y, z) так. Візьмімо точку (x, y, z) і другу (X, Y, Z). Вони визначають пряму; координати кожної точки цієї прямої пропорційні до

$$x+\lambda X,\ y+\lambda Y,\ z+\lambda Z.$$

Точки пересічі цієї прямої з кривою визначаються рівнанням

$$0=\Phi(x+\lambda X,\ y+\lambda Y,\ z+\lambda Z)=\Phi(x,y,z)+\lambda(X\Phi'_x+Y\Phi'_y+Z)+$$
$$+\frac{\lambda^2}{1.2}\left(X^2\Phi''_{xx}+Y^2\Phi''_{yy}+Z^2\Phi''_{zz}+2\Phi''_{xy}XY+2\Phi''_{xz}XZ+2\Phi''_{yz}YZ\right)+$$
$$+\ldots+\frac{\lambda^m}{m!}\Phi(XYZ).$$

Тому, що (x, y, z) точка кривої, то вільний член зникає і рівнання має один корінь $\lambda=0$. Щоб воно мало два корені, тобто щоб дві точки пересічі злилися, і пряма дотикалася б кривої, мусить дорівнювати нулеві коефіціент при λ, що й дає попереднє рівнання дотичної. Коефіціент при λ^2 дає другу поляру й т. д.

§ 10. Гессова крива (Hessienne).

Коли криву задано рівнанням не розв'язаним відносно y

$$\Phi(x,\ y)=0(2),$$

то y'' визначиться (припускаючи, що $\Phi'_y\neq 0$), якщо виключити y' із двох рівнань:

$$\Phi'_x+y'\Phi'_y=0.$$

$$\Phi''_{xx}+2\Phi''_{xy}y'+\Phi''_{yy}y'^2+\Phi'_y\,.\,y''=0.$$

тобто

$$\Phi'^3_y.\,y''=\Phi''_{xx}\,.\,\Phi'^2_y-2\Phi''_{xy}\Phi'_y\Phi'_x+\Phi''_{yy}\Phi'^2_x.$$

Отже координати точки перегину визначаться спільним розв'язанням рівнання кривої

$$\Phi(x,\ y)=0$$

і рівнання

$$\Phi''_{xx}\Phi'^2_x-2\Phi''_{xy}\Phi'_x\Phi'_y+\Phi''_{yy}\Phi'^2_x=0,$$

можна написати детермінантом

$$\begin{vmatrix}\Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} & \Phi'_x\\ \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} & \Phi'_y\\ \Phi'_x & \Phi'_y & 0\end{vmatrix}=0.$$

є степеня $3m-4$, але за допомогою рівнання кривої степінь його знижується на 2. Справді, коли замінити x і y через

$$\frac{x}{z} \text{ та } \frac{y}{z}$$

і помножити I-ший і II-гий стовпчик z^{m-2}, III-й на $(m-1)\,z^{m-1}$ а останній рядок помножити на z, то можна замінити, за теоремою про однородні функції,

$$(m-1)\,\Phi'_x = x\Phi''_{xx} + y\Phi''_{xy} + z\Phi'_{xz}$$

$$(m-1)\,\Phi'_y = x\Phi''_{xy} + y\Phi''_{yy} + z\Phi''_{yz}$$

в III'ьому стовпчикові.

Помножаючи потім I-й стовпчик на x, II-й на y і віднімаючи із III-го, матимемо

$$0 = \begin{vmatrix} \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} & z\Phi''_{xz} \\ \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} & z\Phi''_{yz} \\ \Phi'_x & \Phi'_y & -(\Phi'_x + y\Phi'_y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} & z\Phi''_{xz} \\ \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} & z\Phi''_{yz} \\ \Phi'_x & \Phi'_y & z\Phi'_z - mt \end{vmatrix}$$

Останній детермінант при сукупнім розв'язанні з

$$\Phi(x,\ y,\ z) = 0$$

можна замінити, розділивши його на z, через

$$\begin{vmatrix} \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} & \Phi''_{xz} \\ \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} & \Phi''_{yz} \\ \Phi'_x & \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Останній рядок помножаємо на $(m-1)$ і віднімаємо перший, помножений на x і другий, помножений на y.

Остаточно маємо, розділивши на z:

$$\begin{vmatrix} \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} & \Phi''_{xz} \\ \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} & \Phi''_{yz} \\ \Phi''_{xz} & \Phi''_{yz} & \Phi''_{zz} \end{vmatrix} = 0$$

рівнання степеня $3(m-2)$, в якому можемо покласти $z=1$, щоб повернутися до неоднорідних координат.

Виходить, що альґебрична крива порядку m має $3m(m-2)$ точок перегину.

Зауважимо, що це число знижується (зменшується), коли на кривій є особливі точки.

Геометрично, сукупне розв'язання пересічі двох визначених цими число точок перегину кривої

$$\Phi(x, y) = 0$$

є число точок її перетину з кривою $H = 0$, яка зветься вою кривою даної кривої.

В зв'язку з цим звернімо увагу на т. зв. Крамерів парадокс[1]). В рівнанні m-ого степеня з двома змінними є

$$1 + 2 + \ldots + (m + 1) = \frac{(m + 1)(m + 2)}{1 . 2}$$

членів, тобто всього

$$\frac{(m + 1)(m + 2)}{2} - 1 = \frac{m(m + 3)}{2}$$

довільних коефіцієнтів, і треба виходить

$$\frac{1}{2} m(m + 3)$$

заданих умов (напр. заданих точок), щоб визначити криву. Але дві кривих порядку m перетинаються в m^2 точках і коли

$$m^2 \geqslant \frac{m(m + 3)}{2}$$

то можна взяти

$$\frac{m(m + 3)}{2}$$

точок так, що можна буде провести через ці точки більше однієї кривої m-го порядку. Так, візьмемо 8 точок і проведемо через них криву 3-го порядку. Тому, що для визначення кривої 3-го порядку, треба 9 точок, матимемо не одну криву, а цілий пучок їх $U + \lambda V = 0$ і всі вони пройдуть через 8 взятих точок і ще через 9-ту точку пересічі $U = 0$, $V = 0$. Справді, підставляючи координати кожної з даних 8 точок у рівнання 3-го порядку з довільними коефіцієнтами, матимемо 8 лінійних рівнань між цими коефіцієнтами і таким способом із загального числа їх—9—визначаємо 8 лінійно за допомогою дев'ятого. Отже матимемо рівнання форми

$$U + \lambda V = 0, \text{ де } U = 0, \ V = 0$$

[1]) Cramer. Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. 1750 p. 78--79.

рівнання двох кривих 3-го порядку, що проходять через 8 заданих точок і є ще довільний коефіцієнт λ. Щоб визначити і його, треба дати ще одну умову, ще одну точку кривої. Коли візьмемо, наприклад, точку x_1 y_1 і U_1, V_1, відповідні значення U та V, λ визначимо з рівнання $U_1 + \lambda V_1 = 0$.

Але, коли (x_1, y_1) є 9-та точка перетину $U = 0$, $V = 0$, матимемо $U_1 = 0$, $V_1 = 0$ і отже λ залишиться довільне, і через 9 точок (тобто 8 довільних та відповідну 9-у) проходять не одна, а безліч кривих 3-го порядку. Далі дві кривих 4-го порядку $U = 0$, $V = 0$ перетинаються в 16 точках. Візьмемо 14 з них, через них можна провести безліч кривих 4-го порядку $U + \lambda V = 0$, які всі пройдуть ще через 2 точки пересічі перших двох кривих.

Зрештою альґебрична природа рівнань кривих альґебричних призводить до посутньої різниці між кривими порядку паристого і непаристого. Даючи одній із змінних, напр. y, певне значення (тобто геометрично перетинаючи криву якоюсь прямою рівнобіжною до осі x-ів), одержимо рівнання, якого степінь буде рівний порядкові рівнання. Це рівнання має коефіцієнти дійсні. Тому уявні корені є парами спряжені. Звідсіль рівнання непаристого степеня неодмінно має принаймні один дійсний корень, а паристого може не мати жодного дійсного кореня — тобто крива непаристого порядку має хоч одну дійсну точку на кожній прямій, паралельній з віссю x-ів, а крива паристого порядку може не мати ні одної такої точки перетину з прямою.

Виходить, що крива непаристого порядку неодмінно має вітину, що йде в ∞ — принаймні одну, а паристого порядку може й не мати і бути таким способом замкненою.

§ 11. Асимптоти.

Коли дві криві

$$y = f(x) \text{ і } y = g(x)$$

є такі, що віддаль між точками їх безмежно зменшується, якщо рухатися по їхніх вітинах, що йдуть у безконечність, то кажуть, що одна крива асимптотично наближається до другої. Рахуючи віддаль по ординатах, визначмо аналітичні умови асимптотичного наближення

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - g(x)] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Приклади.

1. Крива

$$xy = x^3 + 1 \text{ або } y = x^2 + \frac{1}{x},$$ —

має за асимптоту параболю $y = x^2$.

2) Крива

$$(x^2 + y^2)\, y^2 = 2px^3$$

має за асимптоту парабол

$$y^2 = 2px.$$

Коли одна з узятих ліній є пряма (тобто напр.

$$g(x) = \mu x + h$$

так, що

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - \mu x - h \right] = 0 \quad (12)$$

то вона зветься прямолінійною асимптотою.

Коли крива $y = f(x)$ має вітини, що йдуть у безконечність (такі, наприклад, є алґебричні криві непаристого порядку), то можна поставити задачу відшукати її асимптоти.

Тоді

$$0 = \lim_{x \to \infty} (y - \mu x - h) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} (y - \mu x) - h,$$

тобто вільний член у рівнанні асимптоти

$$h = \lim_{x \to \infty} (y - \mu x) \quad . \; . \; . \; . \; (13).$$

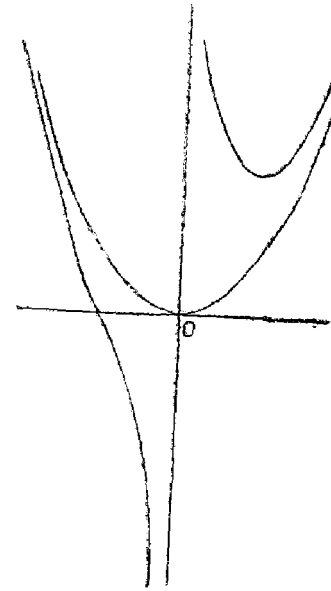


Рис. 26.

Але

$$\lim (y - \mu x) = \lim_{x \to \infty} x \left(\frac{y}{x} - \mu \right)$$

Щоб ця границя мала конечне значіння, треба щоб другий множник мав границю, яка дорівнювала б нулеві, тобто

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{y}{x} \right) = \mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14).$$

Виходить, що перш за все знаходимо кутовий коефіцієнт асимптоти за (14), тоді підставляємо знайдене значення в (13), знаходимо h

Приклади.

1. Крива

$$y = be^{-\frac{x}{a}}$$

має вітину, що йде у безконечність при безконечному збільшенні $x\,(a > 0)$. Шукаємо

$$\lim_{x \to \infty} \left(be^{-\frac{x}{a}} : x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{b}{xe^{\frac{x}{a}}} \right) = 0,$$

тобто $\mu = 0$, і виходить, що

$$h = \lim_{x \to \infty} \left(y - 0 \,.\, x \right) = \lim_{x \to \infty} be^{\frac{x}{a}} = 0.$$

Отож асимптотою буде вісь X-ів.

2. Крива

$$y = b \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$$

має низку безконечних вітин. Визначаємо μ

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{b}{a} \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}}{\frac{x}{a}}$$

Чисельник, коли $x = \pm \infty$, є величина конечна,

$$\left(\frac{2k+1}{2} \pi \right)$$

Тому $\mu = 0$. Виходить, що асимптотами буде низка прямих паралельних з віссю X-ів

$$y = \frac{2k+1}{2} \pi b \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$\text{бо } h = \frac{2k+1}{2} \pi b.$$

Зауважимо, що за правилом L'Hopitale'я знаходити справжнє значення невизначеностей

$$\mu = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{y}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad \ldots\ldots (14')$$

т. т. напрям асимптоти, коли вона існує, однаковий з тим напрямом, що визначається кутовим коефіцієнтом дотичної, коли x і y

зростають до ∞. Але дотичну в безконечно-далекій точці можна одержати, коли в рівнанні

$$Y = \left(\frac{dy}{dx}\right) X + \left(y - x \frac{dy}{dx}\right)$$

перейдемо до границі поклавши $x = \infty$, т. т. коли

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{dy}{ax}\right) = \mu \, (15) \text{ і } \lim_{x \to \infty} \left(y - x \frac{dy}{dx}\right) = h \quad . \; . \; . \; (16)$$

то $y = \mu x + h$ буде дотичною в безконечно-далекій точці. Але для асимптоти (див. вище)

$$h = \lim (y - \mu x) = \lim \left[y - x \lim \left(\frac{dy}{dx}\right)\right] \; . \; . \; . \; . \; (17).$$

І ось, коли границі (14) і (15) однакові, то дотична в безконечно-далекій точці й буде асимптотою.

Перше визначення трохи загальніше: дотичної в безконечно-далекій точці може й не існувати, і крива, одначе, може мати прямолінійну асимптоту.

Візьмімо криву

$$y = \frac{\cos x}{x}$$

Для неї асимптота існує в першому розумінні, бо

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\cos x : x^2 \right) = 0 \text{ і } \lim (y - o.x) =$$
$$= \lim (\cos x : x) = 0$$

нею буде вісь X-ів, навколо якої крива утворює, сказати б так, низку згаслих коливань, що їх амплітуда зменшується зі збільшенням абсолютного значення x і що самі вони містяться проміж вітинами гіперболь

$$y = \frac{1}{x}, \text{ і } y = -\frac{1}{x}$$

а тим часом *дотичної* (визначеної) в безконечно далекій точці в кривої *немає*. Хай

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \lim_{x \to \infty} \left[\left(-x \sin x - \cos x \right) : x^2 \right] = 0$$

але

$$y - x \frac{dy}{dx} = 2 (\cos x : x) + \sin x$$

для $x \to \infty$ немає певної границі, бо хоч

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

але $\sin x$, для $x \to \infty$, величина невизначена між -1 і $+1$.

§ 13. Асимптоти альґебричних кривих.

Коли задано альґебричну криву, то її асимптоти визначаються ось яким способом. Як нагадувалося вище, для асимптоти й для кривої

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{y}{x}\right)$$

мусить бути однакові. Але рівнання кривої можна написати

$$O \equiv \Phi(x, y) = \Phi_m(x, y) + \Phi_{m-1}(x, y) + \Phi_{m-2}(x, y) + \ldots + \\ + \Phi_1(x, y) + \Phi_0,$$

де $\Phi_k(x, y)$ — многочлен, однорідний відносно x і y k-того степеня і виходить, що

$$\Phi_k(x, y) = x^k \Phi_k\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^k \varphi_k\left(\frac{y}{x}\right).$$

Отже рівнання кривої набирає виду

$$0 = x^m \varphi_m\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} \varphi_{m-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots + x \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi_0. \quad (18)$$

Поділом на x^m дістанемо:

$$0 = \varphi_m\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} \varphi_{m-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots + \\ + \frac{1}{x^{m-1}} \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^m} \varphi_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Покладаючи тут

$$x = \infty \text{ і } \lim_{x \to \infty} \left(\frac{y}{x}\right) = \mu,$$

прийдемо до рівнання для μ

$$\varphi_m(\mu) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Для визначення коефіцієнта асимптоти h зауважимо, що з її рівнання

$$\frac{y}{x} = \mu + \frac{h}{x},$$

і підставляючи це значення в (18) і розгортаючи

$$\varphi_k\left(\mu+\frac{h}{x}\right)$$

за степенями приросту $\frac{h}{x}$, знайдемо

$$O = x^m \varphi_m(\mu) + x^{m-1}[h\varphi'_m(\mu) + \varphi_{m-1}(\mu)] +$$
$$+ x^{m-2}\left[\frac{h^2}{1.2}\varphi''^m(\mu) + h\varphi_{m-1}(\mu) + \varphi_{m-2}(\mu)\right] \quad . \; . \; . \; (20)$$

Підставмо замість μ один із коренів рівняння (19). Тоді

$$\varphi_m(\mu) = 0$$

Через це, після поділу на x^{m-1}, (18) набуде виду

$$O = [h\varphi'_m(\mu) + \varphi_{m-1}(\mu)] + \frac{1}{x}\left[\frac{h^2}{1.2}\varphi''_m(\mu) +\right.$$
$$\left. + h\varphi'_{m-1}(\mu) + \varphi_{m-1}(\mu)\right] + \ldots$$

Переходячи до границі $x \to \infty$, дістанемо рівняння для визначення h:

$$0 = h\varphi'_m(\mu) + \varphi_{m-1}(\mu) \therefore h + -\frac{\varphi_{m-1}(\mu)}{\varphi'_m(\mu)}. \qquad (21)$$

Так знайдемо для кожного дійсного кореня (19) відповідне значення h. Коли корінь μ подвійний і при цьому

$$\varphi_{m-1}(\mu) \neq 0$$

то асимптоти не існує. Коли ж для цього подвійного кореня

$$\text{і} \quad \varphi_{m-1}(\mu) = 0,$$

то для визначення h звертаємося до третього рівняння

$$\frac{h^2}{1.2}\varphi''_m(\mu) + h\varphi'_{m-1}(\mu) + \varphi_{m-2}(\mu) = 0. \qquad (22)$$

і т. д.

Приклад 3. Декартів лист

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Тут

$$m = 3, \; \varphi_m(\mu) = 1 + \mu^3 \equiv 0$$

має один дійсний корінь $\mu = -1$. Відповідне значення

$$h = \frac{\varphi_2(\mu)}{\varphi'_3(\mu)} = -\frac{-3a\mu}{3\mu^2} = -a.$$

Тоді асимптота буде

$$y + x + a = 0.$$

Приклад 4. Крива

$$2y^5 - 5xy^2 + x^5 = 0 \text{ дає } \varphi_5(\mu) \equiv 2\mu^5 + 1 = 0,$$

єдиний дійсний корінь якого

$$\mu = -2^{-\frac{1}{5}}; \quad \varphi_4(\mu) \equiv 0$$

тому $h = 0$, отже асимптота буде

$$y = -\frac{1}{2^{\frac{1}{5}}} x.$$

§ 14. Асимптоти паралельні з віссю Y-ків.

В попередньому ми не розглядали того випадку, коли асимптота є пряма лінія паралельна з віссю Y-ків, бо в цьому випадку її рівнання не можна написати

$$y = \mu x + h.$$

Для визначення і таких асимптот треба вжити рівнання

$$x = \nu y + k$$

і шукати

$$\lim\left(\frac{x}{y}\right) = \nu \text{ і } k = \lim(x - \nu y).$$

Так, для кривої

$$y = \frac{\operatorname{Cos} x}{x}$$

знайдемо

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x}{y}\right) = \lim \frac{\operatorname{Cos} x}{y^2} = 0, k = \lim(\cos x : y) = 0.$$

Отож вісь Y-ків буде також асимптотою.

Але помітивши, що після визначення асимптот за рівнанням $y = \mu x + h$ нам потрібні лише ті асимптоти, для яких $\nu = 0$, ми можемо міркувати так: коли рівнання кривої m-го порядку не має в собі y^m, то один або декільки коренів y дорівнює ∞, звідсіль — для альґебричних кривих, рівнання яких можна написати

$$y^{m-k}\psi_k(x) + y^{m-k-1}\psi_{k+1}(x) + \ldots + \psi_m(x) = 0 \qquad (23)$$

x буде мати k коренів, для яких y стає безконечно велике, або іншими словами буде відповідне число вітин, що йдуть у без-

конечність. Тому асимптоти паралельні до осі y-ків визначатиметься із рівнання

$$\phi_k(x) = 0 \tag{24}$$

Відомо з альґебри, коли в рівнанні n-го степеня коефіцієнт при вищому степені невідомого повертається в 0, то один із коренів рівнання повертається в безконечність і таким способом безконечно-далека точка кожної з прямих (20) буде належати кривій (19)].

Приклади 5. Діоклесова цисоїда:

$$x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$$

дає

$$y^2(x - 2a) + x^3 = 0$$

і виходить, що

$$x - 2a = 0$$

буде асимптотою.

6) Супутниця цисоїди:

$$y^2(x - 2a) + x^3 - yax^2 = 0$$

теж має за асимптоту

$$x - 2a = 0.$$

7) Пряма строфоїда

$$y^2(x - 2a) + x(x - a^2) = 0$$

також

$$x - 2a = 0.$$

8) Конхоїда

$$y^2(x - a)^2 + x^2[(x - a)^2 - b^2] = 0$$

має за асимптоту

$$x - a = 0.$$

§ 15. Асимптотичні точки.

Крива може безконечно наближатися до точки, роблячи навколо неї безліч дедалі вужчих та вужчих зворотів. Приклади таких точок найзручніше дати рівнаннями в полярних координатах. Так — полюс буде асимптотичною точкою для гіперболічної спіралі

$$r\theta = a, \text{ для Lituus Côtes'a } (r^2\theta = a^2)$$

для кохлеоїди

$$r = a\,\frac{\operatorname{Sin}\theta}{\theta} \quad \text{і т. і.}$$

В прямокутній системі координат обидві змінні одного роду, і тому однаково, яку з них взяти за незалежну зміну; в обох випадках, шукаючи границю $\left(\frac{y}{x}\right)$ або $\left(\frac{x}{y}\right)$, приходимо до граничного напряму, в обох випадках знаходимо прямолінійні асимптоти.

А в полярних координатах, беручи за незалежне змінне радіюс вектор і розшукуючи границю для θ, шукаємо — чи набуває радіюс вектор певного напряму, коли точка віддаляється по вітині кривої в ∞, і таким способом приходимо до прямолінійної асимптоти. Так, для гіперболічної спіралі знаходимо $\theta = \frac{a}{r}$ і границя $\underset{r \to \infty}{\theta = 0}$. Для визначення самої асимптоти шукаємо границю довжини, перпендикуляру з полюса на пряму паралельну до полярної осі і яка проходить через M

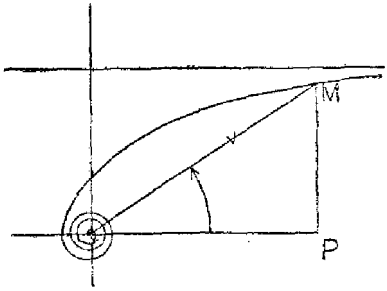


Рис. 27.

$$MP = r \operatorname{Sin} \theta = a \frac{\operatorname{Sin} \theta}{\theta}$$

виходить, що

$$\lim MP = a \lim_{\theta \to 0} \frac{\lim \theta}{\theta} = a.$$

Зовсім іншого характеру маємо результати, коли шукаємо $\lim\limits_{\theta \to \infty} r$. Коли ця границя існує, то виходить, при обертанні кривої, точки її наближаються до якогось граничного положення. Ми маєму граничну точку — асимптотичну точку. Так, для тої самої гіперболічної спіралі в нас було

$$\lim r = \lim \frac{a}{\theta} = 0$$

як і взагалі для кривої

$$r^m \theta^m = a^n$$

при

$$n > 0, \quad m > 0.$$

Особливі точки плоских кривих.

§ 16. Подвійні точки.

До цього часу ми розглядали такі точки, в яких крива мала одну визначену дотичну. Аналітично це означає, що

існує одне визначене значення похідної. Але за теоремою про похідні від неявних функцій, $\frac{dy}{dx}$ існує коли $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Правда, на випадок, коли $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ми можемо взяти за незалежне змінне y і тоді шукати $\frac{dx}{dy}$, яка існує, коли $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$.

Лишаються під сумнівом і не будуть звичайними точками в зазначеному вище розумінні, ті, що для них разом

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{25}$$

Ці точки потребують особливого обслідування, їх ми назвемо особливими. До числа їх ми не будемо зараховувати ті, для яких $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, але $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$, конечна й визначена, бо це ті точки, в яких дотична паралельна з віссю Y-ків, Для них досить повернути осі на деякий кут, щоб у новому положенні було $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

З такої самої причини ми не маємо підстав уважати за особливі ті точки, в яких ордината найбільша і найменша і тому $y' = 0$, тобто дотична паралельна до осі X-ів $\left(\frac{\partial F}{\partial x} = 0\right)$ напр. для вершини еліпси $x = 0$, $y = b$, бо й тут зі зміною координатних осей зникає ця особливість. Ми не мусимо вважати за особливу точку й точку перегину (point d'infléxion) $y'' = 0$, бо для неї взагалі $\frac{\partial F}{\partial x}$ і $\frac{\partial F}{\partial y}$ не нулі. (Ця точка відповідає особливій дотичній). І ось, нехай для точки (x, y) кривої (2) справджуються умови (25).

Диференціюючи (2) один раз, матимемо рівнання

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

воно за припущенням $\equiv 0$ в особливій точці. Візьмемо звідсіль похідну

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y'' = 0 \tag{26}$$

На випадок, коли (25) справдилися, член $\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ можна занедбати, якщо тільки $\lim \frac{dy}{dx}$ для такої точки конечний.

Справді, можна написати

$$y' = \frac{F'_y \cdot y'}{F'_y}$$

а тому

$$\lim y' = \lim \frac{y' F'_y}{F'_y}$$

тобто

$$\lim y' = \left[\frac{y'(F'_y)'}{(F'_y)'} + \frac{y'' F'_y}{(F'_y)'} \right]$$

тому, що

$$(F'_y)' = F''_{xy} + y' F''_{yy}$$

за припущенням не 0 і конечна, маємо

$$\lim y' = \lim y' + \lim \frac{y'' F'_y}{(F'_y)'}$$

Тобто

$$\lim \frac{y'' F'_y}{(F'_y)'} = 0$$

і тому

$$\lim y'' \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

але тільки за умови

$$\lim (F'_y)' \neq 0$$

і конечний.

Отже (26′) стає

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 = 0 \qquad (26)$$

і для визначення кутового коефіцієнта дотичної в точці, в якій виконано (25), ми маємо рівнання 2-го степеня, — коли тільки в цій точці не всі другі частинні похідні F дорівнюють 0.

Припустімо це останнє, тоді така точка зветься подвійною (особливою) точкою. При цьому можливі три випадки:

1) Корені рівнання (26) дійсні і різні: крива (2) в такій точці має дві різні дотичні. Точка зветься вузловою точкою або вузлом (noeud). Умова для цього така

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0.$$

2) Корені (26) є уявні спряжені — дійсних дотичних немає, можна говорити про дві уявних дотичних. Не існує на кривій точок сусідніх з такою точкою кривої, тому ця точка зветься ізольованою точкою. Аналітична умова цього така

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0.$$

3) Два корені рівнання (28) рівні, його ліва частина є точний квадрат

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Дотична одна — подвійна. Точка взагалі буде точкою звороту (p. de rebroussement, Rückehrpunkt), але цей випадок треба розглянути окремо.

Початок координат (0,0) є вузлова точка на строфоїді, ізольованою точкою на супутниці цисоїди і точкою звороту на цисоїді.

Приклади.

Дослід розбіжних параболь.

Взаємний зв'язок і як виникають особливості того чи іншого типу добре ілюструвати на розбіжних параболях (parabolae divergentes), що визначаються рівнанням

$$py^2 = (x-a)\,(x-b)\,(x-c)$$

а) Коли всі корені рівнання

$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c) = 0$$

дійсні й різні:

$$a < b < c,$$

то крива зустрічає вісь X-ів у трьох точках A, B, C і складається з овалу та з вітини параболічного типу, що йде в безконечність

Справді, права частина при

$$x < b < c$$

й при $x > c$ додатня і від'ємна при $x < a$ і при

$$b < x < c.$$

Особливих точок у кривої немає. — Це так звана Parabola campaniformis cum ovali Ньютона.

в) Коли

$$a < b = c,\ py^2 = (x-a)\,(x-b)^2,$$

то права частина додатня або 0 при $x \geqslant a$ і від'ємна при

$$x < a;$$

F'_x *и* F'_y разом дорівнюють 0 при

$$x = b, \ y = 0.$$

При цьому другі похідні відповідно рівні

$$2(a-b), \ 0 \text{ і } 2p.$$

Рівнання дотичних

$$a - b + py'^2 = 0$$

має дійсні корені

$$\pm\sqrt{\frac{b-a}{p}}$$

бо

$$a < b \text{ і } p > 0.$$

Крива має вузол — Parabola nodata Ньютона.

е) Коли

$$a = b = c,$$

то три точки зустрічі кривої з віссю X-ів зливаються в одну точку звороту кривої (рівнання дотичної в $(0, a)$ є

$$2\ py'^2 = 0.$$

Parabola cuspidata.

д) Коли зливаються точки A і B

$$a = b < c,$$

то рівнання

$$py^2 = (x-a)^2\ (x-c)$$

при $a < c$ дає в точці $(a, 0)$

$$F'_x = 0 = F'_y\ F''_{xx} = 2(c-a), \ F''_{xy} = F''_{xy} = 2p.$$

Обидві дотичні уявні, але $(a, 0)$ належить до кривої і є її ізольована точка: Parabola punctata.

е) Випадок коли корені уявні:

$$py^2 = (x-a)\,[(x-\alpha)^2 + \beta^2]$$

par. pura розпадається, власне також на 3 випадки — Коли дотичні в точках перегину перетинаються в середині кривої, на безконечності або зовні кривої на осі X-ів.

Аналогічні випадки можна розрізняти в Нікомедової конхоїди:

$$(x^2 + y^2)\,(x-a)^2 - b^2x^2.$$

Точка (0,0) є особливою точкою і при тому, коли $b < a$ ізольованою точкою, для $b = a$ точкою звороту, а для $b > a$ — вузлом.

Також Паскалів равлик

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0$$

при $b < 2a$ має в початку координат вузол, для $b = 2a$ точку звороту, а при $b > 2a$ — ізольовану точку.

Рівнання дотичних у подвійній точці. Рівнання дотичної показує, що для кожної її точки

$$\frac{Y - y}{X - x} = y'$$

і коли y' визначається рівнанням (26), то виходить, що можна поставити в (26) замість y' ліву частину, що після помноження на $(X - x)^2$ дасть:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(X - x)^2 + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(X - x)(Y - y) + \\ + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(Y - y)^2 = 0 \qquad (28)$$

яке вдовольняється координатами обох дотичних і яке таким способом, є рівнанням їхньої сукупности.

Можна зауважити ось що. Розгортанням

$$\Phi(X, Y) \equiv \Phi[x + (X - x),\ y + (Y - y)]$$

степенями

$$(X - x),\ (Y - y)$$

маємо:

$$\Phi(x, y) + \Phi'_x(X - x + \Phi'_y(Y - y) + \frac{1}{1 \cdot 2}[\Phi''_{xx}(X - x)^2 + \\ + 2\Phi''_{xy}(X - x)(Y - y) + \Phi_{yy}(Y - y)^2] + \ldots$$

1-й член $= 0$ за (2). Прирівнявши до нуля члени першого виміру, матимемо рівнання дотичної. В особливій точці вони зникають, і членами нижчого виміру залишаються члени 2-го степеня; прирівнявши їх до 0, дістанемо (27).

Ті типи подвійних точок, що ми їх тількищо розглянули, далеко ще не вичерпують усієї можливої різноманітности їх. Зауважимо перш за все, що звичайна точка кривої може мати те або інше особливе відношення до дотичної: або це проста точка з простою дотичною, або точка перегину, або — коли дотик

3-го порядку*), то точка сплощення (point méplat) як у параболі 4-го порядку $y = x^4$ в точці (0,0).

Зупинимося детальніше на подвійних точках. Звернімо увагу на вузол. Перш за все обидві вітини, що через нього проходять, можуть мати звичайні дотичні, тоді обидві вітини по один бік вузлової точки повернені одна до одної угнутістю, а по другий бік опуклістю. Так у строфоїди у Декартового листа, конхоїди, *p.* nodatae, — ні одна з вітин не перетинає своєї дотичної. Подруге, одна з вітин може мати у вузлі точку перегину. За приклад такої кривої можна взяти криву

$$x^2 y^2 - a(y - x) \cdot (x^2 + y^2) + b^2 (x^2 - y^2) = 0.$$

Потретє, обидві вітини можуть перетинати дотичну і при тому обидві вигнуті в один бік.

Приклад: крива

$$x^4 - y^4 + a^2 xy = 0, \text{ або } 4(x^2 + y^2) xy + a^2 (x^2 - y^2) = 0$$

(та сама крива після повороту осей на 45°).

Напослідок обидві вітини мають точку перегину і при тому в 2-х їх вершкових кутах повернені одна до одної угнутістю, в двох інших опуклістю. Такими кривими є Бернулієва лемніската і крива

$$y^2 = x^2 (x^2 + 1).$$

Розглянемо той випадок, коли (23) має рівні корені. Опріч точки звороту, про яку ми вже говорили і яка зветься точкою звороту 1-го роду або роговистою (Keratoide, Hornspitze) — коли вітини кривої, що в ній збігаються, лежать по різні боки дотичної, — розрізняють ще точку звороту 2-го роду або дзьобовисту (ramphoide, Schnabelspitze). Приклад такої точки дасть крива

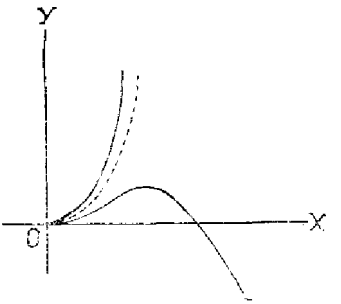


Рис. 28.

$$m(ay - x^2)^2 = x^5 \; (a > 0, m > 0$$

Крива не має точок для $x < 0$.

Розв'язуючи відносно y, маємо

$$ay = x^2 \left(1 \pm \sqrt{\frac{x}{m}}\right)$$

Перша вітина

$$ay = x^2\left(1 + \sqrt{\frac{x}{m}}\right)$$

має ординати більші за відповідні ординати параболі $ay = x^2$, ординати другої вітини

$$ay = x^2\left(1 + \sqrt{\frac{x}{m}}\right)$$

менші, але вони додатні при $x < m$. Отже обидві вітини, біля початку координат містяться вище осі x-ів, яка є спільною дотичною для обох вітин. Справді

$$\Phi = 0,\ \Phi'_x = -4xm(ay - x^2) - 5x^4 = 0,\ \Phi_y = 2am(ay - x^2) = 0$$

задовольняються при $x = 0$, $y = 0$. Рівнання дотичних

$$2may Y^2 = 0.$$

Легко можна бачити, що вже другі похідні для цієї точки не всі нулі

$$\Phi''_{xx} = -4may + 12mx^2 = 0,\ \Phi''_{xy} = -4max = 0,$$

але

$$\Phi''_{yy} = 2a^2m \neq 0.$$

Але опріч того тим самим умовам, тобто зверх (2) та (25) вдовольняють ще й ціла низка інших точок, у яких крива дотикається сама себе (Berührungsknoten) — дві вітини кривої мають у спільній точці спільну дотичну. При цьому дві вітини кривої можуть мати різне взаємне розміщення.

На останку можна дати приклад такої кривої, що має дискримінант

$$\Delta = \Phi''^2_{xy} - \Phi''_{xx}\Phi''_{yy} = 0$$

але точка (x, y) буде ізольована: (приклад Тодгентера) крива

$$a^2y^2 = x^4(x^2 - b^2)$$

має точку (O, O) за подвійну, — бо для $x = 0$, $y = 0$

$$\Phi'_x = -bx^5 + 4x^3b^2 = 0,\ \Phi'y = 2a^2y = 0$$

але

$$\Phi''_{yy} = 2a^2 \neq 0,\ \Phi''_{xy} = 0,\ \Phi''_{xx} = -30x^4 + 12x^2b^2.$$

Дискримінант Δ в цій точці знищується.

* Виходить, що коли $\Delta = 0$, не завжди особлива точка є точкою звороту, і треба показати, яким детальнішим дослідом можна встановити наявність того або іншого типу особливої точки.

Хай $\Delta = 0$ в особливій точці (O, O) (випадки $\Delta \gtrless 0$ не викликають сумніву). Дві прямі

$$F''_{xx} X^2 + 2F''_{xy} XY + F''_{yy} Y^2 = 0$$

зливаються і коли її узяти за вісь x-ів рівнання (2) буде

$$y^2 + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \ldots = 0,$$

де $\varphi_k(x, y)$ є сукупність членів виміру k. Підставимо $y = xu$ та поділимо все рівнання на x^2. Маємо

$$(29) \qquad \Phi(x, u) \equiv u^2 + x\varphi_3(1, u) + x^2 \varphi_4(1, u) + \ldots = 0.$$

Рівнання (2) взагалі містить член cx^3, тому $\varphi_3(1, 0) \neq 0$, початок координат є звичайна точка кривої $\Phi(x, u) = 0$, існує таке значіння x як і функція, що задовольняє (29) поблизу початку і головна його частина є

$$x = -\frac{u^2}{\varphi_3(1, 0)}$$

відкіля

$$u = \pm\sqrt{-x\varphi_3(1, 0)}$$

тобто

$$y = \pm x\sqrt{-x\varphi_3(1, 0)}$$

Маємо, очевидячки, точку звороту першого роду.

Але коли випадково член cx^3 є відсутній (цього не може бути в кривих 3-го порядку), то (2) має вигляд:

$$y^2 + (b_3 x^3 y + c_3 xy^2 + d_3 y^3) + (a_4 x^4 + b_4 x^2 y + \ldots) + (a^5, x^5 + \ldots) + \ldots = 0.$$

В цім випадку (29) буде

$$(u^2 + b_3 ux + a_4 x^2) + (a_5 x^3 + b_4 x^2 u + c_3 xu^2) + \ldots = 0.$$

У початку крива $\Phi(x, y) = 0$ має подвійну точку, якщо при тому

$$(30) \qquad u^2 + b_3 ux + a_4 x^2 = 0$$

має корені уявні

$$(\text{тобто } b_3^2 - 4a_4 < 0),$$

то точка $(0, 0)$ є ізольована точка кривої $\Phi(x, u) = 0$, а тому також і на кривій $F(x, y) = 0$ вона буде точка ізольована.

Коли

$$b_3^2 - 4a_4 > 0,$$

рівнання (30) дає

$$u = \alpha x, \; u = \beta x,$$

де α, β — дійсні корені рівнання

$$\left(\frac{u}{x}\right)^2 + b_3\left(\frac{u}{x}\right) = a_4 = 0$$

через це крива

$$F(x, y) = 0$$

має дві вітини, що наближено визначаються параболями

$$y = \alpha x^2, \; y = \beta x^2$$

які містяться по один або по різні боки осі x-ів по тому,

$$\text{чи } a_3^2 > 0 \text{ чи } < 0, --$$

маємо точку самодотику.

Зрештою коли

$$u^2 + b_3 ux + a_4 x^2$$

є повний квадрат тобто

$$b_3^2 - 4a_4 = 0,$$

знову випадок стає сумнівний.

Коли

$$a_3 \neq 0$$

тобто

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_0 \neq 0,$$

крива

$$\Phi(x, u) = 0$$

має в початку точку звороту першого роду

$$u - \alpha x = \pm x\sqrt{mx}$$

відповідно для (2)

$$y = x^2(\alpha \pm \sqrt{mx})$$

дві вітини дотикаються в початку осі x-ів і зупиняються в цій точці. Коли $\alpha \neq 0$, вони лежать поблизу початку з одного боку дотичної —, маємо точку звороту другого роду.

Найпростіший приклад

$$(y - \alpha x^2)^2 = x^5.$$

Коли ж крім цього ще й

$$a_5 = 0,$$

знову випадок стає сумнівний для кривої

$$\Phi(x, u) = 0$$

і його досліджується так само як вищі. Для альґебричної кривої цей рядок операцій неминуче закінчиться.

§ 26. Вплив елементарних особливостей на клясу кривої. (Плюкерові формули)

Ми вже бачили, що клясу кривої можна визначити, як число точок перетину кривої з її першою полярою. Треба при цьому взяти на увагу число точок перетину, що вбирає спільна двом кривим точка, коли вона є особлива в тої або другої, або разом на обох, а саме, коли вона має k — ту кратність на одній (тобто через цю точку проходять k вітин кривої, дійсних або уявних) і l — ту на другій, то така точка еквівалента $l \cdot k$ точкам перетину, бо тут кожна з k вітин першої кривої перетинає кожну

з l вітин другої кривої. Коли при тому криві в цій точці дотикаються, тобто мають спільну отичну, то можна уявити собі, що в такій спільній точці злилися дві точки перетину, а тому до числа точок, що їх вбирає точка перетину, треба додати ще одну.

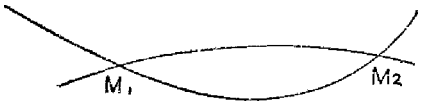


Рис. 29.

Буде дотична кратна, т.т. в ній зливаються дві, або більше дотичних. Тоді треба додавати дві, або більше, одиниць до числа точок перетину.

Застосуймо ці поняття до вирахування кляси кривої. Хай крива має в точці

$$M \equiv (x, y, z)$$

вузлову точку. Візьмемо точку за початок, а дві відповідні дотичні за вісі координат. Рівнання кривої набере форми

$$F(x, y, z) \equiv z^{m-2} xy + z^{m-3} u + \ldots$$

(u — многочлен однорідний 3-го виміру відносно x, y). Тому перша поляра має рівнання

$$X(yz^{m-2} + z^{m-3} u'_x + \ldots) + Y(xz^{m-2} + z^{m-3} u'_y + \ldots) + \\ + Z[xy(m-2) z^{m-3} + (m-3) z^{m-4} u + \ldots]$$

або

$$O = z^{m-2}(Xy + Yx) + z^{m-3}(Xu'_x + Yu'_y + (m-2) xy Z) + \ldots$$

Поляра проходить через початок координат, але має його за звичайну точку. Число точок її перетину з кривою, що вбирає вузлова точка, дорівнює 2. Пряма, що з'єднує довільну точку (X, Y, Z) з вузловою, не є в суті дотична, тому її не треба враховувати коли підраховуємо число дотичних до кривої з точки (X, Y, Z). Отже подвійна точка (вузол, або ізольована) знижує клясу кривої на 2.

Коли початок координат є точка звороту і відповідна дотична є вісь X-ів, рівнання кривої має вигляд

$$O = F(x, y, z) \equiv z^{m-2} x^2 + z^{m-3} u + \ldots,$$

тому перша поляра є

$$O = X(2z^{m-2} x + z^{m-3} u'_x + \ldots) + Y(z^{m-3} u'_y + \ldots) + \\ + Z[(m-2) z^{m-3} x^2 + \ldots].$$

Вище члени відносно z є:

$$2Xxz^{m-2} + z^{m-3}(Xu'_x + Yu'_y + (m-2) x^2 + \ldots$$

Початок є точка звичайна на першій полярі, відповідна дотична зливається з віссю X-ів, тобто з дотичною до заданої кривої в її точці звороту. Тому точка звороту мусить бути зарахована за

$$2 \cdot 1 + 1 = 3$$

точкі перетину, тобто точка звороту знижує число точок пересічі кривої з її першою полярою на 3. Таким способом, коли крива m-го порядку має d подвійних точок і r точок звороту, то її класа

$$n = m(m-1) - 2d - 3r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (45)$$

Гессова крива проходить через особливі точки кривої.

Справді, це видно із її рівнання і в однорідним і в неоднорідним виді. Можна показати, що: в подвійній точці кривої її Гессова крива має також подвійну точку з тими саме дотичними. Для цього, обчислимо для рівнання.

$$F(x, y, z) \equiv z^{m-2} xy + z^{m-3} u + \ldots = 0$$

її Гессову криву, обмеживши вищими відносно z членами, тобто нижчими в x, y:

$$H \equiv \begin{matrix} z^{m-3} u_{11} + \ldots, & z^{m-2} + \ldots & (m-2) z^{m-3} y + \ldots \\ z^{m-2} + \ldots, & z^{m-3} u_{22} + \ldots, & (m-2) z^{m-3} x + \ldots \\ (m-2) z^{m-3} y + \ldots, & & \\ (m-2) z_{m-3} x + \ldots & (m-2)(m-3) z^{m-4} xy. & \end{matrix} \equiv$$

$$\equiv z^{3m-8} xy \left[2(m-2)^2 - (m-2)(m-3) \right] + \ldots$$

$$\equiv z^{3m-8} xy (m-1)(m-2) + \ldots$$

Отже Гессова крива проходить через подвійну точку і має спільні дотичні і тому число відповідних точок перетину є

$$2 \cdot 2 + 2 = 6.$$

Таким способом подвійна точка знижує число точок перетину на 6.

2. На випадок точки звороту 1-го роду кривої

$$F \equiv z^{m-2} x^2 + z^{m-3} u + \ldots$$

$$E \equiv \begin{vmatrix} 2z^{m-3}+\ldots, & z^{m-3}u_{12}\ldots, & 2xz^{m-3}(m-1)+\ldots \\ z^{m-3}u_{12}+\ldots, & z^{m-3}u_{22}+\ldots, & (m-3)\,u_2\,z^{m-4}+\ldots, \\ 2xz^{m-3}(m-2)+\ldots, & & \\ (m-3)\,u_2 z^{m-4}+\ldots, & (m-2)(m-3)\,z^{m-4}x^2+\ldots, & \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv z^{3m-9}\left[2m-2)(m-3)-4(m-y)^2\right]x^2(ax+by)+\ldots$$ [1]

Гессова крива має тут потрійну точку з двома дотичними з числа трьох, що злилися з дотичною в точці звороту. Точка звороту, виходить, еквівалентна

$$2\,.\,3+2=8$$

точкам перетину і через це знижує число точок перегину на 8. Таким способом число i точок перегину кривої з d вузловими і r точками звороту дорівнює

$$i=3m(m-2)-d-8r.$$

При тому звичайно ми виключаємо той випадок, коли Гессова крива зливається з самою кривою, — що можливо для кривої 3-го порядку.

Справді візьмімо криву

$$x^3+y^3+z^3+6m\,xyz=0;$$

її Гессова крива

$$H \equiv \begin{vmatrix} 6x & 6mz & 6my \\ 6mz & 6y & 6mx \\ 6my & 6mx & 6z \end{vmatrix} = 6^3 \begin{vmatrix} x & mz & my \\ mz & y & mx \\ my & mx & z \end{vmatrix}$$

$$\equiv 216\left\{xyz(1+2m^3)-m^2(x^3+y^3+z^3)\right\}=0.$$

або

$$x^3+y^3+z^3-\frac{2m^3+1}{m^2}\,xyz=0.$$

Вона заливається з даною, коли

$$2m^3+1=-6m^3$$

[1]) $u=ax^3+3bx^2y+3axy^2+by^3,\quad u_{22}=6(ax+by).$

$$m = -\frac{1}{2}.$$

Приклади: 1. Крива

$$y^2 - x^3 = 0$$

має особливу точку (0,0) як точку звороту. Гессова крива

$$24xy^2 = 0$$

множник

$$x = 0$$

дає

$$y^2 z = 0,$$

тобто

$$y = 0$$

((0,0) — особлива точка)
або

$$z = 0 —$$

точка перегину на *безконечності*. Тут

$$d = 0, \quad \gamma = 1, \quad i = 3.\ 3.\ 1 - 8 = 1$$

точка перегину одна.

2. Декартів листок

$$x^3 + y^3 - 3axyz = 0.\ (0,0) — \text{вузлова точка.}$$

Гессова крива:

$$-6^3 a^3 xyz = 0.$$

Точки перегину

$$z = 0, \quad x^3 + y^3 = 0$$

дві *уявних*, одна дійсна, усі на безконечно далекій прямій.

Дуальні міркування. Тангенціяльне рівнання кривої.

Криву можна розглядати, не тільки як геометричне місце точок, а через те що вона має в кожній точці дотичну, і як многокутник з безконечно великим числом безконечно-малих боків, до кожного з яких послідовно прилягає рухома пряма.

Взявши рівнання рухомої прямої

$$Y = uX + v$$

матимемо,

$$u = \frac{dy}{dx}, \quad v = y - x\frac{dy}{dx}$$

Із двох рівнань з допомогою рівнання кривої

$$y = f(x)$$

виключимо параметр x, тоді дістанемо рівнання

$$f(u, v) = 0$$

степеня n, коли крива порядку m і класи n. Серед дотичних (—їх δ) цікаві подвійні, що мають дві точки дотику і дотичні звороту, ($\rho = i$) де ці точки зливаються і пряма має дотик 2-го порядку, тобто буде дотичною в точці перегину (дотичною звороту). Міркування й доводи аналогічні з попередніми, дали б

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3\rho$$

$$r = 3n(n-2) - 6\delta - 8\rho.$$

Разом із двома першими, це є повна система Плюкерових формул. При альґебричному розв'язанні й підрахунку треба завжди мати на увазі не лише дійсні точки, а й уявні.

Танґенціяльне рівнання кривої є таке співвідношення поміж коефіцієнтами точкового рівнання прямої, яке визначає, що пряма дотикається кривої. Візьмімо рівнання прямої в однорідній формі

$$ux + vy + wz = 0.$$

Коли x, y, z, змінюються, це є рівнання прямої в однорідних точкових координатах; u, v, w мусять бути задані аж до спільного множника. Навпаки, коли задано x, y, z, рівнання

$$ux + vy + wz = 0$$

є умова того, що пряма (u, v, w) проходить через цю точку (x, y, z), — це є танґенціяльне „рівнання точки".

Дотичну до кривої

$$F(x, y, z) = 0$$

можна записати

$$XF'_x + YF'_y + ZF'_z = 0.$$

Вона зливається з прямою

$$ux + vy + wz = 0$$

коли

$$\sigma . u = F'_x, \ \sigma . v = F'_y, \ \sigma . w = F'_z.$$

Приклад: півкубічна параболя

$$zy^2 - x^3 = 0$$

$$\sigma . u = -3x^2, \ \sigma . v = 2yz, \ \sigma . w = y^2$$

звідсіль

$$x^2 = \left(-\frac{1}{3}\sigma u\right)^{\frac{2}{3}}, \quad yz = \frac{1}{2}\sigma v, \quad y = (\sigma w)^{\frac{1}{2}}$$

За допомогою рівнання кривої

$$\sigma^{\frac{3}{2}}\left(\frac{v\sqrt{w}}{2} - \frac{i^3 u^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}\right) = 0$$

Тобто

$$v^2 w = -\frac{4}{24} u^3.$$

§ 17. Потрійні і взагалі кратні точки.

Коли не лише обидві перші похідні, а й усі три другі похідні для точки кривої

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

разом дорівнюють нулеві, тобто

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0,$$

$$F''_{xx} = 0, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{yy} = 0,$$

то за допомогою рівнання (23) § 11 уже не можна визначати для відповідної точки $\frac{dy}{dx}$. Тоді беремо третю повну похідну

$$F'''_{xxx} + 3F'''_{xxy}y' + 3F'''_{xxy2}y'^2 + F'''_{yyy}y'^3 +$$
$$+ 3\,(F''_{xy} + y'F'_{yy})y'' + F'_y y''' = 0.$$

Завдяки попереднім рівнанням, цей вираз зводиться до рівнання 3-го степення для y'

$$F'''_{xxx} + 3F'''_{xxy}y' + 3F'''_{xyy}y'^2 + F'''_{yyy}y'^3 = 0 \tag{27}$$

яке може визначати напрям 3-х дотичних у такій точці; вона зветься потрійною точкою, коли не всі три треті похідні є нулі. У рівнання 3-го степеня з реальними коефіцієнтами завжди один з коренів буде дійсний. Можуть трапитися випадки: 1) всі три корені дійсні й різні; приклад

$$x^4 = (x^2 - y^2)\,y$$

(Чезаро, т. 2, ст. 113); 2) два корені зливаються; приклад — прямий дволисник:

$$(x^2 + y^2)^2 - axy^2 = 0,$$

3) всі корені рівні; приклад цисоїда параболі

$$(x^2+y^2)y^2-2px^3=0,$$

4) два корені уявні, — приклад

$$y^3+3x^2y+x^5=0,$$

точка (0,0) є ізольована точка, що припадає на саму криву. Рівнання (27) призводить до

$$y'^3+3y'=0.$$

Але, звичайно, кожна з цих точок може утворювати різні типи, подібно до того, як це показано для подвійних точок (порівняй: Плюккер — Theorie der algebraischen Kurven).

Коли для особливої точки всі треті похідні дорівнюють нулеві, а четверті не всі нулі, то маємо четверну точку і взагалі, коли для точки кривої стають нулями всі похідні порядків $(m-1)$ і нижче, а похідні m-го порядку не всі нулі, то маємо m-кратну точку. В ній крива має m дотичних, деякі з них можуть і зливатися. Так, чотирилисний вінчик

$$(x^2+y^2)^3-4ax^2y^2=0$$

має в початку координат четвірну точку; також

$$x^5+y^5-5ax^2y^2=0.$$

В зв'язку з цим виникає питання про число подвійних точок, яким ця вища особливість еквівалентна. Так, коли всі три дотичні злилися, то маємо Spitz punkt, або точку затуплення. В такій точці кривої зливаються дві точки звороту і одна вузлова точка. Коли всі дотичні k — кратної точки різні, то вона еквівалентна

$$\frac{k(k-1}{2}$$

подвійним точкам.

§ 18. Поняття про рід кривої (дефект).

Число особливих точок кривої m-го порядку не може перевищувати певної границі, власне

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} \tag{28}$$

точку більше, напр.

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}+1$$

то через ці точки і ще через $m-3$ інших довільно взятих, точок на кривій,—разом

$$\frac{(m-2)(m+1)}{2}$$

можна було б провести криву порядку $m-2$ (бо це вимагає виконання власне

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

умов), яка мала б, виходить, з даною кривою

$$(m-1)(m-2)+2+m-3=m(m-2)+1$$

спільних точок. Але дві криві порядку m і $m-2$, що не розпадаються, можуть мати лише $m(m-2)$ спільних точок, коли вони не зливаються. Виходить, що (28) є максимальне число особливих точок, що їх може мати крива m-го порядку. Різниця між цим найбільшим числом і між числом точок, що справді існують на кривій, зветься дефектом (Cayley) або родом (Clebsch etc.) кривої:

$$p=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-d-r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (29)$$

Число це є інваріянтне при цілій низці перетворень: проєктивному, кремоновому, дуальному і т. і.

Для кривої 2-го порядку $m=2$, тому $p=0$; для кривої 3-го порядку $m=3$, тому

$$p=1-d-r.$$

Крива 3-го порядку має рід 0, коли $d=1$, або $r=1$ і $p=1$ коли $d=0=r$. В першому випадку

$$n=3.2-2=4,$$

в другому

$$n=3.2-3=3,$$

в третьому

$$n=3.2=6.$$

Із формул

$$m=n(n-1)-2\delta-3\rho$$

знаючи m, n та ρ ми обчислимо відповідне значення для δ.

Для порівнання маємо ось яку таблицю можливих випадків для $m = 3$.

d	r	n	$\rho = i$	δ	p
1	0	4	3	0	0
0	1	3	1	0	0
0	0	6	9	0	1

§ 19. Унікурсальні криві.

Таким способом крива 3-го порядку може бути або роду 0 або 1.

Коли вона має особливу точку (більше за одну вона їх мати не може), то $p = 0$. Тоді координати її можна визначити, як раціональні функції її параметра. Справді, нехай (0,0) є особлива точка. В рівнанні кривої мусять бути відсутні члени 0-го й 1-го степеня; воно мусить бути

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3 + b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2 = 0.$$

Припустімо, що $y = xt$ і поділимо все рівнання на x^2. Звідкіль

$$x = -\frac{b_0 + 2b_1 t + b_2 + t^2}{a_0 + 3a_1 t + 3a_2 t^2 + a_3 t^3}$$

$$y = -\frac{(b_0 + 2b_1 t + b_2 t^2)t}{a_0 + 3a_1 t + 3a_2 t^2 + a_3 t^3}.$$

Крива 3-го порядку з особливою точкою є крива унікурсальна. Цікаво подивитися, що буде в загальному випадку. Виходить справді, що криві роду 0 унікурсальні і навпаки, коли x, y визначається раціонально через t, то крива має рід 0. Підемо слідом за A. Clebsch'ом саме за його Über diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind (Crelle B. 64, s. 43—65).

Хай криву в однорідних координатах визначено в параметричній формі рівнаннями

$$x_i = f_i(\lambda, \mu) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

де f_i однорідні, цілі, порядку m функції однорідних змінних λ, μ, що не мають спільного множника (і нехай не можна вибрати двох цілих раціональних і однорідних функцій від λ, μ так, щоб відбулося зниження порядку).

Кожній точці x нехай відповідає взагалі одне значення λ/μ. Ми можемо стверджувати: 1) Ця крива є порядку m; справді, вона зустрічає довільну пряму

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

в m точках, відповідно до яких значення λ/μ визначаються рівнанням

$$u_1 f_1(\lambda, \mu) + u_2 f_2(\lambda, \mu) + u_3 f_3(\lambda, \mu) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

2) Умовою того, щоб пряма (31) дотикалася кривої (30) є умова, щоб (32) мало подвійний корень і щоб дискримінант (32) дорівнював 0.

Цей дискримінант ми дістанемо, якщо виключимо λ/μ із рівнань

$$u_1 \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} + u_2 \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} + u_3 \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} = 0, \; u_1 \frac{\partial f_1}{\partial \mu} + u_2 \frac{\partial f_2}{\partial \mu} + u_3 \frac{\partial f_3}{\partial \mu} = 0 \quad (33)$$

степенів $(m-1)$-го відносно λ/μ і першого відносно u_i. Звідсіль, за відомою теоремою, дискримінант відносно u_i є степеня

$$1 \,.\, (m-1) + 1 \,.\, (m-1) = 2(m-1).$$

Отож крива (30) взагалі кляси $2(m-1)$, що показує на зниження кляси на $(m-1) \,.\, (m-2)$, тобто рід кривої $p = 0$.

§ 20. Особливі точки за параметричної форми рівнання кривої.

Досі ми припускали, що рівнання кривої задане в формі

$$F(X, Y) = 0.$$

Коли криву задано рівнаннями в параметричній формі, то її особливі точки можна знайти двома засобами.

1) Точка звороту. Кутовий коефицієнт дотичної набуває невизначеної форми:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{0}{0} \left(\text{або } \frac{\infty}{\infty} \right).$$

Приклад:

Цисоїда

$$x = 2a \sin^2 t, \; y = 2a \frac{\sin^3 t}{\cos t}$$

$$x' = 4a \sin t \,.\, \cos t, \; y' = 2a \frac{\sin^2 t(1 + 2\cos^2 t)}{\cos^2 t}.$$

Умови

$$x' = 0, \; y' = 0$$

задовольняються коли $t = 0$.

При тому

$$\frac{y'}{x'} = \frac{1}{2} \frac{\sin t(1 + 2\cos^2 t)}{\cos^3 t}$$

має значіння $= 0$.

Маємо точку звороту першого роду.

Приклад:

2) Кардіоїда

$$x = 2a \cos^2 t - 2a \cos t$$

$$y = 2a \sin t \cos t - 2a \sin t.$$

Маємо

$$x' = -2 \sin 2t + 2a \sin t, \; y' = 2a \cos 2t - 2a \cos t.$$

Мусить бути

$$\sin t = 0, \; \cos 2t - \cos t = 0,$$

тобто

$$t = 0.$$

Тоді

$$x = 0, \; y = 0 -$$

точка звороту.

2) Подвійна точка, як перетин двох різних вітин, нічим не відрізняється на кожній вітині від звичайної точки, але при двох різних значеннях параметра можна мати однакові значення координат.

Приклад:

1. $$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \; y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

Точку

$$x = 0, \; y = 0$$

дістанемо:

$$\text{a) при } t = 0, \; \text{b) при } t = \infty,$$

цьому відповідає і двоє значень

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t - t^4}{1 - 2t^3}.$$

Власне

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_\infty = \infty \text{ (але } \left(\frac{dx}{dy}\right) = 1)$$

Приклад: 2. Строфоїда

$$x = \frac{2at^2}{1 + t^2}, \; y = \frac{at - at^5}{1 + t^2}.$$

Особливу точку $(-a, 0)$ маємо при двох значеннях параметра

$$t = \pm 1.$$

Справді

$$y = 0 \text{ при } t = 0, \; t^2 = 1.$$

Перше дає $x = 0$, а другі одинаково $x = -a$.

§ 21. Особливі точки трансцендентних кривих.

Коли ми звернемося до трансцендентних кривих, то ми в них також зустрінемо такі самі особливості, як і в альґебричних кривих, але цих особливостей може бути безконечне число.

Приклад:

1. Циклоїда

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t).$$

Умови:

$$y' = 0, \; x' = 0$$

дають

$$a \sin t = 0, \; a(1 - \cos t) = 0$$

обоє ці рівнання справджуються при

$$t = 2k\pi (k = 0 \pm 1 \pm 2, \ldots)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$$

стає ∞, але

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$$

для значіння $t = 2k\pi$ стає 0.

Відтинок, що відрізає дотична на вісі x-ів.

$$x - y\frac{dx}{dy} = a(t - \sin t - (1 - \cos t)\operatorname{tg} {}^t/_2) = a\left(t - 2\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right).$$

При $t = 2k\pi$ дорівнює $2k\pi a$.

Отже точки $(2k\pi a, 0)$ є точки звороту, що мають за дотичні прямі $x = 2k\pi a$.

Приклад: 2. Безконечно велике число особливих точок — подвійних, вузлів має епіциклоїда, коли n — відношення радіюсів — є число іраціональне.

Приклад: 3. Крива

$$y^2 - x\sin^2 x = 0$$

має в кожній точці $(k\pi, 0)$ особливу точку, причому для k цілого і відємного ізольовану, при $k = 0$ точку звороту, для k цілого й додатнього — вузол. Справді рівнання

$$f'_x = -\sin x(\sin x + 2x\cos x) = 0,\ f'_y = 2y = 0$$

задовольняються для цих точок:

$$f''_{xx} = (-2\sin^2 x - 2x\cos 2x)_{x=k\pi} = -2k\pi,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{yy} = 2,$$

тобто $$2y'^2 = 2k\pi,\ y' \pm \sqrt{k\pi}.$$

Також кратність особливої точки, т.т. число дотичних у ній до кривої може бути безконечно велике.

Приклад (Mangoldt). Початок координат буде особливою точкою для кривої

$$x = \cos(\alpha + 1)t - \cos t,\ y = \sin(\alpha + 1)t - \sin t$$

при α дійсному і іраціональному; справді

$$x = 0,\ y = 0$$

при

$$t = 0, \pm\frac{2\pi}{\alpha}, \pm 2\frac{2\pi}{\alpha}, \pm \ldots k\frac{2\pi}{\alpha}, \ldots$$

Кожному з цих значень відповідає своє значення кутового коефіцієнта дотичної

$$\frac{dy}{dx} = \pm\cos\frac{\alpha + 1}{\alpha} \cdot 2k\pi.$$

З рештою у трансцендентних кривих з'являються особливості, до яких немає подібних в альґебричних кривих. Такими будуть:

1) Точка зупинки (point d'arrêt): вітина кривої в такій точці закінчується, і досить мале коло, описане з точки, як з центру, зустрічає криву лише в одній точці. Такою точкою буде (0, 0) для кривої

$$y = e^{-\frac{1}{x}} \text{ або } y = \frac{1}{\log x}$$

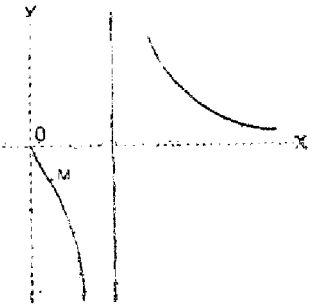


Рис. 30.

Цей гарний приклад point d'arrêt (точки зупинки) подано в курсі Ch. Sturm'a т. 1 ст. 283, 1857 р.; при

$$x = 1, \ \log x = 0$$

виходить $y = \infty$ при тому $\pm\infty$;

$$y' = -\frac{1}{x(\lg x)^2}, \ y'' = -\frac{2 + \lg x}{x^2(\lg x)^3}$$

Звідсіль

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{y}\right) = \lim_{x \to 1} (x \lg x) = 0, \quad y'' = 0$$

при

$$\lg x = -2,$$

тобто

$$x = e^{-2} = 0{,}1354\ldots$$

Початок (0, 0) належить кривій, якої вітина тут закінчується.

Вона має в точці $M = \left(e^{-2}, -\frac{1}{2}\right)$

точку перегину.

2) Точка зламу (point saillant): дотичних у точці дві, але це не вузол — функція $f(x)$ в рівнанні

$$y = f(x)$$

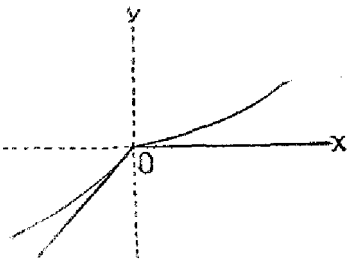


Рис. 31

така, що її ліва і права похідні —

$$\lim_{h \to \pm 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

різні при h від'ємному та при h додатньому.

Приклад:

1. $$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

коли додати умову $f(0)=0$, то

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}$$

при h від'ємному і такому, що йде до 0,

$$\lim_{h\to -0} e^{\frac{1}{h}}=0,\quad \lim_{-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}=1$$

при додатньому і такому, що наближається до 0

$$\lim_{h\to +0} e^{\frac{1}{h}}=\infty,\quad \lim_{+3}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}=0$$

$$y=x\operatorname{arc}tg\frac{1}{x},\ f(0)=0.$$

Приклад. 2.

Тоді,

$$f(h)=h\operatorname{arc}tg\frac{1}{h},\ \frac{f(h)-f(0)}{h}=\operatorname{arc}tg\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\lim_{-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\pi}{2}$$

3. Точка раздвоєння. (Винайшов її сліпий фізик Плято). Вітина кривої, дійшовши до цієї точки, надалі роздвоюється. Ми матимемо приклад такої точки, коли візьмемо рівнання кривої, що має в (0, 0) вузол; напр. Декартів листок, і кривої з точкою зупинки, напр.

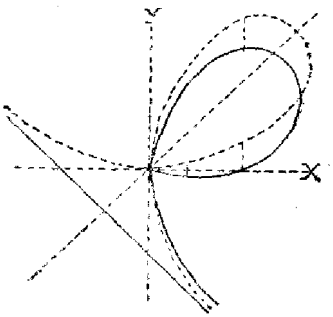


Рис. 32.

$$y=e^{-\frac{1}{x}}.$$

Збудуємо криву, якої ордината дорівнювала б різниці ординат цих кривих. Отже з

$$x^3+y^3-3axy=0\ \text{ і }\ y=e^{-\frac{1}{x}}$$

матимемо криву

$$x^3+\left(y+e^{-\frac{1}{x}}\right)^3+3ax\left(y+e^{-\frac{1}{x}}\right)=0.$$

§ 22. Довжина дуги плоскої кривої. Елемент дуги.

Інтуїтивне поняття про довжину дуги кривої можна мати, коли уявити собі гнучку, не розтяжну нитку, яка набула форми якоїсь кривої лінії. Якщо натягти цю нитку, матимемо пряму, довжина якої і є довжина кривої. Тому — і взагалі — визначення довжини дуги зветься її спрямленням (ректифікація). Визначення довжини дуги кривих вимагає завести поняття про інтеґралю і тому стосується до інтеґрального числення. Тут треба дати лише уявлення про нього.

Хай AB (рис. 33) дуга кривої

$$y = f(x) \qquad (1)$$

на якій немає особливих точок і точок перегину, і яка має в кожній точці визначену дотичну. Провівши на кінцях дуги дотичні, матимемо ламану лінію AEB, а сполучивши кінці дуги прямою — хорду AB. Очевидно, що

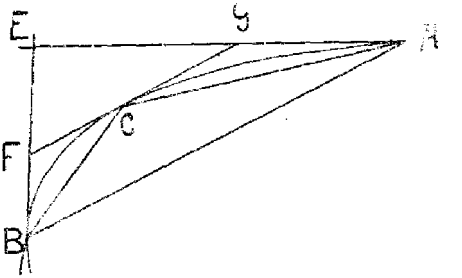


Рис. 33.

$$AE + EB > AB.$$

Візьмімо проміж A і B на дузі точку C і сполучімо її прямими з A та B. Тоді ламана ABC більша за пряму AB, але, як обведена, менша від ламаної AEB, тобто

$$AB < AC + CB < AE + EB,$$

Поділяючи знову дуги AC та BC і точки поділу сполучаючи з A і C, з C і B, дістанемо нову ламану, якої периметр буде більший за периметр попередньої ламаної і менший за

$$AE + EB.$$

Продовжуючи цю операцію далі і вимірюючи щоразу периметри ламаних, ми дістанемо безконечний ряд додатніх чисел:

$$s_0 = AB,\ s_1 = AC + CB, \ldots$$

при тому висхідних, тобто

$$s_0 < s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$$

але всі вони залишаються менші від певного сталого числа, міри

$$AE + FB$$

і другий ряд додатніх чисел

$$S_0 > S_1 > S_2 > S_3 > \ldots.$$

спадних, але всі вони більші за AB і $S_i - s_i$

де

$$S_0 = BE + EA, S_1 = BF + FG + GA \text{ і т. д.}$$

прямує до нуля. Ці ряди мусять мати спільну границю, яка зветься **довжиною дуги** AB. Остання є при цьому границею вписаного многокутника, число боків якого безконечно зростає, і кожний бік безконечно зменшується:

$$s = \lim \Sigma \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

якщо зазначити через (x_i, y_i) і (x_{i+1}, y_{i+1})

координати двох сусідніх точок поділу. Цей вираз можна переписати, позначивши

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i.$$

Довжина дуги

$$\sum \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

що пишемо

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

коли ця границя існує. Коли крива в кожній своїй точці має дотичну, довжина дуги завжди існує.

Окремий бік ламаної, окремий доданок цієї суми і зветься елементом дуги і позначається через ds. Коли взяти до уваги, що кінці цієї безконечно малої хорди мають координати, що відрізняються від x, y на dx і dy, то

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{34}$$

Якщо взяти початок A дуги визначений, а кінець B змінювати, то буде змінюватися і довжина дуги

$$s = \Phi(x), \tag{35}$$

Виходить, що навпаки x, а звідціль з рівнання кривої і y можна розглядати, як функції довжини дуги s:

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s).$$

Такий вибір допоміжного незалежного змінного іноді буває досить корисний.

Щож до самого визначення виду функції $\Phi(x)$ залежне від (1), то це належить до інтеґрального числення. Тут досить сказати, що через (34) і тому, що за означенням похідна від інтеґралі є підінтеґральна функція, $\Phi(x)$ є такою, що:

$$\Phi'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (36).$$

За допомогою цієї останньої формули можна вирішити питання, що має значення при обчисленні довжини некрутих дуг (особливо в геодезії), порівн. § 24.

§ 23. Елемент дуги в полярних координатах.

Коли криву задано рівнанням у полярних координатах, маємо

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NM'}^2$$

Але

$$\overline{MN} = r \sin \Delta\theta_1 = r\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{1 \cdot 2} + \ldots\right).$$

$$\overline{M'N} = \overline{M'O} - \overline{ON} = r + \Delta r - r \cos \Delta\theta$$

$$= \Delta r + r(1 - \cos \Delta\theta) = \Delta\theta + 2r \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2}.$$

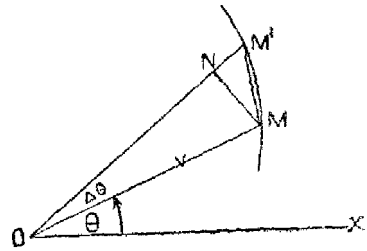


Рис. 34.

$$MN = r\left(\Delta\theta - \frac{1}{6}\Delta\theta^3 + \ldots\right).$$

Отже

$$\overline{M'M}^2 = r^2 \Delta\theta^2 \left(1 - \frac{1}{2!}\Delta\theta^2\right) + \left(\Delta r + 2r \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2}\right)^2$$

тому головна частина цього виразу, тобто

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2,$$

якщо зразу ж написати dr і $d\theta$ замість Δr і $\Delta\theta$. До того самого результату прийдемо і заміною змінних: поклавши

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

матимемо

$$dx = -r\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dr$$

$$dy = r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr$$

звідкіль

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = r^2\, d\theta^2 + dr^2.$$

§ 24. Різниця проміж дугою та хордою для конечних дуг.

Коли x абциса початку дуги, $x + \Delta x$ — абсциса кінця, то довжина дуги

$$s = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)$$

а хорда

$$AB = l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$= \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Але за Тейлоровим рядом

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \Phi'(x)\Delta x + \frac{1}{2}\Phi''(x)\Delta x^2 + \frac{1}{6}\Phi'''(x)\Delta x^3 + \ldots$$

(ми обмежуємося 3-м степенем), де

$$\Phi'(x) = \sqrt{1 + y'^2},\ \Phi''(x) = \frac{y'y''}{\sqrt{1 + y'^2}},\ \Phi'''(x) = \frac{y''^2 + y'y'''(1 + y'^2)}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

З другого боку

$$\Delta y = y'\Delta x + \frac{1}{2}y''\Delta x^2 + \frac{1}{6}y'''\Delta x^3 + \ldots$$

тому

$$l = \Delta x \sqrt{1 + \left(y' + \frac{1}{2}y''\Delta x + \frac{1}{6}y'''\Delta x^2 + \ldots\right)^2}$$

в розгортанні ми теж обмежилися 3-м степенем; виносячи

$$\sqrt{1 + y'^2}$$

спільним множником, маємо

$$l = \Delta x\sqrt{1 + y'^2}\left[1 + \frac{y'y''}{1 + y'^2}\Delta x + \frac{1}{12}\left(\frac{4y'y''' + 3y''^2}{1 + y'^2}\right)\Delta x^2 + \ldots\right]^{1/2}.$$

Вираз у дужках матиме тепер вид

$$(1+z)^{1/2}$$

і до нього можна застосувати розгортання в степеневий ряд за формулою бінома

$$l=\Delta x\sqrt{1+y'^2}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{y'y''}{1+y'^2}+\frac{1}{12}\frac{4y'y'''+3y''^2}{1+y'^2}\right)\Delta x\Delta x-\right.$$

$$-\frac{1}{8}\frac{y'^2y''^2}{(1+y')}\Delta x^2$$

В цьому розгортанні ми взяли в дужках лише члени степенів 1-го та 2-го відносно Δx, решта ж членів, що сюди не вписано, мають члени з Δx^3, Δx^4

і т. д. і тому їх можна випустити.

Отже

$$l=\Delta x\sqrt{1+y'^2}+\frac{1}{2}\Delta x^2\frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}+\Delta x^3\left(\frac{1}{24}\frac{4y'y'''+3y''^2}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{y'^2y''^2}{8\sqrt{(1+y'^2)^3}}\right)$$

з точністю до безконечно малих 3-го порядку включно.

Взявши різницю, матимемо після злуки членів

$$\Delta s-l=\frac{1}{24}\frac{y''^2}{(1+y'^2)^{3/2}}\Delta x^3.$$

Цю формулу можна переписати, помноживши чисельника й знаменника на

$$(1+y'^2)^{3/2};$$

зваживши на те, що

$$\Delta x\sqrt{1+y'^2}$$

можна взяти за головну частину Δs, тобто за ds, дістанемо:

$$\Delta s-l=\frac{1}{24}\cdot\frac{y''^2}{(1+y'^2)^3}ds^3.$$

Множником при

$$\frac{1}{24}ds^3$$

стоїть квадрат виразу

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

який, як побачимо далі, зветься мірою кривини і зазначається

$$\frac{1}{R}\ (R — \text{радіюс кривини}).$$

Отож різниця між дугою й хордою

$$= \frac{1}{24} \cdot \frac{ds^3}{R^3}$$

Ця формула показує, що замінювати дугу хордою ми мали то більше права, що менша міра кривини, т.т. що менш крута буде дуга — бо головна частина припущеної помилки, яку ми обчислили, зворотньо пропорційна квадратові радіюса кривини.

§ 25. Кривина кривої. Радіюс кривини.

Із кіл, що дотикаються в одній і тій самій точці до якоїсь прямої, те коло найдужче прилягає до прямої, яке має найбільший радіюс і що радіюс менший, то дужчий відхил.

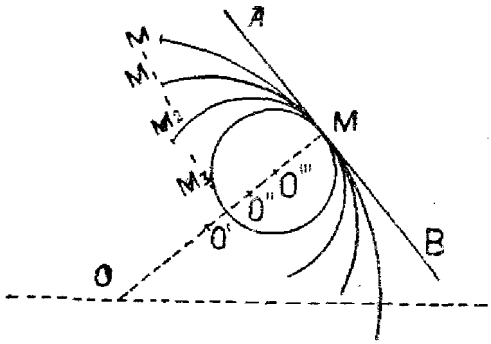


Рис. 35.

Тому можна взяти за міру кривини дуги кола величину зворотню до його радіюса. Одначе, такого визначення не можна поширити на інші криві, що не мають взагалі нічого схожого з радіюсом кола. Можна, безперечно, взяти невеличку дугу кривої і на ній три точки A, B, C, провести через них дугу кола і радіюсом цього кола можна, до деякої міри, характеризувати криву. Але, коли зближати точки A, B і C, то радіюс буде змінюватися, і тоді граничне його значіння, коли A, B і C зливаються, й можна вважати за характеристичну для кривини кривої величину.

Зручніше, однак, цей перехід до границі зробити не вживаючи початкового кола, що проходить через три точки кривої. Звернімось до рис. 35 і на різних колах від точки M відкладімо однакової довжини дугу

$$S = \smile MM' = \smile MM'_1 = \smile MM'_2.$$

Коли α, α', α'',... центральні кути, що стягаються цими дугами і r, r', r'',... відповідні радіюси, то

$$S = \alpha r = \alpha' r' = \alpha'' r' =$$

що

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\alpha}{S}, \frac{1}{\nu'}, \frac{\alpha'}{S}, \frac{1}{\nu''} = \frac{\alpha''}{S},$$

т.т. за міру кривини в колі можна взяти відношення до дуги того центрального кута, який ця дуга стягає. Помітивши, крім того, що цей кут дорівнює кутові між дотичними до кола на кінцях дуги, можна взяти за міру кривини дуги кола також відношення кута проміж дотичними в її кінцях до її довжини. Таке визначення можна безпосередньо застосувати до будь-якої кривої, що має дотичну, зваживши лише при цьому на те, що при зміні величини дуги в колі це відношення стале (воно постійно зворотне до радіюса). Але в усякої дуги кривої, що відрізняється *від кола, це відношення* буде змінюватися зі зміною величини дуги і її положення на кривій. Тому відношення $\frac{E}{\smile AB}$ (рис. 36) будемо звати середньою мірою кривини дуги кривої AB, а границю, до якої йде це відношення, коли B йде до A, справжньою мірою кривини (або просто мірою кривини) кривої в точці A. Кут E між дотичними в точках A і B зветься кутом суміжности.

Отже мірою кривини кривої в точці A зветься границя відношення кута суміжности до дуги кривої, що прилягає до цієї точки і яка відповідає цій точці.

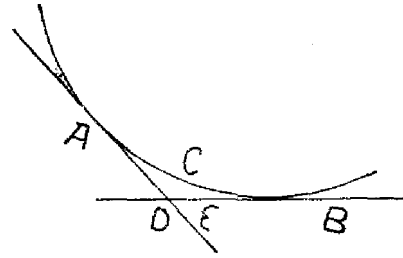


Рис. 36.

Величина зворотна до міри кривини зветься радіюсом кривини. Далі ми побачимо, що це справді є радіюс кола, що проходить через три безконечно *близькі точки кривої. Щоб знайти аналітичний вираз* міри й радіюса кривини кривої, зауважимо, що кут суміжности $d\alpha$ — диференціял кута дотичної з осею X-ів і через це кривина

$$K = \frac{d\alpha}{ds}, \text{ а } R = \frac{ds}{d\alpha} \qquad ds = R\,d\alpha$$

але

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} y',$$

отже

$$d\alpha = d \operatorname{ar\,tg} y' = \frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{y''\,dx}{1+y'^2}$$

тому

$$R = \sqrt{1+y'^2}\,dx : \frac{y''\,dx}{1+y'^2} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Доведімо, що дві сусідні нормалі перетинаються в точці C, якої віддаль від точки кривої дорівнює радіюсові кривини. Справді, нормаля, безконечно близька до

$$y'(Y-y)+(X-x)=0,$$

є

$$(y'+y''\,dx)(Y-y-y'\,dx)+(X-x-dx)=0.$$

Точка їх пересічі визначиться 1-м рівнанням і рівнанням

$$y''(Y-y)+(1+y'^2)=0 \qquad Y-y=\frac{1+y'^2}{y''}$$

і тому за 1-м

$$X-x=-y'\,\frac{1+y'^2}{y''}$$

З рештою

$$R^2=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}=\pm\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Точка C називається центром кривини. Вона лежить на внутрішній нормалі. Подвійний знак відповідає двом напрямам нормалі. Умовмося вважати за додатній напрям нормалі, той напрям, що матимемо з додатнього напряму дотичної після повертання її на прямий кут у додатньому напрямі. Коли радіюс кривини відкладається в додатньому напрямі нормалі, то він додатній, коли у від'ємному, то — від'ємний.

§ 26. Формула радіюса кривини в параметричній формі та в полярних координатах.

За параметричної форми рівнання кривої

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{y'}{x'},$$

тому

$$d\alpha = \frac{x'y''-y'x''}{x'^2+y'^2},$$

отже

$$R = \pm \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}.$$

Зокрема, коли за незалежне змінне взяти дугу

$$x'^2 + y'^2 = 1,\ x'x'' + y'y'' = 0,$$

$$(x'y'' - y'x'')^2 = (x'^2 + y'^3)(x''^2 + y''^2) - (x'x'' + y'y'')^2 = (x''^2 + y''^2),$$

виходить, що в цьому випадку

$$\frac{1}{R} = \pm \sqrt{x''^2 + y''^2}.$$

Вираз для радіюса кривини в полярних координатах.

Коли криву задано рівнанням у полярних координатах (r, θ), то кут суміжности дорівнює приростові кута дотичної з полярною віссю, а цей останній дорівнює сумі $\theta + \phi$.

де $\phi = \operatorname{arctg} \frac{r}{r'}$ (див. § 6).

Отже

$$E = d\alpha = d\theta + d\phi$$

$$\text{і} \quad R = \frac{ds}{d\theta + d\phi}$$

але

$$ds = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2},$$

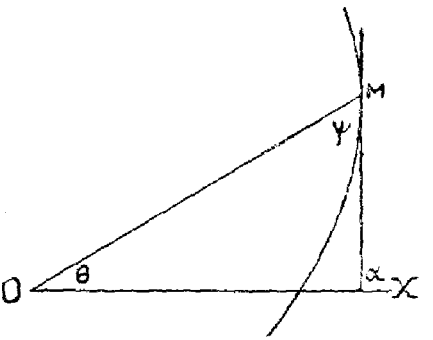


Рис. 37.

$$d\theta + d\phi = d\theta + d \operatorname{arctg} \frac{r}{r'} =$$

$$= d\theta \left(1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right) = d\theta \left(\frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right)$$

Отже

$$R = \pm \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$$

§ 27. А. Приклади. Застосовання до кривих 2-го порядку.

1. Еліпса. Візмімо рівнання в параметричній формі

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Тоді

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t$$

$$x'y'' - y'x'' = ab. \quad R = \frac{1}{ab}(b^2 + (a^2 - b^2) \sin t)^{\frac{3}{2}}.$$

Найбільше його значення буде при $t=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$$R_1=\frac{a^2}{b}$$

в двох вершинах-кінцях малої осі, найменше при $t=0, \pi$:

$$R_2=\frac{b^2}{a}$$

в двох вершинах-кінцях великої осі. Можна дати для цих точок просту побудову. У вершинах (рис. 38) A, B, A', B' проведімо дотичні, що утворять прямокутник $EFHG$. На його діягоналю GF, що не проходить через E, спускаємо з E перпендикуляр, що перетне осі еліпси в точках C_1 і C_2, які й дають шукані радіюси. Справді, з подібности $\Delta C_1EA \infty \Delta EGF$:

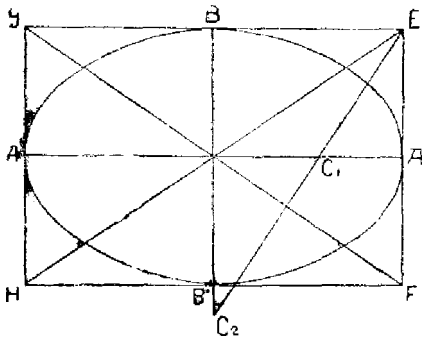


Рис. 38.

$$\frac{C_1A}{b}=\frac{2b}{2a} \therefore C_1B=\frac{b^2}{a}=p=R_2$$

$\Delta C_2BE \sim \Delta EGF$:

$$\frac{C_2B}{a}=\frac{2a}{2b} \therefore C_2B=\frac{a^2}{b}=R_1.$$

Порівнявши знайдений для R елипси вираз із найденим у § 5 прик. 3, виразом для нормалі N, маємо

$$R=\frac{a^2N^3}{b^4}=\frac{N^3}{p^2}$$

2 Можна помітити, що ця остання властивість належить усім конічним січенням.

Справді, взявши рівнання конічного січення в формі

$$y^2=2px+qx^2$$

$\left(\text{для еліпси } q=-\frac{p}{a}, \text{ для гіперболі } q=+\frac{p}{a}\right)$ маємо:

$$yy'=p+qx,\ yy''+y'^2=q. \quad y^2(yy''+y'^2)-(yy')^2=-p^2=y^3y''$$

Але

$$N^2=y^2(1+y'^2)$$

і виходить, що

$$N^3=y^3(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

тому,

$$R = \frac{N^2}{p^2}$$

3) В полярних координатах фігурує кут ψ (див. § 6)

$$\operatorname{cotg}\psi = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\log r}{d\theta}$$

Коли рівнання конічного січення взяти

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \text{ то } \operatorname{cotg}\psi = \frac{e\sin\theta}{1 + e\cos\theta} = \frac{re\sin\theta}{p} = \frac{y\sqrt{1+q}}{p}$$

(бо y для двох систем координат з початком в A і B F однакове). Зваживши ж на те, що

$$y^2y'^2 = (p + qx)^2 = p^2 + q(2px + qx^2) = p^2 + qy^2$$

маємо

$$N^2 = p^2 + (q+1)y^2 = p^2(1 + \operatorname{cotg}^2\psi) = \frac{p^2}{\sin^2\psi} \text{ і } N = \frac{p}{\sin\psi}$$

тому

$$R = \frac{p}{\sin^3\psi}$$

або

$$R = \frac{N}{\sin^2\psi}$$

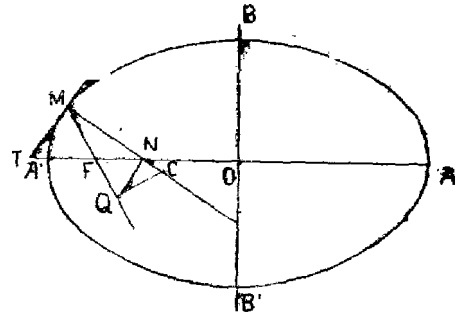


Рис. 39.

Звідсіль, якщо знаємо фокус конічного січення, можна збудувати радіюс кривини. Коли N — точка зустрічі з OX нормалі в M (рис. 39), F — фокус, то

$$\angle NMF = \frac{\pi}{2} - \psi.$$

Проводимо $NQ \parallel MT$ дотичній до зустрічі в Q з MF і $QC \perp MF$ до зустрічі (Рис. 39) з нормалею.

$$MQ = \frac{MN}{\sin NMQ} = \frac{N}{\sin\psi}, \quad QC = \frac{MQ}{\sin\psi} = \frac{N}{\sin^2\psi} = R.$$

§ 28. Продовження прикладів. Поняття про внутрішнє рівнання кривої.

1) Ланцюгова або провисна лінія

$$y = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

Тут

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$1 + y'^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2, \quad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Звідсіль

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$$

і тому

$$s = a\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{x}{a}}\right) + C.$$

Додаткова стала $C = 0$, коли взяти за початок дуг точку з меншою ординатою, тобто вершину $x = 0$, $y = a$, але

$$R = \frac{1}{4} a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$$

Порівнюючи з виразом для S, маємо

$$R = a + \frac{s^2}{a}.$$

Подібні співвідношення між радіюсом кривини дуги кривої, є незалежні від вибору системи координат і назву внутрішнього рівнання кривої або

équation intrinséque або natürlche Gleichung

Lezioni di geometria intrinseca

Vorlesungen üb. natürliche Geometrie]

Подамо декілька прикладів.

2) Циклоїда

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t).$$

Складемо

$$x'^2 + y'^2 = a^2[(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t] = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$x'y'' - y'x'' = a^2[(1 - \cos t)\cos t - \sin^2 t)] =$$

$$= -a^2(1 - \cos t) = -2a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

Отже

$$R = \frac{\left(2a \sin \frac{t}{2}\right)^3}{2a^2 \sin^2 t} = 4a \sin \frac{t}{2}$$

Звідсіль побудова радіюса кривини: сполучивши точку M (рис. 17) циклоїди з точкою дотику N кола, що котиться, з осею катіння OX, маємо

$$MN = 2a \sin \frac{t}{2} \therefore R = \overline{MN}.$$

Далі з

$$ds = -2a \sin \frac{t}{2} dt$$

виводимо

$$s = -4a \cos \frac{t}{2} + C.$$

Коли за початок дуг візьмемо вищу точку циклоїди, виходить ($C = 0$), що між дугою і радіюсом кривини точки циклоїди існує співвідношення

$$s^2 + R^2 = 16a^2.$$

3) Епіциклоїда;

$x = (n+1)a \cos t - a \cos (n+1)t$, $y = (n+1)a \sin t - a \sin (n+1)t$, де a — радіюс того кола, що котиться, na — того, що не котиться; знаходимо

$$x'^2 + y'^2 = 4(n+1)^2 a^2 \sin^2 \frac{nt}{2},$$

$$x'y'' - y'x'' = 2(n+1)^2(n+2)a^2 \sin^2 \frac{nt}{2}.$$

Звідціль, вибираючи початок дуг так, щоб при $t = 0$ і $s = 0$ маємо

$$s = \frac{8(n+1)}{n} a \sin^2 \frac{nt}{4}, \quad R = \frac{4(n+1)}{n+2} a \sin \frac{nt}{2}$$

З двох виразів можна виключити t:

$$\left(\frac{ns}{4(n+1)a} - 1\right)^2 + \frac{(n+2)^2}{16(n+1)^2} \cdot \frac{R^2}{a^2} = 1.$$

4) Коли візьмемо гіпоциклоїду

$$x = (n-1)a \cos t + a \cos (n-1)t,$$
$$y = (n-1)a \sin t - a \sin (n-1)t$$

то

$$x'^2 + y'^2 = 4(n-1)^2 a^2 \cos^2 \left(\frac{n-2}{2}\right) t$$

$$x'y'' - y'x'' = 2n(n-1)^2 a^2 \cos^2 \frac{n-2}{2} t$$

$$s = \frac{4(n-1)}{n-2} a \sin \frac{n-2}{2} t.$$

Коли початок дуг візьмемо так, щоб при $t = 0$, $s = 0$

$$R = \pm 4\left(\frac{n-1}{n}\right) a \cos \frac{n-2}{2} t$$

звідсіль

$$n^2R^2 + (n-2)^2. \quad s^2 = 16(n-1)^2a^2.$$

5) Зокрема астроїда:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$

Знайдімо

$$(n = 4)\, s = \frac{3}{4} a(1 - \cos 2t), \; R = {}^3/_4\, a \sin 2t$$

звідсіль

$$R + 4s^2 - 6as = 0.$$

6) Логаритмічна спіраля

$$r = ae^{m\theta}.$$

Тут

$$r' = mr, \; r'' = mr^2,$$

тому

$$R = r\sqrt{1 + m^2}.$$

При цьому

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{r}{r'} = \frac{1}{m}$$

виходить, що ψ величина стала і

$$R = \frac{r}{\sin \psi}$$

$$ds = r\sqrt{1 + m^2} \,.\, d\theta$$

тому

$$s = \frac{r\sqrt{1 + m^2}}{m},$$

коли початок дуг вибрано від $\theta = 0$. Отож $R = ms$.

§ 28. Поняття про інваріянти групи рухів.

Значення внутрішнього рівнання є в тому, що воно не залежить від вибору осей координат і мусить бути для кривої за будь-якого її положення на площині,

для того, щоб дві криві можна було злити пересуваючи їх, як незмінні системи, треба, щоб вони мали одне і теж саме внутрішнє рівнання.

Софус Лі своєю теорією перетворень виявив також, що всі диференціяльні інваріянти груп руху площини т. т. такі функції $J(x, y, y', y''...)$, що не змінюються при різноманітних перемі щеннях кривої в її площині, визначаються через (див. G. Scheffers. Anwendung d. Differential—und Integralrechnung auf Geometrie B. I)

$$R_1 \frac{dR}{ds}, \frac{d^2R}{ds^2},$$

Рух площини, що пересувається, як незмінна система в собі самій, визначається тим, що від точки (x, y) переходимо до точки (x_1, y_1), так що

$$x_1 = a + x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$y_1 = b + x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

де a, b, α можуть мати будь-які значення, але кожного разу однакові для всіх точок площини.

Не важко зрозуміти, що при цьому справджується основна властивість групи: послідовність двох рухів, рівноважна деякому третьому рухові, що враз переводить систему з початкового положення в конечне.

Можна пересвідчитися поперше, що будь-який рух складається з паралельного перенесення та обертання, і що перший

$$x_1 = x + a$$

$$y_1 = y + b$$

не змінює ні dx ні dy, а тому й

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$$

отже ні s ні R.

Також повертання на кут α дає

$$dx_1 = dx\cos\alpha - dy\sin\alpha$$

$$dy_1 = dx\sin\alpha + dy\cos\alpha,$$

отже

$$dx_1^2 + dy_1^2 = dx^2 + dy^2$$

тобто

$$ds_1 = ds.$$

далі

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{\sin\alpha+\frac{dy}{dx}\cos\alpha}{\cos\alpha-\frac{dy}{dx}\sin\alpha},\quad d\frac{\sin\alpha+y'\cos\alpha}{\cos\alpha-y'\sin\alpha}=\frac{dy'}{(\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2}$$

тому

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=\frac{d\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)}{dx_1}=\frac{y''}{(\cos\alpha-y'\sin\alpha)^3}$$

отже

$$R_1=\frac{\left[1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}}=\frac{(dx^2+dy_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}dx_1^3}=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{2}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}dx^3}=R.$$

Навпаки, коли

$$f(x.\ y,\ y',\ y'',\ldots)$$

не змінюються за будь-якого руху, мусить бути

$$f(x+a,\ y+b,\ y',\ y'',\ldots)=f(x,\ y,\ y',\ y'',\ldots)$$

тобто f не залежить від x та y, і f є функція вигляду $f(y', y'',..)$. Безпосередньо виявити, який вигляд мусить мати така функція, щоб вона не змінювалася і від звороту, досить важко. Але можна застерегти ось що. Коли u, v дві функції від y', y'',... що при перетворах обертання змінюються лише на адитивні сталі, то

$$\frac{du}{dx}:\frac{dv}{dx}=\frac{du}{dv}$$

є інваріянт. Ми бачили, що R є інваріянт,

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg} y'$$

при повертанні на кут ε змінюється на ε:

$$\alpha_1=\alpha+\varepsilon,$$

тобто $d\alpha_1=d\alpha$.

$$\frac{dy'_1}{1+y'^2}=\frac{dy'}{1+y'^2}.$$

Отже, інваріянтами є

$$R_1\frac{dR}{d\alpha},\quad \frac{d^2R}{d\alpha^2},\ldots$$

Але ми бачили, що

$$ds=Rd\alpha;$$

тому попередній ряд можна змінити на ряд

$$R, \frac{dR}{ds}, \frac{d^2R}{ds^2},$$

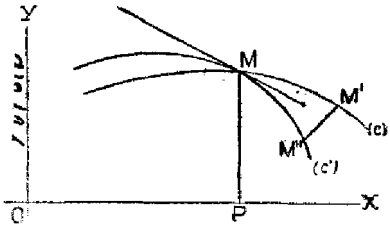
Всі інші диференціяльні інваріянти можна визначити через інваріянти кожного з цих двох рядів.

§ 29. Дотик кривих (плоских).

Дві кривих C і C' мають в спільній точці M (рис. 43) дотик n-го порядку, коли віддаль між двома безконечно-близькими до M точками, взятими на кривих (точки M' 1-ої та M'' 2-ої) буде безконечно-мала величина $(n+1)$-го порядку відносно MM', тобто коли

$$\overline{M'M''} \approx \overline{MM'}^{n+1}.$$

При цьому $\overline{MM''}$ мусить бути не паралельна з дотичною в точці M другої кривої.



(Рис. 30).

Припускаємо, що точка M — звичайна точка на обох кривих. Хай обидві криві дано рівняннями

$$y = f(x), \quad y = g(x).$$

За напрям $M'M''$ візьмімо вісь OY. Різниця

$$f(x+\Delta x) - g(x+\Delta x)$$

в даному разі відповідає $M'M''$. Щоб вона була $(n+1)$-го порядку відносно Δx, треба, щоб у ряді Тауіог'а для різниці $f(x) - g(x)$:

$$f(x+\Delta x) - g(x+\Delta x) = f(x) - g(x) + \Delta x\,(f'(x) - g(x)) +$$

$$+ \frac{\Delta x^n}{n!}[f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)] + \frac{\Delta x^{n+1}}{n+1!}[f^{(n+1)}(x) - g^{(n+1)}(x)] +$$

перший відмінний від 0 член був член з $(n+1)$-ою похідною, тобто треба, щоб

$$f(x) - g(x) = 0, \; f'(x) - g'(x) = 0, \ldots f'^{(n)}(x) - g^{(n)}(x) = 0.$$

Отже, щоб дві криві

$$y = f(x) \text{ та } y = g(x)$$

в спільній точці мали дотик n-го порядку, треба, щоб для відповідного значення x були рівні й самі функції і їхні похідні до n-го порядку включно.

Коли одну з двох кривих задано неявним рівнанням

$$F(x, y) = 0,$$

то n її перших похідних визначаються з рівнань

$$\frac{dF}{dx} = F'_x + F'_y \cdot y' = 0; \quad \frac{d^2F}{dx^2} = F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}y'^2 = 0 \text{ і т. д.}$$

$$\frac{d^nF}{dx^n} = F^{(n)}_{x^n} + nF^{(n)}_{x^{n-1}y} \quad y' + \ldots + F'_y y^{(n)} = 0.$$

Умови дотику n-го порядку вимагають, щоб підстанови в ці рівнання замість $y, y', \ldots y^{(n)}$ їх значень із рівнання 1-ої кривої всі перші рівнання справджували.

На останнє, хай першу криву (C) задано рівнанням у параметричній формі

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t).$$

Віддаль

$$MM' = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} =$$

$$\sqrt{\left[x'(t_1 - t) + x''\frac{(t_1 - t)^2}{1 \cdot 2}\right]^2 + \left[y'(t_1 - t) + y''\frac{(t_1 - t)^2}{1 \cdot 2}\right]^2} =$$

$$= (t_1 - t)\sqrt{x'^2 + y'^2 + (t_1 - t)S}$$

де в $(t_1 - t)S$ зібрано члени, що мають $(t_1 - t)$ в степенях 1-му, 2-му і т. д.

Через це головна частина безконечно-малої величини MM' є

$$(t_1 - t)\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

бо, за умови, точка M — звичайна і тому x' і y' не дорівнюють разом нулеві. Порядок

$$d = M'M''$$

визначимо так. Якщо λ, μ є косинуси кутів $M'M''$ з осями координат (осі прямокутні, і $\lambda^2 + \mu^2 = 1$), то координати M'' є

$$x_1 + \lambda d, \; y_1 + \mu d.$$

Вони вдовольняють рівнання (C'), яке хай задане в формі

$$F(x, y) = 0.$$

Отже

$$F(x_1 + \lambda d, y_1 + \mu d) = 0.$$

Розгорнувши в ряд Тейлорів і обмежившись першими членами цього розгортання, маємо

$$F(x_1, y_1) + d(\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1}) + d^2 . S'' = 0,$$

де S'' — сукупність членів, що, містять у собі похідні другого та вищих порядків і d в степені 2-му та вищих. Головна частина виразу $\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1}$ є

$$\lambda F'_x + \mu F'_y.$$

Вона не рівна нулеві, бо F'_x та F'_y пропорційні косинусам кутів нормалі з осями і тому

$$\lambda F'_x + \mu F'_y$$

пропорційне до косинуса кута між нормалею до (C') в M і $M'M''$ який за умови відрізняється від прямого (бо $M'M''$ не паралельний з дотичною до (C') в точці M).

Опріч того, через те, що M — точка є звичайна на (C'), F'_x, F'_y не можуть разом дорівнювати нулеві.

Отже, нижчі члени, що мусять взаємно знищуватися, дістанемо з

$$F(x_1, y_1) \text{ та } d(\lambda F'_x + \mu' F_{\ 1}),$$

тобто d мусить бути одного порядку малости з

$$F(x_1, y_1).$$

З даного визначення виходить такий аналітичний критерій для дотику n-го порядку двох кривих (C) і (C') у спільній їхній точці M, звичайній на тій і другій: Для дотику n-го порядку кривої $F(x_1, y_1) = 0$

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t)$$

треба, щоб результат підстанови в (C) координат точки кривої (C')

$$M' \equiv (x_1, y_1)$$

близької до спільної точки $M(x, y)$ — був $(n+1)$-го порядку (малости) відносно різниці значень $t_1 - t$ параметра, що відповідають точками M та M'.

Помітивши, що

$$F(x_1, y_1) \equiv F(\varphi(t_1), \psi(t_1) \equiv \Phi(t_1),$$

можна, замінивши

$$t_1 = t + (t_1 - t),$$

розгорнути $\Phi(t_1)$ по степенях $(t_1 - t)$:

$$\Phi(t + (t_1 - t)) \equiv \Phi(t) + \Phi'(t)(t_1 - t) + \Phi''(t)\frac{(t_1 - t)^2}{1.2} + \ldots +$$

$$+ \ldots + \Phi^{(n+1)}(\psi)\frac{(t_1 - t)^{n+1}}{n+1!}$$

Для того, щоб цей вираз був порядку малости $(n+1)$-го відносно $t_1 - t$ треба, щоб

$$\Phi(t) = 0, \ \Phi'(t) = 0, \ldots \Phi^{(n)}(t) = 0.$$

Отже дотик n-го порядку вимагає $(n+1)$ умов.

Зокрема, коли криві (C) і (C') задано рівняннями виду

$$y = f(x), \quad y = g(x),$$

то можна одне з них звести до параметричної форми, поклавши

$$x = t, \quad y = f(x)$$

а друге до неявного виду:

$$y - g(x) = 0$$

і тоді за попереднім: для дотику n-го порядку треба, щоб справджувалися умови

$$f(x) - g(x) = 0, \quad f'(x) - g'(x) = 0, \ldots f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x) = 0,$$

як і вище.

Помітивши, що при n паристому перший член, що не зникає є непаристого степеня відносно Δx (відповідно $t_1 - t$) і тому змінює знак разом з Δx або $t_1 - t$, висновуємо:

За дотику паристого порядку криві перетинають одна одну, дотикові непаристого порядку — лежать по один бік одна однієї. Особливу має вагу для вивчання кривих — питання найти для даної кривої таку криву заданого типу, що мала б з нею в певній точці дотик якнайвищого порядку. Щоби був можливий дотик n-го порядку, рівняння такої кривої мусить мати $n+1$ довільних коефіцієнтів.

§ 30. Щільнодотична пряма (дотична).

Рівняння прямої має два коефіцієнти. Найвищий можливий дотик кривої з прямою взагалі кажучи є дотик 1-го порядку.

Коли задано криву $y=f(x)$ і пряма $y=mx+k$, то для дотику першого порядку різниця

$$f(x+\Delta x)-[m(x+\Delta x)+k]$$

мусить бути другого порядку відносно Δx:

$$(f(x)-mx-k)+\Delta x(f'(x)-m)+\frac{(\Delta x)^2}{1.2}f''(x)+$$

виходить, що мусить бути

$$f(x)-mx-k=0,\ f'(x)-m=0,$$

або

$$m=f'(x),\ k=f(x)-xf'(x).$$

Отож шукана пряма буде

$$Y=y'X+y-xy',$$

тобто дотична: дотична має з кривою дотик першого порядку. Але коли ми маємо точку перегину, то

$$y''=f''(x),$$

і перший вартісний член буде

$$\frac{\Delta x^3}{1.2.3}f'''(x):$$

в точці перегину, коли

$$f'''(x)\neq 0,$$

крива має з дотичною дотик 2-го порядку. Виходить, що вона переходить з одного боку дотичної на другий. Коли ж і $f'''(x)=0$ і т. д., то відповідно до того, чи буде перша вартісна похідна непаристого чи паристого порядку, крива буде перетинати дотичну в точці дотику або ні.

Можна побудувати безліч кіл дотичних до кривої в даній її точці M. Для цього досить взяти на нормалі до кривої в точці M довільну точку P і з неї, як з центру, провести коло радіюсом PM. Серед безлічі цих кіл знайдемо те, що має найщільніший (найвищого порядку) дотик з кривою в точці М. Назвемо це дотичне коло, щоб відрізнити від інших дотичних кіл, — щільнодотичним колом.

Його визначають за загальним способом так:

§ 31. Щільнодотичне коло.

Рівнання кола має три довільних параметри, тому коло може мати з кривою дотик 2-го порядку. Хай рівнання кривої задано в параметричній формі

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \tag{36}$$

Підставивши ці вирази в рівнання кола

$$(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 - R^2 = 0 \tag{37}$$

і диференціюючи двічі по t, матимемо, як умову дотику 2-го порядку, (37′)

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - R^2 = 0$$

і

$$x'(x-\xi) + y'(y-\eta) = 0 \tag{38}$$

$$x''(x-\xi) + y''(y-\eta) + x'^2 + y'^2 = 0. \tag{39}$$

Перше показує, що центр щільнодотичного кола лежить на нормалі до кривої. Розв'язуючи (39) і (38) відносно $x-\xi$, $y-\eta$ дістанемо

$$\xi - x = -y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''},\quad \eta - y = x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''} \tag{40}$$

Підставляючи в (37′), матимемо

$$R^2 = \frac{(x'^2+y'^2)^2}{(x'y''-y'x'')^2}.$$

Звідкіль

$$R = \pm\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''}. \tag{41}$$

Отже радіюс щільнодотичного кола дорівнює радіюсові кривини. Тому щільнодотичне коло називають також колом кривини, а його центр—центром кривини.

Частково з попереднього виходить:

1) Коло кривини взагалі перетинає криву в точці дотику—бо має з кривою дотик паристого порядку—власне 2-го порядку. Але в тих точках, де крива має дотик більш високого порядку, коло кривини буде перетинати криву у випадку дотику паристого порядку.

Так параболя

$$y^2 = 2px \text{ або } x = \frac{y^2}{2p}$$

має з колом кривини дотик взагалі 2-го порядку, і ξ, η, R задовольняють рівнання

$$\left(\frac{y^2}{2p}-\xi\right)^2+(y-\eta)^2-R^2=0,$$

$$\frac{y}{p}\left(\frac{y^2}{2p}-\xi\right)+(y-\eta)=0,$$

$$\frac{3y^2}{2p^2}-\frac{\xi}{p}+1=0,\quad \frac{3y}{p^2}=0,\quad \frac{3}{p^2}\neq 0.$$

Із тих чотирьох рівнань, що ми виписали, при $y\neq 0$ справджуються лише перші три, 4-е не справджується, але в точці $y=0$ справджується й 4-е рівнання: у вершині параболі відповідне коло кривини

$$(x-p)^2+y^2-p^2=0$$

має з кривою дотик 3-го порядку і не перетинає кривої. Це можна довести для вершин і інших двох кривих другого порядку.

2) Зауважмо, що коли дві криві мають дотик 1-го порядку, то вони мають у точці дотику спільну дотичну. Коли вони мають дотик не нижчий 2-го порядку, то вони мають і спільне коло кривини.

3) Коло є єдина крива сталої кривини. Треба найти криву, для якої б $R=\text{const}$, тобто

$$\frac{(y')'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a}=\text{сталій},$$

або

$$\frac{dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{dx}{a}$$

Це робиться за правилами інтеґрального числення. Найпростіше завести кут α дотичної з віссю X-ів.

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha\,.\,\therefore\, dy'=\frac{dx}{\cos^2\alpha},\quad 1+y'^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

отже

$$\frac{1}{R}=\frac{d\alpha}{dx}\sec^2\alpha\,.\cos^3\alpha=\frac{\cos\alpha\,da}{dx}=\frac{1}{a},$$

або

$$dx=a\cos\alpha\,da.$$

Виходить, що X може відрізнятися від

$$a \sin \alpha \left(\text{бо} \frac{d \sin \alpha}{dx} = \cos\alpha\right)$$

лише на сталу величину:

$$x - C = a \sin \alpha,$$

але

$$dy = dx \,.\, \operatorname{tg} \alpha = a \sin \alpha \, d\alpha$$

тт. y може відрізнятися лише на сталу величину від

$$-a \cos \alpha \, d(-a \cos \alpha) = a \sin \alpha \, d\alpha.$$

Отже

$$x - C = a \sin \alpha, \; y - C' = a \cos \alpha.$$

Виключивши α, одержимо

$$(x - C)^2 + (y - C')^2 = a^2$$

До цього самого результату прийдемо, помітивши, що із $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ виходить з допомогою

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 \therefore 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

що

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \quad \text{і тому} \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha.$$

Але за означеннями міри кривини $ds = R \, d\alpha$ при чому тепер R за умовою є — стала величина, рівна a. Отже

$$dx = a \cos \alpha \, d\alpha, \; dy = a \sin \alpha \, d\alpha$$

як і раніш, звідкіль маємо

$$x = a \sin \alpha + C$$

$$y = a \cos \alpha + C'.$$

4) Кривина в точці перегину. Коли в точці перегину y' конечна, $y'' = 0$, то міра кривини дорівнює нулеві, а радіюс кривини зростає до ∞. Коло кривини перетворюється на пряму — дотичну в точці перегину.

Приклади:

1. Крива $y = x^3$ має в (0,0) точку перегину;

$$y' = 3x^2 \text{ і } y'' = 6x \text{ при } x = 0$$

дорівнюють нулеві.

Також

$$\frac{1}{R}=\frac{6x}{(1+9x^4)^{3/2}} \text{ при } x=0$$

дорівнює нулеві.

2. $$y=x^5,\ y'=5x^4,\ y''=20x^3,\ \frac{1}{R}=\frac{20x^2}{(1+25x^8)^{3/2}}$$

при $x=0$ дорівнює 0.

Інша справа, коли в точці крива переходить з одного боку дотичної на другий і має лише одну вітину; y'' є ∞, але не можна казати, що точка є звичайна. Тоді R може дорівнювати 0.

Приклад $$y=x\,e^{x^2/3}$$

(або в параметричній формі $x=t^3$, $y=t^3 e^{t^2}$).

Знайдемо

$$R=\frac{1}{6}\,\frac{[9+e^{2t^5}(3+2t^2)]^{3/2}\,t\,e^{-t^2}}{2t^2-5};$$

при $t=0$,

$$R=0.$$

Цей випадок може бути й у кривих альґебричних.

Наприклад $y^3=x^5$. Крива в точці (0,0) має потрійну точку з трьома дотичними що злилися, переходить з одного боку дотичної на другий $R=0$, але дотик є порядку $^5/_3<2$ і маємо т. звану Wendetangente (зворотна дотична).

5. Кривина в точці звороту. В точці звороту радіюс кривини взагалі дорівнює 0 і коло кривини зводиться до одної точки — саме до точки звороту.

Дійсно, в точці звороту справджуються разом рівнання

$$F(x,y)=0,\ F'_x=0,\ F'_y=0,\ F''_{xy}-F''_{xx}F''_{yy}=0.$$

Останнє рівнання є умова того, що ліва частина квадратового рівнання, яке вдовольняється кутовими коефіцієнтами тої й другої з двох дотичних подвійної точки

$$F''_{xx}+2F''_{xy}y'+F''_{yy}y'^2=0^{1)},$$

є точний квадрат

$$\frac{1}{F''_{xx}}(F''_{xx}+y'F''_{xy})^2=0,$$

[1]) При цьому відкинуто член $F'_y\,.\,y''=0$ за тим, що $F'_y=0$. Коли y' має в точці конечне значення, ми маємо на це право. Дійсно, тоді, як доведено § 15,

$$\lim F'_y y''=0, \text{ коли } (F'_y)'\neq 0.$$

або

$$\frac{1}{F''_{yy}}(F''_{xy}+y'F''_{yy})^2=0.$$

Але y' для подвійної точки визначається рівнанням

$$F'''_{xxx}+3F'''_{xxy}y'+3F'''_{xyy}y'^2+F'''_{yyy}y'^3+3(F''_{xy}+F''y')y''=0.$$

В точці звороту множник y'' дорівнює 0, інші ж члени взагалі відмінні від 0, тому для цієї точки

$$\frac{1}{y''}=0 \text{ і } R=0.$$

Приклад: 1. Цисоїда

$$x(x^2+y^2)-2ay^2=0$$

має в початку координат точку звороту:

$$F'_x=3x^2+y^2 \text{ і } F'y=2xy-4ay$$

дорівнюють 0,

$$F''_{xx}=6x,\ F''_{xy}=2y,\ F''_{yy}=2x-4a$$

відповідно дорівнюють 0, 0, $-4a$

і квадратове рівнання для напряму дотичної

$$-4ay'^2=0,$$

$y'=0$ є його подвійний корінь

$$F'''_{xxx}=6,\ F'''_{xxy}=0,\ F'''_{xyy}=2,\ F'''_{yyy}=0.$$

Вищезазначене рівнання набирає вигляду

$$6+3.(-4a).y'.y''=0$$

а що

$$y'=0,\ y''=\frac{1}{2ay'}=\infty, \text{то } R=0.$$

Але коли члени з похідними третього порядку дорівнюють 0, y'' може бути конечне або 0.

2. Хай

$$y^2-x^5=0.$$

Для (0,0)

$$F'_x=-5x^4=0,\ F'_y=2y=0,$$

$$F''_{xx}=-20x^3=0,\ F''_{xy}=0,\ F''_{yy}=2\neq 0$$

маємо подвійну точку — точку звороту ($2.y'^2=0$).

Але

$$F'''_{xxx} = -60x^2 = 0,\ F'''_{xxy} = F'''_{xyy} = F'''_{yyy} = 0, -$$

тому y'' має невизначену форму $\frac{0}{0}$ і точка (0,0) є т. зв. Rückkehrflachpunkt (сплощена точка звороту).

§ 32. Еволюта (розгортка).

Візьмімо формули, що визначають центр щільнодотичного кола

$$\xi - x = -y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}$$

$$\eta - y = x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} \qquad (40)$$

А бо, коли незалежна змінна є x,

$$\xi - x = -y' \cdot \frac{1 + y'^2}{y''} \qquad (41)$$

$$\eta - y = \frac{1 + y'^2}{y''}$$

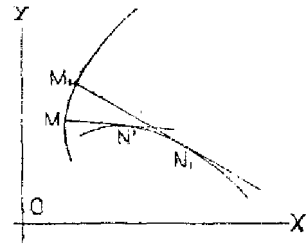


Рис. 41.

Ці рівнання дають змогу для кожної точки M даної кривої C збудувати відповідний центр кривини M. Коли точка M описує криву (C), то точка M, взагалі кажучи, переміщується й описує другу криву (C'), яку називають еволютою, або розгорткою даної кривої[1]). Коли в (41) завести радіюс кривини R і кут α дотичної з віссю x-ів, то формули (41) перепишуться

$$\xi = x - R\sin\alpha,\ \eta = y + R\cos\alpha \qquad (42)$$

Приклади: 1. Еволюта еліпси: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ має рівнання:

$$\xi = a\cos t - b\cos t \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$$

$$\eta = b\sin t - a\sin t \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

[1]) Для кола центр кривини кожної точки зливається з його центром, і тому еволюта кола зводиться до однієї лише точки — центру кола. Для прямої еволюта відходить на безконечність і є безконечно далека точка перпендикуляра до прямої.

виключаючи звідсіль t, матимемо

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}}+(b\eta)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$$

криву, схожу до астроїди, і яка лежить вся всередині еліпси при

$$a \leqslant b\sqrt{2};$$

при

$$a=b\sqrt{2}$$

кінці малої осі є точки кривої.

2. Еволюта гіперболі

$$x=a\,\frac{(e^t+e^{-t})}{2}, \qquad y=b\,\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

в параметричній формі визначається рівнанням

$$\xi=\frac{a^2+b^2}{a}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^3, \qquad \eta=\frac{a^2+b^2}{b}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^3.$$

Звідкіль, виключивши t, маємо рівнання

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}}-(b\eta)^{\frac{2}{3}}=(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

3. Еволюта циклоїди є знов циклоїда, тільки інакше розміщена. Її рівнання

$$\xi=a(t+\sin t), \quad \eta=-a(1-\cos t)$$

стає до звичайнішого виду, коли замінити

$$t=\pi+t_1$$

а координати

$$\xi=\pi a+\xi_1, \quad \eta=-2a+\eta_1.$$

4. Логаритмічна спіраля:

$$r=ae^{m\theta}$$

Припустімо, що вісь X-ів зливається з полярною віссю, а початок координат з полюсом. Тоді кут α дотичної з віссю, за попереднім, дорівнює

$$\alpha=\theta+\psi, \quad \text{де} \quad \operatorname{tg}\psi=\frac{r}{r'_\theta}.$$

Для даного випадку

$$\frac{r'_\theta}{r}=m,$$

тому

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{m}$$

Радіюс кривини

$$R = r\sqrt{1+m^2} = \frac{r}{\sin\psi}$$

Отже за (41) цього §-а

$$\xi = r\cos\theta - r\frac{\sin(\theta+\psi)}{\sin\psi} = -r\sin\theta.\ \operatorname{cotg}\psi = -mr\sin\theta$$

$$\eta = r\sin\theta + r\frac{\cos(\theta+\psi)}{\sin\psi} = r\cos\theta\operatorname{cotg}\psi = mr\cos\theta.$$

Щоб дістати рівнання еволюти в полярних координатах, покладімо

$$\xi = \rho\cos\vartheta,\ \ \eta = \rho\sin\vartheta.$$

Зрівнюючи з попередніми виразами, матимемо:

$$\rho = mr,\ -\sin\theta = \cos\vartheta,\ \sin\vartheta = \cos\theta,$$

тобто

$$\vartheta = \theta + \frac{\pi}{2}$$

і тому, заводячи ці вирази до рівнання спіралі, матимемо рівнання її еволюти

$$\rho = mae^{m\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)},$$

знову логаритмічну спіралю, але повернуту на деякий кут, бо помічаємо, що поклавши

$$m = e^{\log m}$$

зведемо рівнання її до виду

$$\rho = ae^{m\left(\vartheta - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{m}\log m\right)}.$$

Властивості еволюти

1) Дотичною в точці еволюти є нормаля для тієї точки вихідної кривої, для якої точка еволюти є центром кривини.

Справді, ми вже знаємо, що точка еволюти лежить на відповідній нормалі, до того із (42) маємо

$$d\xi = dx - dR\sin\alpha - R\cos\alpha\, d\alpha = -dR.\sin\alpha \qquad (43)$$

$$d\eta = dy + dR\cos\alpha - R\sin\alpha\, d\alpha = dR.\cos\alpha. \qquad (44)$$

за допомогою

$$R\,d\alpha = ds.$$

Тому

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -ctg\,\alpha,$$

і коли

$$\frac{d\eta}{d\xi} = tg\,\alpha_1,\ \alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

т. т. нормаля кривої є дотична до її еволюти.

2) Довжина дуги еволюти дорівнює різниці радіюсів кривини в точках вихідної кривої, що відповідають початкові й кінцеві дуги еволюти.

Справді, із (43) маємо

$$d\sigma^2 = d\eta^2 + d\xi^2 = dR^2.\quad d\sigma = \pm dR \tag{45}$$

де σ є дуга еволюти, звідкіль

$$\sigma = \pm(R_1 - R_0). \tag{45'}$$

Коли знак різниці вважати за знак σ, то двійний знак можна опустити.

3) Якщо радіюс кривини еволюти позначимо через R_1, а радіюс кривини вихідної кривої через R, то

$$R_1 = \pm R\frac{dR}{ds}$$

Справді, $ds = R\,d\alpha$ для вихідної кривої і $d\sigma = R_1\,d\alpha_1$ для еволюти, але за 1)

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

тому

$$d\alpha_1 = d\alpha$$

й опріч того за (45)

$$d\sigma = \pm dR$$

Отже

$$\pm dR = R_1\,d\alpha$$

або

$$\mp RdR = R_1\,ds.$$

4) Визначивши еволюту для якоїнебудь кривої, можна шукати для неї знову геометричне місце центрів кривини; матимемо еволюту еволюти або другу еволюту даної кривої. Користуючися з формул (41) — (46) знайдемо, позначивши через ξ, η, R_1, α_1 коорди-

нати, радіюс кривини і кут дотичної з віссю X-ів для першої еволюти, а ξ_1, η_2, R_2—для другої

$$\xi_1 = \xi - R_1 \sin \alpha_1 = x - R \sin \alpha - R \cos \alpha$$

$$\eta_1 = \eta + R_1 \cos \alpha_1 = y + R \cos \alpha - R_1 \sin \alpha \text{ і т. і.}$$

Радіюс кривини другої еволюти буде

$$R_2 = R_1 \frac{dR_1}{d\sigma} = \pm R \frac{dR_1}{ds}$$

а звідсіль і взагалі

$$R_m = \mp R \cdot \frac{dR_{m=1}}{ds}$$

§ 32. Інволюта або евольвента.

Зворотна задача:

для даної кривої знайти ту криву, для якої вона є розгорткою (еволютою), призводить до інволют або евольвент.

Якщо криву задано рівнанням у параметричній формі і при цьому допоміжним незалежним змінним є дуга, то рівнання інволюти можна мати в конечному виді.

Хай задана крива є

$$\xi = \varphi(\sigma), \tag{47}$$

і хай рівнання інволюти будуть

$$x = \Phi(\sigma), \ \eta = \Psi(\sigma) \tag{48}$$

Рівнання дотичної до (47)

$$\frac{X - \xi}{\xi'} = \frac{Y - \eta}{\eta'} \tag{49}$$

мусить вдовольнятися при заміні поточних координат X, Y координатами точки (48), що належить тому самому значенню параметра σ, бо нормаля в точці (48) є дотична у відповідній точці (47).

Назвавши через n спільне значення двох відношень (49)

$$\frac{x - \xi}{\xi'} = \frac{y - \eta}{\eta'} = n,$$

маємо

$$x = \xi + n\xi', \ y = \eta + n\eta'. \tag{50}$$

Щоб дістати рівнання (48), треба визначити n як функцію σ. Для цього утворимо

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=n^2(\xi'^2+\eta'^2)$$

але

$$\xi'^2+\eta'^2=1$$

бо похідні беремо по дузі (47). Отже n визначає віддаль відповідних точок кривих (47) і (48).

Дотична до (47) мусить бути нормалею до (48).

Звідсіля

$$1+\frac{y'}{x'}\cdot\frac{n'}{\xi}=0,$$

або

$$y'\eta'+x'\xi'=0. \tag{51}$$

Але диференціюючи (50) матимемо:

$$x'=\xi'+n\xi''+n'\xi'.$$

$$y'=\eta'+n\eta''+n'\eta'.$$

Помноживши на ξ' і n' і додавши, за (51) знайдемо

$$\xi'(\xi'+n\xi''+n'\xi')+\eta'(\eta'+n\eta''+n'\eta')=0$$

або

$$(\xi'^2+\eta'^2)(1+n')+n(\xi'\xi''+\eta'\eta'')=0$$

Але тому, що незалежна змінна є дуга, то

$$\xi'^2+\eta'^2=1,$$

звідкіль:

$$\xi'\xi''+\eta'\eta''=0,$$

Отже останнє рівнання набуває вигляду

$$1+n'=0$$

звідкіль

$$n=-\sigma+c \tag{52}$$

Підставлюючи це значення n до (50), добудемо рівнання інволюти:

$$x=\xi+(c-\sigma)\xi',\ y=\eta+(c-\sigma)\eta'. \tag{53}$$

Тут c — довільна стала. Отже ми одержуємо не одну інволюту, а безліч їх, бо початкове значення радіюса кривини в початковій точці інволюти можна взяти цілком довільно.

Всі ці інволюти мають дотичними нормалі заданої кривої, всі вони є ортоґональні її траєкторії кривої (так звуться криві, що в кожній своїй точці перпендикулярні до дотичних деякої кривої).

Приклади.

1. Інволюта кола. Параметричне рівнання кола

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t.$$

можна звести до потрібного виду, бо для кола

$$\sigma = rt$$

(r — радіюс кола). Тому рівнання інволюти є

$$x = r\cos\frac{\sigma}{r} + (\sigma - c)\sin\frac{\sigma}{r}$$

$$y = r\sin\frac{\sigma}{r} - (\sigma - c)\cos\frac{\sigma}{r}$$

а коли знову замінити

$$t = \frac{\sigma}{r},$$

то

$$x = r\cos t + (rt - C)\sin t$$

$$y = \sin t - (rt - C)\cos t.$$

2. Інволюта ланцюгової (провисної) лінії

$$y = a\left(\frac{e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}}}{2}\right)$$

Дуга кривої, починаючи з вершини її $(0, a)$ визначається (див. § 28)

$$\sigma = a\frac{e^{\frac{\xi}{a}} - e^{-\frac{\xi}{a}}}{2}$$

$$\eta^2 = \sigma^2 + a^2, \quad \eta = \sqrt{\sigma^2 + a^2}, \quad \eta + \sigma = ae^{\frac{\xi}{a}}$$

тому

$$\xi = a\log\left(\frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + a^2}}{a}\right)$$

і рівнання інволюти в параметричній формі є

$$x = a \log \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + a^2}}{a} + (c - \sigma) \frac{a}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}$$

$$y = \sqrt{\sigma^2 + a^2} + (c - \sigma) \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + a}} = \frac{c\sigma + a^2}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}$$

В частинному випадку, коли $c = 0$, можна виключити σ і це дає

$$x = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

рівнання трактриси (від раніше визначеного відрізняється лише знаком кореня). Отже інволюта ланцюгової лінії є трактриса (результат, що його G. Loria l. c. p. 565 дає з допомогою внутрішнього рівнання).

§ 34. Обгортки сім'ї кривих.

Хай рівнання, що визначає криву, залежить від якоїсь сталої, що може набирати різних значень

$$F(x, y, c) = 0, \tag{54}$$

наприклад коло даного радіюса a а з центром на вісі X-ів

$$(X - c)^2 + y^2 = a^2$$

або еліпси даного центру і напряму осей, що мають сталу площу

$$\frac{x^3}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \ \pi ab = \cos t$$

або конічні січення, що мають задані фокуси

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1.$$

Така сукупність кривих зветься сім'єю кривих. Можна поставити собі задачу розшукати криву, що дотикалася б до всіх кривих сімейства. Таку криву називають обгорткою сім'ї кривих.

Якщо така крива існує, то на кожній кривій сім'ї маємо точку, що належить цій дотичній кривій. Значенню c_1 параметра належить, скажімо точка (x_1, y_1), значенню c_2—точка (x_2, y_2) і т. д.

Точки змінюються зі зміною параметра c, отже координати їх мусять бути такими функціями цього параметра

$$x = X(c),\ y = Y(c)$$

що задовольняють рівнання сім'ї

$$F(x(c), y(c), c) \equiv 0. \tag{54}$$

Отже кутовий коефіцієнт дотичної до кривої, що шукаємо, є

$$\frac{y'(c)}{x'(c)}$$

а кутовий коефіцієнт дотичної до відповідної кривої сім'ї є

$$-\frac{F'_x}{F'_y}$$

І мусить бути за умовою

$$\frac{y'(c)}{x'(c)} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

або

$$F'_x \,.\, x' + F'_y,\ y' = 0$$

але диференціюючи тотожність (54) дістанемо

$$F'_x x' + F'_y y' + F'_c = 0.$$

Тобто в спільній точці кривої та її обгортки

$$F'_c = 0.$$

Отже крива, що дотикається до всіх кривих сім'ї, визначається двома рівнаннями

$$F(x, y, c) = 0. \tag{54}$$

$$F'_c = 0. \tag{55}$$

Можна розв'язати два рівнання відносно x та y, тоді дістанемо її рівнання в параметричному вигляді, або виключити c, — тоді дістанемо теж саме рівнання в формі

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Ця крива є обгортка даної сім'ї кривих.

Отже, обгортка сім'ї ∞ кривих

$$F(x, y, c) = 0$$

є крива, що дотикається до всіх кривих сім'ї. Точка дотику обгортки до відповідної кривої сім'ї зветься

точкою. До цієї кривої доходимо ще іншим шляхом.

Хай

$$F(x, y, c) = 0, \; F(x, y, c + \Delta c) = 0$$

дві близькі криві сім'ї. Їхні спільні точки визначаються, як спільні розв'язки цих двох рівнань. Коли Δc наближається до 0, ці точки наближаються (за певних умов) до граничних положень. Щоб вивести рівнання цього геометричного місця, замінимо другу криву

$$F(x, y, c + \Delta c) = 0$$

на криву

$$F(x, y, c + \Delta c) - F(x, y, c) = 0$$

що проходить через спільні точки перших двох кривих, а це останнє, за теоремою Ляґранжа (тобто коли F має безперервну частинну похідну відносно c) можна замінити на

$$\Delta c . F'c(x, y, c + \theta . \Delta c) = 0.$$

Для границі $\Delta c \to 0$ маємо

$$F'_c(x, y, c) = 0. \tag{55}$$

Тобто те саме рівнання, що дало вище обгортку сім'ї кривих.

Отже геометричне місце граничних точок перетину безконечно близких кривих сім'ї є обгортка, а граничні точки перетину є її характеристичні точки. Вже не треба доводити окремо, що в кожній характеристичній точці обгортка дотикається до кривої сім'ї.

Приклади.

1. Обгортка кіл

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2$$

$$0 = F'_c = 2(-c) = 0 \therefore y^2 = a^2, \; y = \pm a.$$

Обгортка — дві прямі паралельні з віссю X-ів.

2. Еліпси сталої площі з спільними вісями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad ab = q^2.$$

Звідсіль

$$b^2x^2 + a^2y^2 = q^4,$$

або

$$q^4\frac{x^2}{a^2}+a^2y^2=q^4$$

$$F'_a=-2q^4\frac{x^2}{a^3}+2ay^2=0\,\therefore\,a^4=\frac{q^4x^2}{y^2},\quad a^2=\pm\frac{q^2x}{y},\,b^2=\pm\frac{q^2y}{x}$$

Обгортка

$$\pm 2q^2xy=q^4,$$

або

$$xy=\pm\frac{1}{2}q^2,$$

дві рівнобічних гіперболі.

3. Обгортка прямої сталої довжини, що рухається, спираючись кінцями на дві перпендикулярних прямих. Відтинки на вісях, коли кут $OAB=c$

$$a\cos c \text{ і } a\sin c,$$

тому рівняння прямої AB:

$$\frac{x}{a\cos c}+\frac{y}{a\sin c}-1=0,$$

або

$$x\sin c+y\cos c-a\sin c\cos c=0.$$

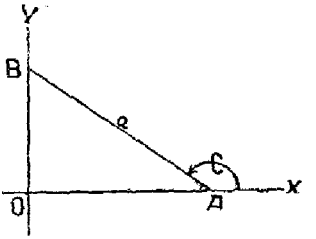


Рис. 42.

$$F'_c=x\cos c-y\sin c-a(\cos^2 c-\sin^2 c)=0.$$

Звідсіль

$$x=a(\sin^2 c\cos c+\cos^3 c-\sin^2 c\cos c)=a\cos^3 c,$$

$$y=a(\sin c\cos^2 c-\sin c\cos^2 c+\sin^3 c)=a\sin^3 c.$$

Обгортка є астроїда (див. ст. 18).

Треба зробити декілька істотних зауважень, а саме:

1. Не кожна сім'я кривих має обгортку. Всі криві сім'ї можуть проходити через ті самі точки, що й будуть за обгортку. Якщо рівнання сім'ї кривих лінійне відносно параметра, тобто маємо т. зв. пучок кривих

$$u+\lambda\,.\,v=0$$

то похідна відносно параметра λ дає $v=0$ і тоді рівнання сім'ї зводиться до $u=0$, маємо конечне число точок (або дискретний їх збір), а не суцільну криву.

характеристичною точкою. До цієї кривої доходимо ще іншим шляхом.

Хай

$$F(x, y, c) = 0, \; F(x, y, c + \Delta c) = 0$$

дві близькі криві сім'ї. Їхні спільні точки визначаються, як спільні розв'язки цих двох рівнань. Коли Δc наближається до 0, ці точки наближаються (за певних умов) до граничних положень. Щоб вивести рівнання цього геометричного місця, замінимо другу криву

$$F(x, y, c + \Delta c) = 0$$

на криву

$$F(x, y, c + \Delta c) - F(x, y, c) = 0$$

що проходить через спільні точки перших двох кривих, а це останнє, за теоремою Ляґранжа (тобто коли F має безперервну частинну похідну відносно c) можно замінити на

$$\Delta c . F'c(x, y, c + \theta . \Delta c) = 0.$$

Для границі $\Delta c \to 0$ маємо

$$F'_c(x, y, c) = 0. \tag{55}$$

Тобто те саме рівнання, що дало вище обгортку сім'ї кривих.

Отже геометричне місце граничних точок перетину безконечно близких кривих сім'ї є обгортка, а граничні точки перетину є її характеристичні точки. Вже не треба доводити окремо, що в кожній характеристичній точці обгортка дотикається до кривої сім'ї.

Приклади.

1. Обгортка кіл

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2$$

$$0 = F'_c \equiv 2(-c) = 0 \therefore y^2 = a^2, \; y = \pm a.$$

Обгортка — дві прямі паралельні з віссю X-ів.

2. Еліпси сталої площі з спільними вісями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad ab = q^2$$

Звідсіль

$$b^2x^2 + a^2y^2 = q^4$$

або

$$q^4\frac{x^2}{a^2}+a^2y^2=q^4$$

$$F'_a=-2q^4\frac{x^2}{a^3}+2ay^2=0\,.\cdot\,a^4=\frac{q^4x^2}{y^2},\quad a^2=\pm\frac{q^2x}{y},\,b^2=\pm\frac{q^2y}{x}$$

Обгортка

$$\pm 2q^2xy=q^4,$$

або

$$xy=\pm\frac{1}{2}q^2,$$

дві рівнобічних гіперболі.

3. Обгортка прямої сталої довжини, що рухається, спираючись кінцями на дві перпендикулярних прямих. Відтинки на вісях, коли кут $OAB=c$

$$a\cos c \text{ і } a\sin c,$$

тому рівнання прямої AB:

$$\frac{x}{a\cos c}+\frac{y}{a\sin c}-1=0,$$

або

$$x\sin c+y\cos c-a\sin c\cos c=0.$$

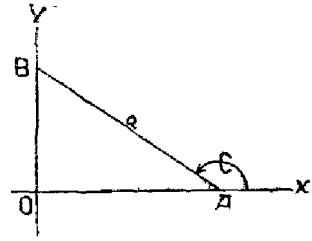


Рис. 42.

$$F'_c=x\cos c-y\sin c-a(\cos^2 c-\sin^2 c)=0.$$

Звідсіль

$$x=a(\sin^2 c\cos c+\cos^3 c-\sin^2 c\cos c)=a\cos^3 c,$$

$$y=a(\sin c\cos^2 c-\sin c\cos^2 c+\sin^3 c)=a\sin^3 c.$$

Обгортка є астроїда (див. ст. 18).

Треба зробити декілька істотних зауважень, а саме:

1. Не кожна сім'я кривих має обгортку. Всі криві сім'ї можуть проходити через ті самі точки, що й будуть за обгортку. Якщо рівнання сім'ї кривих лінійне відносно параметра, тобто маємо т. зв. пучок кривих

$$u+\lambda\,.\,v=0$$

то похідна відносно параметра λ дає $v=0$ і тоді рівнання сім'ї зводиться до $u=0$, маємо конечне число точок (або дискретний їх збір), а не суцільну криву.

Навпаки, коли $\frac{\partial F}{\partial c}$ не містить параметра, не можна цей параметр і вилучати з двох рівнань

$$F = 0 \text{ та } \frac{\partial F}{\partial c} = 0$$

$$\text{але } \left(\frac{\partial F}{\partial c}\right) \text{ не залежить від } c, \text{ коли } \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} = 0,$$

тобто

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \psi(x, y) \text{ і } F \equiv c\psi(x, y) + \varphi(x, y)$$

Взагалі точки, що належать усім кривим сім'ї, належать також і до обгортки[1]).

2. Особливі точки кривих сім'ї належать до обгортки.

Ми прийшли до рівнань обгортки за першого її означення порівнанням

$$\frac{\partial F}{\partial c} = F'_x \frac{\partial x}{\partial c} + F'_y \frac{\partial y}{\partial c} + F'_c = 0$$

з

$$F'_x \frac{\partial x}{\partial c} + F'_y \frac{\partial y}{\partial c} = 0$$

але звести до $\frac{\partial F}{\partial c}$ до F'_c можна, і останнє рівнання задовольняється і тоді, коли окремо

$$F'_x = 0, F'_y = 0$$

тобто коли (x, y) є особлива точка деякої кривої сім'ї.

3. Особливі точки обгортки визначаються рівнанням

$$F''^2_c = 0$$

за умови

$$\frac{\partial(F, F'_c)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

Рівнання $F = 0$, $F'_c = 0$ можно розв'язати відносно x, y лише за умови, що

$$F'_x F''_{yc} - F'_y F''_{xc} = \frac{\partial(F, F'_c)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

[1]) Наприклад коли

$$x^2 + y^2 - 2a(x \cos c + y \sin c) = 0$$

проходять усі через початок координат, то й початок є частина обгортки.

тоді

$$x = \varphi(c), \ y = \psi(c).$$

Особливі точки за параметричного визначення кривої справджують умови

$$x'_c = 0, \ y'_c = 0$$

але $\frac{\partial x}{\partial c}$ та $\frac{\partial y}{\partial c}$ визначаються з рівнань

$$F'_x x'_c + F'_y y'_c = 0$$

$$F''_{xc} x'_c + F''_{yc} y'_c + F''_{c^2} 0.$$

Коли $F''_{c^2} = 0$, останнє рівнання зводиться до

$$F''_{xc} \cdot x'_c + F_{yc} \cdot y'_c = 0$$

а що

$$\frac{\partial(F, F'_c)}{\partial(\partial, y)} \neq 0$$

то мусить бути

$$x'_c = 0, \ y'_c = 0$$

але за параметричного визначення обгортки — це буде точка звороту (або самодотику і т. д.).

§ 35. Другий тип задач на обгортки.

Досить часто натрапляємо на такі задачі на обгортки, коли рівнання сім'ї кривих залежить від двох або трьох параметрів, зв'язаних одним, resp. двома співвідношеннями. Можна в такім разі визначити всі параметри, крім одного, через останній і внести в рівнання. Наприклад, коли треба було знайти обгортку еліпсів сталої площі, ми визначили b через a:

$$b = \frac{q^2}{a},$$

але можна — і в деяких прикладах це зручніше—розв'язати проблему інакше. Хай маємо сім'ю

$$\Phi(x, y, a, b) = 0$$

де a, b зв'язано співвідношенням

$$\varphi(a, b) = 0$$

З-за останнього рівнання b можна вважати за функцію a і тому диференціювання дасть

$$\Phi_a + \Phi'_b \cdot \frac{db}{da} = 0$$

а $\frac{db}{da}$ визначається з

$$\varphi'_a + \varphi'_b \frac{db}{da} = 0.$$

Виключивши $\frac{db}{da}$, дістанемо з двох останніх рівнань

$$\Phi'_a \varphi'_b - \Phi'_b \varphi'_a \equiv \frac{\partial(\Phi, \varphi)}{\partial(a, b)} = 0$$

і розв'язок маємо з трьох рівнань

$$\Phi = 0, \ \varphi = 0, \ \frac{\partial(\Phi, \varphi)}{\partial(a, b)} = 0$$

Але можна визначити $\frac{db}{da} = c$ і виключати a, b, c з чотирьох рівнань

$$\Phi = 0, \ \varphi = 0, \ \Phi'_a + c\Phi'_b = 0, \ \varphi'_a + c\varphi'_b = 0.$$

Можна ще інакше розглядати останнє рівнання

$$\Phi'_a \varphi'_b - \Phi'_b \varphi'_a = 0.$$

Його можна розглядати, як наслідок рівнань

$$\Phi'_a + \lambda\varphi'a = 0$$

$$\Phi'_b + \lambda\varphi'_b = 0$$

тобто частинні похідні від

$$\Phi + \lambda\varphi$$

по a, b як незалежним змінним.

Отже обгортку можна також дістати, як результат виключення a, b, λ з чотирьох рівнань

$$\Phi = 0, \ \varphi = 0, \ \Phi'_a + \lambda\varphi'_a = 0, \ \Phi'_b + \lambda\varphi'_b = 0.$$

Наприклад, обгортку еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

за умови

$$a^2+b^2=k^2$$

дістанемо з рівнань

$$-\frac{2x}{a^3}+\lambda\,.\,2q=0, \text{ або } -\frac{x^2}{a^3}+\lambda a=0$$

$$-\frac{2y}{b^3}+\lambda\,.\,2b=0 \qquad -\frac{y^2}{b^3}+\lambda b=0$$

Помножимо два рівнання відповідно на a, b і складемо, тоді

$$-1+\lambda k^2=0 \text{ т. т. } \lambda=\frac{1}{k^2}.$$

Отже

$$a^4=k^2x^2 \qquad a^2=\pm kx$$

$$b^4=k^2y^2 \qquad b^2=\pm ky$$

і зрештою

$$\pm x\pm y=k$$

є шукана обгортка.

§ 36. Застосовання теорії обгорток.

I. Теорема. Крива лінія — геометричне місце точок — є обгортка її дотичних.

В рівнані дотичної до кривої $y=f(x)$

$$Y-y=y'(X-x)=0$$

x можна вважати за параметр. Тоді диференціювання дає

$$-y'+y'-y''(X-x)=0 \qquad X=x\,(y''\neq 0)$$

і за рівнанням дотичної

$$Y=y.$$

Для обгортки дотичних характеристичною точкою є точка дотику, і тому обгортка є сама крива.

II. Теорема. Еволюта кривої є обгортка її нормалів.

Диференціюємо рівнання нормалі

$$X-x+y'(Y-y)=0$$

маємо

$$-1-y'^2+y''Y(-y)=0.$$

Отже

$$Y-y=\frac{1+y'^2}{y''},\ X-x=-y'\,\frac{1+y'^2}{y''}$$

це і є рівнання еволюти.

3. Знайти обгортку прямих, що відтинають на вісях координат трикутник сталої площі ($\equiv$ гіперболя).

4.— Обгортку поляр сталої точки відносно всіх софокусних еліпс та гіпербол (параболя).

5.— Обгортку еліпс із сталою сумою осей.

6.—Обгортку боку прямого кута, що його вершина рухається вздовж прямої, а другій бік проходить через сталу точку.

III. Задача про кавстики.

1) Кавстика відбивання. Хай із світлої точки $Q \equiv (a, b)$ виходять промені і, дійшовши кривої (C), відбиваються. Їхня обгортка називається кавстикою відбивання або катакавстикою кривої (C).

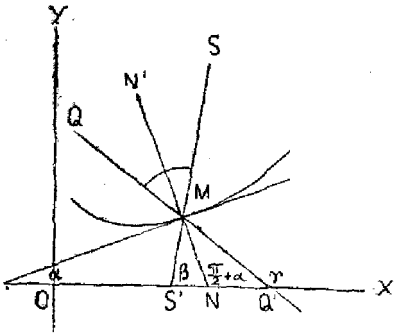


Рис. 43.

Кут α дотичної TM до (C) в точці її M, кут γ променя, що падає в M з світлої точки Q та β променя відбитого зв'язані за законом відбивання рівністю

$$\angle QMN' = \angle N'MS$$

тобто

$$\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta = \gamma - \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

звідкіль

$$\beta = \pi + 2\alpha - \gamma.$$

Зваживши, що

$$\operatorname{tg} \alpha = y' \text{ і } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2y'}{1 - y'^2}, \ \operatorname{tg} \gamma = \frac{y - b}{x - a}$$

І тому

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(2\alpha - \gamma) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{\dfrac{2y'}{1 - y'^2} - \dfrac{y - b}{x - a}}{1 + \dfrac{2(y - b)y'}{(x - a)(1 - y'^2)}}$$

дістанемо рівнання прямої

$$Y - y = \frac{2y'(x - a) - (y - b)(1 - y'^2)}{(x - a)(1 - y'^2) + 2(y - b)y'}(X - x),$$

або

$$[(x - a)(1 - y'^2) + 2(y - b)y'](Y - y) +$$
$$+ [(y - b)(1 - y'^2) - 2y'(x - a)](X - x) = 0.$$

Друге рівнання задачі є похідна від цього

$$[2(y-b)y''-2y'y''(x-a)+1+y'^2](Y-y)-$$
$$-[2y''(x-a+y'(y-b))+y'(1+y'^2)](X-x)+$$
$$+(1+y'^2)(y'(x-a)-(y-b))=0$$

y, y', y'' треба визначити через x за рівнанням кривої.

Коли Q зливається з O, маємо $a=0=b$.

Рівнання набувають форми

$$E:[x(1+y'^2)+2y'(y-y'x)]Y+[y(1+y'^2)-2y'(x+yy')]X=$$
$$=q(x+yy')(y-xy'),$$

$$E_a':[1+y'^2+2y''(y-xy')]Y+[-y'(1+y'^2)-2y''(x+yy')]X=$$
$$=q(y-xy')(1+y'^2)-2y''[x(x+yy')-y(y-xy')].$$

Розв'язуючи їх відносно X та Y дістанемо

$$X=2\frac{y'(y-xy')^2-y''x(x^2+y^2)}{(1+y'^2)(xy'-y)-2y''(x^2+y^2)},$$

$$Y=-2\frac{y''(x^2+y^2)y+(y-xy')^2}{(1+y'^2)(xy'-y)-2y''(x^2+y^2)}.$$

Приклад: Катакавстика кола відносно точки його периферії.

Хай світла точка міститься в початку координат: $Q\equiv(0,0)$, рівнання кола хай

$$x^2+y^2=2ax$$

$$x+yy'=a,\ y'=\frac{a-x}{y},\ 1+y'^2=\frac{a^2}{y^2},\ y-xy'=\frac{ax}{y},\ y''=-\frac{a^2}{y^3}.$$

Отже

$$X=\frac{2\left[\frac{a-x}{y}\cdot\frac{a^2x^2}{y^2}+\frac{a^2x}{y^3}\cdot 2ax\right]}{\left[-\frac{a^2}{y^2}\cdot\frac{ax}{y}+2\frac{a^2}{y^3}\cdot 2ax\right]}=\frac{2x}{3}\cdot\frac{3a-x}{a}$$

$$Y=-\frac{2\left[-\frac{a^2}{y^3}\cdot 2axy+\frac{a^2x^2}{y^2}\right]}{\left[-\frac{a^2}{y^2}\cdot\frac{ax}{y}+2\frac{a^2}{y^2}\cdot 2ax\right]}=\frac{2}{3}\cdot\frac{y^3}{ax}.$$

Включивши x, y за допомогою рівнання кола маємо остаточно

$$[x^2+y^2-2ax]^2+\frac{4a^2}{3}\left[x^2+y^2-\frac{16ax}{9}\right]=0,$$

це є Паскалів равлик.

2) Каустика переломлення (діякаустика).

Хай $Q\equiv(a, b)$ світла точка (для спрощення обчислень потім віднесемо її до початку координат).

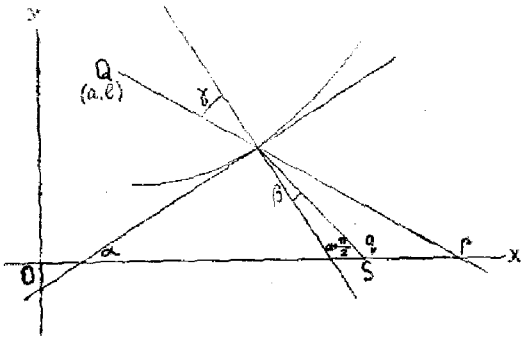


Рис. 44.

За законом переломлення промінь, що падає, і промінь переломлений утворюють з нормалею кривої в точці падання такі кути, яких синуси мають стале відношення (= показникові переломлення), — хай n.

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=n,$$

або

$$\sin\beta=n\sin\gamma.$$

Тому

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{n\sin\gamma}{\sqrt{1-n^2\sin^2\gamma}}=\frac{n\operatorname{tang}\gamma}{\sqrt{1+(1-n^2)\operatorname{tg}^2\gamma}}$$

Хай M — точка кривої $y=f(x)$, що є границею середовища переломлення, p — кут QM з OX:

$$\operatorname{tang}p=\frac{y-b}{x-a},\quad p=\alpha+\gamma+\frac{\pi}{2}$$

кут променя переломленого з віссю X-ів хай q

$$q=\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta,\ \operatorname{tang}q=\operatorname{cotg}(\alpha-\beta).$$

Отже

$$MS=\frac{Y-y}{X-x}=\operatorname{cotg}(\beta-\alpha)=\frac{1+y'\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta-y'}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\gamma)=-\operatorname{cotg}p=-\frac{x-a}{y-b}$$

з другого боку

$$\operatorname{tg}(\alpha+\gamma)=\frac{y'+\operatorname{tg}\gamma}{1-y'\operatorname{tg}\gamma}.$$

Коли взяти, щоб спростити перетворення, $a=b=0$, то

$$yy'+y\operatorname{tg}\gamma+x-xy'-xy'\operatorname{tg}\gamma=0.\therefore \operatorname{tg}\gamma=\frac{x+yy'}{xy'-y}$$

Отже

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{n(x+yy')}{\sqrt{(xy'-y)^2+(1-n^2)(x+yy')^2}}=$$

$$=\frac{n(x+yy')}{\sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)-n^2(x+yy')^2}}$$

$$Y-y=\frac{1+y'\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta-y^2}(X-x)$$

Діякавстика є обгорткою цих прямих.

Приклади.

1. Діякавстика прямої $y=k$ для пучка променів, що виходять з початку координат.

Маємо

$$y'=0,\ \operatorname{tg}\beta=\frac{nx}{\sqrt{x^2(1-n^2)+k^2}}=\frac{nx}{r}$$

Коли для спрощення

$$r=\sqrt{x^2(1-n^2)+k^2}$$

тоді

$$r'=\frac{x(1-n^2)}{r}$$

Промінь переломленний

$$nx(Y-k)-r(X-x)=0.$$

Його похідна по x:

$$n(Y-k)-r'(X-x)+r=0.$$

Звідсіль

$$Y-k=\frac{r^2}{n(xr'-r)},\ X-x=\frac{rx}{xr'-r}$$

але

$$xr'-r=\frac{x^2(1-n^2)-r}{r}=-\frac{k^2}{r}$$

тому

$$Y-k=-\frac{r^2}{nk^2},\ X-x=-\frac{xr^2}{k^2},\ X=x\frac{k^2-r^2}{k^2}=-\frac{x^3(1-n^2)}{k^2}$$

а значит:

$$[(Y-k).nk^2)]^{\frac{2}{3}}=r^2,\ \left(\frac{k^2X}{1-n^2}\right)^{\frac{2}{3}}=x^2$$

Але

$$r^2-x^2(1-n^2)=k^2.$$

отже остаточно

$$(Y-k)^{\frac{2}{3}}k^{\frac{4}{3}}n^{\frac{2}{3}}-\frac{X^{\frac{2}{3}}k^{\frac{4}{3}}}{(1-n^2)^{\frac{2}{3}}}(1-n^2)=k^2$$

або

$$[n(Y-k)]^{\frac{2}{3}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{(1-n^2)^{\frac{1}{3}}}=k^{\frac{1}{3}}$$

Це є еволюта кривої другого порядку, що має фокус у світлій точці.

2. Діякавстика (і катакавстика) логаритмічної спіралі відносно полюса є також логаритмічна спираль.

Розділ II.

Теорія кривих і поверхонь у просторі.

§ 1. Означення. Види рівнань поверхні та кривої в просторі.

Положення точки в просторі визначається трьома координатами. Якщо ці три координати зв'язані поміж себе одним співвідношенням, то дві координати з цих трьох можна вважати за довільні і їм можна надавати всіляких значень, а третя координата, через згадану залежність, дістає певних значень відповідно до кожної пари значень перших двох. Хай дано в системі прямокутних координат, напр., рівнання.

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

Взявши якунебудь пару значень для x та y, тобто якунебудь точку площини XOY, за (1)-м дістанемо для z певне значення, і, тому, на перпендикулярі до площини XOY, що його піднесено в точці (x, y, z), визначимо певну точку, віддалену саме на те значення z від площини XOY. Ввесь збір цих точок дає поверхню. — Але поверхню можна ще задати рівнанням виду

$$F(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

що не розв'язане відносно z, або, на останнє, всі три координати можна визначати, як функції двох, незалежних змінних, які позначімо, наприклад, через u та v. Тоді

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = X(u, v). \tag{3}$$

будуть рівнання поверхні в параметричній формі. Останньої форми найчастіше вживають у теорії поверхонь; — перша є частинним випадком останньої, коли

$$x = u,\ y = v,\ z = f(u, v).$$

Якщо ж x, y, z є функції лише однієї змінної, напр.

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t). \tag{4}$$

то маємо не поверхню, а лінію в просторі.

Виключення з (4) t дає, кажучи взагалі, двоє співвідношень поміж x, y, z

$$\Phi(x, y, z) = 0, \ \Psi(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

і через це крива визначається як перетин двох поверхонь. Але не всяку криву можна визначити, як повний перетин двох поверхонь. От, якщо перетинаються два конуси 2-го порядку так, що мають спільну твірну, то лінія їх перетину складається з цієї твірної та ще з кривої. І, значить, ця остання не буде повним перетином двох поверхонь. Справді, довільна площина перетинає кожну з конічних поверхонь по кривій 2-го порядку, а ці дві криві перетинаються в 4-х точках, з яких одна завжди є слід твірної на січній площині. Отже на долю кривої перетину обох конусів залишається лише 3 точки. Маємо, значить, криву, що з довільною площиною перетинається в 3-х точках. А що порядком кривої в просторі називают число точок її перетину з довільною площиною, то ми можемо сказати, що крива перетину зазначених конусів є крива 3-го порядку. Вона зветься косим конічним січенням.

Рівнання (4) можуть визначати й плоску криву.

Для цього треба й досить, щоб існували такі чотири сталі величини A, B, C, D, за яких рівнання площини

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

справджувалося б заміною x, y, z їх виразами (4) для довільного t, тобто мусить існувати тотожність:

$$A\varphi(t) + B\psi(t) + C\chi(t) + D \equiv 0.$$

Взявши від цієї тотожности тричі похідну по t, дістанемо:

$$A\varphi'(t) + B\psi'(t) + C\chi'(t) = 0.$$
$$A\varphi''(t) + B\psi''(t) + C\chi''(t) = 0.$$
$$A\varphi'''(t) + B\psi'''(t) + C\chi'''(t) = 0.$$

Щоб ці рівнання були сумісні при відмінних від нуля коефіцієнтах A, B, C треба, щоб дорівнював нулеві детермінант

$$\begin{vmatrix} \varphi' & \psi' & \chi' \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' \\ \varphi''' & \psi''' & \chi''' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{тобто} \quad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Це і є доконечна умова того, що крива плоска. Покажімо, що вона є й достатня. Справді, завжди можна знайти такі A, B, C як функції t, щоб справджувались співвідношення

$$A\varphi' + B\psi' + C\chi' = 0 \tag{6a}$$

$$A\varphi'' + B\psi'' + C\chi'' = 0 \tag{6b}$$

За наявности (6) ці функції є такі, що також

$$A\varphi''' + B\psi''' C\chi''' = 0 \tag{6c}$$

Продиференціювавши (6a) та взявши на увагу (6b) маємо

$$A'\varphi' + B'\psi' + C'\chi' = 0. \tag{6d}$$

Продиференціювавши (6b), з-за рівности (6c), маємо

$$A'\varphi'' + B'\psi'' + C'\chi'' = 0. \tag{6e}$$

З рівнання (6d, e) та (6a, b) виходить, що

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$$

Звідсіль, якщо ні одна з функцій A, B, C не є нуль, мусить бути

$$(\log A)' = (\log B)' = (\log C)'$$

тобто

$$\log A = \log C + \log a$$

$$\log B = \log C + \log b,$$

де a та b сталі. Але тоді, за всякого t. функції φ, ψ, χ справджують тотожність

$$a\varphi' + b\psi' + \chi' = 0$$

при a та b сталих, тобто існує така площина

$$ax + by + z = c$$

в якій містяться всі точки кривої. Залишилось розібрати випадок, коли одна з функцій A, B, C, напр. C дорівнює нулеві. Але тоді дорівнює нулеві пропорційний до неї мінор: тобто

$$\frac{y''}{y'} = \frac{x''}{x'}, \text{ або } \lg y' = \lg x' + \lg c, \text{ або } y' = cx' \text{ і } y = cx + c',$$

тобто знов φ та ψ такі, що точки кривої містяться в площині

$$y = cx + c'.$$

Зауважимо, що той випадок, коли одну з координат, напр. x, узято за зміну незалежну, є окремим випадком рівнань (4); тоді (4) зводяться на такі

$$y = \psi(x), \quad z = \chi(x). \tag{7}$$

Такі самі види рівнань поверхні й кривої матимемо й за всякої іншої системи координат. Про характер функцій, що входять у склад рівнань (4) або (7) можна зробити ті самі зауваження, які зроблено було відносно плоских кривих: ми беремо такі криві та поверхні, для яких функції, що входять у рівнання, мають похідні 1-го, 2-го, 3-го порядків і які лише в окремих точках можуть ставати безконечно-великі; ці точки ми залишаємо поза розглядом. Крім того, ми називаємо **звичайними** ті точки, для яких x', y', z' (відповідно E'_x, E'_y, E'_z) разом не дорівнюють нулеві.

Приклади поверхонь.

1) Поверхня хвилі

$$\frac{a^2x^2}{a^2-r^2}+\frac{b^2y^2}{b^2-r^2}+\frac{c^2z^2}{c^2-r^2}=0$$

де

$$r^2=x^2+y^2+z^2,$$

або

$$0=(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-[a^2x^2(b^2+c^2)+$$
$$+b^2y^2(c^2+a^2)+c^2z^2(a^2+b^2)+a^2b^2c^2.]$$

2) Ґвинтова поверхня — геометричне місце перпендикулярів, спущених з точок ґвинтової лінії на її вісь

$$y=x\operatorname{tang}\frac{z}{c},$$

або

$$z=c\,.\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{y}{x}\right)$$

3) Катеноїд = поверхня, що утворюється обертанням ланцюгової лінії (лінії провісу) навколо її основи

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right)^2,\text{ або } z=a\log\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a}$$

4) поверхня, для якої об'єм паралелепіпеда, що утворюється площинами координат та площинами проєктування точки (x, y, z) на вісі, є величина стала: $[xyz=a^3.$

5) **Тор** (поверхня, що утворюється обертанням кола відносно вісі, що міститься в його площині, **але не проходить через центр**

$$(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2-4b^2(x^2+y^2)=0.$$

6) Поверхня обертання кривої $z=f(x)$ навколо вісі z-ів

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

7) Поверхня обертання кривої

$$x = \varphi(z),\ y = \psi(z)$$

навколо вісі z-ів

$$x^2 + y^2 = \varphi(z)^2 + \psi(z)^2$$

8) Циліндроїд Ball'a (геометричне місце осей пучка лінійних комплексів)

$$z.(x^2 + y^2) - (b - a)xy = 0.$$

Приклади кривих подвійної кривини.

1) Кривих 2-го степеня крім плоских конічних січень не існує. Справді, хай

$$x = at^2 + bt + c,\ y = a't^2 + b't + c',\ z = a''t^2 + b''t + c''.$$

Можна завжди знайти сталі u, v, w, $\tilde{\omega}$, щоб тотожно справджувалось

$$ux + vy + wz + \tilde{\omega} = 0,$$

заміною x, y, z вищезазначеними функціями. Справді, для цього мусить бути

$$au + a'v + a''w = 0,\ bu + b'v + b''w = 0,\ cu + c'v + c''w + \omega = 0.$$

2) Косе конічне січення. Якщо φ, ψ, χ є многочлени 3-го степеню, то дістанемо або плоску криву 3-го порядку, або косе конічне січення.

З безконечно-далекою площиною ця крива може мати: I одну реальну і дві уявні спряжені точки перетину (тип: кубічна еліпса); II — три реальні й різні точки (— кубічна гіперболя); III — одну просту й одну двійну точку перетину (— кубічна гіперболічна параболя) та IV — трійну точку перетину (кубічна параболя Seydewitz'a). Cremona дає для цих кривих у косокутних координатах рівнання

$$x = \frac{at^3}{(\alpha - t)^2 - \beta},\ y = \frac{bt^2}{(\alpha - t)^2 - \beta},\ z = \frac{ct}{(\alpha - t)^2 - \beta}$$

3) Сфероконіки — перетин конуса 2-го порядку з сферою, центр якої міститься в вершині конуса, наз. сферичною еліпсою

$$x^2 + y^2 + z^2 = a_1^2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

4) Ґвинтова лінія на прямому круговому циліндрі утворює сталий кут з його твірними:

$$x = a \cos t$$
$$y = a \sin t$$
$$z = m.at$$

5) Конічна ґвинтова лінія перетинає під сталим кутом γ твірні прямого кругового конуса:

$$x = \rho_0 e^{k\theta} \cos\theta \sin\gamma, \quad y = \rho_0 e^{k\theta} \sin\theta \sin\gamma, \quad z = \rho_0 e^{k\theta} \cos\gamma,$$

і є перетин кругового конуса

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\gamma$$

та прямого циліндру, що має за основу логаритмічну спіралю

$$\rho = \rho_0 \sin\gamma \,.\, e^{k\theta}.$$

А. Криві в просторі.

§ 2. Довжина дуги та елементи дуги.

Хай дано якусь криву в просторі (вважаємо її за безперервну); візьмім на ній дві точки A та B і з'єднаймо їх прямою; тоді дістанемо, що шлях від A до B прямою AB буде коротший за всякий інший, а значить і за шлях вздовж кривої. Якщо взяти між A та B декілька точок, напр. дві — C та D — то довжина L_1 ламаної $ACDB$ буде більшою за $AB = L_0$. Взявши знов точки на кривій між A та C, між C та D, між D та B і з'єднавши їх послідовно відтинками прямої, дістанемо нову ламану, якої довжина L_2, буде більша за L_1.

Рис. 45.

Продовжуючи далі той же самий процес, виміряючи щоразу периметри ламаних ліній, що утворюємо, ми дістанемо ряд висхідних чисел $L_0 < L_1 < L_2 < \ldots$ Якщо цей ряд має границю, то цю границю ми й назвемо довжиною дуги кривої AB. Окремий бік ламаної лінії, коли число цих боків стає будьяк великий, а кожний бік будьяк малий, назвемо елементом дуги і позначимо ds.

Якщо x, y, z координати початку цього елемента, то проекції його на осі будуть dx, dy, dz і значить

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \qquad 8$$

Косинуси кутів, що цей елемент творить з осями координат, визначаться відношеннями

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\ \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\ \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

Якщо крива міститься на поверхні, то диференціяли dx, dy, dz для її точок не довільні, а зв'язані співвідношенням $dF=0$ і мусять вдовольняти умові

$$F'_x\,dx+F'y\,dy+F'_z=0.$$

Якщо ж поверхню задано рівнаннями в параметричній формі (3), то

$$\begin{aligned} dx &= x'_u\,du+x'_v\,dv \\ dy &= y'_u\,du+y'_v\,dv \\ dz &= z'_u\,du+z'_v\,dv. \end{aligned}$$

Значить, елемент визначиться

$$ds^2=E\,du^2+2F du\,dv+Gdv^2 \tag{9}$$

якщо позначити за Ґавсом

$$\left.\begin{aligned} E &= x'^2_u+y'^2_u+z'^2_u \\ F &= x'_u x'_v+y'_u y'_v+z'_u z'_v \\ G &= x'^2_v+y'^2_v+z'^2_v \end{aligned}\right\} \tag{10}.$$

Зокрема якщо поверхню задано рівнанням виду (1), то

$$E=1+p^2,\ F=pq,\ G=1+q^2$$

і елемент дуги:

$$ds^2=(1+p^2)\,dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)\,dy^2.$$

За Ойлеровою тотожністю маємо:

$$EG-F^2=(y'_u z'_v-z'_u y'_v)^2+(z'_u x'_v-x'_u z'_v)^2+(x'_u y'_v-x'_v y'_u)^2$$

Отже

$$EG-F^2>0,\ F^2-EG<0$$

і тому не існує реальних значень відношення dv/du, за яких би ds^2 знищувалось, а тому права частина виразу для ds^2 не розкладається на добуток двох лінійних відносно du, dv множників з реальними коефіцієнтами і через те не існує таких реальних напрямів на поверхні, для яких би $ds^2=0$. Але дорівнявши ds^2 нулеві, ми дістаємо в кожній точці поверхні два уявних напрями, що огинають дві системи ліній (уявних), які називаються мінімальними.

В дальшому приймаємо, що $ds^2\neq 0$.

§ 3. Дотична пряка дотична площина.

Візьмім на кривій (4) точку M, що відповідає значенню параметра t і близьку до неї M_1, відповідну параметрові $t+\Delta t$. Рівнання прямої $MM'E$

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z}$$

де

$$\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(x)=\varphi'(t)\Delta t+\varphi''(t+\theta'\Delta t)\frac{\Delta t^2}{2}$$

$$\Delta y=\psi(t+\Delta t)-\psi(x)=\psi'(t)\Delta t+\psi''(t+\theta''\Delta t)\frac{\Delta t^2}{2}$$

$$\Delta z=\chi(t+\Delta t)-\chi(x)=\chi'(t)\Delta t+\chi''(t+\theta'''\Delta t)\frac{\Delta t^2}{2}$$

Увівши ці значення Δx, Δy, Δz у рівнання прямої та помноживши всі відношення на Δt дістанемо:

$$\frac{X-x}{\varphi'+\varphi''(t+\theta'\Delta t)\frac{\Delta t}{2}}=\frac{Y-y}{\psi'+\psi''(t+\theta''\Delta t)\frac{\Delta t}{2}}=$$

$$=\frac{Z-z}{\chi'+\chi''(t+\theta'''\Delta t)\frac{\Delta t}{2}}$$

Перейдімо до границь, за умови що M' наближається злитися з M: $\Delta t\to 0$. Рівнання набудуть вигляду

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'} \tag{11}$$

Косинуси кутів цієї прямої з осями є:

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=\frac{dz}{ds}$$

Ця пряма буде містити не тільки точку (x, y, z), але й увесь суміжний з нею елемент дуги кривої. Вона називається **дотичною** до кривої, а (x, y, z) — точкою дотику. Рівнання дотичної ми дістали тим самим способом, яким діставали рівнання до-

тичної плоскої кривої. Для того, щоб дотична в точці (x, y, z) існувала, треба, щоб функції φ, ψ, χ мали для відповідного значення параметра t певну похідну. Якщо криву задано рівняннями виду (5), то вважаючи їх за результат виключення t з рівнань (4), ми мусимо дістати тотожності після підстановки до них виразів для x, y, z через t.

Тому, похідні від лівих частин (5), які взято за такого припущення, мусять тотожно дорівнювати нулеві, тобто

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \varphi'_x\ x' + \varphi'_y\ y' + \varphi'_z\ z' = 0 \\ \frac{d\psi}{dt} &= \psi'_x\ x' + \psi'_y\ y' + \psi_z\ z' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Звідціль x', y', z' пропорційні детермінантам 2-го порядку, складаним з коефіцієнтів рівнань (12)

$$\frac{x'}{\varphi'_y\psi'_z - \varphi'_z\psi'_y} = \frac{y'}{\varphi'_z\psi'_x - \varphi'_x\psi'_z} = \frac{z'}{\varphi'_x\psi'_y - \varphi'_y\psi'_x} \tag{13}$$

Ми дійдемо того самого результату, поділивши (12) на одну з похідних, напр. x' розв'язавши їх відносно

$$\frac{y'}{x'} \text{ і } \frac{z'}{x'}$$

Порівнявши (13) та (11) дістанемо рівняння дотичної до кривої, яку задано рівняннями (5)

$$\frac{X - x}{\varphi'_y\psi'_z - \varphi'_z\psi'_y} = \frac{Y - y}{\varphi'_z\psi'_x - \varphi'_x\psi'_z} = \frac{Z - z}{\varphi'_x\psi'_y - \varphi'_x\psi'_y} \tag{14}$$

Але можна й безпосередньо замінити в (12) x', y', z' через пропорційні до них за (11) величини $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ і так дістати рівняння

$$\begin{aligned} \varphi_x\ (X - x) + \varphi'_y\ (Y - y) + \varphi'_z\ (Z - z) &= 0 \\ \psi'_x(X - x) + \psi'_y(Y - y) + \psi'_z(Z - z) &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Розв'язавши сумісно ці рівняння відносно $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ знов дістанемо рівняння (14). Отже рівняння (15) також визначають дотичну до кривої (5), і саме як перетин двох площин, що проходять через точку дотику (x, y, z).

Уявім тепер, що зберігаючи поверхню $\phi(x, y, z) = 0$ незмінною ми брали б такі різні поверхні $\psi(x, y, z) = 0$, що проходили б через узяту нами точку і які, значить, перетинали б поверхню

$\phi(x, y, z) = 0$ по кривих, що також проходять через цю точку. Тоді з двох рівнань (15), що при цьому щоразу будуть визначати дотичну до кривої перетину, перше рівнання залишається незмінне. Отже, воно визначає площину, що містить дотичні до всіляких кривих, проведених на поверхні $\phi(x, y, z) = 0$ через узяту точку. Цю площину називають дотичною площиною поверхні $\phi = 0$ в точці її (x, y, z).

Рівнання дотичної площини можна дістати безпосередньо, виходячи з означення її, як геометричного місця дотичних до всіх кривих, нарисованих на поверхні, і які всі проходять через точку її $M \equiv (x, y, z)$.

Пряма, що проходить через M, визначається рівнанням

$$\frac{X-x}{l} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-z}{n} = \rho \quad (l^2 + m^2 + n^2 = 1).$$

Звідціль

$$X = x + l.\rho, \; Y = y + m.\rho, \; Z = z + n.\rho$$

Точки перетину її з поверхнею

$$\phi(x, y, z) = 0$$

визначаються тими значіннями ρ, що справджують рівнання

$$\phi(x + l\rho, \; y + m\rho, \; z + n\rho) = 0.$$

Розгорнувши ліву частину за вахідними степенями дістанемо

$$0 = \phi(x, y, z) + \rho(l\phi'_x + m\phi'_y + n\phi'_z) +$$

$$+ \frac{\rho^2}{1.2}(l^2\phi''_{xx} + m^2\phi''_{yy} + \ldots 2mn\phi''_{yz}) +$$

Якщо M міститься на поверхні, вільний член є нуль і рівнання має один корінь $\rho = 0$. Якщо стає нулем і коефіцієнт при ρ:

$$l\phi'_x + m\phi'_y + n\phi'_z = 0$$

то рівнання має двійний корінь $\rho = 0$ і відповідна пряма матиме з поверхнею дві спільні злиті точки, тобто дотикається поверхні. Геометричне місце всіх цих прямих дістанемо, замінивши в попередній умові дотику величини l, m, n на пропорційні до них за рівнанням прямої величинами $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, що й приводить до рівнання (15).

§ 4. Дотик кривої з поверхнею.

Означення. Візьмім якунебудь поверхню (F) і якусь криву (C), мають спільну точку $M(x, y, z)$. Будемо казати, що крива (C) має з поверхнею (F) дотик n-го порядку, якщо взявши на (C) точку M', безконечно-близьку до M, і провівши через M пряму не паралельну дотичній площині поверхні в точці M, до зустрічі її з поверхнею в точці M'', ми дістанемо, що відтинок $M'M''$ є безконечно-мала порядку $(n+1)$-го відносно віддалі MM'

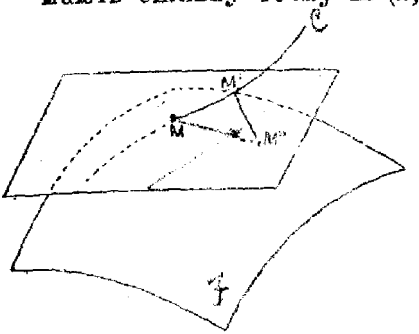


Рис. 2.

Хай поверхню (F) визначено рівнанням

$$F(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

а криву (C) рівнанням у параметричній формі

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t). \tag{4}$$

Наведене вище означення дотику $(n+1)$-го порядку призводить до таких аналітичних критеріїв.

Хай M' має координати x_1, y_1, z_1 і відповідає значенню t_1 параметра t. Хай $\overline{M'M''} = d$ і λ, μ, ν є косинуси кутів $M'M''$ з осями координат. Тоді координати точки M'' є

$$x = x_1 + \lambda d,\ y = y_1 + \mu d,\ z = z_1 + \nu d.$$

Вони мусять вдовольняти рівнання (2), значить

$$O = F(x_1 + \lambda d,\ y_1 + \mu d,\ z_1 + \nu d).$$

Розгорнувши праву частину в Тейлорів ряд, дістанемо:

$$O = F(x_1, y_1, z_1) + d.\left(\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1} + \nu F'_{z_1}\right) + d^{2\prime} = \Sigma.$$

де $d^{2\prime}.\Sigma$ позначає суму таких членів, що містять d в степенях 2-ій та вище. Точка M' за припущенням є безконечно близька до M; тому головна частина множника при d, тобто головна частина

$$\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1} + \nu F'_{z_1}$$

дорівнює

$$\lambda F'_x + \mu F'_y + \nu F'_z$$

і значить відмінна від нуля. Справді, остання величина є пропорційна до косинуса кута $M'M''$ з перпендикуляром до дотичної площини поверхні (2) в точці M і, значить, відмінна від нуля, бо за умови цей кут відмінний від прямого. Тому, щоб рівнання (16) справджувалось, треба щоб

$$F(x_1, y_1, z_1)$$

та d були членами одного виміру. Але

$$d = MM' = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} =$$
$$= (t_1 - t)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 + \varepsilon}$$

де ε прямує до нуля разом з $(t_1 - t)$. Тому, щоб d було $(n+1)$-го порядку малости відносно MM' треба, щоб результат підстановлення в рівнання поверхні координат точки M', безконечно-близької до M і такої, що міститься на (C), був би $(n+1)$-го порядку відносно різниці значень параметра t та t_1, що відповідають точкам M та M'.

Значить, коли розгорнути

$$F(x_1, y_1, z_1) \equiv F(\varphi(t + (t_1 - t)), \psi(t + (t_1 - t)), \chi(t + (t_1 - t)$$

за степенями $(t_1 - t)$, то в розгортанні мусять знищитись всі члени, що містять $(t_1 - t)$ у степенях нижчих за $(n+1)$-й.

Отже, якщо

$$F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \equiv \Delta(t)$$

то для наявности дотику n-го порядку треба, щоб справджувались $(n+1)$ таких умов

$$\Delta(t) = 0,\ \Delta'(t) = 0,\ \Delta''(t) = 0, \ldots\ \Delta^{(n)}(t) = 0.$$

§ 5. Щільнодотична площина.

Рівнання площини

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

містить три довільні сталі,—відношення трьох коефіцієнтів до 4-го. Тому, щоб площина мала з кривою дотик якнайвищого порядку, можна накласти три умови, тобто площина може мати з кривою дотик 2-го порядку; для цього треба справдити умови

$$\begin{gathered} Ax + By + Cz + D = 0 \text{ (a)},\ Ax' + By' + Cz' = 0 \text{ (b)} \\ Ax'' + By'' + Cz'' = 0 \text{ (c)} \end{gathered} \tag{17}$$

за (4) x, y, z вважаємо за функції t.

Виключивши D з рівнання площини з допомогою рівнання (17a) дістанемо:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0 \tag{17d}$$

умови (17b) та (17c) дадуть

$$\frac{A}{y'y''-z'y''}=\frac{B}{z'x''-x'z''}=\frac{C}{x'y''-y''x''}$$

Підставивши в (17d) замість A, B C ці пропорційні до них величини, дістанемо рівнання площини, що має з кривою дотик 2-го порядку:

$$\begin{gathered}(y'z''-z'y'')(X-x)+(z'x''-x'z'')(Y-y)+\\+(x'y''-y'x'')(Z-z)\end{gathered} \tag{18}$$

або в формі детермінанта

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0. \tag{18'}$$

Ця площина називається щільнодотичною площиною кривої (C) в точці M.

Для дотичної прямої

$$X-x,\ Y-y,\ Z-z$$

за (11), пропрорційні x', y', z'; тому координати кожної точки дотичної до (C) в M справджують (18): щільнодотична площина проходить через дотичну пряму.

Можна дістати рівнання щільнодотичної площини, виходячи з цього останнього факту. Через дотичну, як і через будь-яку пряму можна провести скільки завгодно площин. Можна вважати, що кожна з цих площин проходить не тільки через дотичну, а й ще через якусь точку M' (x_1, y_1, z_1) кривої. Хай тепер M' наближається до точки дотику M (x, y, z). Граничне положення, до якого прямує площина, про яку мовимо, і є щільнодотична площина. Справді, рівнання площини, що проходить через дотичну й точку (x_1, y_1, z_1) є

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ x_1-x, & y_1-y, & z_1-z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}=0$$

але

$$x_1-x=x'\Delta t+\frac{x''}{1\,.\,2}\Delta t^2+ \qquad (t_1-t=\Delta t).$$

$$x_1 - x,\ y_1 - y,\ z_1 - z$$

в детермінант і віднявши з елементів 2-го рядка відповідні елементи 3-го помножені Δt, скоротимо на

$$\frac{1}{1 \cdot 2} \Delta t^2.$$

Коли перейдемо до границь за умови $\Delta t \to 0$, дістанемо (18″).

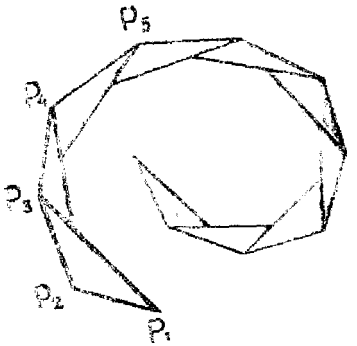


Рис. 3.

Щоб краще уявити собі взаємне положення щільнодотичних площин точок кривої в просторі візьмемо рядок точок

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$$

досить близьких. Через кожні три послідовні точки, тобто

$$P_1 P_2 P_3,\ P_2 P_3 P_4,\ P_3 P_4 P_5$$

і т. д. проводимо площини, що можна зобразити відповідними трикутниками.

Маємо фігуру, що схематично дає рис. 3. Тепер уявімо, що точки $P_1, P_2, \ldots$ зближаються й у границі збігаються. Послідовні площини стають щільнодотичні й, отже, коли точка рухається вздовж кривої, то її щільнодотична площина, що проходить завжди через відповідну дотичну, не переноситься поступово але разом із тим обертається навколо дотичної.

Клясифікація точок кривої за Staudt'ом.

Можна поставити за мету виявити розположення кривої навколо своєї (звичайної або особливої) точки.

Основний тріедр ділить простір навколо взятої точки на 8 октантів. Аналогічно тому, як і для плоских кривих, можна припустити, що після першого октанту крива у взятій точці переходить у один з 8 октантів. Це відповідає 8-ми можливим випадкам. — На увагу треба обрати, крім руху точки (P) та відповідної дотичної (T), ще й щільнодотичну площину (OE).

Позначімо $+$ (плюсом) поняття „продовжує“, тобто той випадок, коли точка (P) продовжує рухатись (триває) в тому ж напрямі, дотична повертається в щільнодотичній площині (OE) навколо точки, щільнодотична площина продовжує повертатися

в тому ж напрямі. Навпаки знак „—" (мінус) хай позначає „зупинку" й рух у зворотньому напрямі.

Ось які тоді можуть бути різні можливі випадки поведінки кривої поблизу своєї точки.

	P	T	OE	N	P	T	OE
1	+	+	+	5	—	+	+
2	+	+	—	6	—	+	—
3	+	—	+	7	—	—	+
4	+	—	—	8	—	—	—

Ця клясифікація належить Staudt'у (Geometrie der Lage).

§ 6. Нормальна площина, головна нормаля та бінормаля.

Плоска крива має в кожній точці одну нормалю. Крива в просторі має їх безліч. Всі вони містяться в площині, що проходить через точку перпендикулярно до дотичної. Ця площина називається нормальною площиною. Її рівняння.

$$x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0 \tag{19}$$

Вона перетинає щільнодотичну площину по прямій, що проходить через точку $M\equiv(x, y, z)$, і що називається головною нормалею. Рівняння головної нормалі визначається системою рівнань (17) та (18) або, якщо розв'язати їх відносно $X-x$, $Y-y$, $Z-z$.

$$\frac{X-x}{Bz'-Cy'}=\frac{Y-y}{Cx'-Az'}=\frac{Z-z}{Ay'-Bx'} \tag{20}$$

де A, B, C позначають коефіцієнти в рівнанні щільнодотичної площини. Друга знаменна нормаля є перпендикуляр до щільнодотичної площини в точці дотику. Вона називається бінормалею. Її рівняння є

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C} \tag{21}$$

Наостанне площина, що проходить через дотичну та бінормалю, називається випрямною площиною. Її рівняння

$$(Bz'-Cy')(X-x)+(Cx'-Az')(Y-y)+$$
$$+(Ay'-Bx')(Z-z)=0$$

§ 7. Кривина та скрут. Сферична індикатриса.

Подібно до того, як і для плоских кривих, за міру відхилу просторової кривої від прямої, тобто за міру кривини, можна взяти відношення кута між двома безконечно-близькими дотичними до дуги кривої між точками дотику. Назвавши зазначений кут (=кут суміжности) через ε дістанемо:

$$k = \frac{\varepsilon}{ds} \tag{23}$$

є міра кривини.

Та крім цього кута суміжности, що є кутом поміж двох послідовних елементів кривої і що фігурує і в плоских кривих, просторові криві приводять до іншого, нового поняття.

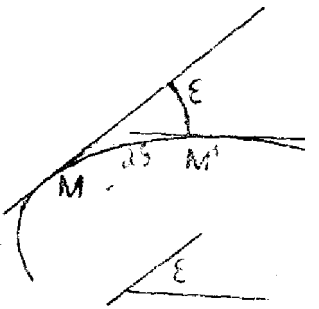


Рис. 49.

У плоскої кривої і третій елемент і всі інші дальші містяться в одній, тій самій площині. Просторова крива не вкладається (взагалі) в площині і з переходом від точки P_1 до P_2 (див. рис. 3, с. 139) діставатимемо нову щільнодотичну площину. Кут поміж двох безконечно-близьких щільнодотичних площин характеризує відхил кривої від площини, від площинности. Його називають **кутом скруту кривої**, а **мірою скруту** або **мірою другої кривини** називають відношення кута скруту до елемента дуги MM'. Отже

$$k' = \frac{\tau}{ds} \tag{24}$$

якщо τ є кут скруту. Звідціль і походить назва просторових кривих **кривими подвійної кривини** (Clairaut) і величини (23) мірою **першої кривини**, а (24) мірою **другої кривини**.

Щоб дістати аналітичні вирази для першої та другої кривини, зручно завести поняття про так звану **сферичну індикатрису**.

Уявім собі систему прямих, що задано рівнаннями

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c}$$

або ж

$$x = mz + p,\ y = nz + q,$$

коефіцієнти яких залежать лише від одного параметра. Щоб схарактеризувати зміни напряму цих прямих зі зміною параметра, будемо проводити через якусь одну довільну точку простора, напр. через початок координат, прямі, паралельні з прямими системи. Ці допоміжні прямі утворять якусь конічну поверхню. Якщо з тої самої точки, як з центра, проведемо сферичну поверхню з радіюсом $=1$, то вона перетне зазначену вище конічну поверхню по кривій, що й називається сферичною індикатрисою для взятої системи прямих.

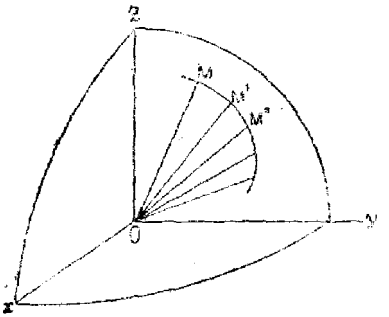


Рис. 50.

Кут поміж двох безконечно-близьких прямих виміряється дугою сферичної індикатриси поміж двома точками, в яких ті дві прямі перетинають сферичну поверхню, бо безконечно малу дугу можна утотожнювати з дугою великого кола сфери, що з'єднує ці точки.

Збір дотичних, або головних нормалів, або бінормалів кривої подвійної кривини є така система прямих.

1. **Сферична індикатриса дотичних** є крива

$$\xi=\alpha,\ \eta=\beta,\ \zeta=\gamma.$$

Якщо $d\sigma$ є елемент її дуги, то $\varepsilon=d\sigma$ і міра першої кривини

$$(25)\quad k=\frac{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2}}{ds}\ \text{ і }\ k^2=\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2$$

Обернута величина називається радіюсом першої кривини (як переєвідчимося далі, йому відповідає коло кривини). Отже

$$\frac{1}{r^2}=\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2 \qquad 25')$$

Якщо за незалежне змінне взяти дугу, то

$$\alpha=\frac{dx}{ds},\ \beta=\frac{dy}{ds},\ \gamma=\frac{dz}{ds}$$

Отже
$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d\beta}{ds}=\frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d\gamma}{ds}=\frac{d^2z}{ds^2}$$

для радіюса кривини дістаємо дуже простий вираз

$$\frac{1}{r^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 \qquad 25'')$$

Якщо ж незалежна змінна не є дуга, а яка інша, то

$$\alpha=\frac{x'}{s'},\ \frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\left(\frac{x'}{s'}\right)}{s'dt}=\frac{x''s'-s''x'}{s'^3},\ \frac{d\beta}{ds}=\frac{y''s'-y's''}{s'^3},\ \frac{d\gamma}{ds}=\frac{z''s-z's''}{s'^3}$$

і $$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{s'^6}\left[(x''s'-s''x')^2+(y''s'-s''y')^2+(z''s'-s'z'')^2\right]=$$

$$=\frac{1}{s'^6}\left[s'^2(x''^2+y''^2+z''^2)-2s's''x'\Sigma x''+s''^2\Sigma x'^2\right]$$

$$=\frac{1}{s'^6}\left[(x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2)-(x'x''+y'y''+z'z'')^2\right.$$

або з допомогою Ойлерової тотожности

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{s'^6}\left[(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2\right].$$

Отже остаточно

$$r=\pm\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}} \qquad (25''')$$

Знак перед радикалом візьмім плюс, умовившись завжди брати абсолютну величину радіюса. Якщо $t=x$, $x'=1$, $x''=0$ і формула для r хоча й спрощується, але набирає несиметричного вигляду. Відзначімо, що в сферичної індикатриси дотичних власні дотичні є паралельні з головними нормалями даної кривої.

2. Сферична індикатриса бінормалів — дає можливість знайти аналітичний вираз міри скруту, обернуту величину якої називають радіюсом скруту; а проте, цей останній не має такої геометричної інтерпретації, як радіюс першої кривини. Кут поміж двома сусідніми бінормалями вимірюється елементом дуги сферичної індикатриси бінормалів, отже

$$\tau=d\sigma=\sqrt{d\lambda^2+d\mu^2+d\nu^2}$$

саме міра скруту

$$k'=\frac{1}{\rho}=\frac{\tau}{ds}=\pm\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2}$$

Щоб визначити міру скруту через похідні треба знайти відповідні вирази для λ', μ', ν'.

Їх ми можемо визначити двома способами. Поперше з рівнання щільнодотичної площини

$$\lambda = k \,.\, A = k(y'z'' - z'y''),\ \mu = kB = k(z'x'' - x'z''),$$
$$\nu = kC = k(x'y'' - y'x'')$$

де k визначається з умови

$$1 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 =$$
$$= k^2\left[(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'y'')^2\right]$$

отже

$$k = \pm\frac{r}{s'^3},$$

при цьому

$$\lambda x' + \mu y' + \nu z' = 0.$$
$$\lambda x'' + \mu y'' + \nu z'' = 0.$$

З другої сторони, з

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

виходить

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$$

а з

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$$

виходить

$$\alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' = -(\alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu) =$$
$$= -\left[\lambda\left(\frac{x'}{s'}\right)' + \mu\left(\frac{y'}{s'}\right)' + \nu\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right] = (\lambda x' + \mu y' + \nu z') \,.\, \frac{s''}{s'^2} -$$
$$-(\lambda x'' + \mu y'' + \nu z'')\frac{1}{s'^2} = 0.$$

Порівнявши з рівнаннями, яким вдовольняють l, m, n,

т. т.

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$
$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

робимо висновок, що

$$\frac{\lambda'}{l} = \frac{\mu'}{m} = \frac{\nu'}{n},$$

або

$$\frac{\lambda'}{Bz' - Cy'} = \frac{\mu'}{Cx' - Az'} = \frac{\nu'}{Ay' - Bx'} =$$
$$= \pm\frac{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}}{\sqrt{(A^2 + B^2 C^2)s'^2 - (Ax' + By' + Cz')}}$$

тобто

$$kk' = \frac{r}{s'^3 \rho}$$

Отже

$$\lambda' = s'k'l = kk'(Bz' - Cy'),\ \mu' = s'k'm = kk'(Cx' - Az'),$$
$$\nu' = s'k'n = kk'(Ay' - Bx').$$

Знак у правій частині рівности беремо плюс. Диференціюванням $\lambda = k(y'z'' - z'y'')$ і т. д. дістанемо:

$$\lambda' = k'A + k(y'z''' - z'y''') = \frac{k'}{k}\lambda + k(y'z''' - z'y''')$$

Так саме

$$\mu' = k'B + k(z'x''' - x'z''') = \frac{k'}{k}\mu + k(z'x''' - x'z''')$$

$$\nu' = k'C + k(x'y''' - y'x''') = \frac{k'}{k}\nu + k(x'y''' - y'x''')$$

Помноживши обидва вирази на λ', μ', ν' і додаючи дістанемо

$$\lambda'^2 + \mu'^3 + \nu'^2 = k'^2 s'^2 = k'^2 s'(l\lambda + m\mu + n\nu) +$$
$$+ k^2 k' \sum (y'z''' - z'y''')(Bz' - Cy') = k^2 k' \sum (y'z''' - z'y''')(Bz' - Cy')$$

Але

$$Bz' - Cy' = (z'x'' - x'z'')z' - (x'y'' - y'x'')y' = x''s'^2 - x's's''$$

теж саме

$$Cx' - Az' = (x'y'' - y'x'')x' - (y'z'' - z''y')z' = y''s'^2 - y's's''$$

$$Ay' - Bx' = (y'z'' - z'y'')y' - (z'x'' - x'z'')x' = z''s'^2 - z's's''$$

і тому

$$\sum (y'z''' - z'y''')(Bz' - Cy') = s'^2 \sum x''(y'z''' - z'y''') -$$
$$- s's' \sum x'(y'z''' - z'y''')$$

де

$$\sum x''(y'z''' - z'y''') = \begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

$$\sum x'(y'z''' - z'y''') = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x' & y' & z' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0$$

остаточно

$$k' = \frac{1}{\rho} = -\frac{r^2}{s'^6} \begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{matrix} \qquad 26)$$

Якщо незалежна змінна є дуга, то $s' = 1$ і

$$\frac{1}{\rho} = -r^2 \begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{matrix}$$

похідні взято по дузі s.

Дотичні сферичної індикатриси бінормалів є паралельні з головними нормалями кривої ($\lambda' = lk's'$) і значить з дотичними у відповідних точках сферичної індикатриси дотичних.

3. Наостанне сферична індикатриса головних нормалів приводить до так званої „певної кривини", яка визначається через 1-шу та 2-гу кривини. Справді, як пересвідчимося далі, взявши дугу за незалежне змінне, дістанемо:

$$l' = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{\rho} \text{ (див. формули Frenet-Serret.}$$

Отже, позначивши через η кут поміж двох безконечно-близьких головних нормалів і через p — радіюс повної кривини, маємо:

$$\frac{\eta}{ds} = k'' = \frac{1}{p} \text{ і } \frac{1}{p^2} = l'^2 + m'^2 + n'^2;$$

підставивши значення l', m', n' дістанемо

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}. \qquad 27$$

Якщо зважимо на те, що в прямокутному трикутнику, де a, b катети, c — гіпотенуза, а h хай висота спущена з вершини прямого кута на гіпотенузу, то

$$a^2 + b^2 = c^2, \; ab = ch$$

тому

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{c^2 h^2}$$

т.

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

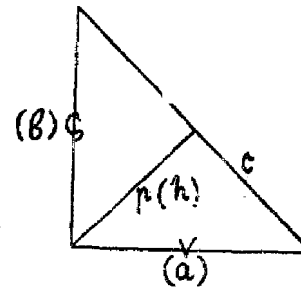


Рис. 51.

Отже радіюс повної кривини дорівнює перпендикулярові,

спущеному на гіпотенузу з вершини прямого кута прямокутного $\triangle$-ка, у якого катетами є r та ρ.

Далі

$$p = \frac{r\rho}{\sqrt{r^2 + \rho^2}}$$

отже p не може бути більше ні за r ні за ρ.

Якщо помножимо співвідношення (27) на ds^2, дійдемо співвідношення

$$\eta^2 = \varepsilon^2 + \tau^2.$$

Формула дає теорему Lancret: Квадрат кута повної кривини дорівнює сумі квадратів кутів суміжности та скруту.

Зауваживши, що η є кут поміж двох безконечно-близьких випрямних площин, що є дотичні випрямної поверхні і стичні площини її ребра звороту (див. далі § 14), — можна попередню теорему формулювати ще й так: квадрат кута скруту ребра звороту випрямної поверхні дорівнює сумі квадратів кута суміжности кривої та кута суміжности ребра звороту полярної поверхні (бо бінормалі та осі кривини в кожній точці кривої є паралельні).

§ 8. Формули Frenet-Serret.

Візьмім за незалежне змінне дугу, так, що криві визначаються рівнаннями:

$$x = \varphi(s),\ y = \psi(s),\ z = \chi(s).$$

Позначивши знову похідні по цьому незалежному змінному штрихами ($'$), так що $x' = \frac{dx}{ds}$ і т. д., маємо

$$\left.\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= 1 \quad (1) \\ x'x'' + y'y'' + z'z'' &= 0 \quad (2) \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Визначім 9 косинусів α, β, γ; l, m, n; λ, μ, через похідні координат

1. Дотична:

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = x',\ \beta = y',\ \gamma = z' \qquad (30)$$

2. Бінормаля: косинуси кутів її є пропорційні коефіцієнтам рівнання щільнодотичної площини; якщо множник пропорційности позначити через то

$$\lambda = r(y'z'' - z'y''),\ \mu = r(z'x'' - x'z''),\ \nu = r(x'y'' - y'x'') \quad (31)$$

3. Головна нормаля. Її косинуси l, m, n можна було б визначити з 6-ти попередніх формул (IV, 2).

Але простіше можна так: за попереднім (II, 1 та 3)

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0, \ \lambda l + \mu m + \nu n = 0.$$

З допомогою (30) співвідношення (29,2) можна переписати так

$$\alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'' = 0.$$

і, скільки λ, μ, ν є пропорційні коефіцієнтам рівнання щільнодотичної площини, то за § 5 (18 с.)

$$\lambda x'' + \mu y'' + \nu z'' = 0.$$

Порівнявши ці дві формули з II, 1, 3 висновуємо, що

$$\frac{l}{x''} = \frac{m}{y''} = \frac{n}{z''}$$

або, назвавші через h спільного знаменника трьох відношень

$$l = hx'', \ m = hy'', \ n = hz''$$

Підставивши ці значення x'', y'', z'' в (31), а також замінивши x', y', z' за (30) і порівнявши з (IV, 3) дістанемо $h = r$, тобто

$$l = r \, . \, x'', \ m = r \, . \, y'', \ n = r \, . \, z'' \qquad (32)$$

Піднесенням до квадрата та додаванням дістанемо

$$r^2(x''^2 + y''^2 + z''^2) = 1,$$

тобто приходимо до висновку, що уведений нами множник є радіюс першої кривини.

Виведемо формули для похідних 9 косинусів по дузі.

1. **Дотична** — З (30),

$$\alpha' = x'', \ \beta' = y'', \ \gamma' = z''$$

або за (32)

$$\alpha' = \frac{l}{r}, \ \beta' = \frac{m}{r}, \ \gamma' = \frac{n}{r} \qquad 33).$$

2. **Бінормаля.** Дифференціюємо друге з рівнань (1) та (II, 2) — вибираємо ті рівнання, дифференціювання яких не вводить інших, ще не визначених, величин крім λ', μ', ν' дістанемо

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$$

$$\alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' + (\alpha'\lambda + \beta'\mu' + \gamma'\nu) = 0.$$

Але за (33)

$$\alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu = \frac{1}{r}(l\lambda + m\mu + n\nu) = 0$$

і значить λ', μ', ν' зв'язані двома рівнаннями

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$$

та

$$\alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' = 0$$

порівнявши їх з (II, 3 та 1) пересвідчимось, що λ', μ', ν' також пропорційні l, m, n, але множник пропорціональности є інший, хай $^1/\rho$ так що

$$\lambda' = \frac{l}{\rho},\ \mu' = \frac{m}{\rho},\ \nu' = \frac{n}{\rho} \qquad (34).$$

3. **Головна нормаля.** Щоб визначити l', m', n' продиференціємо по s рівнання (IV, 1); знайдемо:

$$l' = (\mu'\gamma - \nu'\beta) + (\mu\gamma' - \nu\beta'),$$

що за (23) та (24) набуває вигляду:

$$l' = \frac{1}{\rho}\left(m\gamma - n\beta\right) + \frac{1}{\nu}\left(\mu n - m\nu\right)$$

або за (IV, 1) та (IV, 3) остаточно

$$l' = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{\rho},\ m' = -\frac{\beta}{r} - \frac{\mu}{\rho},\ n' = -\frac{\gamma}{r} - \frac{\nu}{\rho} \qquad 35$$

Визначімо тепер $\frac{1}{\rho}$ через похідні координат по дузі. Для цього найдімо похідні λ', μ', ν' за (31) і підставім в (34).

Дістанемо:

$$\frac{l}{\rho} = r'\frac{\lambda}{r} + r(y'z''' - z'y''')$$

$$\frac{m}{\rho} = r'\frac{\mu}{r} + r(z'x''' - x'z''')$$

$$\frac{n}{\rho} = r'\frac{\nu}{r} + r(x'y''' - y'x''')$$

Помножаємо ці рівності на l, m, n та додаємо, заміняючи в других доданих правих частин l, m, n зразу ж через $\nu x''$, $\nu y''$, $\nu z''$ за (32). Дістанемо:

$$\frac{l^2 + m^2 + n^2}{\rho} = \frac{r'}{r}(\lambda l + \mu m + \nu n) + r^2 \sum x''(y'z''' - z'y''')$$

що, за 1, 2 та II, 3 дає

$$\frac{1}{\rho} = -r^2 \begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{matrix}$$

З другої сторони, піднесенням (34) до квадрата та додаванням дістанемо

$$\frac{1}{\rho^2} = \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2$$

тобто $\frac{1}{\rho}$ і є міра скруту, що її ми увели в попередньому параграфі, і з тим саме знаком.

Доповнимо попередні формули ще зворотними виразами похідних від x, y, z по дузі через 9 косинусів:

$$(30') \quad x' = \alpha, \; y' = \beta, \; z' = \gamma \qquad \text{за } (30)$$

$$(32') \quad x'' = \frac{l}{r}, \; y'' = \frac{m}{r}, \; z'' = \frac{n}{r} \qquad \text{за } (32)$$

звідсіль, диференціюванням по s дістанемо, скориставши з (35)

$$x''' = \frac{l'}{r} - \frac{lr'}{r^2} = \frac{1}{r}\left(-\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{\rho}\right) - \frac{lr'}{r^2};$$

тобто

$$x''' = -\frac{\alpha}{r^2} - \frac{lr'}{r^2} - \frac{\lambda}{\rho r} \qquad (36_1)$$

цілком також

$$y''' = -\frac{\beta}{r^2} - \frac{mr'}{r^2} - \frac{\mu}{\rho r} \qquad (36_2)$$

$$z''' = -\frac{\gamma}{r^2} - \frac{nr'}{r^2} - \frac{\nu}{\rho r} \qquad (36_3)$$

Знак радіюса скруту. Спустімо з точки M', безконечно-близько до M, перпендикуляр на щільнодотичну площину. Його значення є

$$\delta = \lambda \,.\, \Delta x + \mu \,.\, \Delta y + \nu \,.\, \Delta z,$$

але

$$\Delta x = x'h + \frac{x''}{2}h^2 + \frac{x'''}{3!}h^3 \ldots = \alpha h + \frac{l}{2\rho}h^2 - \left(\frac{\alpha}{r^2} + \frac{lr'}{r^2} + \frac{\lambda}{r\rho}\right)\frac{h^3}{3!} +$$

Отже аналогічні вирази дістанемо для

$$\delta = h\,\Sigma\alpha\lambda + \frac{h^2}{2\rho}\,\Sigma\, l\lambda - \left[\frac{\Sigma\alpha\lambda}{r^2} + \frac{r'}{r^2}\,\Sigma\, l\lambda + \frac{1}{r\rho}\,\Sigma\lambda^2\right]\frac{h^3}{3!} + \ldots = \frac{h^3}{6r\rho} +$$

Зі зміною знака h змінюється знак і δ: крива проходить крізь щільнодотичну площину.

Зверх цього, при $\rho > 0$ точка, рухаючись по кривій в додатньому напрямі, переходить з додатньої сторони щільнодотичної площини на від'ємну й навпаки, коли $\rho < 0$.

В одному випадку закрут (скрут) відбувається, можна сказати, з правого боку в лівий у другому — з лівого на правий для спостерігача, що стоїть у M на щільнодотичній площині і дивиться в додатньому напрямі головної нормалі.

§ 9. Щільнодотична сфера.

Рівнання сфери містить чотири довільних коефіцієнти (три координати центру та радіюс) з яких можна скористатись, щоб дійти найтіснішого дотику сфери з кривою, і значить дотик може бути 3-го порядку. Якщо

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(Z-\zeta)^2-R^2=0$$

є рівнання сфери, то умови дотику 3-го порядку є

$$(37)\quad \begin{cases} 1.\ (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-R^2=0, \\ 2.\ (x-\xi)x'+(y-\eta)y'+(z-\zeta)z'=0, \\ 3.\ (x-\xi)x''+(y-\eta)y''+(z-\zeta)z''+x'^2+y'^2+z'^2=0, \\ 4.\ (x-\xi)x'''+(y-\eta)y'''+(z-\zeta)z'''+3(x'x''+y'y''+z'z''')=0 \end{cases}$$

Припустімо тепер, що криву визначено рівнаннями, в яких за незалежну змінну взято дугу. Тоді рівнання (37, 2) за змінних ξ, η, ζ є рівнання нормальної площини, і це виявляє, що центр щільнодотичної сфери міститься в нормальній площині.

Це рівнання можна переписати так

$$\alpha(\xi-x)+\beta(\eta-y)+\gamma(\zeta-z)=0 \qquad (38)$$

Рівнання (37, 3) за (29, 1) та (32) набирає вигляду

$$l(\xi-x)+m(\eta-y)+n(\zeta-z)-r=0 \qquad (39)$$

а (37, 4) за (36) та (29, 2) вигляду:

$$0=\frac{1}{r^2}\Big[\alpha(\xi-x)+\beta(\eta-y)+\gamma(\zeta-z)\Big]+\frac{r'}{r^2}\Big[l(\xi-x)+m(\eta-y)+$$
$$+n(\zeta-z)\Big]+\frac{1}{r\rho}\Big[\lambda(\xi-x)+\mu(\eta-y)+\nu(\zeta-z)\Big].$$

За (38) та (39) це рівнання можна замінити на таке

$$\lambda(\xi-x)+\mu(\eta-y)+\nu(\zeta-z)+\rho r'=0. \qquad (40)$$

Множенням (38) на α, (39) на l, (40) на λ та додаванням дістанемо за (I', 1) та (II' 1,3):

$$\xi-x=lr-\lambda\rho r' \qquad (41,1)$$

Цілком аналогічно, множенням (38) на β, (39) на m, (40) на μ та додаванням дістанемо, за (I'. 2) та (II. 1,2)

$$\eta-y=m\,.\,r-\mu\rho r' \qquad (41,2)$$

і на останнє, множенням (38) на γ, (39) на n, (40) на ν та додаванням знайдемо:

$$\xi-z=n\,.\,r-\nu\,.\,\rho r' \qquad (41,3)$$

Якщо піднести ці вирази до квадрата та додати, дістанемо, за (37, 1), за (1, 2, 3) та за (II. 3)

$$R^2 = r^2 + \rho^2 r'^2 \tag{42}$$

Координати центра щільнодотичної сфери визначаються трьома рівнаннями (41. 1, 2, 3), тобто як перетин трьох визначених ними площин — паралельних з площинами основного тріедра: a) нормальної площини (38), b) площини (40) паралельної з щільнодотичною площиною і віддаленої від неї на ρr і c' площини (39) паралельної з випрямною і віддаленої від неї на r.

Отже, площини (38) та (39) визначають пряму, перпендикулярну з щільнодотичною площиною. Ця пряма зустрічає щільнодотичну площину в центрі кола, по якому щільнодотична сфера перетинає щільнодотичну площину. Значить, координати точки зустрічі визначаються рівнаннями (38) та (39) та рівнанням щільнодотичної площини, яке можна взяти в формі

$$\lambda(\xi - x) + \mu(\eta - y) + \nu(\zeta - z) = 0.$$

Аналогічно тому, як і вище, звідціль найдемо

$$\xi - x = l \,.\, r, \quad \eta - y = m \,.\, r, \quad \zeta - z = n \,.\, r. \tag{43}$$

отож радіюс кола січення дорівнює r — радіюсові кривини. Отже ми маємо, що **колом кривини для просторової кривої є коло перетину щільнодотичної сфери з щільнодотичною площиною у взятій точці кривої.**

Його центр — центр першої кривини — міститься на головній нормалі. Центр першої кривини міститься також, разом із центром щільнодотичної сфери на прямій, визначений рівнаннями (38) та (39), яка називається **віссю кривини** або **полярною прямою**. Віддаль між цими двома точками дорівнює $\rho r'$

§ 10. Взаємне розміщення нормалів.

Щоб краще з'ясувати взаємне розміщення зазначених ліній (рис. 52), уявім собі, що площина $H_n M B_n$ є нормальна площина в точці M кривої, і дотична MT, є перпендикулярна в M до площини $H_n M B_n$. Нормальна площина перетинає щільнодотичну сферу по великому колу з центром в C_1. MB_n є бінормаля, MK_n — головна нормаля і C є центр кривини (першої). MC та MC_1 є радіюси кола кривини та щільно-

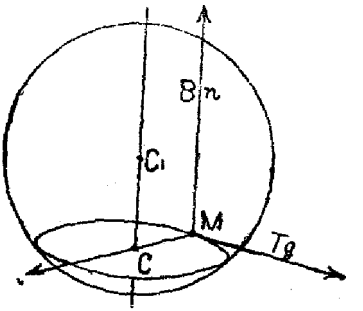


Рис. 52.

дотичної сфери CC_1 дорівнює радіюсу кола, по якому щільнодотична сфера перетинає випрямну площину. Можна додати до цього ще те, що рівнання площини дотичної до щільнодотичної сфери, як площини, перпендикулярної з її радіюсом MC_1, можна написати так:

$$r[l(X-x)+m(Y-y)n(Z-z)]-$$
$$-\rho r'[\lambda(X-x)+\mu(Y-y)+\nu(Z-z)=0. \qquad (44)$$

Вона очевидно проходить через дотичну до кривої в точці M.

Рівнання прямої, по якій нормальна площина перетинає цю площину можна написати

$$\frac{X-x}{\nu\lambda+l\rho r'}=\frac{Y-y}{r\mu+m\rho r'}=\frac{Z-z}{r\nu+n\rho r'} \qquad (45)$$

а рівнання радіюса MC_1 — так:

$$\frac{X-x}{rl-\lambda\rho r'}=\frac{Y-y}{rm-\mu\rho r'}\ \frac{Z-z}{rn-\nu\rho r'} \qquad 46)$$

§ 11. Деякі окремі типи кривих у просторі.

1° Лінії, для яких 1-ша кривина дорівнює 0 ($r=\infty$) є прямі. Справді, для реальних кривих, рівнання

$$k=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}=0.$$

розпадається на три:

$$x''_s=0,\ y''_s=0,\ z''_s=0$$
$$x'_s=c,\ y'_s=c',\ z'_s=c''$$

і значить

$$x=c\,.\,s+d,\ y=c'\,.\,s+d',\ z=c''\,.\,s+d''$$

(де $c, c', c'', d'', d, d', d''$ — довільні сталі), тобто

$$\frac{x-d}{c}=\frac{y-d'}{c'}=\frac{z-d''}{c''}$$

рівнання прямої лінії.

Якщо визначити вираз для міри скруту, то помітимо, що детермінант 3-го порядку, складений із похідних трьох перших порядків від x, y, z по s має два рядки, елементи яких стають нулями для прямої. Тому **міра кривини для прямої є величина невизначена.** І справді, всяка площина, що проходить через пряму, є для неї щільнодотичною, а тому й кут скруту є величина цілком невизначена.

2° Криві, для яких міра скруту дорівнює 0, є криві плоскі. Якщо відкинути випадок $r=\infty$, за якого лінія, як щойно пересвідчилися, є прямою, то умова $k'=0$ приводить до рівнання

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0. \qquad 47$$

яке, як виявлено в § 1, справджується для плоских кривих; і навпаки, якщо рівнання (47) справджується, то крива

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)$$

є крива плоска.

3° Косі кола (— термін E. Cesàro) ≡ криві, для яких міра 1-ої кривини є величина стала. Задача знайти їх є задача невизначена, бо умова $r=\text{Const}=a$ дає лише одне рівнання

$$\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}{(x'y''-y'x'')^2+(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2}=a^2.$$

Одну з координат можна взяти за зміну незалежну, та лишаються ще дві і треба додати ще одну умову.

G. Teixeira пропонує приєднувати рівнання поверхні, на якій мусить міститися це коло.

Умова $r=\text{const}$ дає

$$\frac{dr}{ds}=0$$

і тому

$$R^2=r^2,\ R=r$$

радіюс щільнодотичної сфери косого кола дорівнює радіюсові першої його кривини і, значить, є однаковий для всіх його точок; перпендикуляр з центра щільнодотичної сфери на щільнодотичну площину ($=\rho r'$) дорівнює нулеві; щільнодотична площина проходить через центр щільнодотичної сфери, — центр її зливається з центром першої кривини і міститься на головній нормалі. Отже для косих кіл: — геометричне місце центрів щільнодотичних сфер і центрів першої кривини зливаються:

$$\xi-x=r\,.\,l,\ \eta-y=r\,.\,m,\ \zeta-z=r\,.\,n. \qquad 43$$

Взявши диференціяли, дістанемо

$$d\xi=dx+rdl$$
$$d\eta=dy+rdm$$
$$d\zeta=dz+rdn$$

і за формулами Френе-Серре

$$d\xi=dx-\alpha\,ds-\frac{\lambda r}{\rho}\,ds=-\lambda\,\frac{r}{\rho}\,ds.$$

$$d\eta = dy - \beta ds = \frac{\mu r}{\rho} ds = -\mu \frac{r}{\rho} ds.$$

$$d\xi = dz - \gamma ds - \frac{\rho \nu r}{\rho} ds = -\nu \frac{r}{\rho} ds.$$

Звідціль

$$ds'^2 = \frac{r^2}{\rho^2} as^2 \qquad ds' = \pm \frac{r}{\rho} ds$$

беремо знак $+$ (s' — довжина дуги геометричного місця центрів першої кривини).

Увівши найдене значення ds через ds' дістанемо

$$\frac{d\xi}{ds'} = -\lambda, \ \frac{d\eta}{ds'} = -\mu, \ \frac{d\xi}{ds,} = -\nu.$$

Дотична до геометричного місця центрів 1-ої кривини косого кола є паралельна з його бінормалею.

Взявши 2-і похідні, знайдемо

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{d^2\xi}{ds'^2} = -\frac{d\lambda}{ds} \cdot \frac{ds}{ds'} = -\frac{l}{\rho} \cdot \frac{\rho}{r} = -\frac{l}{r}$$

Так саме

$$\frac{m_1}{r_1} = -\frac{m}{r}, \ \frac{n_1}{r_1} = -\frac{n}{r} \ \therefore \ r_1 = \pm r.$$

Якщо покласти $r_1 = r$,

то

$$l_1 = -l, \ m_1 = -m, \ n_1 = -n.$$

Головні нормалі кривої та геометричного місця центрів 1-ої кривини для косих кіл зливаються і радіюси першої кривини на величину рівні, отож точка косого кола є центр кривини геометричного місця центрів щільнодотичних сфер ($\equiv$ центрів кіл кривини).

Звідсіль далі

$$\lambda_1 = -\alpha, \ \mu_1 = -\beta, \ \nu_1 = -\gamma$$

і через це

$$\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1 = 0:$$

щільнодотичні площини косого кола і геометричного місця його центрів 1-ої кривини взаємно перпендикулярні.

Диференціюванням останніх рівностей, дістанемо

$$\frac{d\lambda_1}{ds'} = -\frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{ds'} = -\frac{l}{r} \cdot \frac{\rho}{r} = -\frac{l\rho}{r^2}$$

але ліва частина $= \frac{l_1}{\rho}$ і $l_1 = -l$;

отже

$$\rho_1 = \frac{r^2}{\rho}$$

абож

$$r^2 = \rho\rho_1$$

це співвідношення дано Bouquet.

Отже геометричне місце центрів 1-ої кривини косого кола є знову косе коло тої ж кривини. Кожна з цих двох кривих є геометричне місце центрів 1-ої кривини другої.

4° Криві сталого скруту.

Припущення $\rho = \text{const}$ дає диференціяльне рівнання 3-го порядку з двома невідомими функціями y, z що їх визначає не цілком. Можна задати поверхню, на якій мусить міститися крива, і тоді задача стає визначена. А проте можна задачу й безпосередньо звести до 3-х квадратур.

За формулами Френе-Серре

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{\rho}, \quad \frac{d\mu}{ds} = \frac{m}{\rho}, \quad \frac{d\nu}{ds} = \frac{n}{\rho}$$

але

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = (m\nu - n\mu) = \rho\left(\nu\frac{d\mu}{ds} - \mu\frac{d\nu}{ds}\right)$$

і значить

$$dx = \rho(\nu d\mu - \mu d\nu)$$

і так само

$$dy = \rho(\lambda d\nu - \nu d\lambda)$$
$$dz = \rho(\mu d\lambda - \lambda d\mu).$$

Отже, щоб визначити криву сталого скруту, треба λ, μ, ν замінити 3-ма функціями s, що зв'язані співвідношенням

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Останнього можна позбутись, увівши три функції h, k, j так щоб

$$\frac{\lambda}{h} = \frac{\mu}{k} = \frac{\nu}{j} = \pm\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2 + j^2}}$$

значить скільки

$$\nu d\mu - \mu d\nu = \nu^2 d\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$$

$$dx = \rho\frac{jdk - kdj}{h^2 + k^2 + j^2}, \quad dy = \rho\frac{hdj - jdh}{h^2 + k^2 + j^2}, \quad dz = \rho\frac{kdh - hdk}{h^2 + k^2 + j^2}$$

5°—**Ґвинтові лінії.** Розгляньмо лінії, для яких міри 1-ої та 2-ої кривини, або, що все одно, радіюси кривини та скруту перебувають в сталому відношенні. Покажемо, що такі криві, тобто їхні дотичні, утворюють сталий кут з якимось певним напрямом.

Виявити це можна з допомогою формул Френе-Серре. Справді, формул (34) та (33) § 8-го виходить

$$\frac{\alpha'}{\lambda'} = \frac{\beta'}{\mu'} = \frac{\gamma'}{\nu'} = \frac{\rho}{\nu}$$

Для кривих, що їх досліджуємо,

$$\frac{\rho}{\nu} = \text{const.} = k,$$

тобто

$$\alpha' - k\lambda' = 0,\ \beta' - k\mu' = 0,\ \gamma' - k\nu' = 0,$$

звідкіль висновуємо, що

$$\alpha - k\lambda = c,\ \beta - k\mu = c',\ \gamma - k\nu = c''$$

де c, c', c'' є величини сталі.

Множенням останніх рівностей відповідно на l, m, n та додаванням дістанемо (з допомогою формул II, 1, 3, § 6), через перпендикулярність дотичної та бінормалі з головною нормалею

$$c \,.\, l + c' \,.\, m + c'' \,.\, n = 0$$

але c', c', c'' не можуть одноразово дорівнювати нулеві, бо піднесенням до квадрата попередніх рівностей та додаванням найдемо за допомогою формул 1, 1,3 та II, 2 § 6, що

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 + k^2$$

Тому, поділивши ліву частину попередньої рівности на

$$\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2} = \sqrt{1 + k^2}$$

можемо її вважати за косинус кута головної нормалі зі сталим напрямом, що творить із осями координат кути, косинуси яких є

$$\frac{c}{\sqrt{1+k^2}},\ \frac{c'}{\sqrt{1+k^2}},\ \frac{c''}{\sqrt{1+k^2}}$$

і скільки, за останньою рівністю, цей косинус дорівнює нулеві, то цей відповідний сталий кут дорівнює $\frac{\pi}{2}$

Якщо цей напрям узяти за вісь, то рівність набирає вигляду $n = 0$

Отже головні нормалі кривих, для яких відношення радіюсів кривини та скруту величина стала, перпендикулярні до певного напряму який можна взяти за вісь OZ

За формулою (33) § 8 $n = \nu . \gamma'$, тому для зазначених кривих

$$\gamma' = 0, \ \gamma = \text{const},$$

тобто дотичні утворюють сталий кут із певним напрямом.

Згадавши, що за (30) § 8 $\gamma = z'$ дістанемо для наших кривих

$$z' = c, \qquad z = c . s + c'$$

Можна початок координат, покищо довільний, вибрати так, щоб при $s = 0$ і $z = 0$ і значить $c' = 0$; тоді рівнання зазначених кривих набирає виду

$$x = \varphi(s), \ y = \psi(s), \ z = c . s.$$

Перші два визначають у площині XOY плоску криву, а в просторі циліндер, якого твірні паралельні з осею Z-ів.

Отже, криві, для яких відношення радіюсів 1-ої та 2-ої кривини є величина стала, можна вважати за криві, що містяться на поверхні якогось циліндра і утворюють сталий кут з його прямолінійними твірними.

Навпаки, можна сказати, що коли крива визначається рівнаннями такого виду, то для неї відношення радіюсів кривини та скруту є величина стала.

Справді, якщо $z' = c$, то $z'' = 0$.

Звідсіль $$x'^2 + y'^2 = 1 - c^2,$$

і значить $$x'x'' + y'y'' = 0$$

$$x'x''' + y'y''' = -(x''^2 + y''^2)$$

Але для такої кривої

$$\frac{1}{r^2} = x''^2 + y''^2, \ \frac{1}{\rho} = -r^2 \begin{vmatrix} x' & y' & c \\ x'' & y'' & 0 \\ x''' & y''' & 0 \end{vmatrix} = -c \frac{x''y''' - x'''y''}{x''^2 + y''^2}$$

З написаних вище рівнань визначаємо

$$x' = -\frac{y''(x''^2 + y''^2)}{x''y''' - x'''y''} = c . \rho . y''.$$

$$y' = -\frac{x''(x''^2 + y''^2)}{x''y''' - x'''y'} = c . \rho . x''$$

Піднесенням до квадрату та додаванням дістанемо

$$x'^2 + y'^2 = 1 - c^2 = c^2 \rho^2 (x''^2 + y''^2) = c^2 \frac{\rho^2}{r}$$

тобто

$$\frac{r^2}{\rho^2} = \frac{c^2}{\lambda - c^2} = \text{const.}$$

6° — Звичайна ґвинтова лінія.

Якщо зокрема циліндер, на який накручено лінію, є **коловий**, то

$$\varphi(s) = a \,.\, \cos ks, \quad \psi(s) = a \,.\, \sin ks$$

і ми дістаємо звичайну ґвинтову лінію. Для неї не тільки відношення $\frac{\rho}{r} = \text{const}$, а й зокрема r та ρ є величини сталі.

Навпаки, якщо r та ρ є величини сталі, то ґвинтова лінія є звичайна кругова. Справді, при цьому з-за рівности

$$\gamma - k\nu = \text{const} = c''$$

$$\nu = \frac{c - c''}{k} = \text{const} = C$$

Звідкіль за (31) § 8 маємо

$$x'y'' - y'x'' = \frac{C}{r} = \text{const.}$$

Але у наслідок цього з

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

тепер дістанемо

$$x'^2 + y'^2 = 1 - z'^2 = 1 - C^2$$

Отже

$$\frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2} = \text{const} = \varkappa.$$

Ліва частина цієї рівности є

$$\frac{x'^2 \left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'^2 + y'^2} = \frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2} = \left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y'}{x'}\right)\right)$$

ми маємо

$$\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y'}{x'}\right)\right)' = \varkappa.$$

звідкіль

$$\frac{y'}{x'} = \operatorname{tg}(\varkappa s' + \varkappa_1)$$

З допомогою $x'^2 + y'^2 = 1 - C^2$ звідсіль виводимо, що

$$x' = A \,.\, \cos(\varkappa s + \varkappa_1).$$

$$y' = A \,.\, \sin(\varkappa s + \varkappa_1).$$

$$x - a' = \frac{A}{\varkappa} \sin(\varkappa s + \varkappa_1).$$

$$y - b' = -\frac{A}{\varkappa} \cos(\varkappa s + \varkappa_1).$$

Перенесенням початку координат у точку $(a'; b')$ та зміною початку відраховання дуг $\left(\varkappa s_0 + \varkappa_1 = \frac{\pi}{2}\right)$ можемо звести ці рівнання, поклавши до цього ще

$$\frac{A}{\varkappa} = a, \; C = ma \quad \text{до виду}$$

$$x = a \cos \varkappa s, \; y = a \,.\, \sin \varkappa s, \; z = mas.$$

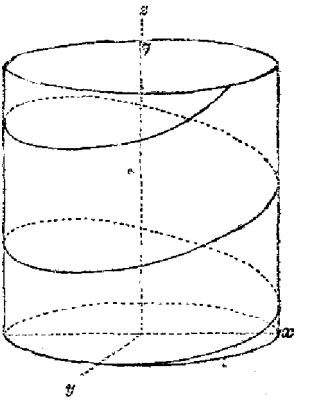


Рис. 9.

Навпаки, обгорнувши прямий коловий циліндер частиною площини, обмеженою двома прямими, що утворюють кут φ, так, щоб одно рамено кута накручувалося на основу, дістанемо, що друге рамено утворить лінію, для якої

$$x = a \cos t, \; y = a \sin t, \; z = m\,at$$

де a є радіюс основи циліндра, а $m = \operatorname{tang} \varphi$.

При цьому

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2 (1 + m^2)\, dt$$

і

$$ds = \pm a \sqrt{1 + m^2}\, dt = \pm \frac{a}{\cos \varphi}\, dt$$

і значить

$$S = \pm \frac{a}{\cos \varphi}\, t + c.$$

Покладімо $S = 0$ при $t = 0$ і позначімо

$$\pm a \sqrt{1 + m^2} = \pm \frac{a}{\cos \varphi} = \frac{1}{\varkappa}$$

Тоді дістанемо те саме рівнання, що й вище.

Два знаки відповідають тому, що обгортання ми можемо робити або за рухом стрілки годинника або проти. Дві ґвинтові лінії, що при цьому утворюються, відрізняють як *праву* й *ліву* ґвинтові лінії.

Для вправи можна обчислити для нашої кривої

$$\frac{1}{r^2} = x''^2 + y''^2 + z''^2$$

звідкіль

$$r = \frac{a}{\sin^2 \varphi}$$

і далі

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sin 2\varphi}{2 \cdot a}$$

Отже, якщо виходячи з рівнання ґвинтової лінії ми доводимо, що звичайна ґвинтова лінія має сталу кривину та скрут, то наведені раніше міркування виявляють, що це є єдина крива з такою властивістю. А що для неї $r = \text{const}$, то звичайна ґвинтова лінія належить до косих кіл. Якщо $\varphi = 0$, $\operatorname{tang} \varphi = 0$ і значить $z = 0$, ґвинтова лінія перетворюється на коло — основу циліндра, на який її накручено.

7°. Бертранові криві.

Поставимо собі задачу знайти умову, за якої головні нормалі кривої (M) є одночасно головні нормалі якоїсь іншої кривої (N) (рис. 10). Хай дві такі криві існують і MN та $M'N'$ є дві сусідні спільні їхні головні нормалі. C — центр кривини (1-ої), $MC = r$ радіюс кривини, ρ — радіюс скруту і $\angle MCM' = \varepsilon$ є кут суміжности в точці M.

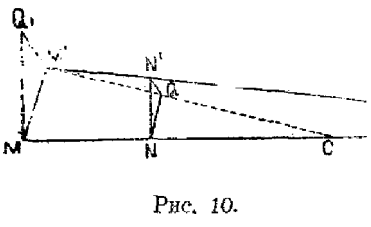


Рис. 10.

Якщо в щільнодотичній площині MCM' точки M проведемо безконечно-малий елемент $NQ \parallel MM'$ і з'єднаємо точки N' та Q, то безконечно-малий трикутник $N'NQ$ буде прямокутнім при Q, бо MC є проекція головної нормалі $M'N'$ на щільнодотичну площину $MM'C$ і містить при точці N кут A дотичних до кривих (M) та (N) у відповідних точках.

Можна переконатись, що цей кут A є сталий.

Справді, якщо α, β, γ є косинуси кутів дотичної до (M), а $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ є теж у відповідній точці (N) то з-за формули

$$\cos A = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1$$

та за умови, що головні нормалі обох кривих зливаються

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0, \ \alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n = 0$$

а за формулами Френе-Серре

$$d\alpha = \frac{l ds}{r}, \ d\alpha_1 = \frac{l ds_1}{r_1}$$

і значить

$$d\cos A = \frac{ds}{r}(\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n) + \frac{ds_1}{r_1}(\alpha l + \beta m + \gamma n) = 0.$$

Отже I. Дотичні у відповідних точках двох кривих, що мають спільні нормалі, утворюють сталий кут,

$$\angle N'NQ = \pm A \text{ (або } \pi - A).$$

Так само виявимо, що:

II. Сталим є також і кут між щільнодотичними площинами у відповідних точках двох Бертранових кривих, бо він дорівнює кутові A. Справді, кут площин дорівнює кутові їх перпендикулярів. Але перпендикуляр у точці N до першої щільнодотичної площини утворює прямі кути з MN та NQ, а перпендикуляр до другої щільнодотичної площини утворює прямі кути з MN та NN'. Значить, кут поміж цими двома перпендикулярами дорівнює кутові поміж NQ та NN' тобто куту A.

Сталість кута поміж щільнодотичних площин для Бертранових кривих можна довести й обчисленням: через те, що головні нормалі зливаються, маємо

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

$$l\lambda_1 + m\mu_1 + n\nu_1 = 0.$$

$$\cos\beta = \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1 \ . \ . \ d\cos\beta = \Sigma\lambda d\lambda_1 + \Sigma\lambda_1 d\lambda =$$

$$= \frac{ds_1}{\rho_1}\Sigma\lambda l + \frac{ds}{\rho}\Sigma\lambda_1 l = 0.$$

Далі віддалі MN та $M'N'$ однакові, бо MM' та NN' ортогональні до MN, тому MM' та NN' можна вважати за дуги кіл, описаних з N', відповідно з M, радіюсами $MN' = M'N'$ та $MN = MN'$

Отже III: дві криві, що мають спільні нормалі, мають сталу віддаль $MN = M'N' = a$.

Кут $N'M'Q = \eta$ є кут скруту. Тому

$$\sin A = \frac{N'Q}{NN'} = -\frac{a\eta}{NN'}, \quad \cos A = \frac{(r-a)\varepsilon}{NN'}$$

$$\operatorname{tang} A = -\frac{a}{r-a} \cdot \frac{\eta}{\varepsilon} = -\frac{a}{r-a} \cdot \frac{r}{\rho}$$

абож

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} \operatorname{cotg} A = \frac{1}{a}$$

Позначивши $a \operatorname{cotg} A = b$ дістанемо

$$\frac{a}{r} + \frac{b}{\rho} = 1$$

Бертранове співвідношення поміж радіюсами кривини та скруту кривої.

З III-го висновуємо, що координати відповідних точок двох Бертранових кривих зв'язані співвідношеннями

$$x_1 = x + a.l, \quad y_1 = y + a.m, \quad z_1 = z + a.n.$$

Звідкіль

$$dx_1 = dx + a.dl, \text{ або } \alpha_1 ds_1 = \alpha ds + a\left(-\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{\rho}\right) ds$$

що, за допомогою основного співвідношення, набирає форми

$$\alpha_1 ds_1 = -\alpha \frac{a \operatorname{cotg} A}{\rho} ds - \frac{a\lambda}{\rho} ds$$

$$\beta_1 ds_1 = -\beta \frac{a \operatorname{cotg} A}{\rho} ds - \frac{a\mu}{\rho} ds$$

$$\gamma_1 ds_1 = -\gamma \frac{a \operatorname{cotg} A}{\rho} ds - \frac{a\nu}{\rho} ds.$$

Множенням 1-го на α, 2-го на β, 3-го на γ та додаванням і згадавши, що

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \cos A, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \Sigma\alpha\lambda = 0$$

дістанемо

$$ds_1 = -\frac{a}{\sin A} \cdot \frac{ds}{\rho}$$

або

$$\frac{ds_1}{ds} = -\frac{a}{\sin A} \cdot \frac{1}{\rho}$$

А що, помінявши ролями 1-шу та 2-гу криву, ми мусимо замінити й основне Бертранове співвідношення співвідношенням

$$\frac{a}{r_1} - \frac{a \operatorname{cotg} A}{\rho} = 1$$

бо α та A замінюється через $-\alpha$ та $-A$, то дійдемо також рівности

$$\frac{ds}{ds_1} = -\frac{a}{\sin A} \cdot \frac{1}{\rho_1}$$

Справді

$$x = x_1 - a.l, \quad dx = dx_1 - a.dl$$

тобто

$$\alpha ds = \alpha_1 ds_1 + a \frac{\alpha_1}{r_1} ds_1 + a \frac{\lambda_1}{\rho_1} ds_1 = \alpha_1 ds_1 \left(1 + \frac{a}{r_1}\right) + a \frac{\lambda_1}{\rho_1} ds_1$$

$$= -\frac{a \operatorname{cotg} A}{\rho_1} \alpha_1 ds_1 + \frac{a \lambda_1}{\rho_1} ds_1$$

$$ds = -\frac{a}{\sin A} \cdot \frac{ds_1}{\rho_1}$$

Помноживши (*) та (**) дістанемо

$$1 = \frac{a^2}{\sin^2 A} \cdot \frac{1}{\rho \rho_1}$$

або

$$\rho \rho_1 = \frac{a^2}{\sin^2 A} = a^2 + b^2$$

IV. Для відповідних Бертранових кривих добуток радіюсів скруту є величина стала. До цих кривих належать кола ($b = 0$, $r = a$), криві сталого скруту ($a = 0$, $\rho = b$) та ґвинтові лінії; для них беремо перший вид Бертранового співвідношення і покладаємо в ньому $a = \infty$; за границі дістанемо

$$r = \rho \,.\, \operatorname{tang} A$$

характеристичне для ґвинтових ліній.

8° Сферичні криві. Хай і радіюс і координати центру щільно дотичної сфери є однакові для всіх точок кривої; тоді щільнодотична сфера є спільна для всіх точок кривої і значить крива вся цілком міститься на цій сфері й крива називається сферичною.

Мусить бути (— беремо за незалежну змінну дугу):

$$\frac{d(R^2)}{ds} = 0, \quad \frac{d(\xi)}{ds} = 0, \quad \frac{d(\eta)}{ds} = 0, \quad \frac{d(\zeta)}{ds} = 0.$$

Перша дає

$$2(rr' + \rho\rho' r'^2 + \rho^2 r' r'') = 0 = 2\rho r' \left(\frac{r}{\rho} + \rho' r' + \rho r''\right)$$

або

$$0 = 2\rho r' \left(\frac{r}{\rho} + (\rho' r')'\right)$$

Далі

$$O = \frac{d\xi}{ds} = \frac{d}{ds}(x + lr - \lambda\rho r') = x' + l'r' + lr' - \lambda'\rho r' - \lambda(\rho r'),$$

або за (30), (35) та (34) § 8

$$0 = \alpha + r\left(-\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{\rho}\right) + lr' - \frac{l}{\rho}\rho r' - \lambda(\rho r')' = -\lambda\left(\frac{r}{\rho} + (\rho r)'\right)$$

Аналогічно

$$0 = \frac{d\eta}{ds} = -\mu\left(\frac{r}{\rho} + (\rho r')'\right), \quad 0 = \frac{d\zeta}{ds} = -\nu\left(\frac{r}{\rho} + (\rho r')'.\right)$$

Величини λ, μ, ν, зв'язані поміж себе співвідношенням

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

не можуть разом дорівнювати нулеві; тому мусить бути

$$\frac{r}{\rho} + (\rho r')' = 0,$$

або

$$\frac{r}{\rho} + \rho' r' + \rho r'' = 0$$

при чому справджується й умова

$$\frac{d(R^2)}{ds} = 0$$

§ 12. Обгортки сім'ї поверхонь (обгортки першого роду).

Звернімось до збору поверхонь, визначених рівнанням

$$F(x, y, z, a) = 0 \tag{48}$$

що містить параметр a, який може набирати всіляких значень.

Кожному значенню параметра a відповідає певна поверхня сім'ї. Дві сусідні поверхні, відповідні двом значенням параметра a та $a + da$, що безконечно мало відрізняються один від одного, перетинаються по кривій, яка визначається двома рівнаннями: (48) та

$$F(x, y, z, a + \Delta a) = 0 \tag{48'}$$

Останнє замінимо рівнанням

$$O = \frac{F(x, y, z, a + \Delta a) - F(x, y, z, a)}{\Delta a} \qquad (48'')$$

що визначає поверхню, яка проходить через ту ж саме криву

Якщо в рівнання сім'ї параметр входить так, що перша та друга похідні по ньому є безперервні, то (48'') еквівалентне рівнанню

$$F'_a(x, y, z, a) + \frac{1}{2}\Delta a \; F''_{aa}(x, y, z, a + \theta\Delta a) = 0$$

або ж для границі, при $\Delta a \to 0$

$$F'a(x, y, z, a) = 0. \qquad (49)$$

Для кожного значення a рівнання (48) та (49) визначають криву, що називається характеристикою, й обгортка сім'ї поверхонь (48) є геометричне місце характеристик, відповідних всіляким значенням параметра. Її рівнання дістанемо виключенням a з рівнань (48) та (49). Характеристика, відповідна якомусь певному значенню параметра a, зустрічає поверхню, безконечно-близьку до поверхні відповідної цьому значенню параметра, в точках, які визначаються рівнаннями (48), (49) та (48'). За першими двома, останнє можна замінити іншим, — а саме, розгорнувши (48) в Тейлорів ряд і зваживши на рівнання (48) та (49), дістанемо, після поділу на Δa^2, рівнання

$$\frac{1}{2} F''_{aa}(x, y, z, a) + \frac{1}{6}\Delta a \, F'''_{aaa}(xyz, a + O\Delta a) = 0$$

що стає для границі $\Delta a \to 0$ таким

$$F''_{aa}(x, y, z, a) = 0 \qquad (50)$$

Отже граничні точки перетину визначаться рівнаннями (48), (49) та (50). Ці точки називаються характеристичними точками. Геометричне місце їх є крива, якої рівнання дістанемо виключенням a з (48), (49) та (50). Вона називається ребром звороту обгортної поверхні.

Теорема 1. Обгортка дотикається кожної поверхні сім'ї вздовж відповідної характеристики.

Рівнання обгортки ми можемо вважати за результат підставлення в (48) значення $a = \varphi(x, y, z)$, яке дістаємо розв'язанням (49) відносно a. Хай a_1 є одно із значень параметра a; тоді

$$F(x, y, z, a_1) = 0. \qquad (51)$$

$$F'_{a1}(xy, z, a_1) = 0. \qquad (52)$$

є відповідна a_1 характеристика. Хай (x_1, y_1, z_1) є яканебудь з її точок, так що рівнання

$$F(x_1, y_1, z_1, a_1) = 0$$

та

$$F'_{a1}(x_1, y_1, z_1, a_1) = 0$$

справджуються. Площина дотична до

$$F(x, y, z, a_1) = 0$$

в точці (x_1, y_1, z_1) має рівнання

$$O = F_{x_1}(x_1, y_1, z, a_1)(X - x_1) + F'_{y1}(x_1\, y_1\, z_1\, a_1)(Y - y_1) + \\ + F'_{z1}(x_1\, y_1\, z_1)(Z - z_1) \tag{53}$$

а дотична до обгортки, в точці її $(x_1\, y_1\, z_1)$ є

$$0 = \left[F'_x(x_1\, y_1\, z_1\, \varphi(x_1\, y_1\, z_1)) + F'_a(x_1\, y_1\, z_1\, \varphi_1)\frac{\partial a}{\partial x}\right](X - x_1) + \\ + \left[F'_y(x_1\, y_1\, z_1\, \varphi_1(x_1\, y_1\, z_1) + F'_a\frac{\partial a}{\partial y}\right](Y - y_1) + \\ + \left(F'_z + F'_a\frac{\partial a}{\partial z}\right)(Z - z_1)$$

через рівнання

$$F'_{a_1}(x_1\, y_1\, z_1\, \varphi_1) = 0$$

зводиться на

$$0 = F'_{1x}(x_2\, y_1\, z^1\, \varphi_1)(X - x_1) + F'_y(x_1\, y_1\, z_1\, \varphi_1)(Y - y_1) + \\ + F'_z(x_1\, y_1\, z_1\, \varphi_1)(Z - z_1)$$

Але для точки (x_1, y_1, z_1) функція $\varphi(x_1\, y_1\, z_1)$ має значення рівне a_1 тому (53) тотожне з (54). Те ж саме буде й для всякої іншої точки тієї ж характеристики, бо для кожної її точки функція $\varphi(x, y, z)$ дорівнює відповідному в цій точці значенню параметра a.

Теорема II. Ребро звороту дотикається в характеристичній точці відповідної характеристики, а з відповідною поверхнею сім'ї має в цій точці дотик 2-го порядку.

Хай знову значенню a параметра відповідає поверхня сім'ї (51); система (51), (52) — відповідна характеристика і хай (x_1, y_1, z_1) відповідна характеристична точка, яка крім (51) та (52) справджує ще й рівнання

$$F'_{aa}(x_1\, y_1\, z_1\, a_1) = 0.$$

Зваживши на те, що ребро звороту визначається рівнанням (48) та (49), в які внесено значення $a = \psi(x, y, z)$, що дістаємо з (50),

маємо й навпаки, що для всякої точки ребра звороту функція $\psi(x, y, z)$ набирає значення рівного тому значенню параметра a, що відповідає цій точці. Рівнання дотичної до характеристики можна написати так .

$$0 = \Sigma F'_x (X - x), \quad 0 = \Sigma F''_{ax} (X - x) \tag{55}$$

а дотичної до ребра звороту так:

$$0 = \Sigma (F'_x (xyz, \psi) + F'_a \cdot \psi'_x)(X - x), 0 = \Sigma (F''_{ax} + F_{aa} \psi'_x)(X - x).$$

Останні за (49) та (50) зводяться на рівнання

$$0 = \Sigma F'_x \cdot (X - x), \quad 0 = \Sigma F''_{ax} (xyz\psi)(X - x); \tag{56}$$

для характеристичної точки $(x_1 y_1 z_1)$ функція $\psi(xyz)$ дорівнює a_1 і значить (56) зводиться на (55). Щоб довести другу частину теореми, візьмім на ребрі звороту точку (x_2, y_2, z_2) безконечно-близьку до точки (x, y, z) і хай a_2 відповідне їй значення параметра, безконечно-близьке до a_1.

Отже

$$F''_{aa} (x_2 y_2 z_2 a_2) = 0$$

або замінивши

$$a_2 = a_1 + (a_2 - a_1)$$

$$x_2 = x_1 + (x_2 - x_1), \quad y_2 = y_1 + (y_2 - y_1), \quad z_2 = z_1 + (z_2 - z_1)$$

і розгорнувши в Тейлорів ряд дістанемо

$$O = F''_{aa} (x_1 y_1 z_1 a_1) + F'''_{aax} (x_2 - x_1) + F^{\text{III}}_{aay} (y_2 - y_1) + \\ + F^{\text{III}}_{aaz} (z_2 - z_1) + F^{\text{III}}_{aaa} (a_2 - a_1) + \ldots$$

Припустімо, що $(F'''_{aaa})_1 \neq 0$, тоді, взявши на увагу (52), висновуємо: з різниць $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$, $(z_2 - z_1)$ та, що є найнижчого порядку, мусить бути одного порядку з $(a_2 - a_1)$, тобто $(a_2 - a_1)$ мусить бути одного порядку з

$$d = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 (z_2 - z_1)^2}.$$

Якщо ж підставити координати точки (x_2, y_1, z_2) в рівнання

$$F(x_1 y_1 z_1 a_1) = 0$$

то дістанемо

$$F(x_2 y_2 z_2 a_1) = F(x_2 y_2 z_2, a_2 - (a_2 - a_1)) = F(x_2 y_2 z_2 a_2) - \\ (a_2 - a_1) F'_{a_2} + \frac{(a_1 - a_2)^2}{1 \cdot 2} F''_{a_2 a_2} - \frac{1}{6} (a_2 - a_1)^3 F'''_{aaa} +$$

Але $(x_2 y_2 z_2)$ є точки ребра звороту і a_2 відповідне їй значення параметра, тому

$$F(x_2 y_2 z_1 a_2) = 0, \quad F'_a (x_2 y_2 z_2 a_2) = 0, \quad F''_{aa} (x_2 y_2 z_2 a_2) = 0$$

і за припущенням $F'''_{aaa} (x_2 y_2 z_2 a_2) \neq 0$. Через це $F(x_2 y_2 z_2 a_1)$ є величина третього порядку малости відносно

$(a_2 - a_1)$, тобто, як вище доведено, третього порядку малости відносно d, а це й доводить існування дотику 2-го порядку (пор. § 4).

Можна довести, що точки, для яких $F'''_{aaa} = 0$, є особливі точки на ребрі звороту, а саме *точки звороту*.

Справді, три рівнання

$$F = 0 \ (48), \ F'_a = 0' \ (49) \ F''_{aa} = 0 \ (50)$$

дають змогу знайти x, y, z в функції a, якщо

$$\frac{D(F, F'_a, F''_{aa})}{D(x, y, z)} \neq 0.$$

Тоді маємо

$$x = \varphi(a), \ y = \psi(a), \ z = \chi(a).$$

У звичайній точці $x' = \varphi'(a)$, $y' = \psi'(a)$ $z' = \chi(a)$ разом не дорівнюють нулеві. Точка є особливою, коли $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$.

Якщо в (48), (49) (50) підставимо замість x, y, z їх значіння, то дістанемо тотожності

$$F'_x x' + F'_y y' + F'_z z' + F'_a = 0, \ F''_{ax} x' + F''_{ay} y' + F''_{az} z' + F''_{aa} = 0$$

$$F'''_{aax} x' + F'''_{aay} y' + F'''_{aaz} z' + F_{aaa} = 0$$

За рівнаннями обгортки вони зводяться на

$$F'_x \cdot x' + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' = 0.$$

$$F''_{ax} x' + F''_{ay} y' + F''_{az} z' = 0.$$

$$F'''_{aax} x' + F'''_{aay} y + F'''_{aaz} z' + F'''_{aaa} = 0.$$

Якщо $F'''_{aaa} \neq 0$, x', y', z' разом не рівні нулеві, — точка звичайна.

Якщо ж $F'''_{aaa} = 0$, то оскільки детермінат, складений з коефіцієнтів цих рівнань (Якобіян), є відмінний від нуля, мусить бути разом

$$x' = 0, \ y' = 0, \ z' = 0.$$

а це значить, що точка — особлива (обмеження: припускаємо що φ, ψ, χ однозначні функції a).

§ 13. Розгортні поверхні та криві подвійної кривини.

Цікавий випадок обгорток є так звані розгортні поверхні обгортки сім'ї площин заданих рівнанням

$$u(a)x + v(a)y + w(a)z + \omega(a) = 0 \qquad (57)$$

коефіцієнти якого залежать від одного параметра a; за попереднім параграфом, обгортку дістаємо, якщо разом із рівнанням (48) брати рівнання

$$u'(a)x + v'(a)y + w'(a)z + \omega'(a) = 0 \qquad (58)$$

де через $u'(a)$, $v'(a)$ і т. д. позначено похідні від u, v і т. д. по параметру a.

Виключенням a з (57) та (58) дістанемо рівнання обгортки в звичайній формі. Для кожного значення параметра a (57) та (58) визначають пряму лінію, що й буде за характеристичну лінію розгортної поверхні,

По цій прямій відповідна площина (57) дотикається до розгортної поверхні; таку пряму називають також твірною розгортної поверхні. На кожній твірній міститься одна характеристична точка, що визначається рівнаннями (57), (58) та

$$u''(a)x + v''(a)y + w''(a)z + \omega''(a) = 0. \qquad (59)$$

Геометричне місце цих характеристичних точок є крива — ребро звороту розгортної поверхні, — яка за теоремою II попереднього параграфу дотикається характеристики, тобто має в кожній своїй точці за дотичну відповідну твірну, а з площиною (57) має дотик 2-го порядку, тобто площина (57) є для ребра звороту щільнодотичною площиною. Отже, з кожною розгортною поверхнею зв'язано певну криву подвійної кривини.

§ 14. Застосовання до кривих подвійної кривини. Обгортка щільнодотичних площин кривої подвійної кривини.

Рівнання щільнодотичної площини є

$$\lambda(X - x) + \mu(Y - y) + \nu(Z - z) = 0 \qquad (17)\ \S\ 5$$

Похідна по параметру s дає:

$$\lambda(X - x) + \mu'(V - y) + \nu'(Z - z) - (\lambda x' + \\ + \mu y' + \nu z') = 0$$

або за (30) та (34) § 8 та (II, 2) § 6.

$$O = \frac{1}{\rho}\left[l(X - x) + m(Y - y) + n(Z - z)\right] \qquad (21)$$

і, значить, за характеристику є пряма перетину щільнодотичної та випрямної площин, тобто дотична до кривої.

Щоб визначити на характеристиці характеристичну точку, диференціюємо ще раз по s, відкинувши множника $\frac{1}{\rho}$

Дістанемо

$$O = l'(X-x) + m'(Y-y) + n'(Z-z) - (lx' + my' + nz')$$

або за (30) та (35) § 8 та (II, 1) § 6

$$O = -\frac{1}{r}[\alpha(X-x + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z)] -$$

$$-\frac{1}{\rho}[\lambda(X-x) + \mu(Y-y) + \nu(Z-z)].$$

Останнє рівнання визначає площину, що проходить через головну нормалю; розв'язуючи сумісно з (17) та (21), його можна замінити рівнанням нормальної площини

$$\alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) = 0.$$

Відкинувши в рівнанні (21) $\frac{1}{\rho}$, множенням (17) на λ, (21) на l, останнього на α і додаванням дістанемо $X = x$; цілком аналогічно множенням (17) на μ, (21) на m, останнього на β і додаванням дістанемо $Y = y$ і також множенням рівнань відповідно на ν, n, γ та додаванням дістанемо $Z = z$.

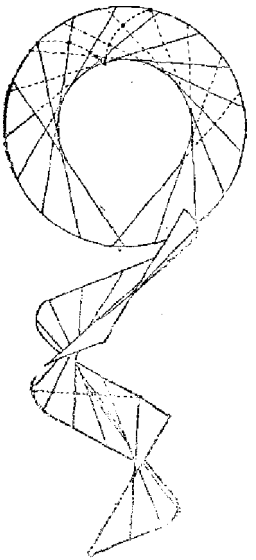


Рис. 11.

Отже, три площини мають за свою спільну точку — точку кривої, і всяку криву подвійної кривини можна вважати за ребро звороту певної розгортної поверхні, а саме обгортки її щільнодотичних площин, а характеристиками розгортної є дотичні до кривої.

Назва „ребро звороту" для геометричного місця характеристичних точок розгортної поверхні з'ясовується такою його властивістю: крива, що по ній яканебудь площина перетинає розгортну поверхню, має в точках перетину цієї площини з ребром звороту точки звороту.

Досить виявити це для якоїнебудь площини, що не має специфічного положення відносно кривої, напр. площини $Z = 0$

З рівнання
дістанемо для координат кривої січення

$$X = x - \frac{\alpha z}{\gamma}, \; Y = y - \frac{\beta z}{\gamma}$$

рівнання кривої в параметричній формі, де змінна незалежна є дуга.

Взявши похідні по дузі s, за допомогою формул Френе-Серре дістанемо:

$$x = -\frac{\mu z}{r\gamma^2}, \; y' = +\frac{\lambda z}{r \cdot \gamma^2}$$

В точці зустрічі кривої з площиною $XOY : Z = 0$ і значить $X' = 0$, $Y' = 0$, тобто ця точка є особлива точка кривої січення а що це є двійна точка вона мусить бути точкою звороту.

(Треба взяти на увагу, що вузлова і ізольована точка за параметричним визначенням кривої не є особлива, і точка, для якої $x' = y' = 0$ мусить бути точкою звороту).

§ 15. Обгортка системи щільнодотичних сфер.

Координати центру й радіюс щільнодотичної сфери визначаються рівнаннями:

$$\xi - x = lr - \lambda\rho r', \; \eta - y = mr - \mu\rho r', \; \xi - nr - \nu\rho r'$$

Найдімо обгортку сім'ї сфер

$$(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 + (Z - \xi)^2 - R^2 = 0$$

де ξ, η, ξ мають попередні значення.

Похідна по параметру s, яку дорівнюємо нулеві, дає

$$-\xi'(X - \xi) - \eta'(Y - \eta) - \xi'(Z - \xi) - \frac{1}{2}(R^2)' = 0$$

або за (4)

$$\left(\frac{r}{\rho} + (\rho r')'\right) \neq 0$$

$$\lambda(X - \xi) + \mu(Y - \eta) + \nu(Z - \xi) - \rho r' = 0$$

або ще за (II. 4)

$$\lambda(X - x) + \mu(Y - y) + \nu(Z - z) = 0$$

тобто характеристиками є кола кривини кривої.

Продиференціювавши останнє ще раз по s, дістанемо для визначення ребра звороту

$$l(X-x)+m(Y-y)+n(Z-z)=0$$

тобто рівнання випрямної площини. Вона перетинається із щільнодотичними площиною та сферою в точці дотику.

Отже — периферична поверхня, — тобто обгортка щільнодотичних сфер якоїсь кривої подвійної кривини, — має цю криву за ребро звороту, а її кола кривини за характеристики.

Якщо візьмемо якесь косе коло, то для нього периферичною поверхнею буде трубчата поверхня. Задача є неможлива, коли

$$\frac{r}{\rho}+(\rho r')'=0,$$

тобто коли крива є сферична.

Приклад 1. Розгортна поверхня (геометричне місце дотичних) ґвинтової лінії

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=mat$$

зустрічає площину XOY по кривій

$$\frac{X-x}{-y}=\frac{Y-y}{x}=-\frac{Z}{z'}=-t$$

бо за рівнаннями кривої

$$x'=-y,\ y'=x.$$

Отже

$$X=x+ty,\ Y=y-tx$$

абож

$$X=a(\cos t+\sin t),\ Y=a(\sin t-t\cos t).$$

Це є інволюта кола. Для $t=0$ $X=a$, $Y=0$. Ця точка є точка звороту, бо

$$x'=at\cos t \text{ і } y'\,at\sin t$$

стають нулями при $t=0$ а

$$\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}=\frac{1}{x'}\left(\frac{y'}{x'}\right)'=\frac{1}{at\cos^3 t}$$

при $t=0$ стає безконечно-великим.

Рівнання ж розгортної поверхні дістаємо виключенням t з рівнань

$$Y\cos t - X\sin t - \frac{1}{m}Z + at = 0$$

рівнання щільнодотичної площини ґвинтової лінії та з рівнянням

$$Y\sin t + X\cos t - a = 0$$

Приклад 2. — Полярна поверхня. Обгортка нормальних площин є за другий приклад розгортних поверхонь зв'язаних з кривою подвійної кривини:

$$F(s) \equiv \alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) = 0.$$

$$F'(s) \equiv \alpha'(X-x) + \beta'(Y-y) + \gamma'(Z-z) - (\alpha x' + \beta y' +$$

$$+ \gamma z) = 0 \equiv \frac{1}{r}\Sigma l(X-x) - 1 = 0.$$

Порівнявши (5) та (6) § 9 примітимо, що характеристиками для цієї поверхні є вісі кривини (полярні прямі), тому й розгортна поверхня називається полярною поверхнею.

Щоб дістати характеристичну точку, треба взяти ще раз похідну по s; тоді, очевидно, дістанемо рівнання (47) § 9. Отже, характеристичною точкою буде центр щільнодотичної сфери і за ребро звороту полярної поверхні є геометричне місце центрів щільнодотичних сфер.

Приклад 3. Обгортка випрямних площин кривої подвійної кривини

$$l(X-x) + m(Y-y) + n(Z-z) = 0.$$

Характеристики визначаються рівнаннями

$$\frac{1}{r}\Sigma\alpha(X-x) + \frac{1}{\rho}\Sigma\lambda(X-x) = 0,$$

або

$$\rho\Sigma\alpha(X-x) + r\Sigma\lambda(X-x) = 0.$$

Диференціюванням ще раз по s дістанемо (для ребра звороту)

$$\rho'\Sigma\alpha(X-x) + r'\Sigma\lambda(X-x) + \frac{\rho}{r}\Sigma l(X-x) + \frac{r}{\rho}\Sigma l(X-x) = 0.$$

Останнє рівнання з допомогою рівнання випрямної площини зводиться до виду

$$\rho'\Sigma\alpha(X-x) + r'\Sigma\lambda(X-x) = \rho.$$

Розв'язавши два останні рівнання сумісно, дістанемо

$$\Sigma\alpha(X-x)=\frac{-r\rho}{\rho r'-rp'}=\frac{\left(\frac{\rho}{r}\right)}{\left(\frac{\rho}{r}\right)'}$$

$$\Sigma\lambda(X-x)=\frac{\rho^2}{\rho r'-rp'}=-\frac{\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}{\left(\frac{\rho}{r}\right)'}$$

Приєднавши сюди ще (a) дістанемо

$$X-x=\frac{\lambda\rho^3-\alpha r\rho}{\rho r'-rp'}$$

$$Y-y=\frac{\mu\rho^2-\beta r\rho}{\rho r'-rp'} \qquad (60)$$

$$Z-z=\frac{\nu\rho^3-\gamma r\rho}{\rho r'-rp'}$$

§ 16. Дотична площина та нормаля до поверхні.

Якщо поверхню задано рівнанням $F(x, y, z)=0(2)$, то, як бачили в § 3, рівнання дотичної площини буде:

$$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)=0 \qquad (15)$$

Якщо поверхню задано рівнанням $z=f(x, y)$, то відповідне рівнання дотичної площини буде

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0 \qquad (15')$$

яке можна дістати зваживши, що тоді

$$F\equiv f(x, y)-z=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=p,\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=q,\ \frac{\partial F}{\partial z}=-1.\text{*)}$$

Але це рівнання (15′) дотичної площини можна дістати з (15)-го, зауважуючи що також, що частині похідні неявної функції визначаються з рівнань

$$F'_x+pF'_z=0,\ F'_y+qF'_z=0.$$

Підставляючи здвідсіль F'_x, F'_y у (15)-те та поділивши на F'_z, дістанемо (15′).

*) Як звичайно $\frac{\partial z}{\partial x}\left(\equiv\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ позначають через p, а $\frac{\partial z}{\partial y}\left(\equiv\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ — через q.

Якщо поверхню дано в параметричній формі

$$x = \varphi(u, v)$$
$$y = \psi(u, v)$$
$$z = \chi(u, v)$$

то підставляючи у $F(x, y, z) = 0$ (2) значіння x, y та z, ми повинні дістати тотожність, тому диференціюючи по u та по v дістанемо

$$F'_x x'_u + F'_y y'_u + F'_z z'_u = 0.$$
$$F'_x x'_v + F'_y y'_v + Fz' \,.\, z'_v = 0.$$

Звідсіль знайдемо:

$$\frac{F'_x}{y'_u z'_v - z'_u y'_v} = \frac{F'_y}{z'_u x'_v - x'_u z'_v} = \frac{F'_z}{x'_v y' - x'_v y'_u}$$

підставивши у (15), дістанемо рівнання дотичної площини, яке напишемо у формі детермінанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \qquad 61)$$

Точку (x, y, z) звемо точкою дотику.

Перпендикуляр до дотичної площини, що проведено у точці дотику, звемо нормалею до поверхні.

Рівнання нормалі буде для (2):

$$\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z} \quad (62)$$

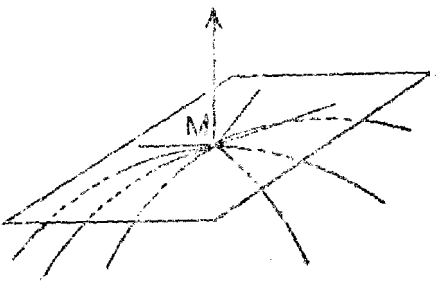


Рис. 12.

для $z = f(x, y)$:

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1} \qquad 62'$$

і для параметричної форми рівнання поверхні:

$$\frac{X - x}{y'_u z'_v - z'_u y'_v} = \frac{Y - y}{z'_u x'_v - x'_u z'_v} = \frac{Z - z}{x'_u y'_v - y'_u x'_v} \qquad (63)$$

Косинуси кутів нормалі з осями координат (для трьох видів рівнання поверхні) напишуться:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(n,OX) &= \pm\frac{F'_x}{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}} = \pm\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \pm \\
&= \pm\frac{y'_u z'_v - z'_u y'_v}{\sqrt{EG-F^2}} \\
\cos(n,OY) &= \pm\frac{F'_y}{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}} = \pm\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \\
&= \pm\frac{z'_u x'_v - x'_u z'_v}{\sqrt{EG-F^2}} \\
\cos(n,OZ) &= \pm\frac{F'_z}{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}} = \pm\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \\
&= \pm\frac{x'_u y'_v - y'_u x'_v}{\sqrt{EG-F^2}}
\end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Подвійний знак відповідає двом напрямам, що можна відрізняти на нормалі.

Якщо маємо поверхню скрізь опуклу (як напр. сфера, еліпсоїд, тощо), то цілком визначений зміст мають вирази: *зовнішня* та *внутрішня* нормаля — як напрями до точок, що лежать зовні, або всередині поверхні, тобто до точок, що лежать по інший бік поверхні ніж дотична площина або по той самий її бік.

Якщо ж ця поверхня не така, зокрема якщо вона не замкнена, то ми вже не маємо цього критерія, — сама поверхня може лежати по різні боки дотичної площини, як наприклад у однополого гіперболоїда або гіперболічного параболоїда. Можна вважати умовно, — так робить наприклад Bour (J. Ecole Polytechn. Cah. 39) — за додатній напрям нормалі вважати напрям у ту частину простору, де

$$F(x, y, z) > 0.$$

§ 17. Дотик поверхонь.

Означення: Дві поверхні мають у спільній точці M дотик порядку n, якщо беручи на одній поверхні точку M' та проводячи пряму, не паралельну з дотичною площиною другої поверхні, до перетину з другою поверхнею в точці M'', дістанемо віддаль $M'M''$ — безконечно малу $(n+1)$-го порядку відносно MM'.

Хай $F(x, y, z)$ є рівнання однієї поверхні,

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v)$$

рівнання другої. M — спільна точка поверхонь.

Координати точки M'

$$x_1 = \varphi(u_1, v_1),\ y_1 = \psi(u_1, v_1),\ z_1 = \chi(u_1, v_1).$$

Віддаль

$$\overline{MM'} = \sqrt{\Sigma[\varphi(u_1, v_1) - \varphi(u, v)]^2} =$$
$$= \sqrt{E(u_1 - u)^2 + 2F(u_1 - u)(v_1 - v) + G(v_1 - v)^2 + \varepsilon}$$

позначає сукупність вищих членів розгортання, що мають різниці $(u_1 - u)$, $(v_1 - v)$ 2-го та вищих степенів.

Отже головна частина MM' є

$$\sqrt{E(u_1 - u)^2 + 2F(u_1 - u)(v_1 - v) + G(v_1 - v)^2}. \qquad (65)$$

Як бачили у § 2, через Ойлерову тотожність можна показати, що $EG - F^2 > 0$. Отже під коренем є вираз, що не розкладається на дійсні лінійні множники, а тому підкореневий вираз не дорівнює нулеві ні за яких реальних значень відношення $u_1 - u/v_1 - v$. Тому MM' одного порядку з різницями

$$u_1 - u,\ v_1 - v$$

або з

$$|u_1 - u| + |v_1 - v|.$$

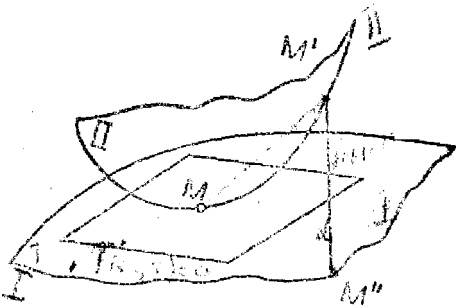


Рис. 13.

Якщо позначити через d віддаль $M'M''$ та через λ, μ, ν косинуси кутів $M'M''$ з осями, то координати точки M'' є

$$x = x_1 + \lambda d,\ y = y_1 + + \mu d,\ z = z_1 + \nu d.$$

Підстанова в $F(x, y, z) = 0$ дає (беручи на увагу, що точка M'' лежить на цій поверхні)

$$0 = F(x, y, z) \equiv F(x_1, y_1, z_1) + d(\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1} + \nu F'_{z_1}) + d^2.H$$

де $d^2.H$ є сума тих членів, що мають d у 2-му та вищих степенях).

Косинуси кутів нормалі з осями координат (для трьох видів рівнання поверхні) напишуться:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(n, OX) &= \pm\frac{F'_x}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = \pm\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \pm \\
&= \pm\frac{y'_u z'_v - z'_u y'_v}{\sqrt{EG - F^2}} \\
\cos(n, OY) &= \pm\frac{F'_y}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = \pm\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \\
&= \pm\frac{z'_u x'_v - x'_u z'_v}{\sqrt{EG - F^2}} \\
\cos(n, OZ) &= \pm\frac{F'_z}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = \pm\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \\
&= \pm\frac{x'_u y'_v - y'_u x'_v}{\sqrt{EG - F^2}}.
\end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Подвійний знак відповідає двом напрямам, що можна відрізняти на нормалі.

Якщо маємо поверхню скрізь опуклу (як напр. сфера, еліпсоїд, тощо), то цілком визначений зміст мають вирази: *зовнішня* та *внутрішня* нормаля — як напрями до точок, що лежать зовні, або всередині поверхні, тобто до точок, що лежать по інший бік поверхні ніж дотична площина або по той самий її бік.

Якщо ж ця поверхня не така, зокрема якщо вона не замкнена, то ми вже не маємо цього критерія, — сама поверхня може лежати по різні боки дотичної площини, як наприклад у однополого гіперболоїда або гіперболічного параболоїда. Можна вважати умовно, — так робить наприклад Bour (J. Ecole Polytechn. Cah. 39) — за додатній напрям нормалі вважати напрям у ту частину простору, де

$$F(x, y, z) > 0.$$

§ 17. Дотик поверхонь.

Означення: Дві поверхні мають у спільній точці M дотик порядку n, якщо беручи на одній поверхні точку M' та проводячи пряму, не паралельну з дотичною площиною другої поверхні, до перетину з другою поверхнею в точці M'', дістанемо віддаль $M'M''$ — безконечно малу $(n+1)$-го порядку відносно MM'.

Хай $F(x, y, z)$ є рівнання однієї поверхні,

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v)$$

рівнання другої. M — спільна точка поверхонь.

Координати точки M':

$$x_1 = \varphi(u_1, v_1),\ y_1 = \psi(u_1, v_1),\ z_1 = \chi(u_1, v_1).$$

Віддаль

$$\overline{MM'} = \sqrt{\Sigma[\varphi(u_1, v_1) - \varphi(u, v)]^2} =$$
$$= \sqrt{E(u_1 - u)^2 + 2F(u_1 - u)(v_1 - v) + G(v_1 - v)^2 + \varepsilon}$$

де ε позначає сукупність вищих членів розгортання, що мають різниці $(u_1 - u)$, $(v_1 - v)$ 2-го та вищих степенів.

Отже головна частина MM' є

$$\sqrt{E(u_1 - u)^2 + 2F(u_1 - u)(v_1 - v) + G(v_1 - v)^2}. \qquad (65)$$

Як бачили у § 2, через Ойлерову тотожність можна показати, що $EG - F^2 > 0$. Отже під коренем є вираз, що не розкладається на дійсні лінійні множники, а тому підкореневий вираз не дорівнює нулеві ні за яких реальних значень відношення $u_1 - u / v_1 - v$. Тому MM' одного порядку з різницями

$$u_1 - u,\ v_1 - v$$

або з

$$|u_1 - u| + |v_1 - v|$$

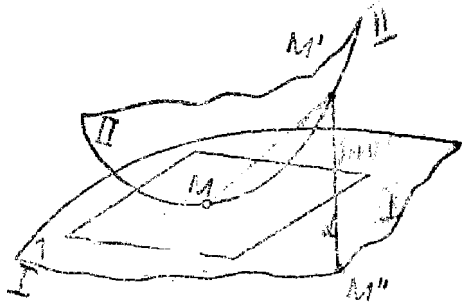


Рис. 13.

Якщо позначити через d віддаль $M'M''$ та через λ, μ, ν косинуси кутів $M'M''$ з осями, то координати точки M'' є

$$x = x_1 + \lambda d,\ y = y_1 + \mu d,\ z = z_1 + \nu d.$$

Підстанова в $F(x, y, z) = 0$ дає (беручи на увагу, що точка M'' лежить на цій поверхні)

$$0 = F(x, y, z) \equiv F(x_1, y_1, z_1) + d(\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1} + \nu F'_{z_1}) + d^2.H$$

де $d^2.H$ є сума тих членів, що мають d у 2-му та вищих степенях).

Якщо

$$\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1} + \nu F'_{z_1} \neq 0$$

то $F(x_1, y_1, z_1)$ повинна бути одного порядку з d.

Але головна частина

$$\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1} + \nu F'_{z_1}$$

дорівнює

$$\lambda F'_x + \mu F'_y + \nu F'_z;$$

цей вираз є пропорційний косинусові нормалі поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці M з прямою $M'M''$, а тому він не дорівнює нулеві, бо пряма $M'M''$, за умовою, не паралельна з дотичною площиною в точці M до $F(x, y, z) = 0$.

Отже $F(x_1 y_1 z_1)$, де замість x_1, y_1, z_1 треба підставити їх вирази в функції u_1, v_1, розгорнена за степенями $u_1 - u$, $v_1 - v$ повинна бути порядку $(n+1)$-го відносно цих різниць.

Якщо, зокрема, обидві поверхні дано рівняннями

$$z = f(x, y), \; z = g(x, y)$$

то умова дотику (n-го) порядку буде така:

Частинні похідні до порядку n-го включно повинні мати у спільній точці рівні значення. Це дає для дотику n-го порядку умов

$$1 + 2 + 3 \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Тут можна як у § 29 від. I та § 4 від. II поставити питання про визначення поверхонь певного типу, що мають найвищий можливий дотик до даної поверхні у даній точці. — Рівняння площини має три довільних коефіцієнти, а тому площина може мати з поверхнею дотик першого порядку: перша умова — площина проходить чнрез точку x, y, z поверхні — хай виконується; маємо рівняння

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

у якому треба визначити коефіцієнти A, B та C так, щоб ліва частина була другого порядку відносно різниць $u_1 - u$, $v_1 - v$; для цього треба щоб:

$$Ax'_u + By'_u + Cz'_u = 0$$

$$Ax'_v + By'_v + Cz'_v = 0,$$

так що виключаючи A, B та C дістанемо

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0, \tag{61}$$

тобто дотичну площину. Отже дотична площина має з поверхнею дотик першого порядку.

§ 18. Щільнодотичний параболоїд.

Рівнання сфери має чотири коефіцієнти, а для дотику 2-го порядку треба шість умов, тому щоб дістати поверхню, яка має дотик другого порядку, треба взяти іншу поверхню, що має шість довільних коефіцієнтів. Такою поверхнею є параболоїд, рівнання якого

$$z = A + Bx + Cy + \frac{1}{2}(Dx^2 + 2Exy + Fy^2)$$

має якраз шість коефіцієнтів.

Попереду напишемо рівнання параболоїду так, щоб він проходив через дану точку x, y, z, тобто

$$Z - z = B(X - x) + C(Y - y) + \frac{1}{2}[D(X - x)^2 + \\ + 2E(X - x)(Y - y) + F(Y - y)^2].$$

Умова, що перша та друга похідні є рівні, дає:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = B, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q = C$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r = D, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s = E, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t = F.$$

Отже рівнання шуканого параболоїда буде:

$$\left.\begin{aligned} Z - z = p(X - x) + q(Y - y) + \frac{1}{2}[r(X - x)^2 + \\ + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2]. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Якщо початок координат взяти в точці поверхні й за площину XOY взяти дотичну площину в цій точці, то (66) спроститься й напишеться

$$Z = \frac{1}{2}(rX^2 + 2sXY + ty^2) \tag{66'}$$

бо

$$x = y = z = p = q = 0.$$

Замітьмо, що рівнання (66) дістанемо, якщо ліву частину рівнання поверхні $z=f(x,y)$ розгорнемо, за степенями $(X-x)$, $(Y-y)$, та відкинемо члени 3-го та вищих порядків відносно цих різниць.

Якщо перерізати щільнодотичний параболоїд площиною паралельною до дотичної площини, то дістанемо так звану Дюпенову індикатрису.

Щільнодотична сфера.

Щоб сфера мала дотик першого порядку до поверхні, треба, щоб виконувались умови:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-R^2)=0.$$

$$(x-\xi)+p(z-\zeta)=0,\ (y-\eta)+q(z-\zeta)=0.$$

Цих умов недосить, щоб визначити чотири коефіцієнти сфери. Отже є ∞' сфер, що мають із поверхнею в даній точці дотик першого порядку. Дві останні умови можна написати так

$$\frac{\xi-x}{p}=\frac{\eta-y}{q}=\frac{z-\zeta}{-1}$$

Отже центри цих сфер містяться на нормалі, яка є геометричним місцем центрів сфер, що мають з поверхнею дотик першого порядку в даній точці.

Для дотику 2-го порядку повинні стверджуватися ще такі умови

$$1+p^2+r(z-\zeta)=0,\ pq+s(z-\zeta),\ 1+q^2+t(z-\zeta)=0$$

звідси

$$\zeta-z=\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}=\tau. \qquad (67)$$

Якщо ці умови справджуються, щільнодотична сфера існує. Такі точки звуть умбіліками, або сферичними точками (див. § 26).

Рівнання щільнодотичної сфери у сферичній точці напишеться

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2-2\tau[p(X-x)+$$
$$+q(Y-y)-(Z-z)]=0.$$

§ 19. Лінії головних дотичних.

Застосуймо критерій дотику n-го порядку кривої з поверхнею до випадку дотику прямої, що проходить через точку поверхні $z=f(x,y)$, з цією поверхнею.

Хай рівнання прямої буде:

$$\frac{X-x}{\lambda}=\frac{Y-y}{\mu}=\frac{Z-z}{\nu}=\sigma \tag{4}$$

так що

$$X=x+\lambda.\sigma,\ Y=y+\mu.\sigma,\ Z=z+\nu.\sigma.$$

Підставляючи в рівнання поверхні, для дотику першого порядку повинні мати, що

$$z+\nu\sigma-f(x+\lambda\sigma,\ y+\mu\sigma)$$

є безконечно мала другого порядку відносно σ. Але

$$z+\nu\sigma-f(x+\lambda\sigma,\ y+\mu\sigma)=[z-f(x,y)]+$$

$$+\sigma[\nu-p\lambda-q\mu]-\frac{\sigma^2}{2}(r\lambda^2+2s\lambda\mu+t\mu^2)+$$

Для дотику першого порядку прямої (4) з поверхнею треба, щоб

$$\nu-\lambda p-\mu q=0 \text{ або } \lambda p+\mu q=\nu$$

тобто пряма повинна бути паралельна з дотичною площиною

$$Z-z-p(X-x)-x)-q(Y-y)=0$$

Але вона, за умовою, проходить через точку дотику, тому вона вся лежить у дотичній площині.

Дотик буде другого порядку, якщо λ, μ, ν вдовольняють ще умову

$$r.\lambda^2+2s\lambda\mu+t\mu^2=0 \tag{68}$$

Це є головні дотичні. У кожній точці поверхні їх дві: реальні та різні, якщо $rt-s^2<0$, уявні, якщо $rt-s^2>0$ та зливаються, якщо $rt-s^2=0$.

Задача відшукати криві, що лежать на поверхні (1) та що мають у кожній точці за дотичну одну з головних дотичних, приводить до рівнань

$$\frac{dx}{\lambda}=\frac{dy}{\mu}=\frac{dz}{\nu}$$

тобто підставляючи у (68) замість λ, μ, ν числа пропорційні до них, дістанемо диференціяльне рівнання асимптотичних ліній поверхні.

$$rdx^2+2s\,dxdy+t+tdy^3=0. \tag{69}$$

До цих саме кривих приходимо, коли шукаємо криві на поверхні, що їхня щільнодотична площина в кожній

точці є відповідна дотична площина до поверхні, отже в яких бінормаля є нормалею до поверхні.

Остання умова дає

$$p\alpha + q\beta - \gamma = 0,\ pl + qm - n = 0$$

або

$$px' + qy' - z' - 0,\ px'' + qy'' - z'' = 0$$

Але якщо диференціюємо перше по дузі (за рівнанням кривої x, y, z є функції дуги), то маємо

$$px'' + qy'' - z'' + p'x' + q'y' = 0$$

що через другу умову зводиться до

$$p'x' + q'y' = 0$$

але

$$p' = rx' + sy',\ q' = sx' + ty'$$

підставляючи маємо

$$rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 = 0.$$

Помножаючи на квадрат диференціяла, дуги, дістанемо (69).

§ 20. Особливі точки поверхні.

Дотична в точці поверхні $F(x, y, z) = 0$ лише тоді визначена, якщо для цієї точки F'_x, F'_y, F'_z не дорівнюють одночасно нулеві.

У випадку, коли для точки поверхні маємо

$$F'_x = 0,\ F'_y = 0,\ F'_z = 0 \tag{70}$$

рівнання дотичної площини зводиться до тотожности $0 = 0$. Тоді беремо 2-й диференціял рівнання поверхні. За умовою перші похідні дорівнюють нулеві, тому другий диференціял має вигляд:

$$F''_{xx}dx^2 + F''_{yy}dy^2 + F'_{zz}dz^2 + 2F'_{xy}dxdy + 2F''_{xz}dxdz + \\ + 2F''_{yz}dydz = 0.$$

Але для прямої, що є дотичною до поверхні, dx, dy, dz є пропорційні до $X - x, Y - y, Z - z$, тому підставляючи у (2) замість dx, dy, dz числа до них пропорційні, дістанемо

$$0 = F''_{xx}(X - x)^2 + F''_{yy}(Y - y)^2 + F''_{zz}(Z - z)^2 + \\ + 2F''_{xy}(X - x)(Y - y) + 2F''_{xz}(X - x)(Z - z) + \\ + 2F''_{yz}(Y - y)(Z - z). \tag{71}$$

Це рівнання є рівнання конічної поверхні, що зокрема може водитись до однієї прямої — осі пучка дотичних площин, або до двох різних площин, або до двох площин, що зливаються в одну.

Відповідно до цього відрізняють точки конічні, біплянарні та уніплянарні.

Точка є біплянарна, якщо Якобіїв детермінант

$$\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ F''_{xz} & F''_{yz} & F''_{zz} \end{vmatrix} = 0. \qquad (72)$$

Точка є уніплянарна, якщо (71) є точний квадрат.

Для цього повинно бути

$$F''_{xx} \cdot F''_{yy} - F''^2_{xy} = 0, \; F''_{yz} F''_{xx} - F''_{xy} F''_{xz} = 0,$$
$$F''_{xx} F''_{zz} - F^{2''}_{xz} = 0.$$

При цьому і Якобіїв детермінант дорівнює 0.

Приклади 1. Якщо цисоїда

$$(x + 2a)^2 + xy^2 = 0.$$

(за вісь Y-ів узято асимптоту) обертається навколо вісі X-ів, то дістанемо поверхню

$$(x + 2a)^3 + x(y^2 + z^2) = 0.$$

В точці $x = -2a$, $y = z = 0$ є дотичний конус, що зводиться до однієї прямої — вісі X-ів.

Якщо цисоїда обертається навколо асимптоти, то утворюється поверхня

$$(x^2 + y^2)[x^2 + y^2 + z^2 + 12a^2]^2 - 4a^2[3(x^2 + y^2) + 4a^2]^2 = 0$$

для якої кожна точка кола

$$z = 0, \; x^2 + y^2 = 4a^2$$

є уніпланарна точка.

2) Обертання строфоїди

$$(x^2 + y^2)x - a(x^2 - y^2) = 0$$

навколо осі X-ів дає поверхню

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 x - a(x^2 - y^2 - z^2) = 0$$

що має в початку координат дотичний конус

$$x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

точка є конічна.

Якщо строфоїда обертається навколо асимптоти, то маємо поверхню

$$(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)-a^2(x^2+y^2-z^2)^2=0$$

що в кожній точці кола

$$x^2+y^2=a^2,\ z=0$$

має біплянарну точку.

Обертанням трактриси навколо асимптоти утворюється поверхня

$$Z=a\lg\frac{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

що зветься псевдосферою.

Для неї коло $x^2+y^2=a^2$ є двійна лінія, вона утворюється уніплянарними точками.

4) $z^3=k(x^2+y^2)$ Початок координат особлива точка — конічна. Дотичний конус $x^2+y^2=0$.

5) $z^3-az^2-k(x^2+y^2)=0$. Початок є ізольована точка.

6) $(x^2+y^2+z^2+8c^2)^2(x^2+y^2)-c^2[5(x^2+y^2)+4c^2]^2=0$.

Коло

$$x^2+y^2=4c^2,\ z=0$$

є подвійна (ізольована) лінія.

Надалі ми будемо досліджувати лише звичайні точки поверхні.

§ 21. Особливі точки просторової кривої.

До цього часу ми припускали, що крива має в кожній своїй точці визначену та лише одну дотичну. Така точка — звичайна точка кривої. Але крива подвійної кривини, як і плоска крива, може мати точки, в яких можна провести більше ніж одну дотичну. Такі точки звуть особливими. Якщо криву задано в параметричній формі, то для особливої точки повинно бути одночасно

$$x'=0,\ y'=0,\ z'=0.$$

Якщо криву визначено, як перетин двох поверхонь

$$F(x,y,z)=0,\ \Phi(x,y,z)=0$$

то для особливої точки повинні стверджуватись рівняння

$$F'_y\Phi'_z-F'_z\Phi'_y=0,\ F'_z\Phi'_x-F'_x\Phi'_z=0,\ F'_x\Phi'_y-F'_y\Phi'_x=0. \quad (73)$$

Ці рівнання справджуються:

1) Якщо одночасно або

$$F'_x = 0,\ F'_y = 0,\ F'_z = 0$$

або

$$\Phi'_x = 0,\ \Phi'_y = 0,\ \Phi'_z = 0.$$

В цьому випадку дотична площина є визначена або до першої поверхні або до другої. Точка кривої перетину буде особливою або на першій, або на другій поверхні (§ 20).

2) Якщо перші похідні по x, y, z ні для $F = 0$, ні для $\Phi = 0$ одночасно не дорівнюють нулеві, то повинно бути

$$\frac{F'_x}{\Phi'_x} = \frac{F'_y}{\Phi'_y} = \frac{F'_z}{\Phi'_z} \tag{73'}$$

Тобто в спільній точці дві поверхні $F = 0$, $\Phi = 0$ мають спільну дотичну площину, точка буде точкою дотику двох поверхонь.

Щоб визначити кутові коефіцієнти дотичної в такій особливій точці, припустімо, що x, y, z (кривої) є функції незалежного змінного t. Беручи від тотожностей похідні по t, дістанемо рівнання

$$\begin{gathered} F'_x \cdot x' + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' = 0 \\ \Phi'_x x' + \Phi'_y y' + \Phi'_z \cdot z' = 0 \end{gathered} \tag{74}$$

що для звичайної точки дають значення пропорційні x', y', z'.

Для особливої ж точки ці два рівнання зводяться до одного, і ми повинні звернуться до других похідних

$$\begin{gathered} F''_{xx} x'^2 + F''_{yy} y'^2 + F''_{zz} z'^2 + 2F''_{xy} x'y' + 2F''_{xz} x'z' + \\ + 2F''_{yz} y'z' + F'_x x'' + F'_y y'' + F'_z z'' = 0. \end{gathered} \tag{75}$$

$$\begin{gathered} \Phi''_{xx} x'^2 + \Phi''_{yy} y'^2 + \Phi''_{zz} z'^2 + 2\Phi''_{xy} x'y' + 2\Phi_{xz} x'z' + \\ 2\Phi''_{yz} y'z' + \Phi'_x x'' + \Phi'_y y'' + \Phi'_z z'' = 0. \end{gathered} \tag{76}$$

Коефіцієнти при похідних другого порядку в (75) та (76) є за (73') поміж себе пропорційні.

Помножаючи (76) на коефіцієнт пропорційности

$$\lambda = \frac{F'_x}{\Phi'_x} = \frac{F'_y}{\Phi'_y} = \frac{F'_z}{\Phi'_z}$$

та віднімаючи від (75) дістанемо:

$$\begin{gathered} (F'_{xx} - \lambda \Phi''_{xx}) x'^2 + (F''_{yy} - \lambda\Phi''_{yy}) y'^2 + (F''_{zz} - \lambda\Phi''_{zz}) z'^2 + \\ + 2(F''_{xy} - \lambda\Phi''_{xy}) x'y' + 2(F''_{xz} - \lambda\Phi''_{xz}) x'z' + \\ 2(F''_{yz} - \lambda\Phi''_{yz}) y'z' = 0, \end{gathered} \tag{77}$$

що разом з одним з рівнань (74) визначить дві системи значень

$$\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}$$

яким відповідають дві дотичні.

Рівнаннями для цієї пари дотичних поперше буде рівнання

$$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)=0 \qquad (77)$$

що є еквівалентне

$$\Phi'_x(X-x)+\Phi'_y(Y-y)+\Phi'_z(Z-z)=0$$

та рівнання, що дістанемо підстановою замість x', y', z' пропорційних їм чисел

$$X-x,\ Y-x,\ Z-z$$

в рівнання (77)

$$(F''_{xx}-\lambda\Phi''_{xx})(X-x)^2+(F''_{yy}-\lambda\Phi''_{yy})(Y-y)^2+$$
$$+(F''_{zz}-\lambda\Phi''_{zz})(Z-z)^2+2(F''_{xy}-\lambda\Phi''_{xy})(X-x)(Y-y)+$$
$$+2(F''_{xz}-\lambda\Phi''_{xz})(X-x)(Z-z)+$$
$$+2(F''_{yz}-\lambda\Phi''_{yz})(Y-y)(Z-z)=0.$$

Залежно від того, чи буде (77) разом з (74) давати дві системи дійсних значень, або дві системи уявних або дві системи, що зливаються на одну (кратну двойну), маємо вузол, ізольовану точку, або точку звороту.

Приклади 1. Вузол: Крива перетину еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\ (a>b>c)$$

із сферою

$$x^2+y^2+z^2=b^2$$

2. Ізольована точка: Перетин гіперболоїда з еліпсоїдом

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}-1=0,\quad \frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Окремий випадок попереднього є теорема: дотична площина перетинає поверхню кривою, що має точку дотику за особливу. Цю теорему можна довести незалежно від попереднього. Візьмімо за площину XOY дотичну й точку дотику за початок координат. Рівнання дотичної площини

$$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)=0$$

повинно зводитись до $Z=0$, тому

$F'_x(0,0,0)=0$ (a) $F'_y(0,0,0)=0$ (b) та $F'(0,0,0)=0.$ (c) крім того $F(0,0,0)=0$ (*) за добором початку координат.

Перетин поверхні $F(x, y, z) = 0$ площиною XOY є крива $(x, y, 0) = 0$ (d) й особливі точки визначаються умовами

$$F'_x(x, y, o) = 0, \; F'_y(x, y, 0) = 0.$$

Ці умови через (a), (b) справджуються для точки $(0, 0, 0)$, що *) належить кривій (d).

§ 22. Обгортка сім'ї поверхонь, що залежать від двох параметрів. (Обгортки 2-го роду).

Рівнання

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \tag{78}$$

де параметри a та b довільні, визначає сім'ю поверхонь [1]).

Будь-яка поверхня (a, b) сім'ї перетинається безконечно-близькою поверхнею,

$$F(x, y, z, a + da, \; b + db) = 0 \tag{78'}$$

по кривій; щоб визначити цю криву перетину, можна (78') через (78) замінити рівнаннями:

$$O = F'_a \, da + F'_b \, db.$$

Ці поверхні в границі проходять, при будь-якому відношенні $db : da$ через точки, що визначаються рівнаннями

$$F = 0, \; F'_a = 0 \; F'_b = 0 \tag{79}$$

які звуться характеристичні точки.

Геометричне місце цих точок звемо обгорткою сім'ї (78).

Теорема: Кожна з поверхонь сім'ї (78) дотикається в характеристичній точці до обгортки.

Справді, з (79) можна найти a та b, як функції x, y, z та підставити у (78). Результат буде рівнання обгортки.

Якщо x, y, z є її точка, то для неї $F'_a = 0$ та $F'_b = 0$ (2) дадуть відповідні значення параметрів a, b, отже

$$a = \varphi(x, y, z), \; b = \psi(x, y, z). \tag{80}$$

Дотична до поверхні (1), що відповідає цим значенням буде

$$F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) + F'_z(Z - z) = 0.$$

Якщо беремо обгортку й на ній ту саму точку, то

$$F = 0, \; F'_a = 0, \; F'_b = 0. \tag{79}$$

Розв'язуючи ці рівнання відносно x, y, z дістанемо рівнання обгортки в параметричній формі з параметрами a та b. Якщо

*) Якщо рівнання має один параметр, воно визначає ∞^1 поверхонь, якщо 2 параметри незалежних, то ∞^2; взагалі якщо рівнання від місць n незалежних параметрів, то воно визначає ∞^n поверхонь.

продиференціювати перше по a та b, то з допомогою двох останніх дістанемо:

$$F'_x \cdot x'_a + F'_y \cdot y'_a + F'_z \cdot z'_a = 0.$$
$$F'_x \cdot x'_b + F'_y y'_b + F'_z \cdot z'_b = 0.$$

Мінори матриці

$$\begin{matrix} x'_a & y'_a & z'_a \\ x'_b & y_b & z'_b \end{matrix}$$

є пропорційні відповідно F'_x, F'_y, F'_z, в які підставлено значення x, y, z, a, b відповідні взятій характеристичній точці.

Ось теорема, що є застосованням теорії обгорток.

Поверхня є обгортка дотичних площин.

Для розгортних поверхонь це вже було доведено.

В рівнанні дотичної площини

$$p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0 \qquad (a)$$

p, q, z є функції x, y. Тому обгортка визначається рівнанням дотичної площини та рівнаннями

$$\left.\begin{aligned} r(X-x) + s(Y-y) = 0 \\ s(X-x) + t(Y-y) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Якщо $rt - s^2 = 0$ (при $rt - s^2 = 0$ поверхня буде розгортна, що буде доведено далі), то з (b) виникає

$$X - x = 0, \; Y - y = 0,$$

а тому

$$Z - z = 0$$

тобто: характеристична точка є якраз точка дотику на кожній із дотичних площин.

Іноді в рівнанні сім'ї поверхонь є не два параметри проміж себе незалежні, а 3 або більше, які зв'язані проміж себе співвідношеннями в такому числі, що залишаються незалежними лише двоє.

Цей випадок розв'язується, як аналогічний випадок для плоских кривих.

Візьмімо випадок 3-х параметрів, що зв'язані одним співвідношенням

$$F(x, y, z, a, b, c) = 0, \; \varphi(a, b) = 0. \qquad (81)$$

За попереднім повинно бути

$$F'_a + F'_c \frac{\partial c}{\partial a} = 0, \; F'_b + F'_c \frac{\partial c}{\partial b} = 0. \qquad (82)$$

Причому

$$\frac{\partial c}{\partial a} \quad \text{і} \quad \frac{\partial c}{\partial b}$$

визначаються з рівнань

$$\varphi'_a + \varphi'_c \frac{\partial c}{\partial a} = 0, \quad \varphi_b' + \varphi_c' \frac{\partial c}{\partial b} = 0. \tag{83}$$

Виключаючи звідси

$$\frac{\partial c}{\partial a} \quad \text{і} \quad \frac{\partial c}{\partial b}$$

дістанемо два рівнання

$$F'_a \varphi'_c - F'_c \varphi'_a = 0, \quad F'_b \varphi'_c - F'_c \varphi'_b = 0. \tag{84}$$

Залишається виключити a, b та c.

Часто-густо зручніше зробити так: множимо (83_1) та (83_2) на λ та додаємо до (82_1) та (82_2). Дістанемо

$$F'_a + \lambda\varphi'_a + \frac{\partial c}{\partial a}(F'_c + \lambda\varphi'_c) = 0. \tag{85_1}$$

$$F'_b + \lambda\varphi'_b + \frac{\partial c}{\partial b}(F'_c + \lambda\varphi'_c) = 0. \tag{85_2}$$

Використовуємо довільність λ так, щоб коефіцієнт при

$$\frac{\partial c}{\partial a} \quad \text{та} \quad \frac{\partial c}{\partial b} F'_c + \lambda\varphi'_c$$

дорівнював нулеві:

$$F'_c + \lambda\varphi'_c = 0. \tag{86}$$

Тоді (85_1) та (85_2) зведуться до

$$F'_a + \lambda\varphi'_a = 0, \quad F'_b + \lambda\varphi'_b = 0. \tag{87}$$

З 5-ти рівнань (81_1), (82_2), (86) та $(87_{1,2})$ виключимо a, b, c та λ.

Це еквівалентне тому, що беремо частинні похідні по a, b, c, як по незалежних змінних від $F + \lambda\varphi$ та дорівнюємо їх нулеві й приєднуємо рівнання $(8|_1)$ та $(8|_2)$.

Приклад. Знайти обгортку площин

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

якщо прямокутний паралелепіпед, що збудовано на a, b та c має сталий об'єм, тобто

$$abc = \text{const} = K^3.$$

Замінимо останнє рівнання на рівнання

$$lga + lgb + lgc = 3lgk.$$

Маємо:

$$-\frac{x}{a^2} + \frac{\lambda}{a} = 0, \; -\frac{y}{b^2} + \frac{\lambda}{b} = 0, \; -\frac{z}{c^2} + \lambda = 0$$

або

$$\lambda = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{3}$$

рівнання обгортки буде

$$27\,xyz = k^3$$

Розділ III.

Кривина поверхонь.

§ 1. Довжина перпендикуляра з точки на дотичну площину.

Хай поверхню задано рівнанням

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

З точки $(x + dx,\ y + dy,\ z + \Delta z)$, де

$$\Delta z = f(x + dx,\ y + dy) - f(x, y) = pdx + qdy +$$

$$\frac{1}{2}(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2) +$$

спустімо перпендикуляр на дотичну площину

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0$$

Довжина його дорівнює

$$\frac{\Delta z - pdx - qdy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{1}{2}\frac{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} +$$

Отже перпендикуляр, спущений з точки поверхні, суміжної з точкою (x, y, z) на дотичну площину в цій точці є безконечно мала другого порядку диференціялів координат.

Але, коли dx, dy такі, що

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0, \tag{3}$$

довжина цього перпендикуляра буде безконечно мала 3-го порядку.

Рівнання (3) підпорядковує кожній точці площини XOY два напрями в просторі — дві площини, перпендикулярні з площиною XOY, які перетинають дотичну площину по двох прямих, з поверхнею дотик другого порядку. Ці прямі звуться головними дотичними поверхні.

Рівнання (3) є диференціяльне рівнання; якщо його проінтеґрувати, то дістанемо два співвідношення виду

$$\Phi(x, y) = c,$$

що визначають в просторі систему циліндрів, які вирізають на поверхні криві, що мають у кожній своїй точці за дотичні — головні дотичні поверхні. Ці криві називають **кривими головних дотичних або асимптотичними лініями.**

Так, для гіперболічного параболоїду

$$2z = x^2 - y^2, \; r = 1, \; s = 0, \; t = -1$$

Рівнання його асимптотичних ліній

$$dx^2 - dy^2 = 0$$

розпадається на 2:

$$dx \pm dy = 0$$

звідкіль

$$y - x = c, \quad \text{і} \quad y + x = c'$$

площини, що перетинають поверхню по прямих лініях, які й будуть асимптотичними лініями.

§ 2. Вигляд поверхні навколо звичайної точки. Дюпенова індикатриса. Клясифікація звичайних точок поверхні.

Хай M звичайна точка поверхні

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

Щоб визначити вид поверхні навколо цієї точки, візьмімо її за початок координат, а площину, дотичну в цій точці до поверхні, за площину XOY. Тоді, якщо $f(x, y)$ можна розгорнути за цілими степенями x, y дістанемо:

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{1.2.3}(kx^3 + 3lx^2y + \\ + 3mxy^2 + ny^3) + \ldots$$

бо за таким добором осей повинні дорівнювати нулеві вільний член та коефіцієнти при x та y першого степеня.

Перетнімо поверхню площиною $z = h$ (h — мала величина). Крива перетину проєктується на паралельну площину XOY кривою:

$$2h + rx^2 + 2sxy + ty^2 + 2\Sigma_3$$

де Σ_3 є сукупність членів 3-го та вищих порядків відносно x, y.

Для малих значень x, y, тобто для точок поблизу початку координат можна не звертати уваги на ці члени й крива січення біля точки (0, 0, 0) буде приблизно крива

$$2h = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

Ця крива є також перетином щільнодотичного параболоїда

$z = h$, вона подібна кривій

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 1 \qquad 4')$$

називають Дюпеновою індикатрисою Dupin.

Ця крива буде еліпсою якщо $rt - s^2 > 0$ (реальною, якщо r t додатні) гіперболою якщо $rt - s^2 < 0$, та парою паралель прямих, якщо $rt - s^2 = 0$ (випадок параболі).

В першому випадку еліпси реальні, якщо знак h є однак

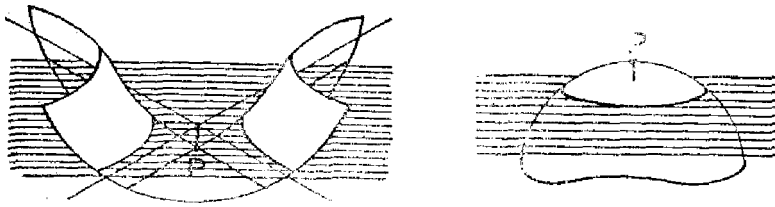


Рис. 14.

із знаком r та t, уявий за протилежного знаку. Поверхня (біля точки дотику) по один бік дотичної площини.

Щільнодотичний параболоїд буде еліптичний.

Саму точку звуть еліптичною точкою.

У другому випадку гіперболі реальні при будь-якому значенні h, але містяться залежно від його знаку в одній пар вертикальних кутів, що утворюють прямі

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0 \qquad (5)$$

є асимптотами для всіх кривих та є одночасно січенням дотичного параболоїда дотичною площиною — площиною *ХОУ*. (Для еліптичної точки асимптоти індикатриси уявні). Поверхня лежить вище й нижче дотичної площини.

Щільнодотичний параболоїд буде гіперболічний.

Точку звуть гіперболічною точкою.

Наостанне, якщо $rt^2 - s^2 = 0$, (4') є пара паралельних прямих реальних, або уявних залежно від знаку h.

Параболоїд перетворюється на параболічний циліндер. Асимптоти індикатриси зливаються в одну подвійну пряму, бо ліва частина рівнання є при цьому точний квадрат. Точку звуть параболічною точкою.

Приклад 1. Тор, це тіло, утворене обертанням кола певного радіюса a навколо вісі, що лежить у його площині, але не

проходить через його центр

$$(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2-4b^2(x^2+y^2)=0$$

має еліптичні точки в своїй околишній частині, гіперболічні, на внутрішній, параболічні — на межі поміж обох частин т. т. на колах дотику площин $z=\pm a$ з поверхнею тора.

2. Обертання ланцюгової лінії навколо прямої перпендикулярної до її осі симетрії віддаленої від вершини на a, дає поверхню

$$y^2+z^2=\frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$$

Якщо перенести початок координат у точку $(a, 0, 0)$ то дістанемо

$$y^2+z^2=\frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{x-a}{a}}+e^{-\frac{x-a}{a}}\right)^2$$

$(0, 0, 0)$ — точка гіперболічна.

3. Поверхня

$$a^2z=\left(x-\frac{y^2}{2b}\right)^3$$

утворена перенесенням кубічної параболі паралельно самій до себе, так що її точка перегину рухається по параболі 2-го порядку в площині *XOY*, перпендикулярній до площини кубічної параболі. В початку координат[1] маємо параболічну точку.

§ 3. Зв'язок асимптотичних ліній із індикатрисою.

Вибір осей *OX* та *OY* покищо не зроблено. Якщо за вісі візмемо вісі індикатриси, то (4') набирає вигляду:

$$1=r_1x^2+t_1y^2$$

рівнання (4)

$$2h=r_1x^2+t_1y^2,$$

при чому

$$r_1+t_1=r+t,\ r_1t_1=rt-s^2$$

Кут повертання визначається формулою

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2s}{r-t}$$

Отже дістанемо два взаємно-перпендикулярних напрями — напрями осей індикатриси.

Асимптоти індиктриси (5) є одночасно напрями головних дотичних.

[1]) А також вздовж всієї параболі переносу.

Справді, головні дотичні лежать у дотичній площині та умовою

$$r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2s\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}+t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=0.$$

Ми взяли дотичну площину за площину XOY, тому, якщо β кут головної дотичної з вісю X-ів, то

$$\cos\beta=\frac{dx}{ds},\quad \sin\beta=\frac{dy}{ds},$$

тому дістанемо:

$$r\cos^2\beta+2s\cos\beta\sin\beta+t\,.\,\sin^2\beta=0$$

однакове з рівнанням (5), бо точка $x=\cos\beta$, $y=\sin\beta$ повинна лежати на асимптоті. Цим пояснюється назва асимптотичні лінії — вони є обгортки асимптот індикатрис різних точок поверхні.

§ 4. Лінії кривини. Сферичні точки.

Напрями осей індикатриси поділяють пополам кути проміж асимптотами. Обгортки цих дотичних звемо лініями кривини — ми зустрінемося з ними далі. Ці лінії ми також дістанемо, якщо поставимо задачу — визначити ті лінії на поверхні, що в їх безконечно близьких точках нормалі до поверхні перетинаються.

Взагалі в двох безконечно близьких точках (x, y, z) та $(x+dx, y+dy, z+dz)$ поверхні $z=f(x, y)$ нормалі

$$\frac{Z-z}{-1}=\frac{Y-y}{q}=\frac{X-x}{p}$$

та

$$\frac{Z-z-dz}{-1}=\frac{Y-y+dy}{q+dq}=\frac{X-x-dx}{p+dp}$$

не перетинаються. Щоб вони перетиналися треба, щоб ці 4 рівнання справджувались однаковими значеннями X, Y, Z. Позначивши спільне значення трьох перших відношень через σ та підставивши їх до других дістанемо:

$$\sigma+dz=\frac{p\sigma-dx}{p+dp}=\frac{q\sigma-dy}{q+dq}$$

порівнюючи перше відношення з другим та третім дістанемо:

$$\sigma dp+dz(p+dp)+dx=0$$
$$\sigma dq+dz(q+dq)+dy=0.$$

Виключенням σ звідси маємо:

$$dz(pdq - qdp) + (dqdx - dpdy) = 0. \tag{6}$$

Замінивши

$$dz = pdx + qdy,\ dp = rdx + sdy,\ dq = sdx + tdy \tag{6'}$$

та відбираючи члени з dx^2, $dxdy$, dy^2 дістанемо:

$$(7)\quad 0 = dx^2[s(1+p^2) - qpr] + dxdy[t(1+p^2) - r(1+q^2)] + \\ + dy^2[pqt - s(1+q^2)].$$

За рівнанням поверхні p, q, r, s, t є функції від x, y; тому це є диференціяльне рівнання, проінтеґрувавши яке ми знайдемо два рівнання виду $\Phi(x, y) = \text{const}$ відповідно двом кореням $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, що їх можна дістати з рівнання (7).

Кожне з цих рівнань визначає в просторі сім'ї циліндрів, що вирізають на поверхні її лінії кривини. Напрям їх у вибраній вище системі координат для точки (0, 0, 0) визначаються при заміні в $p = q = 0$

$$sdx^2 + (t - r)dxdy - sdy^2 = 0 \tag{7}$$

звідкіль

$$\frac{2dydx}{dx^2 - dy^2} = \frac{2s}{r - t},$$

або позначаючи

$$\frac{dy}{ax} = \operatorname{tg}\alpha$$

дістанемо

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2s}{r - t},$$

тобто дотичні до ліній кривини зливаються з осями індикатрис.

Отже, через кожну точку поверхні проходять по 2 пари ліній:

1) Дві асимптотичні лінії, дотичні до яких є відповідні цій точці головні дотичні, або асимптоти індикатриси.

Ці лінії перетинається взагалі не під прямим кутом.

2) Дві лінії кривини, взаємно перпендикулярні, дотичні до яких є осі індикатриси та бісектриси кутів проміж її асимптотами.

Є на поверхні точки, в яких напрями ліній кривини стають невизначені. Це є точки, для яких разом дорівнюють нулеві

коефіцієнти при dx^2, $dxdy$, dy^2 в їх рівнанні (7) тобто

$$s(1+p^2)-qpr=0,\ t(1+p^2)-r(1+q^2)=0,$$
$$pqt-s(1+qy^2)=0.$$

Ці умови зводяться до двох

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}$$

Отже, на кожній поверхні існують (реальні або уявні) точки, в яких напрями ліній кривини невизначені. Такі точки звуть умбіліками або сферичними точками (французькою мовою ombilics, німецькою Nabelpunkte).

Як бачили раніше (§ 18) в сферичних точках сфера має з поверхнею дотик друго порядку.

Крім асимптотичних ліній та ліній кривини маємо ще одну варту уваги систему ліній на поверхні — геодезичні лінії.

§ 5. Геодезичні лінії.

Геодезичні лінії на поверхні є ті її лінії, для кожної точки яких випрямна є площина дотична до поверхні, а тому головні нормалі цих ліній є нормалі до поверхні у відповідній точці.

Якщо рівнання поверхні візьмемо в формі $z=f(x, y)$ то за умовою

$$\frac{l}{p}=\frac{m}{q}=\frac{n}{-1}$$

а тому рівнання

$$\alpha l+\beta m+\gamma n=0$$
$$\lambda l+\mu m+\nu n=0$$

перетворяться на

$$p\gamma x'+qy'-z'=0$$
$$p(y'z''-z'y'')+q(z'x''-x'z'')-(x'y''-y'x'')=0.$$

Останнє можна переписати у вигляді детермінанта

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0.$$

Помноживши перший стовпчик на p, другий на q та віднявши від третього, дістанемо:

$$\begin{vmatrix} p & q & -(1+p^2+q^2) \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & z''-px''-qy'' \end{vmatrix} = 0.$$

Але похідна від (6') дає

$$z''-px''-qy''=p'x'+q'y'=(rx'+sy')x'+ \\ +(sx'+ty')y'=rx'^2+2rx'y'+ty'^2$$

тому детермінат набирає виду

$$0=\begin{vmatrix} p & q & -(1+p^2+q^2) \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & (rx'^2+2sx'y'+ty'^2) \end{vmatrix} \tag{9}$$

що після розгортання дає

$$0=(rx'^2+2sx'y'+ty'^2)(py'-qx')-(x'y''- \\ -y'x'')(1+p^2+q^2);$$

помножаючи на ds^2, дістанемо:

$$0=(rdx^2+2sdxdy+tdy^2)(pdy-qdx)- \\ -(1+p^2+q^2)(dxd^2y-dyd^2x).$$

Це є диференціяльне рівнання другого порядку поміж x, y; проінтеґрувавши його визначаємо циліндри, що вирізають на поверхні її геодезичні лінії.

Геодезичні лінії є взагалі найкоротша віддаль поміж двох досить близьких точок поверхні, рахуючи його по самій поверхні.

Вони є форма рівноваги важкої, гнучкої, нерозтяжної нитки, яка лежить на поверхні; отже вони на поверхні відіграють ролю аналогічну ролі прямих на площині. Ці властивості геодезичної лінії доводять у відповідних розділах варіяційного числення та механіки.

§ 6. Кривина ліній на поверхні.

Дюпенова індикатриса характеризує поверхню навколо її звичайної точки січеннями площин, паралельних до дотичної площини. Щоб поповнити цю харатеристику, розгляньмо, яку кривину мають у точці поверхні різні криві, що їх проведено на поверхні через цю точку. При цьому спочатку покажемо, що

досить дослідити лише плоскі криві (теорема I) потім, що з плоских розрізів досить дослідити лише нормальні (тобто, ті що їх утворено площинами, проведеними через нормаль до поверхні (теорема II), після цього будемо досліджувати кривину останніх.

Теорема 1. Кривина (перша) будь-якої кривої що проведена на даній поверхні через звичайну її точку, однакова з кривиною плоскої кривої, по якій поверхня перетинається щільнодотичною площиною першої кривої.

Хай дана поверхня є

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

та (x, y, z) її звичайна точка.

Хай через точку (x, y, z) ведено криву, що на площину XOY проектується кривою y для її точок z є функція x:

$$z = f[x, \varphi(x)],$$

тому

$$z' = p + qy', \quad z'' = r + 2sy' + ty'^2 + qy'' \tag{10}$$

отже коефіцієнти рівнання щільнодотичної площини кривої напишуться

$$\begin{aligned} A &= y'(r + 2sy' + ty'^2) - py'' \\ B &= -(r + 2sy' + ty'^2) - qy'' \\ C &= y'' \end{aligned} \tag{11}$$

Щоб відрізнити точки плоского січення, позначмо їх координати через X, Y, Z; — вони визначаються рівнаннями:

$$Z = f(X, Y) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} 0 = [y'(X - x) - (Y - y)](r + 2sy' + ty'^2) + \\ + y''[Z - z - p(X - x) - q(Y - y)]. \end{aligned} \tag{13}$$

Перша та друга похідні по X від (12) та (13) точки (x, y, z)

$$Z' = p + qY' \ (14_1) \quad Z'' = r + 2sY' + tY'^2 + qY'' \tag{14_2}$$

$$(y' - Y')(r + 2sy' + ty'^2) + y''(Z' - p - qY') = 0. \tag{15_1}$$

$$-Y''(r + 2sy' + ty'^2) + y'(Z'' - qY'') = 0. \tag{15_2}$$

За допомогою двох перших, два останні рівнання зводяться до

$$(y' - Y')(r + 2sy' + ty'^2) = 0.$$

$$-Y''(r + 2sy' + ty'^2) + y''(r + 2syY' + ty'^2 = 0.$$

Перше дає $Y' = y'$, якщо

$$r + 2sy' + ty'^2 \neq 0 \qquad (15^*)$$

тоді друге дає $Y'' = y''$. А якщо так, то за (14_1) (14_2) та (10_2) маємо

$$Z' = z', \; Z'' = z''$$

Отже, в точці (x, y, z) рівні значення мають перші та другі похідні, так для кривої подвійної кривини як і для січення поверхні щільнодотичною площиною взятої кривої. Але вираз для радіюса першої кривини залежить лише від похідних першого та другого порядку. Тому радіюси кривини для обох кривих рівні, що й треба було довести.

Щож до умови (15^*) то вона відокремлює асимптотичні лінії, *для яких, як ми бачили*

$$r + 2sy' + ty'^2 = 0.$$

Для асимптотичних ліній щільнотична площина є площина, дотична до поверхні, а ця остання, як було доведено, перерізає поверхню по кривій,що має точку дотику за особливу точку. Дотична в цій точці й буде дотичною до відповідних асимптотичних ліній.

Справді, рівнання

$$(y' - Y')(r + 2sy' + ty'^2) = 0$$

для асимптотичних ліній справджується тому, що для них

$$r + 2sy' + ty'^2 = 0$$

а рівнання

$$-Y''(r + 2sy' + ty'^2) + y''(r + 2sY' + ty'^2) = 0$$

через те саме зводиться до рівнання

$$y''(r + 2sY' + ty'^2) = 0;$$

а що $y'' \neq 0$ взагалі, то робимо висновок, що

$$y' = Y$$

навпаки y'' та Y'' не є рівні, а тому і $z'' \neq Z''$; отже дотик асимптотичної лінії з кривою, по якій перетинається поверхня її щільнодотичною площиною є взагалі лише 1-го, а не 2-го порядку, (J. M. de la Gournerie).

Зв'язок проміж радіюсів кривини двох кривих дав в цьому останньому випадку Бельтрамі (E. Beltrami).

Диференціюючи тричі $Z = f(X, Y)$ та підстлвляючи координати x, y, z та $Y' = y'$, маємо для плоского перерізу

$$k + 3ly' + 3my'^2 + ny'^3 + 3(s + ty')\,Y'' = 0$$

а диференціюючи рівнання асимптотичних ліній, дістанемо

$$k + 3ly' + 3my'^2 + ny'^3 + 2(s + ty')\,y'' = 0.$$

Порівнюючи з попереднім, маємо

$$3Y'' = 2y'',$$

а тому

$$3Z'' + 2z''$$

отже

$$R_{ac} = \frac{2}{3} R$$

переріз щільнодотичної площини.

Ця метода обмежена тим, що її можна застосувати лише для гіперболічних точок з конечними радіюсами кривини (бо не повинно бути $s + ty' = 0$).

Теорема II. (Меньє — Meusnier). Якщо через одну й ту саму пряму, дотичну до поверхні, провести дві площини — одну, що проходить через нормаль, а другу, що утворює з першою кут φ, то радіюс кривини цього похилого січення — є проєкція радіюса кривини нормального січення на цю площину, тобто $\rho = R \,.\, \cos\varphi$.

Хай точка M, точка похилого січення, безконечно близька до точки O; можна вважати, що вона належить до кола кривини цього січення в точці O. Спускаємо з точки M перпендикуляра MP на дотичну площину й MQ на дотичну пряму. З прямокутного трикутника MPQ (в якому кут QMP дорівнює кутові φ, що є очевидно міра двостінного кута проміж площинами ZOQ та MOQ) маємо

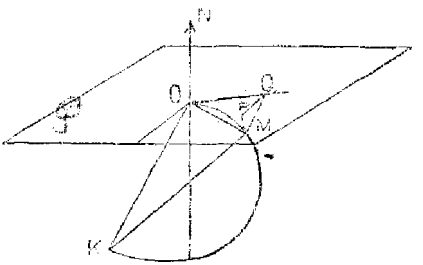


Рис. 15.

$$MP = MQ \,.\, \cos\varphi$$

Якщо OK діяметр кола кривини січення, що ми розглядаємо, то OK перпендикулярне до OQ; з подібности трикутників OKM та OMQ маємо:

$$\frac{MQ}{MO} = \frac{OM}{OK}$$

Позначаючи через ρ радіюс, та рахуючи безконечно малу хорду OM, рівною безконечно малій дузі ds проміж тими саме точками, знайдемо

$$MQ = \frac{ds^2}{2\rho},$$

а тому

$$MP = \frac{ds^2}{2\rho} \cos\varphi.$$

Ми вже мали, що довжина перпендикуляра на дотичну площину (незважаючи на безконечно малі вищих порядків)

$$MP = \frac{1}{2} \frac{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

отже

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\left(\frac{dx}{ds}\right)\cdot\left(\frac{dy}{ds}\right) + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{\cos\varphi\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

де $\frac{dx}{ds}$ та $\frac{dy}{ds}$ є косинуси кутів, що утворює дотична в точці O з осями OX та OY. Якщо проведемо через цю дотичну та нормаль площину, то для розрізу, що дістанемо,

$$r,\ s,\ t,\ \frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds}$$

зберігають ті саме значіння, але ρ заміниться на R та $\varphi = 0$.

Отже

$$\frac{1}{R} = \frac{r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\left(\frac{dx}{ds}\right)\cdot\left(\frac{dy}{ds}\right) + t\cdot\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

і

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R\cos\varphi}$$

звідкіль

$$\rho = R\,.\,\cos\varphi \qquad (16)$$

це і є формула, що стверджує теорему Meusnier.

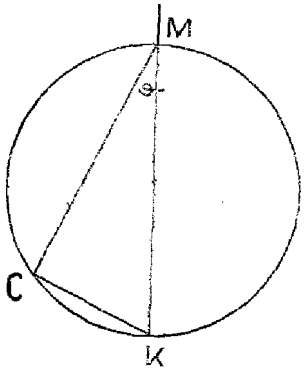


Рис. 14.

Отже, якщо повертати січну площину навколо дотичної, то в площині, нормальній до цієї дотичної, центр C похилого розрізу опише коло, що має MK за діяметр (коло Meusnier'ове).

Ми покищо не робили жодних припущень щодо вибору системи координат. Візьмімо тепер точку поверхні за початок координат, дотичну площину за площину XOY.

Тоді для початку координат $p = q = 0$,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \frac{dy}{ds} = \sin\alpha, \frac{dz}{ds} = 0.$$

Попередня формула дає:

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin^2\alpha \tag{17}$$

або, якщо завести синус та косинус подвійного кута,

$$\frac{1}{R} = \frac{r+t}{2} + s\,.\sin 2\alpha + \frac{r-t}{2}\cos 2\alpha. \tag{18}$$

Якщо змінюється α, тобто коли повертати січну площину навколо нормалі, то значення R змінюється.

Найбільше та найменше значення R дістанемо для того α, що справджує рівнання

$$2s\,.\cos 2\alpha - (r-t)\sin 2\alpha = 0$$

тобто якщо

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2s}{r-t}, \tag{18'}$$

отож для α дістанемо два значення α_0 та

$$\alpha_0 + \frac{\pi}{2},$$

бо α визначається з тангенса подвійного кута.

Напишемо вираз для R так:

$$\frac{1}{R} = \frac{r+t}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha\,[2s\,.\operatorname{tg} 2\alpha + (r-t)] =$$

$$= \frac{r+t}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha\,\frac{4r^2 + (r-t)^2}{r-t}$$

Відповідно двом значенням α_0 та

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$$

сог 2α має двоє значень

$$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}}=\pm\frac{r-t}{\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}$$

Отже,

$$\frac{1}{R_1}=\frac{r+t}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(r-t)^2+4s^2},$$

$$\frac{1}{R_2}=\frac{r+t}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(r-t)^2+4s^2} \tag{19}$$

Одне значення буде найбільше, а друге найменше.

Справді, друга похідна

$$\left(\frac{1}{R}\right)''_\alpha=-2\,[2s\,.\,\sin 2\alpha+(r-t)\cos 2\alpha]=$$

$$=-2\cos 2\alpha\,.\,\frac{4s^2+(r-t)^2}{r-t}$$

має той або інший знак залежно від знаку $\cos 2\alpha$.

Теорема 3. Напрями дотичних, що відповідають головним нормальним січенням, зливаються з осями Dupin'ової індикатриси, тому лінії кривини мають за дотичні — дотичні головних нормальних січень.

Якщо за вісі OX та OY (покищо довільного напряму) взяти саме напрям осей індикатриси, то рівнання її буде:

$$r_1\,x^2+t_1\,y^2=1 \quad (s_1=0)$$

а рівнання (18′) дає

$$\operatorname{tg} 2\alpha=0$$

тобто

$$\alpha_0=0,\ \alpha_1=\frac{\pi}{2}$$

Відповідні значення радіюсів

$$\frac{1}{R_1}=r_1;\ \frac{1}{R_2}=t_1$$

отже

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_1}\cos^2\alpha+\frac{1}{R_2}\sin^2\alpha.$$

Це є зв'язок поміж радіюсом будь-якого нормального січення та радіюсами головних січень. Хай R' радіюс кривини для січення

перпендикулярного до першого, тоді

$$\frac{1}{R'}=\frac{1}{R_1}\sin^2\alpha+\frac{1}{R_2}\cos^2\alpha. \tag{20}$$

Якщо додати одне до одного, то дістанемо

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}, \tag{21}$$

що дає Ойлерову теорему:

Теорема IV. Сума мір кривини двох взаємно перпендикулярних нормальних січень поверхні дорівнює сумі мір кривини головних нормальних її січень.

Величину $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ звемо середньою кривиною поверхні в даній точці. Якщо ця величина дорівнює нулеві, радіюси кривини дорівнюють на величину, але спрямовані в різні боки від поверхні; таки поверхні звемо мінімальними поверхнями.

§ 8. Загальний спосіб визначити головні нормальні січення.

Вернімось до загально виразу (b) для міри кривини нормального січення. Якщо позначимо α, β, γ косинуси кутів, що утворює дотична з вісями координат OX, OY, OZ, то дістанемо, диференціюючи

$$f(x, y)-z=0, \tag{1}$$

якому повинна вдовольняти кожна точка кривої

$$x=\varphi(s),\ y=\psi(s),\ z=\chi(s),$$

що лежить на поверхні, таке співвідношення:

$$0=p\alpha+q\beta-\gamma;$$

воно виходить також із перпендикулярности дотичної до кривої з нормалею до поверхні. Підставляючи це значення для γ у співвідношення

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

дістанемо:

$$\alpha^2(1+p^2)+2pq\alpha\beta+(1+q^2)\beta^2=1 \tag{22}$$

Отже розшукування головних нормальних січень зведено визначення extremum'а виразу

$$\frac{1}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

де α та β зв'язані співвідношенням (22).

Для цього, за відомим правилом, треба шукати extremum

$$\Phi(\alpha,\beta)=r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2-K[\alpha^2(1+p^2)+2pq\alpha\beta+(1+q^2)\beta^2]$$

вважаючи, що α та β незалежні.

Дістанемо

$$\frac{1}{2}\Phi'\alpha\equiv r\alpha+s\beta-K[\alpha(1+p^2)+\beta\,.\,pq]=0. \qquad 23)$$

$$\frac{1}{2}\Phi'\beta\equiv s\alpha+t\beta-K[\alpha\,.\,pq+\beta(1+q^2)]=0. \qquad 24)$$

Помножаючи (23) на α, (24) на β, та складаючи, через 22) дістанемо:

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2-K=0$$

тобто K є значення, що його набирає $r\alpha+2s\alpha\beta+t\beta^2$, якщо α та β справджують (23) та (24), або K є шукане найменше значення $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$.

Отже

$$K=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} \text{ або } \frac{1}{R}=\frac{K}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad (25)$$

Щоб вирахувати K зважмо, що рівнання (23) та (24), якщо їх розглядати як рівнання відносно α та β, сумісні лише при K, яке вдовольняє умові

$$\begin{vmatrix} r-K(1+p^2) & s-pqK \\ s-Kpq & t-K(1+q^2) \end{vmatrix}=0. \qquad (26)$$

Якщо розгорнути детермінант за степенями K, то дістанемо:

$$K^2(1+p^2+q^2)-K[r(1+q^2)-2s\,.\,pq+t(1+p^2)]+rt-s^2=0$$

Піставляючи замість K його значення через R маємо рівнання

$$(1+p^2+q^2)^2\frac{1}{R^2}-[r(1+q^2)-2s\,.\,pq+t(1+p^2)]\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}+$$
$$+rt-s^2=0 \qquad (27)$$

що його корені є головні радіюси кривини.

За властивістю коренів квадратового рівнання з (27) маємо:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{r(1+q^2)-2spq+t(1+p^2)}{(1+p+q^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{28}$$

$$\frac{1}{R_1R_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \tag{29}$$

§ 9. Середня та повна (Ґавсова) кривина.

Величину $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ звемо середньою кривиною.

За (28), поверхні мінімальні, що для них ця середня кривина дорівнює нулеві, вдовольняють диференціяльному рівнанню

$$r(1+q^2)-2spq+t(1+p^2)=0, \tag{30}$$

яке для таких мінімальних поверхонь справджується у всіх точках.

Для даної поверхні $z=f(x,y)$—не мінімальної, (30) визначає криву, для всіх точок якої середня кривина дорівнює нулеві, а тому радіюси кривини головних нормальних січень рівні на величину, але протилежні знаком, тобто спрямовані по різні боки поверхні.

Дюпенова індикатриса у кожній точці, що задовольняє (30), є рівнобічна гіперболя. Отже мінімальні поверхні можна характеризувати як такі, що в кожній їх точці індикатриса є рівнобічна гіперболя.

Поверхні, що для них середня кривина в кожній точці є стала, справджують рівнання.

$$r(1+q^2)-2spq+t(1+p^2)=a(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}} \tag{31}$$

Вони мають значення в теорії капілярности: ще Laplace показав, що вони є фігури рівноваги рідин, які звільнені від діяння сили ваги. Коли обмежимось поверхнями оборотовими, можна визначити квадратурою меридіянову криву.—Їх три типи, що Plateau назвав ондулоїд, нодоїд, катеноїд.

Другу величину (29) називаємо повною або Ґавсовою кривиною. Якщо ця величина додатня, радіюси кривини одного знаку, а тому спрямовані по один бік поверхні.

Те саме значення має Ґавсова кривина й для другого боку поверхні, але тоді обидва радіюси R_1 та R_2 змінюють свої знаки на зворотні.

Щоб Ґавсова кривина була додатня, треба щоб $rt - s^2 > 0$, отже ми дістаєм інше значення клясифікації, що ґрунтується на Дюпеновій індикатрисі.

В еліптичній точці поверхні Ґавсова кривина додатня.

Якщо

$$\frac{1}{R_1 R_2} < 0,$$

то головні радіюси мають протилежні знаки, головні центри кривини (центри кіл кривини головних нормальних розрізів) лежать по різні боки дотичної площини. Щоб

$$\frac{1}{R_1 R_2} < 0,$$

треба, щоб $rt - s^2 < 0$.

В гіперболічній точці поверхня має від'ємну Ґавсову кривину.

Якщо $rt - s^2 = 0$, то один з радіюсів стає ∞.

В параболічній точці поверхні Ґавсова кривина дорівнює 0.

Параболічні точки поверхні утворюють на ній взагалі криву лінію — перетин поверхні $z = f(x, y)$ з поверхнею $rt - s^2 = 0$.

В точках цієї кривої Ґавсова кривина дорівнює нулеві й вона відокремлює ту частину поверхні, де вона додатня, від тієї частини поверхні, де вона від'ємна,

Якщо в кожній точці поверхні $rt - s^2 = 0$, тобто якщо кожна точка параболічна, Ґавсова кривина дорівнює нулеві у всіх точках. Такі поверхні звемо поверхнями нулевої кривини; ми побачимо, що це є розгортні поверхні. Якщо Ґавсова кривина у всіх точках поверхні додатня, тобто всі точки поверхні еліптичні, то поверхня буде мати додатню кривину, у всіх точках Дюпенова індикатриса буде еліпсою, асимптотичні лінії будуть уявні.

Так, для еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\frac{(rt - s^2) z^2}{c^4} + \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{a^2}\right)$$

тобто

$$rt - s^2 > 0.$$

Якщо у всіх точок поверхні Гавсова кривина від'ємна, всі точки поверхні будуть гіперболічні, поверхня матиме від'ємну кривину, індикатриса буде гіперболею, асимптоти дійсні, асимптотичні лінії — дійсні.

В тих випадках, коли Ґавсова кривина у всіх точках поверхні однакова не лише на знак, а й на величину — поверхні звемо поверхнями сталої кривини.

Вони вдовольняють умові

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \pm a^2. \tag{32}$$

Значення Ґавсової кривини особливо з'ясовується з тієї її властивості, що Ґавсова кривина не залежить від самих координат, а лише від коефіцієнтів E, F, G лінійного елементу та від їх похідних першого та другого порядку (сам Ґавс назвав цю теорему чудовою—theorema egregium, див. дод. II — визнач. Ґавс. крив.).

Якщо лінійні елементи двох поверхонь рівні, то поверхні накладаються одна на одну, тобто кожній кривій однієї поверхні відповідає на другій поверхні крива такої ж самої довжини, і кути поміж відповідними лініями є також рівні.

Таке накладання може бути вимагає ізгину, але відбувається без розривів та складок, от як плоский лист паперу навивається на циліндер або конус.

Якщо взяти дві поверхні

$$z = f(x, y) \quad \text{та} \quad z = F(x, y)$$

то для можливости накладання повинно бути

$$1 + p^2 = 1 + P^2, \quad pq = PQ, \quad 1 + q^2 = 1 + Q^2$$

звідкіль виникає

$$\frac{p}{P} = \frac{q}{Q} = \pm 1$$

Тоді

$$rt = RT \quad \text{та} \quad s^2 = S^2$$

Але зворотне твердження може бути й неправильним—Ґавсова кривина у двох поверхонь може бути однаковою, хоч їх лінійні елементи й не рівні.

Ванґерін (Wangerin) дав приклад такої пари поверхонь

$$2z = \log(x^2 + y^2) \quad \text{та} \quad z = ar\,\mathrm{ctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Диференціял дуги першої поверхні

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(x\,dx + y\,dy)^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \left(1 + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dx^2 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy + \left(1 + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dy^2$$

а другої

$$ds^2 = dx^2\left[1 + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy +$$

$$+ \left[1 + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]dy^2$$

в цьому прикладі

$$p = Q, \quad q = -P, \quad r = S, \quad s = -R = T, \quad t = -S$$

отже

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + P^2 + Q, \quad rt - s^2 = RT - S^2$$

і Ґавсова кривина обох поверхонь $= -\dfrac{1}{(x^2+y^2{}^2+1)}$

Лише для поверхонь сталої кривини рівність Ґавсових кривин є умова не лише доконечна але й достатня.

Характеризувати поверхню навколо її точки можна також поверхнею утвореною колами кривини всіх нормальних січень в даній точці.

§ 10. Диференціяльний елемент дуги сферичного відображення нормалей. Формула Enneper'a-Beltrami.

Для визначення зміни напряму нормалей поверхні можна звернутись, як це робилося й для просторових кривих, до сферичного відображення, проводячи через будь-яку точку прямі, паралельні до нормалей поверхні.

Точки, що мають за координати косинуси кутів, що нормалі утворюють з осями,

$$\xi = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \eta = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \zeta = \frac{-1}{1+p^2+q^2}$$

або

$$\Delta.\,\xi = p, \ \Delta.\,\eta = q, \ \Delta.\,\zeta = -1, \text{ якщо } \Delta^2 = 1 + p^2 + q^2$$

містяться на сфері

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

якщо візьмемо криву на поверхні, то зміна напряму нормалей поверхні, якщо рухатись по цій кривій, характеризується відповідною дугою кривої сферичного відображення.

Елемент дуги сферичного відображення

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{(\Delta dp - p d\Delta)^2 + (dq - q d\Delta)^2 + d\Delta^2}{\Delta^4} =$$

$$= \Delta^{-4}(\Delta^2(dp^2 + dq^2) - \Delta^2 . d\Delta^2) = \frac{dp^2 + dq^2 + (p dq - q dp)^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

Якщо дотичну площину взяти за площину XOY, точку дотику за початок координат, а напрям осей Дюпенової індикатриси за вісі OX та OY, будемо мати

$$p_1 = 0, \quad q_1 = 0, \quad s_1 = 0$$

$$d\sigma^2 = r_1^2 dx^2 + t_1^2 dy^2 = \frac{1}{R_1^2} dx^2 + \frac{1}{R_2^2} dy^2 \tag{33}$$

При цьому елемент дуги кривої на поверхні матиме вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Чисельник виразу для радіюса кривини (або ліва частина рівнання асимптотичних ліній) має при цьому вид

$$\frac{1}{R_1} dx^2 + \frac{1}{R_2} dy^2.$$

Отже, маємо три квадратичних форми

$$\mathrm{I} = dx^2 + dy^2$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{R_1} dx^2 + \frac{1}{R_2} dy^2$$

$$\mathrm{III} = \frac{1}{R_1^2} dx^2 + \frac{1}{R_2^2} dy^2,$$

які, очевидно, лінійно зв'язані поміж себе.

Справді, виключаючи з цих рівностей dx^2 та dy^2, маємо:

$$0 = \begin{matrix} \mathrm{I} & 1, & 1 \\ \mathrm{II} & \frac{1}{R_1}, & \frac{1}{R_2} \\ \mathrm{III} & \frac{1}{R_1^2}, & \frac{1}{R_2^2} \end{matrix} = \mathrm{I}\,\frac{1}{R_1 R_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) +$$

$$+ \mathrm{II}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right) + \mathrm{III}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

Скорочуючи на $\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}$ та помічаючи, що $\frac{1}{R_1R_2}$ є k — Ґавсова кривина, а $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=2H$ середня кривина, дістанемо

$$k.\ \mathrm{I}-2H.\ \mathrm{II}+\mathrm{III}=0 \qquad (34)$$

так звану формулу Еннепера-Бельтрамі.

§ 11. Геометричне місце кіл кривини нормальних розрізів.

Хай площина дотична до поверхні $z=f(x,y)$ є площина XOY, початок координат — точка дотику. Візьмімо будь-який нормальний розріз площиною $y=mx$. Відповідне коло кривини визначається рівнанням (2) та рівнанням

$$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$$

де

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\alpha+2s\cos\alpha\sin\alpha+t\sin^2\alpha=\frac{r+2sm+tm^2}{1+m^2}\cdot(m=\operatorname{tang}\alpha)$$

отже

$$x^2+y^2+z^2-\frac{2z(1+m^2)}{r+2sm+tm^2}=0,\quad y=mx$$

є рівнання кола кривини. Виключаючи з цих рівнань m, дістанемо поверхню — геометричне місце кіл кривини.

Ця поверхня 4-го порядку

$$(x^2+y^2+z^2)(rx^2+2sxy+ty^2)-2z(x^2+y^2)=0 \qquad (35)$$

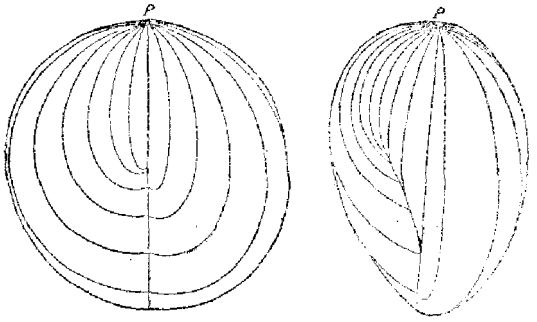


Рис. 17.

В цій поверхні вісь z-ів (нормаля до поверхні) є подвійна лінія. В еліптичній точці ця поверхня замкнена, (див. рис. 16) в гіперболічній, — в напрямках відповідних асимптотам індикатриси радіюс кола кривини обертається в ∞.

Якщо поверхню перерізати площиною $z=h$, паралельною дотичній та безконечно близькою до неї, то дістанемо

$$(x^2+y^2+h^2)(rx^2+2sxy+ty^2)-2h(x^2+y^2)=0$$

або відкидаючи 2 степені безконечно малої величини, дістанемо

$$(x^2+y^2)[rx^2+2sxy+ty^2-2h]=0.$$

Перший множник дає точку — перетин особливої лінії з поверхнею, другий є Дюпенова індикатриса.

§ 12. Поверхня центрів кривини.

Координати центра кривини одного з головних нормальних січень є

$$X=x+R_1\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$Y=y+R_1\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad (36_1)$$
$$Z=z+R_1\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

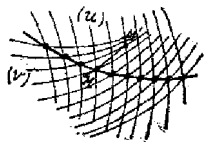


Рис. 18.

а другого

$$X=x+R_2\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ Y=y+R_2\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$Z=z+R_2\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \qquad (36_2)$$

Відповідно кожній точці поверхні дістанемо дві точки — два центра кривини.

Якщо точка описує дану поверхню, ці точки описують другу поверхню, що складається з двох частин; вона називається **поверхнею центрів кривини** або центральною поверхнею, або еволютою даної поверхні.

В точках сферичних поверхня центрів може бути лінією або навіть зводиться до окремих точок.

1) Для сфери поверхня вона зводиться до однієї точки — *центра сфери*.

2) Для поверхні оборотової всі нормалі зустрічають вісь обертання, тому одна частина поверхні центрів зводиться до вісі обертання, друга частина утворюється обертанням еволюти меридіяльної кривої навколо тієї ж самої осі.

3) Каналові (трубчасті) поверхні утворюються перенесенням кола, центр якого описує дану криву

$$\xi=\varphi(s),\ \eta=\psi(s), Z+\chi(s), \qquad (\alpha)$$

а площина кола є нормальна площина до цієї кривої, або як обгортки сфер сталого радіюса з центрами на кривій.

Одна з частин їхніх поверхонь центрів зводиться до кривої (α).

Розділ IV.

Поверхні оборотові, циліндричні, конічні, розгортні та лінійчасті. Їхні диференціяльні рівнання та властивості. Системи прямих.

§ 1. Поверхні оборотові.

Поверхню утворену обертанням плоскої кривої навколо осі, яка лежить у її площині, звемо оборотовою поверхнею. Твірну криву звемо меридіяльною кривою. Нормаля меридіяльної кривої перпендикулярна й до дотичної паралельного кола, а тому буде нормалею до поверхні. Отже нормаля до оборотової поверхні перетинає вісь обертання. Якщо вісь обертання взято за вісь X-ів, то умова перетину нормалі

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1} \tag{1}$$

з віссю Z-ів є

$$-\frac{x}{p}=-\frac{y}{q}$$

або

$$py-qx=0. \tag{2}$$

Якщо рівнання осі обертання є

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},$$

то умова перетину напишеться в формі детермінанта

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ p & q & -1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

Якщо взяти вісь повертання за вісь Z-ів, то маємо загальне рівнання поверхні в такій формі:

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

$$p = f'(u) \cdot \frac{x}{u}, \quad q = f'(u) \cdot \frac{y}{u} \qquad (u = \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\frac{f'(u)}{u} = \frac{p}{x} = \frac{q}{y}.$$

знову рівнання (2)

§ 2. Конічні поверхні.

Обгортну поверхню площин

$$u(\alpha)(x - a) + v(\alpha)(y - b) + w(\alpha)(z - c) = 0, \tag{3}$$

проходять через нерухому точку (a, b, c) й залежать від параметра, звемо конічною. Похідна від (3)

$$u'(\alpha)(x - a) + v'(\alpha)(y - b) + w'(\alpha)(z - c) = 0 \tag{4}$$

а саме рівнання (3) дають рівнання характеристик, які, є прямі, що проходять через точку (a, b, c) — вершину поверхні. Диференціюємо рівнання (3), вважаючи α за функцію від x та y

$$u + wp + [u'(\alpha)(x - a) + v'(\alpha)(y - b)\, w'(\alpha)(z - c)] \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$$

$$v + wq + [u'(\alpha)(x - a) + v'(\alpha)(y - b) + w'(\alpha)(z - c)] \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

Через рівнання (2) ці рівнання зводяться до виду

$$u + wp = 0, \quad v + wq = 0. \tag{5}$$

Підставленням u та v до (3) та скороченням на w дістанемо

$$z - c - p(x - a) - q(y - b) = 0, \tag{6}$$

шукане диференціяльне рівнання конічної поверхні.

Зауважимо, що поділом (3) та (4) на $(z - c)$ та розв'язанням їх відносно

$$\frac{x - a}{z - c} \text{ та } \frac{y - b}{z - c}$$

дістанемо

$$\frac{x - a}{z - c} = A(\alpha), \quad \frac{y - b}{z - c} = B(\alpha).$$

Якщо виключити з цих двох рівнань параметр α, то дістанемо рівнання конічної поверхні

$$\Phi\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)=0. \tag{7}$$

Це саме рівнання дістанемо, якщо напишемо умову того, що напрями m та n прямих

$$(x-a)=m(z-c),\ y-b=n(z-c),$$

що проходять через точку (a, b, c), зв'язано співвідношенням

$$\Phi(m, n)=0.$$

Якщо диференціювати (7) по x та y, то можна дістати рівнання (6). Помножаючи (7) на $(z-c)$ відповідного степеня, дістанемо рівнання однорідне відносно $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$. — Якщо за початок координат взяти вершину, то (6) перетвориться на

$$z-px-qy=0. \tag{6'}$$

§ 3. Циліндричні поверхні.

Якщо площина

$$u(\alpha)x+v(\alpha)y+w(\alpha)z+\tilde{\omega}(\alpha)=0 \tag{8}$$

підлягає умові бути паралельною з даною прямою

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}, \tag{9}$$

то

$$lu+mv+nw=0.$$

(8) перетвориться до виду

$$u(nx-lz)+v(ny-mz)+n\tilde{\omega}=0. \tag{8'}$$

З (8') та з рівнання, що дістанемо диференціюванням (8') по α;

$$u'(nx-lz)+v'(ny-mz)+n\tilde{\omega}'=0$$

дістанемо рівнання характеристик, — це є прямі

$$nx-lz=\varphi(\alpha),\ ny-mz=\psi(\alpha) \tag{10}$$

паралельні з прямою (9).

Виключаючи з цих рівнань α, дістанемо обгортку площин (8). Якщо диференціювати (8') по x та y, вважаючи α за функцію від x та y, маємо

$$u(n-lp)-vmp+\alpha'_x[u'(nx-lz)+v'(ny-mz)+n\tilde{\omega}']=0$$
$$-ulq+v(n-mq)+\alpha'_y[u'(nx-lz)+v'(ny-mz)+n\tilde{\omega}']=0;$$

рівнання (8′) ці рівнання зводятьея до виду

$$u(n-lp)-vmp=0,\ -ulq+v(n-mq)=0.$$

Виключаючи з цих рівнань $\frac{u}{v}$, дістанемо

$$(n-lp)(n-mq)-mp\,.\,lq=0$$

$$n(n-lp-mq)=0$$

відкидаючи множник n:

$$n-lp-mq=0. \qquad 10)$$

напрямну пряму задати рівнанням

$$x=\mu z,\ y=\nu z,$$

то диференціяльне рівнання було б

$$\lambda=\mu p+\nu q \qquad 10')$$

Якщо виключити α з (10), то дістанемо конечне рівнання циліндричних поверхонь

$$\Phi(nx-lz,\ ny-mz)=0.$$

Якщо з цього рівнання виключити довільну функцію Φ то дістанемо знову рівнання (11).

§ 4. Розгортні поверхні.

Візьмімо загальний випадок розгортних поверхонь, що визначаються рівнаннями

$$u(\alpha)x+v(\alpha)y+w(\alpha)z+\tilde{\omega}(\alpha)=0. \qquad (12)$$

$$u'(\alpha)x+v'(\alpha)y+w'(\alpha)z+\tilde{\omega}'(\alpha)=0. \qquad (12')$$

Диференціювання першого по x та по y дає

$$u(\alpha)+w(\alpha)p+\alpha'x\,[u'(\alpha)x+v'(\alpha)y+w'(\alpha)z+\tilde{\omega}'(\alpha)]=0.$$

$$v(\alpha)+w(\alpha)q+\alpha'y\,[n'(\alpha)x+v'(\alpha)y+w'(\alpha)z+\tilde{\omega}'(\alpha')]=0.$$

Через (12′) ці рівнання зводяться до

$$u(\alpha)+w(\alpha)p=0,\ v(\alpha)+w(\alpha)q=0.$$

Виключаючи з цих рівнань α, дістанемо

$$\Phi(p,\ q)=0, \qquad (13)$$

що містять довільну функцію.

Диференціюючи знову по x та y дістанемо

$$\Phi'_p ; r + \Phi'_q . s = 0$$

$$\Phi'_p . s + \Phi'_q . t = 0$$

звідкіль

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{t} = -\frac{\Phi'_q}{\Phi'_p}.$$

Два перших відношення дають

$$rt - s^2 = 0 \qquad 14)$$

шукане диференціяльне рівнання розгортних поверхонь. Воно доводить, що всі точки розгортної поверхні є параболічні.

Ґавсова кривина в кожній точці розгортної поверхні дорівнює нулеві. Отож обгортна поверхня ∞^1 площин накладається на площину, розгортається на площину.

Якщо візьмемо

$$\frac{\Phi'_p}{\Phi'_q} = \cos t = m,$$

прийдемо до випадку циліндричних поверхонь:

$$r = ms \quad s = mt$$

$$rdx + sdy = m(sdx + tdy)$$

$$dp = mdq.$$

Тобто

$$p - mq = \text{const},$$

що відрізняється лише видом від диференціяльного рівнання циліндричних поверхонь, що дістали раніш.

Для конічних поверхонь

$$d\,[(z - c - p(x - a) - q(y - b)] = 0,$$

тобто

$$(x - a)\,dp + (y - b)\,dq = 0, \text{ (бо } dz = pdx + qdy)$$

що, при довільному $\frac{dy}{dx}$, дає

$$(x - a)\,r + (y - b)\,s = 0$$

$$(x - a)\,s + (y - b)\,t = 0$$

а тому

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{t}.$$

§ 5. Лінійчасті поверхні.

Лінійчастими поверхнями називаємо такі поверхні, які утворити безперервним рухом прямої лінії, що за певним законом. Такі є поверхні конічні, лінійповерхні 2-го степеня — однополий гіперболоїд, гіперболічний параболоїд, — перша утворюється прямими, що на три дані прямі, друга — прямими, що спираються на дані прямі, та що є паральні з даною площиною (тобто що на безконечно-далеку пряму). Розгортні поверхні частинний випадок лінійчастих поверхонь. Розгортні поверхні характеризуються тим, що дві сусідні твірні — сусідні дотичні руба поворота — перетинаються. Взагалі ж дві сусідні твірні лінійчастої поверхні не перетинаються, як у випадку лінійчастих другого порядку, де прямолінійні твірні однієї системи не перетинаються проміж себе. Рівнання

$$z = \alpha x + a, \quad y = \beta x + b, \tag{15}$$

коефіцієнти α, a, β, b є функції одного параметра θ і визначають не одну пряму, а безліч. Виключаючи з цих рівнань параметр θ, дістанемо співвідношення поміж x, y, z:

$$\Phi(x, y, z) = 0, \tag{16}$$

визначає поверхню, на якій лежать усі прямі, що визначаються рівнанням (15) при будь-якому значенню параметра θ. Тому (16) можна вважати за рівнання лінійчастої поверхні в параметричній формі

$$x = v, \quad y = \beta(u)\, v + b(u), \quad z = \alpha(u)\, v + a(u),$$

якщо покласти в (92) $\theta = u$, $x = v$, щоб звести рівнання (92) до вживаної параметричної форми рівнання поверхні.

Виключимо чотири довільні функції θ, що входять до рівнань (16).

Довільних функцій лише три, бо одну з них можна взяти за параметр θ. Щоб виключити довільні функції, будемо диференціювати (92) по x та по y, вважаючи θ за функцію від x та y, визначену за другим з рівнань (92). Дістанемо:

$$\begin{aligned} p &= \alpha + \theta'_x(\alpha' x + a') \quad \text{I} & q &= \theta'_y(\alpha' x + a') \quad \text{III} \\ 0 &= \beta + \theta'_x(\beta' x + b') \quad \text{II} & 1 &= \theta'_y(\beta' x + b') \quad \text{IV} \end{aligned} \tag{17}$$

де α', a', β', b' позначено похідні від α, a, β, b по θ.

З двох рівнань першого рядка виключаємо $\alpha' x + a'$. З двох рівнань другого виключаємо $\beta' x + b'$, поділивши їх одне на одне. Дістанемо:

$$\frac{p-\alpha}{q} = \frac{\theta'_x}{\theta'_y} = -\frac{\beta}{1} \tag{18}$$

Порівнюючи ці відношення, маємо:

$$\frac{p-\alpha}{q} = -\beta$$

або

$$p + \beta q = \alpha. \tag{19}$$

Якщо

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{a'}{b'}$$

тобто

$$\alpha' b' - \beta' a' = 0 \tag{19'}$$

то з I та II дістанемо

$$\frac{p-\alpha}{-\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{a'}{b'}$$

з III та IV

$$q = \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{a'}{b'}$$

тобто p та q є функції одного змінного θ — поверхня (16) буде розгортна, якщо стверджується умова (19').

Диференціюючи рівнання (19) ще раз по x та по y, дістанемо:

$$\beta \,.\, s + r = (\alpha' - q\beta')\,\theta'_x$$
$$\beta t + s = (\alpha' - q\beta')\,\theta'_y$$

Поділивши їх одно на одне та замінивши $\frac{\theta'_x}{\theta'_y}$ через $-\beta$, дістанемо

$$\frac{\beta s + r}{\beta t + p} = -\beta,$$

тобто

$$r + 2s\beta + t\beta^2 = 0. \text{ (*)} \tag{20}$$

Залишається ще один раз продиференціювати по x та по y, щоб скласти ще одне рівнання, що містить β. Тоді можна виключити й довільну функцію. Позначімо як і раніше (§ 19) похідні третього порядку від z по x та по y відповідно

$$k = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ l = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ m = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ n = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

(*) Якщо $\frac{r}{s} = \frac{s}{t}$, то маємо $\frac{r}{s} = \frac{s}{t} = -\beta$ і тоді поверхня є розгортна.

Диференціюючи (20) по x та по y дістанемо:

$$k + 2l\beta + m\beta^2 = -\theta'_x(2s\beta' + 2t\beta\beta')$$

$$l + 2m\beta + n\beta^2 = -\theta_y(2s\beta' + 2t\beta\beta').$$

Поділивши одне на одне та замінивши $\frac{\theta'_x}{\theta'_y}$ через $-\beta$ дістанемо:

$$\frac{k + 2l\beta + m\beta^2}{l + 2m\beta + n^2} = -\beta$$

або

$$k + 3l\beta + 3m\beta^2 + n\beta^3 = 0. \tag{21}$$

Отже рівнання (20) та (21) містять уже лише одну довільну функцію β параметру θ. Виключаючи β, дістанемо рівнання, що розпадається на двоє рівнань, лінійних відносно похідних 3-го порядку, з коефіцієнтами — функціями коренів (20), тобто функціями похідних другого порядку.

Самого виключення не роблять. А проте результат виключення можна написати в досить симетричній формі. якщо зважити, що оскільки розгортні поверхні є частиний випадок лінійчастих поверхонь, то диференціяльне рівнання останніх повинно вдовольнятися через рівнання $rt - s^2 = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial x}(rt - s^2) = k\,t + rm - 2sl = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(rt - s^2) = lt + rn - 2sm = 0.$$

Справді, якщо позначимо: $D = rt - s^2$, то шукане рівнання можна написати:

$$r\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2 - 2s\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right) + t\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^2 = 8D \quad \begin{matrix} r & s & t \\ r'_x & s'_x & t'_x \\ r'_y & s'_y & t'_y \end{matrix} \tag{22}$$

Детермінант правої частини дорівнює нулеві якщо $D = 0$.

Рівнанням (20) та (21) можна дати геометричне тлумачення.

Покладімо в них $\beta = \frac{dy}{dx}$ та помножмо 1-ше на dx^2, 2-ге на dx^3, — дістанемо:

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0. \tag{20'}$$

$$kdx^3 + 3ldx^2dy + 3\,mdxdy^2 + ndy^3 = 0. \tag{21'}$$

Перше є диференціяльне рівнання асимптотичних ліній. Ми його дістаємо, якщо визначаємо ті головні дотичні, для яких

перпендикуляр, що його спущено з точки $(x+dx,\ y+dy,\ z+z)$ на дотичну площину, є безконечно-мала не 2-го порядку, а 3-го порядку. Якщо рівнання (21′) справджується, то члени третього порядку теж дорівнюють нулеві й перпендикуляр буде безконечно-мала 4-го порядку відносно dx, dy.

На довільно взятій поверхні рівнання (20′) та (21′) сумісні не для всякої точки, і тому (22) не вдовольняється тотожньо а є рівнання поміж x та y, що визначає циліндер, який вирізає на поверхні відповідну криву. Дотичні до цієї кривої мають із поверхнею дотик 3-го порядку.

А якщо рівнання (20′) вдовольняється за будь-яких x та y, (коли маємо лінійчасту поверхню) то будь-яка точка цієї лінійчастої поверхні має ту властивість, що головні дотичні поверхні мають з поверхнею дотик 3-го порядку.

Можна ще так зформулювати геометричний зміст диференціяльного рівнання лінійчастої поверхні.

Для асимптотичних ліній будь-якої поверхні $z=f(x,\ y)$ маємо

$$z'=p+qy',\quad z''=qy''\quad \text{і}\quad y'z''-z'y''=-py''$$

Звідсіль

$$R_{ac}=\frac{[1+y'^2+(p+qy')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Але з (20), після діфференціявання його по x, дістанемо

$$y''=-\frac{1}{2}\cdot\frac{k+3ly'+3my'^2+ny'^3}{s+ty'}$$

де y' є корінь рівнання

$$r+2sy'+ty'^2=0;$$

а тому

$$s+ty'=\pm\sqrt{rt-s^2}.$$

Отже добуток мір 1-ої кривини двох асимптотичних ліній дорівнює

$$\frac{1}{R'_{ac}R''_{ac}}=$$

$$=-\frac{(k+3ly'_1+3my'^2_1+ny'^3_1)(k+3ly'_2+3my'^2_2+ny'^3_2)(1+p^2+q^2)}{4(rt-s^2)[1+p^2+2pqy'_1+(1+q^2)y'^2_1]^{\frac{3}{2}}[1+p^2+2qpy'_2+(1+qy'^2_2)]^{\frac{3}{2}}}.$$

В чисельнику стоїть вираз, що ми його знайшли раніше, знаменик також можна визначити через r, s, t; і тоді

$$\frac{1}{R'_{ac}R''_{ac}} =$$

$$= -\frac{(1+p^2+q^2)\left\{rD'^2_y - 2sD'_xD'_y + tD'^2_x - 8D\begin{vmatrix} r & s & t \\ r'_x & s'_x & t'_x \\ r'_y & s'_y & t'_y \end{vmatrix}\right\}}{(rt-s^2)\left[\left\{t(1+p^2)-2pqs+r(1+q^2)\right\}^2-4(rt-s^2)(1+p^2+q^2)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Отже рівнання (22) доводить, що **добуток мір кривини асимптотичних ліній в кожній точці лінійчастої поверхні дорівнює нулеві.**

§ 6. Властивості лінійчастих поверхонь.

1. Дотична площина

Вернімось до рівнань (17)

$$p = \alpha + \theta'_x(\alpha' x + a'),\quad q = \theta'_y(\alpha' x + a')$$
$$0 = \beta + \theta'_x(\beta' x + b'),\quad 1 = \theta'_y(\beta' x + b').$$

Виключаючи θ'_x і θ'_y дістанемо:

$$p = \alpha - \beta\,\frac{\alpha' x + a'}{\beta' x + b'},\quad q = \frac{\alpha' x + a'}{\beta' x + b'} \tag{23}$$

Підставляючи ці значення до загального рівнання дотичної площини

$$p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0,$$

дістанемо рівнання дотичної площини до лінійчастої поверхні

$$0 = [\alpha(X-x) - (Z-z)](\beta' x + b') - [\beta(X-x) - (Y-y)](\alpha' x + a')$$

або через рівнання (15), змінивши знак, — маємо:

$$0 = [Z - \alpha X - a](\beta' x + b') - (Y - \beta X - b)(\alpha' x + a'). \tag{24}$$

Теорема I. **Якщо точка рухається по твірній, то значіння параметра θ не змінюється, а змінюється лише x; дотична площина обертається навколо цієї твірної.**

Дотична площина буде одна та сама для всіх точок лише тієї твірної, для якої

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{a}{b'};$$

але за цієї умови лінійчаста поверхня є розгортна.

2. Закон Шаля (Chasles).

Щоб уявити собі закон зміни кута дотичної площини зі зміною точки дотику в загальному випадку, візьмімо твірну за вісь OX.

Відповідні значення коефіцієнтів

$$\alpha = a = \beta = b = 0$$

Рівнання дотичної площини в точці M (відповідної абсцисі x) буде

$$Z(\beta' x + b') - Y(\alpha' x + a) = 0. \tag{25}$$

Якщо ψ є кут дотичної площини з площиною XOY, то

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\alpha' x + a'}{\beta' x + b'}.$$

Для іншої точки (x_1) відповідний кут ψ_1 за відомою формулою є

$$\operatorname{tg}(\psi_1 - \psi) = \frac{(\alpha' x_1 + a')(\beta' x + b') - (\alpha' x + a')(\beta' x_1 + b')}{(\alpha' x_1 + a')(\alpha' x + a') + (\beta' x_1 + b')(\beta' x + b')}$$

$$= \frac{(a'\beta' - b'\alpha')(x - x_1)}{x\{x_1(\alpha'^2 + \beta'^2) + a'\alpha' + b'\beta'\} + x_1(a'\alpha' + b'\beta') + a'^2 + b'^2}.$$

Знаменник не залежить від x. Якщо виберемо на твірній таку точку J, що

$$x_1 = -\frac{a'\alpha' + b'\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}$$

тоді

$$\operatorname{tg}(\psi_1 - \psi) = \frac{(x - x_1)(a'\beta' - b'\alpha')(\alpha'^2 + \beta'^2)}{(a'^2 + b'^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) - (a'\alpha' + b'\beta')^2} =$$

$$= \frac{(x - x_1)(\alpha'^2 + \beta'^2)}{(a'\beta' - b'\alpha')}$$

тобто

$$\operatorname{tg}(\psi_1 - \psi) = \frac{1}{\varkappa} \overline{JM},$$

(де $\varkappa$ не залежить від x).

Цей закон, що визнайшов Шаль (Michel Chasles), формулюється такою теоремою.

Теорема II. Танґенс кута дотичної площини з певною площиною, що проходить через дану твірну лінійчастої поверхні, зростає пропорційно віддалі її точки дотику від точки дотику взятої певної площини.

Коефіцієнт $\varkappa$ звуть параметром розподілу, або параметром дистрибутивности. Точку J звуть центральною.

Можна також сказати, що

Теорема III. Дотичні площини до лінійчастої поверхні в точках однієї твірної утворюють пучок проєктивний точковому ряду їх точок дотику.

Рівнання нормалі в точках однієї твірної таке

$$\frac{X-x}{0}=\frac{Y-y}{-\alpha' x-a'}=\frac{Z}{\beta' x+b'}$$

Виключаючи звідсіль x знайдемо:

$$Y(\beta' X+b')+Z(\alpha' X+a')=0$$

рівнання гіперболічного параболоїду (Hachette 1832).

Теорема IV. Нормалі лінійчастої поверхі в точках однієї твірної утворюють гіперболічний параболоїд.

Цей результат можна дістати без обчислень, якщо зважити на те, що нормалі, як перпендикуляри до однієї твірної є паралельні до певної площини, перпендикулярної до твірної, зустрічають цю пряму й ангармонійне відношення 4 нормалей дорівнює ангармонійному відношенню 4 дотичних площин, тобто ангармонійному відношенню 4-х точок дотику, — точок зустрічі нормалів із твірною.

3. Центральна точка.

Центральну точку можна дістати з суто-геометричних міркувань, — вона є точка дотику площини, перпендикулярної до дотичної площини поверхні в безконечно-далекій точці цієї твірної.

Рівнання останньої площини дістанемо, якщо рівнання дотичної площини поділимо на x та перейдемо до границі, припустивши $x \to \infty$ будемо мати

$$\beta' Z-\alpha' Y=0.$$

Умова перпендикулярности дотичної площини в точці x_1 з цією площиною така

$$\beta'(\beta' x_1+b')+\alpha'(\alpha' x_1+a')=0$$

дає знову

$$x_1=-\frac{a'\alpha'+b'\beta'}{\alpha'^2+\beta'^2}$$

Таке означення центральної точки дає змогу вирахувати параметр розподілу (дистрибутивности) для будь-якої твірної, не беручи її за вісь X-ів.

Рівнання дотичної в безконечно далекій точці твірної дістанемо поділом на x та переходом до границі $x \to \infty$ з загального рівнання; — маємо

$$0 = (Z - \alpha X - a)\beta' - (Y - \beta X - b)\alpha'$$

Дотична площина в точці x_1, що проходить через ту саму твірну, буде перепендикулярною до цієї площини за умови

$$0 = \beta'(\beta' x_1 + b') + \alpha'(\alpha' x_1 + a') + (\alpha\beta' - \beta\alpha')[\alpha(\beta' x_1 + b') - \beta(\alpha' x_1 + a']$$

звідсіль

$$x_1 = -\frac{a'\alpha' + b'\beta' + (\alpha b' - \beta a')(\alpha\beta' - \beta\alpha')}{\alpha'^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2} \qquad (A)$$

можна вирахувати, як віддаль двох точок прямої

$$Z = \alpha x + a, \quad Y = \beta x + b$$

$$\overline{JM} = (x - x_1)\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}.$$

Далі $\operatorname{Sin}(\psi - \psi_1) =$

$$= \frac{\alpha'(\alpha' x + a') + \beta'(\beta' x + b') + (\alpha\beta' - \beta\alpha')[\alpha(\beta' x + b') - \beta(\alpha' x + a')]}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2} \cdot \sqrt{(\alpha' x + \alpha')^2 + (\beta' x + b')^2 + [\alpha(\beta' x + b') - \beta(\alpha' x + \alpha')]^2}}$$

чисельник через (A) перетворюється на

$$(x - x_1)[\alpha'^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2] = A(x - x_1)$$

а другий множник знаменника перетворюється на

$$(x^2 - 2xx_1)[\alpha'^2 + \beta'^2 + \alpha\beta' - \beta\alpha')^2] + (a'^2 + b'^2 + (\alpha b' - \beta a')^2 =$$

$$= A(x - x_1) + B.$$

Цьому чисельник у виразі для $\operatorname{Cos}^2(\psi - \psi_1)$ дорівнює

$$A^2(x^2 - 2xx_1) + AB - A^2(x - x_1)^2 = AB - A^2 x_1^2 =$$

$$= (a'^2 + b'^2 + (\alpha b' - \beta a')^2)[\alpha'^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2] - (a'\alpha' + b'\beta' +$$

$$+ (\alpha b' - \beta a')(\alpha\beta' - \beta\alpha')]^2 = (a'\beta' - b'\alpha')^2 + [a'(\alpha\beta' - \beta\alpha') - \alpha'(\alpha b' - \beta a')]^2 +$$

$$+ [b'(\alpha\beta' - \beta\alpha') - \beta'(\alpha b' - \beta a')]^2 = (a'\beta' - b'\alpha')^2(1 + \alpha^2 + \beta^2).$$

Отже

$$\operatorname{tg}(\psi - \psi_1) = \frac{(x - x_1)(\alpha'^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}{(a'\beta' - b'\alpha')\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2)}}$$

а тому параметр розподілу (диструбутиврости) визначається формулою

$$\frac{1}{\varkappa}=\frac{\alpha'^2+\beta'^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{(a'\beta'-b'\alpha')(1+\alpha^2+\beta^2)}$$

Ще іншим шляхом прийдемо до центральної точки, якщо шукати найкоротшу віддаль між безконечно-близькими твірними лінійчастої поверхні.

Твірну D візьмемо за вісь X-ів. Рівнання безконечно близької твірної D' напишеться тоді так:

$$Z=Xd\alpha+da,\quad У=Xd\beta+db$$

або

$$\frac{X}{1}=\frac{У-db}{d\beta}=\frac{Z-da}{d\alpha}.$$

Пряма найкоротшої віддалі — перпендикулярна до $Ox(\equiv D)$ та зустрічає її, тому вона лежить на площині паралельній до площини $ZOУ$; отже її рівнання буде

$$X=\xi,\quad Z=mУ.$$

Вона перпендикулярна до D, тому

$$1.0+1.d\beta+md\alpha=0\ \therefore m=-\frac{\beta'}{\alpha'}$$

Отже рівнання проекції прямої найкоротшої віддалі на площину $ZOУ$ є таке

$$Z=-\frac{\beta'}{\alpha'}У. \qquad \text{(B)}$$

Проекція D' на $ZOУ$:

$$Zd\beta-Уd\alpha=dad\beta-dbd\alpha$$

до неї перпендикулярна.

В просторі рівнання (B') є рівнання площини, що проходить через $OX(\equiv D)$, вона перетинає D' в точці, для якої

$$\frac{\alpha'X+a'}{\beta'X+b'}=-\frac{\beta'}{\alpha'},$$

тобто

$$X=-\frac{a'\alpha'+b'\beta'}{\alpha'^2+\beta'^2}.\ \text{Отже:}$$

Теорема V. Центральна точка, є точка перетину твірної з прямою найкоротшого віддалення між твірними D та D'.

У розгортних поверхонь сусідні твірні перетинаються з точністю до безконечно малої порядку вищого за перший, і точка перетину править за центральну точку. Отже:

Теорема VI. Центральна точка розгортної поверхні є її характеристична точка (точка ребра звороту).

4. Зміна кривини вподовж твірної.

Щоб вирахувати Ґавсову кривину, візьмімо вираз, що вивели раніш

$$q = \frac{\alpha' x + a'}{\beta' x + b'},$$

звідкіль

$$\alpha' - \beta' q = \frac{\alpha' b' - \beta' a'}{\beta' x + b'} \text{ та } p = \alpha - \beta q.$$

Диференціюючи останнє по x та по y дістанемо:

$$r = -(\alpha' - \beta' q)\frac{\beta}{\beta' x + b'} - \beta s, \qquad s = \frac{\alpha' - \beta' q}{\beta' x + b'} - \beta t$$

Підставляючи у перше значення s дістанемо:

$$r = -2\frac{\alpha' - \beta' q}{\beta' x + b'}\beta + \beta^2 t.$$

і тому

$$rt - s^2 = -\left(\frac{\alpha' - \beta' q}{\beta' x + b'}\right)^2 = -\frac{(\alpha' b' - \beta' a')^2}{(\beta' x + b')^4}.$$

Далі

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + q^2 + (\alpha - \beta q)^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha\beta q + (1 + \beta^2) q^2$$

$$= \frac{1}{(\beta' x + b')^2}\Big[(1 + \alpha^2)(\beta' x + b')^2 - 2\alpha\beta(\alpha' x + a')(\beta' x + b') +$$

$$+ (1 + \beta^2)(\alpha' x + a')^2\Big].$$

Цей вираз, що є знаменником, дорівнює

$$(\alpha' x + a')^2 + (\beta' x + b')^2 + [\alpha(\beta' x + b') - \beta(\alpha' x + a']^2$$

й вирахувано вже при обчисленні

$$\cos(\psi - \psi_1).$$

Він дорівнює

$$[\alpha'^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2](x - x_1)^2 + \frac{(a'\beta' - b'\alpha')^2(1 + \alpha^2 + \beta^2)}{\alpha^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}$$

Отже формула для Ґавсової кривини набирає вигляду

$$K = -\frac{(a'\beta' - b'\alpha')^2}{\left[(\alpha'^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2)(x - x_1)^2 + \frac{(a'\beta' - b'\alpha')^2(1 + \alpha^2 + \beta^2)}{\alpha'^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}\right]^2}$$

Тобто

$$K = -\frac{\varkappa^2}{[JM^2 + \varkappa^2]^2}.$$

З цієї формули можна зробити цілу низку висновків:

I. Не існує лінійчастої поверхні з реальними твірними додатньої кривини.

II. Найменшу кривину (найбільшу кривину абсолютною величиною) на даній твірній лінійчаста поверхня має в центральній точці.

III. За зростання JM Ґавсова кривина абсолютною величиною зменшується й для $JM \to \infty$ дорівнює нулеві, або інакше: параболічні точки лінійчастої поверхні містяться на перетині її з безконечно-далекою площиною.

5. Стрикційна лінія.

Геометричне місце центральних точок звемо стрикційною лінією (ligne de striction, Kehllinie). Отже, це є геометричне місце точок найменшої Ґавсової кривини окремих твірних, або ще, — геометричне місце основ спільних перпендикулярів (найкоротших віддалів) сусідних твірних.

Щоб вивести рівнання стрикційної лінії, візьмімо рівнання твірної в симетричнішій формі

$$\frac{X - a}{\lambda} = \frac{Y - b}{\mu} = \frac{Z - c}{\nu} = u$$

або

$$X = a + \lambda u,\ Y = b + \mu u,\ Z = c + \nu u$$

де a, b, c, λ, μ, ν функції параметра θ або v та $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$.

Безконечно близька твірна визначиться таким рівнанням:

$$\frac{X - a - a'\varepsilon}{\lambda + \lambda'\varepsilon} = \frac{Y - b - b'\varepsilon}{\mu + \mu'\varepsilon} = \frac{Z - c - c'\varepsilon}{\nu + \nu'\varepsilon}$$

Найкоротша віддаль визначиться рівняннями:

$$0=\begin{vmatrix} X-a & Y-b & Z-c \\ \lambda & \mu & \nu \\ \mu\nu'-\nu\mu', & \lambda\nu'-\lambda\nu', & \lambda\mu'-\mu\nu' \end{vmatrix},$$

$$0=\begin{vmatrix} X-a-a'\varepsilon, & Y-b-b'\varepsilon, & Z-c-c'\varepsilon \\ \lambda+\lambda'\varepsilon, & \mu+\mu'\varepsilon, & \nu+\nu'\varepsilon \\ \mu\nu'-\nu\mu', & \nu\lambda'-\lambda\nu', & \lambda\mu'-\mu\lambda' \end{vmatrix}.$$

Друга площина перетинає першу пряму в точці, для якої u визначається з рівняння, що дістанемо заміною в першому рядку другого детермінанта різниць $X-a$, $Y-b$, $Z-c$. на λu, μu, νu за рівняннями першої прямої.

Віднявши елементи 2-го рядка, помножені на u, від першого, переходом до границь за умови $\varepsilon \to 0$, дістанемо шукане рівняння

$$\begin{vmatrix} \lambda' u+a' & \mu' u+b' & \nu' u+c' \\ \lambda & \mu & \nu \\ \mu\nu'-\nu\mu' & \nu\lambda'-\lambda\nu' & \lambda\mu'-\mu\lambda' \end{vmatrix}$$

Це рівняння розбивається на два детермінанти.

Множник при u є

$$\begin{vmatrix} \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda & \mu & \nu \\ \mu\nu'-\nu\mu', & \nu\lambda'-\lambda\nu', & \lambda\mu'-\mu\lambda' \end{vmatrix} = -[(\mu\nu'-\nu\mu')^2+(\nu\lambda'-\lambda\nu')^2+$$

$$(\lambda\mu'-\mu\lambda')^2] = -(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)(\lambda'+\mu'+\nu'^2)+(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')^2 =$$

$$= -(\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2).$$

Отже значення u, що відповідає точці стрикційної лінії, таке:

$$u=-\frac{1}{\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2}\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ \lambda & \mu & \nu \\ \mu\nu'-\nu\mu', & \nu\lambda'-\lambda\nu', & \lambda\mu'-\mu\lambda' \end{vmatrix} = -\frac{D}{\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2}.$$

Підставляючи це значення u до рівняння твірної, дістанемо рівняння стрикційної лінії в параметричній формі.

Приклад 1. Гіперболічний параболоїд $x^2-y^2=2z$.

Прямолінійні твірні однієї системи є:

$$\frac{x-\tau}{1}=\frac{y-\tau}{-1}=\frac{z}{2\tau};\ u=0.$$

Стрикційна лінія

$$x-y=0,\ z=0.$$

Для другої системи

$$x+y=0,\ z=0.$$

Приклад 2. Гіперболічний параболоїд

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z.$$

Прямолінійні твірні однієї системи:

$$\frac{x-\tau\sqrt{p}}{\sqrt{p}}=\frac{y-\tau\sqrt{q}}{-\sqrt{q}}=\frac{z}{2\tau}\ \therefore\ \lambda=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p+q+4\tau^2}},$$

$$\mu=\frac{-\sqrt{q}}{\sqrt{p+q+4\tau^2}},\ \nu=\frac{2\tau}{\sqrt{p+q+4\tau^2}}.$$

Для центральної точки

$$u=-\frac{p-q}{\sqrt{p+q+4\tau^2}}.$$

Стрикційна лінія

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+(p-q)=\frac{y}{-\sqrt{q}}+p-q=\frac{z}{-2(p-q)}.$$

Приклад 3. Однополий оборотовий гіперболоїд:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Прямолінійні твірні можна задати рівняннями:

$$\frac{x}{a}=\frac{y-a\tau}{-a\nu}=\frac{z+c\nu}{c\tau}=u,\ \text{де}\ \tau^2-\nu^2=1.$$

Стрикційна лінія зливається з горловим січенням гіперболоїда

$$z=0,\ x^2+y^2=a^2.$$

Приклад 4. Однополий триосевий гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

За аналогічними позначеннями стрикційна лінія визначиться рівняннями

$$\frac{X}{a^3(b^2+c^2)\cos t}=\frac{Y}{b^3(a^2+c^2)\sin t}=\frac{Z}{-c^3(a^2-b^2)\sin t\cos t}=$$

$$=\frac{1}{a^2b^2+c^2(a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t)}$$

а тому, стрикційна лінія є січення гіперболоїда поверхнею

$$Z[b^4(a^2+c^2)X^2+a^4(b^2+c^2)Y^2]=abc^3XY$$

або поверхнею

$$\frac{a^6(b^2+c^2)^2}{X^2}+\frac{b^6(a^2+c^2)^2}{Y^2}-\frac{c^6(a^2-b^2)^2}{Z^2}=0.$$

§ 7. Застосовання до кривих подвійної кривини.

Бінормалі кривої подвійної кривини є сукупність прямих, що не перетинаються, а тому вони утворюють косу лінійчасту поверхню. Застосовуючи до них формули, що вивели раніш, треба покласти

$$\theta=s,\ a=x,\ b=y,\ c=z$$

а тому

$$a'=\alpha,\ b'=\beta,\ c'=\gamma.$$

λ, μ, ν тепер є косинуси куті в бінормалі з вісями, а тому за формулами *Frenet-Serret*

$$\lambda'=\frac{l}{\rho},\ \mu'=\frac{m}{\rho},\ \nu'=\frac{n}{\rho},\ \lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2=\frac{1}{\rho^2},$$

$$\mu\nu'-\nu\mu'=\frac{1}{\rho}(\mu n-\nu m)=-\frac{\alpha}{\rho},\ \nu\lambda'-\lambda\nu'=-\frac{\beta}{\rho},$$

$$\lambda\mu'-\mu\lambda'=-\frac{\gamma}{\rho}$$

Отже вираз для u набирає вигляду

$$u=-\rho^2\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \lambda & \mu & \nu\\ -\frac{\beta}{\rho}, & -\frac{\beta}{\rho}, & -\frac{\gamma}{\rho}\end{vmatrix}=\rho\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \lambda & \mu & \nu\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}=0.$$

Тому точка стрикційної лінії поверхні бінормалів є відповідна точка кривої

Отже 1. Крива подвійної кривини є стрикційна лінія лінійчастої поверхні—геометричного місця її бінормалів.

Дотична до кривої перпендикулярна до бінормалі. Звідсіль II. Крива подвійної кривини є ортогональна траєкторія для прямолінійних твірних лінійчастої поверхні бінормалів, для яких вона є стрикційною лінією.

Вправи: Для звичайної ґвинтової лінії

$$x = a\cos ks,\ y = a\sin ks,\ z = mks$$

визначити поверхню бінормалей та довести, що для неї стрикційна лінія є дана ґвинтова лінія.

Поверхня бінормалів

$$\frac{X - \cos ks}{m\sin ks} = \frac{Y - a\sin ks}{m\cos ks} = \frac{Z - mks}{a} = u.$$

Остання властивість поверхні бінормалів не є загальна, і стрикційна лінія косої лінійчастої поверхні не є ортогональна траєкторія до прямолінійних твірних.

Справді, косинус кута прямолінійної твірної лінійчастої поверхні

$$X = a + \lambda u,\ Y = b + \mu u,\ Z = c + \nu u$$

з дотичною до її стрикційної лінії (і для u що дістали раніш) дорівнює

$$\sqrt{\Sigma x'^2}\ .\cos V = \lambda X' + \mu Y' + \nu Z' = \lambda a' + \mu b' + \nu c' -$$

$$- \frac{D(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2} - \left(\frac{D}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}\right)'(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) =$$

$$= \lambda a' + \mu b' + \nu c - \left(\frac{D}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}\right)'$$

Для поверхні бінормалів кривої подвійної кривини, як довели

$$\lambda a' + \mu b' + \nu c' = 0 \text{ і } D = 0$$

тому

$$\cos V = 0.$$

Але взагалі ці вирази не дорівнюють нулеві, і тому дотична до стрикційної лінії не є лінія найкоротшої віддалі двох безконечно-близьких твірних. Стрикційна лінія є лише геометричне місце початкових (або кінцевих) точок цих найкоротших віддалів, як це було підкреслено на початку параграфу про стрикційні лінії.

Приклад: Сукупність головних нормалів кривої подвійної кривини утворює також косу лінійчасту поверхню

$$X = x + lu,\ Y = y + mu,\ Z = z + nu$$

Дотична площина в точці цієї твірної буде взагалі

$$\begin{matrix} X - x & Y - y & Z - z & \\ \alpha + l'u & \beta + m'u & \gamma + n'u & = 0 \\ l & m & n & \end{matrix}$$

В точці (x, y, z) кривої $u = 0$ і рівнання зводиться до такого:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(X-x) + \mu(Y-y) + \nu(Z-z) = 0$$

це рівнання є рівнання шільнодотичної цлощини в точці (x, y, z). В будь-якій іншій точці $(u \neq 0)$ головної нормалі дотична площина буде

$$\left(1 - \frac{u}{r}\right) \Sigma\lambda(X-x) - \frac{u}{\rho} \Sigma\alpha(X-x) = 0$$

тобто це буде площина, що проходить через головну нормалю.

Для точки стрикційної лінії відповівне значення u визначається з рівнання:

$$(l'^2 + m'^2 + n'^2)\, u = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ mn' - nm', & nl' - ln', & lm' - ml' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \frac{\lambda}{r} - \frac{\alpha}{\rho}, & \frac{\mu}{r} - \frac{\beta}{\rho}, & \frac{\nu}{r} - \frac{\chi}{\rho} \end{vmatrix} = \frac{1}{r}$$

але $$l'^2 + m'^2 + n'^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{p^2}$$

p радіюс повної кривини).

Отже $$u = \frac{p^2}{r}$$

Косинус кута V проміж твірною (тобто головною нормалею) та стрикційною лінією є

$$\cos V = \frac{\Sigma l \left(x + l\frac{p^2}{r}\right)'}{\sqrt{\Sigma\left(x + l\frac{p^2}{r}\right)'^2}} = \frac{\Sigma l \left[\alpha + l\left(\frac{p^2}{r}\right)' - \frac{p^2}{r}\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\rho}\right)\right]}{\sqrt{\Sigma\left[\alpha - \frac{p^2}{r}\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\rho}\right) + l\left(\frac{p^2}{r}\right)'\right]^2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{p^2}{r}\right)'}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^2 + \frac{p^4}{r^2\rho^2} + \left(\frac{p^2}{r}\right)'^2}}.$$

Для звичайної ґвинтової лінії цей вираз дорівнює нулеві, бо r та ρ, а тому й p для неї сталі.

§ 8. Теорема Bouquet.

В питаннях, що ми розглядаємо, відограють значну ролю той або інший ступінь безконечно малих величин. Цьому важливо дослідити те, що ми вже розглядали, з іншого погляду.

Найкоротша віддаль між сусідніми твірними лінійчастої поверхні, що відповідають значенням θ та $\theta + d\theta$ параметра

$$z = \alpha x + a, \; y = \beta x + b$$

$$z = (\alpha + \Delta\alpha) x + a + \Delta a, \; y = (\beta + \Delta\beta) x + b + \Delta b$$

за відомою формулою аналітичної геометрії є

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & \Delta b & \Delta a \\ 1 & \beta & \alpha \\ 1 & \beta + d\beta & \alpha + \Delta\alpha \end{vmatrix} : \sqrt{[\beta(\alpha + \Delta\alpha) - \alpha(\beta + \Delta\beta)]^2 + \Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2} =$$

$$= \frac{\Delta a \, \Delta\beta - \Delta b \, \Delta\alpha}{\sqrt{\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2 + (\beta\Delta\alpha - \alpha\Delta\beta)^2}}.$$

Якщо прирости Δa, Δb,... розгорнемо за степенями $\Delta\theta$:

$$\Delta a = a'\Delta\theta + \frac{1}{2} a''\Delta\theta^2 + \frac{1}{6} a'''\Delta\theta^3 +$$

та підставимо у попередню формулу, то дістанемо в знаменнику під коренем $\Delta\theta^2[\alpha'^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2] +$ члени 3-го та вищих порядків;
в численнику

$$\Delta a \Delta\beta - \Delta b \Delta\alpha = (a'\beta' - b'\alpha)\Delta\theta^2 + \frac{1}{2}(a''\beta' + a'\beta'' - b''\alpha' - b'\alpha'')\Delta\theta^3 +$$

$$+ \{\frac{1}{6} a'''\beta' + \beta'''a' - b'''\alpha' - \alpha'''b') + \frac{1}{4}(a''\beta - b''\alpha'')\}\Delta\theta^4 +$$

$+$ члени 5-го та вищих порядків.

В цій формулі коефіцієнт у члена 3-го порядку можна написати так:

$$\frac{1}{2}(a'\beta' - b'\alpha')'$$

Отже: для лінінчастої поврхні найкоротша віддаль між двома безконечно близькими твірними

є взагалі безконечно мала 1-го порядку. (чисельник 2-го, а знаменник 1-го порядку)

Якщо поверхня є розгортна, то в чисельнику не лише член другого, а й член третього порядку дорівнює нулеві. а тому, — бо знаменник містить $\Delta\theta$ першого степеня,— дві безконечно близкі твірні розгортної поверхні перетинаються з точністю до безконечно малих 3-го порядку.

Дослідімо членів 4-го порядку. Множник при $\Delta\theta^4$ є

$$\frac{1}{6}(a'''\beta' + \beta''' a' - b'''\alpha' - b'\alpha''') + \frac{1}{4}(a''\beta'' - b''\alpha'')$$

через похідну від коефіцієнта при $\Delta\theta^3$

$$(a'\beta' - b'\alpha')'' = (a'''\beta' + a'\beta''' - b'''\alpha' - b'\alpha''') + 2(a''\beta'' - b''\alpha'')$$

можна звести до виду

$$\frac{1}{6}(a'\beta' - b'\alpha')'' - \frac{1}{12}(a''\beta'' - b''\alpha'').$$

Якщо при цьому зникає не лише член 3-го порядку, а й член 4-го порядку, то повинно бути, крім $a'\beta' - b'\alpha' = 0$ ще й

$$a''\beta'' - b''\alpha'' = 0$$

але за першим $$\frac{\alpha'}{a'} = \frac{\beta'}{b'} = k$$

тобто

$$\alpha' = ka', \ \beta' = kb',$$

тому $$\alpha'' = ka'' + k'a', \ \beta'' = kb'' + k'b',$$

отже $$a''\beta'' - b''\alpha'' = k'(a''b' - b''a').$$

Друге рівнання через це розпадається на двоє

$$1)\ k' = 0, \ k = \text{Const}$$

при цьому з $\alpha' = ka'$, $\beta' = kb'$ виникає $\alpha = k\beta + k_1$ і $\beta = kb + k_2$.

Отож рівнання прямолінійної твірної лінійчастої поверхні набирає вигляду

$$z - k_1 = a(x + k)$$
$$y - k_2 = b(x + k)$$

Виключаючи звідсіль θ, дістанемо рівнання типу

$$\Phi\left(\frac{z - k_1}{x + k}, \ \frac{y - k_2}{x + k}\right) = 0$$

тобто в цьому випадку поверхня є конічна.

2) Може дорівнювати нулеві другий множник

$$a''b' - b''a' = 0$$

звідсіль

$$\frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'} \text{ або } \left(\log \frac{a'}{b'} \right)' = 0, \ \log \frac{a'}{b'} = \text{const}$$

а тому $a' = Cb'$, $a = Cb + C'$, де C та C' — є дві довільні сталі. Крім цього

$$a'\beta' - b'\alpha' = 0,$$

тому і

$$\alpha' = C\beta'$$

$$\alpha = C\beta + C''$$

Підставляючи ці значення в рівнання (15) твірної дістанемо:

$$z = (C\beta + C'')x + Cb + C', \ y = \beta x + b$$

або

$$z = C(\beta x + b) + C'x + C'',$$

тобто, незалежно від значення θ, координати x, y, z зв'язано рівнанням

$$z = Cy + C'x + C''.$$

Отже всі твірні лежать у площині та обгортають деяку плоску криву.

У наслідок цього ми, приходимо до такої теореми Bouquet: Якщо не лише члени 1-го та 2-го, а й члени 3-го порядку у виразі для δ дорівнюють нулеві, то лінійчаста поверхня є або конічна або утворена прямими, що лежать в площині та огинають плоску криву.

Вираз, що стоїть у знаменнику δ, є пропорційний до синуса кута поміж двох твірних; якщо цей кут позначімо через φ, то зваживши лише на члени 1-го порядку маємо

$$\operatorname{Sin}\varphi = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}}{1 + \alpha'^2 + \beta'^2} \Delta\theta$$

Для безконечно малого $\Delta\theta$, δ є величина безконечно мала, а тому $\sin\varphi$ можна замінити через φ. Звідсіль

$$\frac{\delta}{\varphi} = \frac{\sqrt{(a'\beta' - b'\alpha')(1 + \alpha'^2 + \beta'^2)}}{\alpha'^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}$$

Це є параметр розподілу (дистрибутивности). Для розгортних поверхонь він дорівнює нулеві.

§ 9. Поняття про системи прямих.

Вивчання лінійчастих поверхонь у тому напрямі, що тут намічено, вводить нас у нову галузь — галузь лінійчастої геометрії, в якій за елемент, що з нього утворюється всі фігури, є не точка, як ми вважали до цього часу, покладаючи в основу систему прямокутних координат або інших, а пряма лінія, як ціла.

В рівнанні прямої

$$z = \alpha x + a, \; y = \beta x + b \tag{15}$$

ми можемо взяти всі чотири коефіцієнти за незалежні [1]) Якщо надавати їм всі можливі значення,— дістанемо всі прямі простору. Кожний із чотирьох коефіцієнтів може набирати ∞^1 реальних значень, кожне з яких можна сполучити з кожним значенням останніх трьох.

Тому, кажуть, що в просторі є ∞^4 прямих або що простір, якщо за елемент взяти пряму, має чотири виміри, є многостаність чотирьох вимірів.

Якщо на коефіцієнти α, a, β, b (що тепер можна вважати за координати прямої) накласти одну умову, тобто припустити, що ці коефіцієнти зв'язано одним рівнанням

$$F(\alpha, a, \beta, b) = 0, \tag{26}$$

то маємо незалежних лише три, або можна визначити α, a, β, b як функції трьох незалежних проміж себе параметрів θ_1, θ_2, θ_3.

Дістанемо ∞^3 прямих, що утворюють комплекс прямих.

Через кожну точку (x, y, z) простору проходить безконечне число (∞^1) прямих, що належать до даного комплексу, якраз ті, що при даних значеннях x, y, z вдовольняють трьом рівнанням: (15) та (26).

Вони утворюють тому деяку конічну поверхню, що зветься поверхнею комплексу, що належить точці (x, y, z).

Також прямі, що лежать у даній площині

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{27}$$

[1]) Зокрема в лінійчастій геометрії за координати прямої беруть не чотири ці величини, а п'ять: α, a, β, b та $c = ab - \beta\alpha$ (a), що зв'язані між собою рівнанням другого степеня (a). П'яту величину c дістанемо, якщо складемо рівнання проекції прямої на площину ZOY:

$$\beta z - \alpha y = \beta a - \alpha b.$$

повинні бути такі, що (27), якщо замінити y та z через (5), стверджується при будь-якому x, тобто повинно бути:

$$\begin{aligned} A + B\beta + C\alpha &= 0 \\ D + Bb + Ca &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Отже, ці прямі повинні справджувати три рівнання: (26) та (28) й таких прямих є ∞^1, — вони обгортають деяку плоску — криву комплексу, що міститься на площині (27).

Якщо коефіцієнти α, a, β, b зв'язано двома співвідношеннями

$$\begin{aligned} F_1(\alpha, a, \beta, b) &= 0, \\ F_2(\alpha, a, \beta, b) &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

то можна взяти довільно лише два коефіцієнти, останні вже визначаються з рівнань (29), або можна α, a, β, b визначити як функції двох незалежних параметрів θ_1 та θ_2. — Дістанемо конфіґурацію, утворену з ∞^2 прямих, яку звуть конґруенцією прямых: через кожну точку проходить певне число прямих, коефіцієнти яких α, a, β, та b за даних x та y визначаються з чотирьох рівнань (15) та (29) і конечне число прямих лежить у кожній даній площині, якраз ті, що справджують рівнання (28) та (29).

Нарешті, три співвідношення між коефіцієнтами α, a, β, b, приводять нас до лінійчастої поверхні.

§ 10. Конґруенції.

Хай у рівнаннях прямої

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + a \\ y &= \beta x + b \end{aligned} \tag{15}$$

коефіцієнти є функції двох незалежних параметрів.

Сукупність таких ∞^2 прямих звемо конґруенцією прямих. Через кожну точку простору проходить визначене число прямих; відповідні значення для θ_1 та θ_2 визначаються підстановкою у (29) координат даної точки.

Якщо встановити проміж θ_1 та θ_2 деяку залежність, то дістанемо лінійчасту поверхню. Ця поверхня буде за попереднім розгортна, якщо залежність між θ_1 та θ_2 така, що

$$da\,d\beta - db\,d\alpha = 0,$$

де похідні беремо по тому параметру, що взято за незалежний.

Якщо цю умову розгорнути, то дістанемо:

$$0=\left(\frac{\partial a}{\partial\theta_1}+\frac{\partial a}{\partial\theta_2}\cdot\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right)\left(\frac{\partial\beta}{\partial\theta_1}+\frac{\partial\beta}{\partial\theta_2}\cdot\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right)-$$

$$-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_1}+\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_2}\cdot\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial\theta_1}+\frac{\partial b}{\partial\theta_2}\cdot\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right)$$

що є диференціяльним рівнанням виду

$$P\left(\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right)^2+Q\left(\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right)+R=0 \qquad (30')$$

і яке розпадається на два рівнання

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1}=\Phi_1(\theta_1,\theta_2) \quad \text{і} \quad \frac{d\theta_2}{d\theta_1}=\Phi_2(\theta_1,\theta_2). \qquad (30)$$

Якщо проінтеґрувати кожне з цих рівнань, то дістанемо інтеґрал $\theta_2=\phi(\theta_1, c)$, що залежить від довільної сталої, яку можна добрати так, щоби при $\theta_1=\theta_1^\circ$ було $\theta_2=\theta_2^\circ$, тобто інтеґрал кожного з двох диференціяльних рівнань визначає безконечне число розгортних поверхонь і через кожну пряму конґруенції проходить дві такі поверхні.

Відповідно, кожна пряма має дві точки — точки ребер звороту однієї або другої розгортної поверхні.

Ці точки називають **фокальними точками** твірної, а геометричне місце фокальних точок, відповідних всім твірним конґруенції, є якась поверхня, що називається **фокальною поверхнею** конґруенції.

Фокальні точки твірної можна дістати без інтеґрування рівнань (30). Справді, якщо взяти одну твірну (5), то беконечно близька до неї (5′) зустрічає її за умови, що

$$0=x\Delta\alpha+\Delta a, \quad 0=x\Delta\beta+\Delta b.$$

Виключаючи з цих рівнань x, дістанемо

$$\Delta a\Delta\beta-\Delta b\Delta\alpha=0;$$

переходячи до границі, маємо умову

$$a'\beta'-b'\alpha'=0.$$

Якщо ж навпаки напишемо коефіцієнти при $\Delta\theta_1$ та виключимо $\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$, то дістанемо рівнання, якому при даних θ_1 та θ_2 повинна вдовольняти координата x точки, в якій зустрічаються

послідовні прямі конґруенції, що й будуть при цьому твірними розгортної поверхні.

Маємо:

$$0 = x\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_1} + \frac{\partial a}{\partial\theta_1} + \left(x\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_2} + \frac{\partial a}{\partial\theta_2}\right)\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$$

$$0 = x\frac{\partial\beta}{\partial\theta_1} + \frac{\partial b}{\partial\theta_1} + \left(x\frac{\partial\beta}{\partial\theta_2} + \frac{\partial b}{\partial\theta_2}\right)\frac{d\theta_2}{d\theta_1}.$$

Виключивши з цих рівнань $\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$ дістанемо:

$$31)\qquad 0 = \left(x\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_1} + \frac{\partial a}{\partial\theta_1}\right)\left(x\frac{\partial\beta}{\partial\theta_2} + \frac{\partial b}{\partial\theta_2}\right) - \left(x\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_2} + \frac{\partial a}{\partial\theta_2}\right)\left(x\frac{\partial\beta}{\partial\theta_1} + \frac{\partial b}{\partial\theta_1}\right).$$

Це є рівнання другого степеня відносно x а тому, якщо θ_1 та θ_2 дано, то дістанемо два значення: на кожній прямій конґруенції є дві фокальні точки, що визначаються з рівнання (31). Припускаючи θ_1 та θ_2 змінними, з трьох рівнань (15) та (31) можна виключити параметри θ_1 та θ_2; дістанемо рівнання геометричного місця фокальних точок — фокальну поверхню. Ця поверхня повинна складатись з двох частин, одна з цих частин утворюється однією серією точок, друга — другою.

Ця фокальна поверхня буде містити не лише одну характеристичну точку будь-якої розгортної поверхні, а все ребро звороту розгортної поверхні. Справді, до конґруенції належать усі прямі кожної точки розгортної поверхні, які одночасно є дотичні до ребра звороту розгортної поверхні, а тому кожна точка цієї кривої є точка перетину деякої прямої конґруенції з безконечно-близькою прямою тієї ж конґруенції, тобто буде її фокальною точкою. Отже вона повинна належати геометричному місцю цих точок — фокальній поверхні. Будь-яка пряма конґруенції дотикається до двох частин фокальної поверхні.

Хай F та F' — дві фокальні точки деякої твірної.

Через цю твірну проходить дві площини γ та γ', — дотичні до розгортних поверхонь, що проходять через цю твірну. Отже, ці площини відповідають фокальним точкам. Ці площини звуть фокальними площинами.

Можна довести, що площина γ є площина дотична до по-

верхні Σ', до геометричного місця точки F', а площина γ' є дотична до поверхні Σ — геометричного місця точки F.

Справді, хай пряма пересувається залишаючись дотичною до ребра звороту першої розгортної, а тому й до Σ; вона при цьому повсякчасно буде дотикатися до Σ'; точка дотику її з Σ, утворить на Σ криву C', що проходить через F', але відмінну від ребра звороту 2-ої розгортної. Розгортна поверхня, описана прямою, буде мати з Σ' дві спільні дотичні — дотичну в F' до ребра звороту другої розгортної поверхні й дотичну в F' до C'. Отже вони мають спільну дотичку площину, що є також щільнодотичною площиною до ребра звороту першої розгортної поверхні й дотичною площиною до Σ'. Якщо одна з частин фокальної поверхні є крива, то прямі конґруенції будуть зустрічати цю криву й дотикатися другої частини фокальної поверхні. Одною з розгортних поверхонь для кожної твірної буде через це конус, дотичний до другої частини фокальної поверхні, що має вершину на кривій, до якої звелась одна частина фокальної поверхні. Якщо обидві частини фокальної поверхні зводяться до кривих ліній, то обидві розгортні поверхні конґренцій будуть конуси, що проходять через одну криву та мають вершини на другій кривій.

§ 11. Конґруенція нормалів деяких поверхонь.

Нормаля до поверхні $z = f(x, y)$ є

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$$

пряма, рівнання якої залежить від двох параметрів. Тому сукупність нормалів до поверхні є окремий випадок конґруенції прямих.

Ті розгортні поверхні, про які мова мовилась раніш, утворюються тими з нормалів, що перетинаються в безконечно близькій точці. Але у § 4 розд. III доведено, що точки, нормалі яких є такі (— тобто дві безконечно близькі з них перетинаються —) утворюють на поверхні лінії кривини.

Отже розгортні поверхні конґруенції нормалів до будь-якої поверхні, що проходять через будь-яку нормалю, перетинають поверхню по її лініях кривини.

За властивости ліній кривини, вони (розгортні поверхні) перетинаються під прямим кутом. Фокальні площини є площини головних нормальних січень.

Нарешті, **фокальна поверхня є поверхня центрів кривини головних нормальних січень** (еволюта) поверхні.

Справді, напишемо рівнання нормалі так:

$$Z = -\frac{X-x}{p} + z; \quad Y = \frac{(X-x)}{p} q + y$$

та складемо рівнання (31), припускаючи $\theta_1 = x$, $\theta_2 = y$ дістанемо:

$$\begin{vmatrix} \frac{r(X-x)}{p^2} + p + \frac{1}{p} & \frac{(X-x)s}{p^2} + q \\ (X-x)\frac{ps-qr}{p^2} - \frac{q}{p} & (X-x)\frac{pt-qs}{p^2} + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо перший рядок помножити q та додати до другого й скоротити на спільного множника $\frac{1}{p}$, то дістанемо:

$$\begin{vmatrix} \frac{r(X-x)}{p} + 1 + p^2 & \frac{s(X-x)}{p} + pq \\ \frac{s(X-x)}{p} + pq & \frac{t(X-x)}{p} + 1 + q^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Порівнюючи це рівнання з рівнанням (26) § 8, розд. III робимо висновок, що

$$\frac{X-x}{p} = \frac{1}{K} = \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

а тому за рівнанням нормалі

$$Y - y = \frac{Rq}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$Z - z = -\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

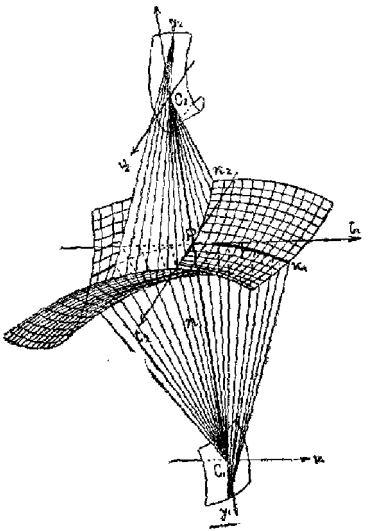


Рис. 63.

Ці рівнання є рівнання центрів кривини головних нормальних січень (§ 12), а тому фокальна поверхня конґруенції нормалів до даної поверхні є її еволюта. Але будь-яка конґруенція нормалів не є конґруенція нормалів до якоїсь поверхні. Можна довести, що доконечна й достатня, умова того, щоби конґруенція прямих була конґруенцією нормалів є в тому, щоб фокальні площини будь-якої прямої конґруенції були взаємно перпендикулярні.

Отже обидві поли поверхні центрів даної поверхні дотикаються нормалів цієї поверхні у точках, що є головні центри кривини відповідної точки поверхні (рис. 19).

V. ДОДАТКИ.

I. Формули для теорії кривини поверхонь, заданих неявними рівнаннями.

Якщо поверхню задано рівнанням

$$F(x,y,z)=0 \tag{1}$$

то безпосереднє застосовання формул, наведених у тексті вище, може бути досить незручне. Тому треба дати низку формул для такого випадку.

Довжину перпендикуляра з точки (x, y, z) на безконечно-близьку дотичну площину можна написати так:

$$\frac{dF'_x \,.\, dx + dF'_y \,.\, dy + dF'_z \,.\, dz.}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}$$

Звідси рівнання асимптотичних ліній напишеться так:

$$dx \,.\, dF'_x + dy dF'_y + dz d'F_z = 0$$

Диференціял дуги кривої на поверхні (1), якщо

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0$$

напишиться так:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{F'^2_z}[dx^2(F'^2_z + F'^2_x) + 2F'_y F'_x dx dy + \\ + dy^2(F'^2_z + F'^2_y)]$$

Звідси радіюс кривини

$$\frac{1}{r} = \frac{dx dF'_x + dy dF'_y + dz dF'_z}{ds^2 \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}.$$

Задача визначення екстремальних радіюсів приводить до рівнання:

$$\begin{vmatrix} F''_{xx} - K & F''_{xy} & F''_{xz} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} - K & F''_{yz} & F'_y \\ F''_{xz} & F''_{yz} & F''_{zz} - K & F'_z \\ F'_x & F'_y & F'_z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Для Ґавсової кривини звідси дістанемо вираз:

$$\frac{1}{R_1R_2}=-\frac{1}{(F'^2_x+F'^2_y=F'^2_z)^2}\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} & F'_y \\ F''_{xz} & E''_{yz} & F''_{zz} & F'_z \\ F'_x & F'_y & F'_z & 0 \end{vmatrix}$$

Цю формулу дістав C. Neumann (Ber. Sächs. Ges.*) та Math. Ann. VI). Для середньої кривини можна дати такий досить простий вираз

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=-\left\{\frac{\partial\left(\frac{F'_x}{v}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{E'_y}{v}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{E'_z}{v}\right)}{\partial z}\right\}, \text{ де}$$

$$v^2=F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z.$$

який дав у трохи іншій формі Rogers; — див. G. Darboux, Théorie des surfaces, tome II, видання 1915 року.

Лінії кривини можна визначити через рівнання

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ dF'_x & dF'_y & dF'_z \end{vmatrix}=0$$

сумісно з

$$dF=0$$

Умбиліки (сферічні точки) визначаються рівнаннями, які стверджують, що коефіцієнти при dx^2, $dxdy$, dy^2 в численнику та знаменнику радіюсу кривини є пропорційні

$$\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & E'_x \\ F''_{xz} & F''_{zz} & E'_z \\ F'_x & F'_z & 0 \end{vmatrix} : (F'^2_x+E'^2_z)= \begin{vmatrix} F''_{xy} & E''_{xy} & F'_x \\ F''_{yz} & F''_{zz} & F'_z \\ F'_y & F'_z & 0 \end{vmatrix} : F'_xF'_y=$$

$$=\begin{vmatrix} F''_{yy} & F''_{yz} & F'_y \\ F''_{yz} & F''_{zz} & F'_y \\ E'_y & F'_z & 0 \end{vmatrix} : (F'_y+F'^2_z)$$

Геодезичні лінії можна дати через рівнання:

$$(dxdF'_x+dydF'_y+dzdE'_z)(F'_xdy-F'_ydx)=(F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z)$$
$$(dxd^2y-dyd^2x).$$

Довід Я. П. Бланка, див. мою роботу „О системах интегральных кривых Пфафова уравнения“ Pdx+Qdy + Rdz = 0. Зап. Мат. Науч. Исл. Каф.. Украини Том III.

яке можна дістати, як це зроблено й у тексті, через перетворення рівнання

$$\begin{matrix} F'_x & F'_y & E'_z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{matrix} = 0$$

Ці формули можна дістати, як окремий випадок відповідних формул для систем інтегральних кривих Пфафового рівнання $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, теорію яких розвинено A. Voss'ом, R. Lilienthal'ем, Rogers'ом, G. Darboux та в моїх статтях в „Уч. Записках Мат. Иссл. Кафедр Украины, том III та в Сообщениях Харьковского Математического Общества", томы I, II, III.

II. Теорія кривини поверхонь у криволінійних координатах.

1) Ми вже бачили, що коли поверхню задано рівнанням у параметричній формі

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v), \tag{1}$$

то елементи дуги кривої на поверхні (див. стор. 133)

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gsdv^2 \tag{2}$$

є першою основною квадратичною формою в теорії поверхонь

$$\Phi(du,dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

На поверхні маємо дві системи координатних ліній

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}$$

Елемент дуги 1-ої

$$ds^2_v = Gd_v^2, \quad ds_v = \sqrt{G}\,.\,dv$$

Елемент дуги 2-ої

$$ds_u^2 = Edu^2, \quad ds_u = \sqrt{E}du$$

Косинус кута V проміж двома напрямами

$$du, dv \text{ та } \delta u, \delta v$$

$$\text{Cos}V = \frac{1}{ds\delta s}(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z) = \frac{1}{ds\delta s}\Sigma(x'_u du + x'_v dv)\ (x'_u\delta u +$$

$$+ x'_v\delta v) = \frac{1}{ds\delta s}[Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v].$$

тому умова перпендикулярности двох напрямів така:

$$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0 \qquad (3)$$

Координатні лінії

$$dv = 0, \ \delta u = 0$$

перпендикулярні за умовою

$$Fdu\delta v = 0$$

тобто

$$F = 0 \qquad (3')$$

отже тоді елемент дуги набирає вигляду:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

Кут α проміж координатних ліній існує, бо

$$EG - F^2 > 0, \qquad 0 < \frac{F^2}{EG} < 1,$$

позначаючи

$$\operatorname{Cos} \alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

маємо:

$$ds^2 = ds_u{}^2 + ds_v{}^2 + 2ds_u . ds_v \operatorname{Cos}(ds_v, ds_v)$$

Елемент поверхні набирає вигляду

$$d\omega = ds_u . ds_v . \sin\alpha,$$

або беручи на увагу, що

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

то

$$d\omega = \sqrt{EG - F^2}, du . dv. \qquad (4)$$

2) Обчислимо довжину перпендикуляра δ, що його спущено з $(u + du, v + dv)$ — точки безконечно-близької до точки (u, v) — на дотичну площину, рівнання якої є

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Це рівнання можна написати

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

де

$$\frac{A}{y'_u z'_v - z'_u y'_v} = \frac{B}{z'_u x'_v - x'_u z'_v} = \frac{C}{x'_u y'_v - y'_u x'_v},$$

та

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = H^2$$

при чому

$$Ax'_u + By'_u + Cz'_u = 0$$
$$Ax'_v + By'_v + Cz'_v = 0.$$

Поклавши

$$\Delta x = x'_u du + x'_v dv + \frac{1}{1 \cdot 2}(x''_{uu} du^2 + 2x''_{uv} dudv + x''_{vv} dv^2) + \dots$$

$$\Delta y = y'_u du + y'_v dv + \frac{1}{1 \cdot 2}(y''_{uu} du^2 + 2y''_{uv} dudv + y''_{vv} dv^2) + \dots$$

$$\Delta z = z'_u du + z'_v dv + \frac{1}{1 \cdot 2}(z''_{uu} du^2 + 2z''_{uv} dudv + z''_{vv} dv^2) + \dots$$

маємо вираз

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{EF - G^2}} \begin{matrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{matrix}$$

Обмежуючись членами другого порядку та позбавляючись від перших степенів du, dv відніманням від першого рядка другого рядка, помноженого на du та третього, помноженого на dv, знайдемо довжину перпендикуляра

$$2\delta = Ldu^2 + 2\,Mdudv + Ndv^2,$$

якщо позначити

$$HL = \begin{matrix} x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{matrix} \qquad HM = \begin{matrix} x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{matrix}$$

$$HN = \begin{matrix} x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{matrix} \tag{6}$$

Але

$$\delta = \frac{ds^2}{2R}$$

отже

$$\frac{1}{R} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \tag{7}.$$

Чисельник є друга основна квадратична форма

$$\Psi(du, dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

Вираз (7) не залежить від відношення $\frac{du}{dv}$ якщо

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}, \tag{8}$$

що приводить знову до сферичних точок (умбілік).

Для інших точок, у яких значення радіюса змінюється з напрямом, можна шукати екстремальні значення радіюса. Повинно бути

$$L\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2M\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds}+N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=\text{maximum (minimum)},$$

за умови що,

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2F\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds}+G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=1.$$

Це приводить до співвідношень

$$\left.\begin{aligned} Ldu+Mdv-S(Edu+Fdv)=0\\ Mdu+Ndv-S(Fdu+Gdv=0\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

які можна написати

$$S=\frac{Ldu+Mdv}{Edu+Fdv}=\frac{Mdu+Ndv}{Fdu+Gdv}= \tag{10}$$

$$=\frac{(Ldu+Mdv)du+(Mdu+Ndv)dv}{(Edu+Fdv)du+(Fdu+Gdv)dv}=\frac{\Psi(du,dv)}{\Phi(du,dv)}$$

виключаючи з (9) du та dv,

дістанемо квадратове рівнання

$$\begin{vmatrix} L-ES & M-FS\\ M-FS & N-GS\end{vmatrix}=$$

$$=S^2(EG-F^2)-S(EN-2FM+GL)+LN-M^2=0 \tag{11}$$

За (10) бачимо, що корені цього рівнання є якраз екстремальні значення міри кривини, а тому

$$\frac{1}{R_1R_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}$$

Три системи ліній на поверхні.

1) Дорівнюючи першу квадратичну форму нулеві, маємо:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = 0,$$

що визначає (через те, що $EG - F^2 > 0$) два уявних напрями — мінімальні (або ізотропні) лінії. Для них довжина дуги дорівнює нулеві.

2) Дорівнюючи нулеві другу квадратичну форму

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$$

дістанемо два (дійсних або уявних) напрями, для яких довжина перпендикуляра на дотичну площину є безконечно мале не другого порядку, а третього, і тому для цих напрямів дотична пряма має з поверхнею дотик 2-го порядку. Ці напрями визначають лінії головних дотичних, або асимптотичні лінії. До них приходимо також, якщо шукаємо такі криві на поверхні, для яких дотична площина до поверхні у відповідній точці є їх щільнодотична площина, тобто

$$\frac{\lambda}{A} = \frac{\mu}{B} = \frac{\nu}{C}$$

або

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

$$Al + Bm + Cn = 0$$

перше рівнання справджується тотожньо, а друге дає диференціяльне рівнання асимптотичних ліній.

3) Виключаючи з рівнань (9) S або беручи два відношення з (10) дістанемо

$$\begin{vmatrix} Ldu + Mdv & Edu + Fdv \\ Mdu + Ndv & Fdu + Gdv \end{vmatrix} = 0$$

або

$$(LF - EM)\,du^2 + (LG - EN)\,dudv + (MG - FN)dv^2 = 0.$$

Ці два напрями взаємно перпендикулярні, бо підставляючи в (3)

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_1 \left(\frac{dv}{du}\right)_2 = \frac{LF - EM}{MG - FN} \quad \text{та} \quad \left(\frac{dv}{du}\right)_1 + \left(\frac{dv}{du}\right)_2 = \frac{EN - LG}{MG - FN}$$

дістанемо після множення на $MG - FN$ тотожньо нуль.

Це є лінії кривини — лінії екстремальних (головних) радіюсів кривини. До цих же ліній приводить така задача — знайти на поверхні напрями, на яких нормалі до поверхні перетинаються.

Справді хай рівнання нормалі

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C}=\sigma,$$

де A, B, C, мають попередні значення. Безконечно-близька нормаля

$$\frac{X-x-dx}{A+dA}=\frac{Y-y-dy}{B+dB}=\frac{Z-z-dz}{C+dC}=\tau$$

отже повинно бути

$$\sigma A=\tau(A+dA)+dx$$
$$\sigma B=\tau(B+dB)+dy$$
$$\sigma C=\tau(C+dC)+dz$$

Виключаючи $\sigma-\tau$ та τ, дістанемо умову перетину

$$\begin{vmatrix} dx & A & dA \\ dy & B & dB \\ dz & C & dC \end{vmatrix}=0$$

або

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix}=0$$

Це рівнання можна перетворити, помножаючи на

$$H^2=\begin{matrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ A & B & C \end{matrix}$$

Дістанемо:

$$\begin{vmatrix} Edu+Fdv & Fdu+Gdv & 0 \\ 0 & 0 & H^2 \\ du\Sigma A'_u x'_u+dv\Sigma A'_v x'_u, & du\Sigma A'_u x'_v+dv\Sigma A'_v x'_v, & HdH \end{vmatrix}=0$$

тобто

$$\begin{vmatrix} Edu+Fdv & Fdu+Gdv \\ Ldu+Mdv & Mdu+Ndv \end{vmatrix}=0,$$

бо

$$\Sigma A'_u x'_u=-L;\quad \Sigma A'_v x'_u=-M=\Sigma A'_u x'_v \text{ та } \Sigma A'_v x'_v=-N;$$

диференціюючи співвідношення

$$\Sigma A x'_u=0 \quad \text{та} \quad A x'_v=0$$

дістанемо безпосередньо ці співвідношення.

Отже **лінії кривини є ті напрями, на яких безконечно близькі нормалі перетинаються.**

Ці три системи визначаються диференціяльними рівнаннями 1-го порядку та 2-го степеня і тому дають для кожної точки поверхні два напрями.

Геодезичні лінії визначаються умовою, що для них дотична площина, до поверхні є випрямна площина, тобто

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C},$$

звідси

$$A\lambda+B\mu+C\nu=0,$$

але

$$\lambda=n\beta-m\gamma$$
$$\mu=l\gamma-\alpha n$$
$$\nu=m\alpha-l\beta,$$

тому рівнання, якщо пригадати, що

$$\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \beta=\frac{dy}{ds},\quad \gamma=\frac{dz}{ds},\ l=r\frac{d^2x}{ds^2} \text{ й т. д.}$$

набере вигляду

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$$

Метода вираховувати та сама: множимо на

$$H^2=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

дістанемо

$$0=\begin{vmatrix} \Sigma x'_u dx & \Sigma x'_v dx & \Sigma A\,dx \\ \Sigma x'_u d^2x & \Sigma x'_v d^2x & \Sigma A d^2x \\ \Sigma A x'_u & \Sigma A x'_v & \Sigma A^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \Sigma x'_u dx & \Sigma x'_v dx \\ \Sigma x'_u d^2x & \Sigma x'_v d^2x \end{vmatrix}\cdot H^2$$

бо

$$\Sigma A x'_u=0\quad \Sigma A x'_v=0$$
$$\Sigma x'_u dx=\Sigma x'_u(x'_u du+x'_v dv)=E du+F dv$$
$$\Sigma x'_v dx=\Sigma x'_v(x'_u du+x'_v dv)=F du+G dv$$
$$\Sigma x'_u d^2x=\Sigma x'_u(x'_u d^2u+x'_v d^2v+x''_{u^2}du^2+$$
$$+2x''_{uv}du\,dv+x''_{v^2}dv^2,$$

але

$$\Sigma x'_u x''_{u^2}=\frac{1}{2}E'_u;\quad 2\Sigma x'_u x''_{uv}=F'_v,$$

$$\Sigma x'_u x''_{vv}=(\Sigma x'_u x'_v)_v'-\Sigma x'_v x''_{uv}=F'_v-\frac{1}{2}G'_u$$

також

$$\Sigma x'_u d^2x = Ed^2u + Fd^2v + \frac{1}{2} E'_u du^2 + E'_v dudv +$$

$$+ (F'_v - \frac{1}{2} G'_u) dv^2$$

також знайдемо

$$\Sigma x'_v d^2x = \Sigma x'_v (x'_u d^2u + x'_v d^2v + x''_{u^2} du^2 + 2x''_{uv} dudv + x''_{vv} dv^2) =$$

$$= Fd^2u + Gd^2v + (F'_u - \frac{1}{2} E'_v) du^2 + G'_u dudv + \frac{1}{2} G'_v dv^2.$$

Отже рівнання геодезичних ліній набирає вигляду

$$\begin{vmatrix} Edu + Fdv, & Ed^2u + Fd^2v + \frac{1}{2} E'_u du^2 + E'_v dudv + (F'_v - \frac{1}{2} G'_u) dv^2 \\ Fdu + Gdv, & Fd^2u + Gd^2v + (F'_u - \frac{1}{2} E'_v) du^2 + G' dudv + \frac{1}{2} G'_v dv^2 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Ed^2u + Fd^2v \\ Fdu + Gdv & Fd^2u + Gd^2v \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} Edu + Fdv, & \frac{1}{2} E'_u du^2 + E'_v dudv + (F'_v - \frac{1}{2} G'_u) dv^2 \\ Fdu + Gdv, & (F'_u - \frac{1}{2} E'_v) du^2 + G'_u dudv + \frac{1}{2} G'_v dv^2 \end{vmatrix} = 0$$

перший детермінант дорівнює:

$$\begin{vmatrix} du & dv \\ d^2u & d^2v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = (EG - F^2)(dud^2v - dvd^2u).$$

Отже остаточно рівнання геодезичних ліній у криволінійних координатах дістанемо таке

$$(EG - F^2)(dud^2v - dvd^2u) +$$

$$+ \begin{vmatrix} Edu + Fdv, & \frac{1}{2} E'_u du^2 + E'_v dudv + (F'_v - \frac{1}{2} G'_u) dv^2 \\ Fdu + Gdv, & (F'_u - \frac{1}{2} E'_v) du^2 + G'_u dudv + \frac{1}{2} G'_v dv^2 \end{vmatrix} = 0$$

Вирахування Ґавсової кривини.

Тією самою методою можна визначити $LN - M^2$ через E, F, G та їхні похідні по u та v першого та другого порядку.

Справді

$$H^2.L.N=\begin{vmatrix} x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v & z'_v \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \Sigma x''_{uu}x''_{vv} & \Sigma x'_u x''_{vv} & \Sigma x'_v x''_{vv} \\ \Sigma x'_u x''_{uu} & \Sigma x'^2_u & \Sigma x'_u x'_v \\ \Sigma x'_v x''_{uu} & \Sigma x'_u x'_v & \Sigma x'^2_v \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \Sigma x''_{uu}x''_{vv} & F'_v-\frac{1}{2}G'_u & \frac{1}{2}G'_v \\ \frac{1}{2}E'_u & E & F \\ F'_u-\frac{1}{2}E'_v & & G \end{vmatrix}=$$

$$=(EG-F^2)\Sigma x''_{uu}x''_{vv}+F\left[\frac{1}{4}E'_uG'_v+\left(F'_u-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}E'_v\right)\left(F'_v-\frac{1}{2}G'_u\right)\right]-\frac{1}{2}EG'_v\left(F'_u-\frac{1}{2}E'_v\right)-$$

$$-\frac{1}{2}GE'_u\left(F'_v-\frac{1}{2}G'_u\right).$$

Так само $$H^2M^2=\begin{vmatrix} x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{matrix} \Sigma x'^2_{uv} & \Sigma x'_u x''_{uv} & \Sigma x'_v x'_{uv} \\ \Sigma x'_u x''_{uv} & \Sigma x'^2_u & \Sigma x'_u x'_v \\ \Sigma x'_v x''_{uv} & \Sigma x'_u x'_v & \Sigma x'^2_v \end{matrix}=$$

$$=\begin{matrix} \Sigma x''^2_{uv} & \frac{1}{2}E'_v & \frac{1}{2}G'_u \\ \frac{1}{2}E'_v & E & F \\ \frac{1}{2}G'_u & F & G \end{matrix}=(EG-F^2)\Sigma x''^2_{uv}+$$

$$+\frac{1}{2}FG'_uE'_v-\frac{1}{4}EG'^2_u-\frac{1}{4}GE'^2_v.$$

Беручи різницю дістанемо

$$H^2(LN-M^2)=(EG-F^2)(\Sigma x''_{uu}x''_{vv}-\Sigma x''^2_{uv})+\frac{1}{4}E(G'^2_u-$$

$$-2F'_uG'_v+E'_vG'_v)+\frac{1}{4}F(E'_uG'_v-2F'_uG'_u-2F'_vE'_v-G'_uE'_v+$$

$$+4F'_uF'_v)+\frac{1}{4}G(G'_uE'_u-2E'_uF'_v+E'^2_v).$$

Залишилось вирахувати

$$\Sigma x''_{uu} x''_{vv} - \Sigma x'''^2_{uv}.$$

Ми вже дістали раніш, що

$$\Sigma x''_{uu} x'_v = F'_u - \frac{1}{2} E'_v$$

та

$$\Sigma x'_v x''_{uv} = \frac{1}{2} G'_u.$$

Диференціюванням 1-го по v 2-го по u дістанемо

$$F''_{uv} - \frac{1}{2} E''_{vv} = \Sigma x'''_{uuv} x'_v + \Sigma x''_{uu} x''_{vv}$$

$$\frac{1}{2} G''_{uu} = \Sigma x'''_{uuv} x'_v + \Sigma x'''^2_{uv}.$$

Беручи різницю дістанемо

$$\Sigma x''_{uu} x''_{vv} - \Sigma x'''_{vv} = F'_{uv} - \frac{1}{2} E''_{vv} - \frac{1}{2} G''_{uu}$$

Підставляючи в попередню рівність, поділом на $EG - F^2$ дістанемо остаточно

$$\frac{LN - M^2}{EF - G^2} = \frac{1}{4(EG - F^2)^2} \{2(2F''_{uv} - E''_{vv} - G''_{uu})(EG - F^2) + \\ + E(G'^2_u - 2F'_u G'_v + E'_v G'_v) + F(E'_v G'_v - G'_u E'_v - \\ - 2F'_u G'_u - 2F'_v E'_v) + G(E'^2_v - 2E'_u F'_v + E'_u G'_u)\}.$$

Отже Ґавсова кривина не змінюється за всих таких змін поверхні, за яких зберігається лінійний елемент, тобто якщо згинати поверхню.

Звідси, щоб накласти одну поверхню на другу без розривів та складок треба щоб Ґавсові кривини їх були рівні — це умова доконечна, але недостатня. Доконечна й достатня умова є рівність їх лінійних елементів.

$$E = E_1, \quad F = F_1, \quad G = G_1.$$

III. Відображення, однієї поверхні на другу.

Конформні відображення.

Якщо поверхні взагалі не накладаються одна на одну (напр. сферична поверхня та площина) то можна поставити питання про таке відображення, що зберігало б якнайбільше схожости з оригіналом. Таким є конформне відображення: за ним кути

проміж лініями зберігаються, але рівність їхніх довжин ні. Перше вимагає від двох лінійних елементів

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2$$
$$ds_1^2 = E_1(u, v)du_1^2 + 2F_1(u, v)dudv + G_1(u, v)dv^2$$

пропорціональности коефіцієнтів

$$\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G} = \chi(u,v) \qquad (a')$$

а не рівности їх.

Доведемо: Якщо дано дві поверхні $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ та $x_1 = x_1(u_1, v_1)$, $y_1 = y_1(u_1, v_1)$, $z_1 = z_1(u_1, v_1)$, то завжди можна встановити проміж них конформне відображення, а саме завжди можна добрати такі функції u_1 та v_1 від u й v:

$$u_1 = f(u, v), \quad v_1 = g(u, v)$$

щоб (a') справджувалось.

Розкладімо ds^2 на уявні лінійні множники: тому що $EG - F^2 > 0$ то

$$ds^2 = E\left[(du + \frac{F}{E}dv)^2 + \frac{H^2}{E^2}dv^2\right] =$$
$$= E\left[du + \frac{F + iH}{E}dv\right]\left[du + \frac{F - iH}{E}dv\right]$$

Кожний із множників можна безконечним числом способів зробити повним диференціялом: хай $M(u, v)$ та $N(u, v)$ два такі множники, що

$$du + \frac{F + iH}{E}dv = M(u, v)d\alpha(u, v)$$
$$du + \frac{F - iH}{E}dv = N(u, v)d\beta(u, v).$$

Функції α та β незалежні — справді $d\alpha$ та $d\beta$ не можуть разом дорівнювати нулеві, якщо $H \neq 0$, що якраз і припущено. Візьмемо α та β за криволінійні координати, тоді

$$ds^2 = P(\alpha, \beta)d\alpha\, d\beta = \Theta(\alpha, \beta)d\alpha d\beta.$$

Так само для другої поверхні

$$ds_1 = P_1(u_1, v_1)d\alpha_1\, d\beta_1 = \Theta_1(\alpha_1, \beta_1)d\alpha_1\, d\beta_1.$$

Отже для конформного відображення треба, щоб справджувалась тотожність

$$\Theta(\alpha, \beta)d\alpha\, .\, d\beta = \Omega(\alpha_1, \beta_1)\,\Theta(\alpha_1, \beta_1)d\alpha_1\, d\beta_1,$$

де Ω, α_1, β_1 невідомі функції від α та β, тому для $d\alpha = 0$ повинно бути $d\alpha_1 d\beta_1 = 0$, а для цього треба, щоб

$$\left.\begin{array}{l} \text{або} \quad d\alpha_1 = 0 \\ \text{або} \quad d\beta_1 = 0 \end{array}\right\} \text{ за умовою } d\alpha = 0$$

В першому випадку

$$\alpha_1 = \varphi[\alpha(u, v)] \quad \text{та} \quad \beta_1 = \psi[\beta(u, v)]$$

у другому випадку

$$\beta_1 = \varphi[\alpha(u, v)] \quad \text{та} \quad \alpha_1 = \psi[\beta(u, v)].$$

Розв'язання в обох випадках завжди можливе, хоч які були б функції φ та ψ. Якщо

$$u_1 = f(u, v) \quad v_1 = g(u, v)$$

то

$$E_1(u_1, v_1) = E_1(f, g)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2F_1(f, g)\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + G_1(f, g)\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2$$

$$F_1(u_1, v_1) = E_1(f, g)\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + F_1(f, g)\left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial u}\right) +$$

$$+ G_1(f, g)\frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$G_1(u_1, v_1) = E(f, q)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 2F_1(f, g)\frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} + G_1(f, g)\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2$$

Умова (a') дає два диференціяльних рівнання для визначення f та g.

Конформне відображення (перетворення) площини на площину.

Якщо дві площини віднесено до прямокутних координат і

$$M \equiv (x, y), \quad M' \equiv (X, У)$$

є дві відповідні точки, то треба знайти

$$X = P(x, y) \quad У = Q(x, y)$$

так щоб

$$\frac{dP^2 + dQ^2}{dx^2 + dy^2} = \lambda(x, y)$$

не залежало від відношення $\frac{dy}{dx}$. Доконечною умовою для цього є

$$P_x'^2 + Q_x'^2 = P_y'^2 + Q_y'^2$$
$$P'_x \cdot P'_y + Q'_x Q'_y = 0.$$

З другого співвідношення маємо

$$\frac{P'_x}{Q'_y} = \frac{-Q'_x}{P'_y} = \pm\frac{\sqrt{P_x'^2 + Q_x'^2}}{\sqrt{P_y'^2 + Q_y'^2}} = \pm 1,$$

тому або

$$P'_x = Q'_y, \quad P'_y = -Q'_x$$

або

$$P'_x = -Q'_y, \quad P'_y = Q'_x$$

Від однієї системи рівностей можна перейти до другої, якщо замінити Q на $-Q$. Перша система є умова (Cauchy), що $P(x, y) + iQ(x, y)$ є (моногенною) аналітичною функцією від $x + iy$, тобто задача має безконечне число розв'язків.

Розв'язок другої системи дає $P - iQ$ як функцію $x + iy$ (або $P + iQ$, як функцію $x - iy$) і також зберігає кути, але змінює напрямок відкладування.

Застосовання до географічних мап (карт).

Хай дано сферу, радіюса

$$R = 1,$$

рівнанням

$$x = \sin\theta\cos\psi, \quad y = \sin\theta\sin\psi, \quad z = \cos\theta$$

(ψ довгота, θ зенітна віддаль).

1) Елемент дуги

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2$$

зводиться до вигляду

$$\lambda^2(dx^2 + dy^2)$$

як що переписати

$$ds^2 = \sin^2\theta\left(\frac{d\theta^2}{\sin^2\theta} + d\psi^2\right)$$

та позначати

$$dx = \frac{d\theta.}{\sin\theta.}, \quad dy = d\psi,$$

то

$$x = \log tg\frac{\theta}{2} \quad y = \psi,$$

звідкіль дістанемо таку мапу (карту), що паралелі та меридіяни відображаються на ній прямими паралельними з осями координат.

Це є Меркаторова проєкція. Найкраще відображаються місця поблизу екватора, найгірше поблизу полюса.

Звідси можна дістати рівнання льоксодроми, — кривої на сфері, що зустрічає всі її меридіяни під сталим кутом.

В Меркаторовій проєкції вони відображаються прямими площини XOY, що зустрічають вісь Y-ів під кутом v

$$y \operatorname{cotg} v = x + h \quad (h \text{ — стала}).$$

На сфері їх рівнання буде

$$\psi \operatorname{ctg} v - h = \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

або

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = a e^{\psi \operatorname{ctg} v} \qquad (a = e^{-h} = \text{const}).$$

Морські мапи рисують у такій проекції, щоб льоксодроми, що є шляхами для пароплава, відображались прямими лініями, тому в морських мапах вживають Меркаторову проекцію.

Конформне відображення сфери на площину взагалі дістанемо якщо покласти

$$x + iy = f(\log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + i\psi),$$

де f — аналітична функція. Один частинний розв'язок ми вже дістали

$$x = \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}; \; y = \psi.$$

2) Зокрема візьмемо

$$f(z) = e^z$$

тобто

$$x = e^x \cos y = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \psi$$

$$y = e^x \sin y = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot \sin \psi.$$

Це є стереографічна проекція. Точці $M = (\theta, \psi)$ сфери відповідає точка $M' = (X, Y)$ екваторіяльної площини — точка перетину екваторіяльної площини з прямою яка з'єднує точку M з південним полюсом сфери (0,0 — 1)

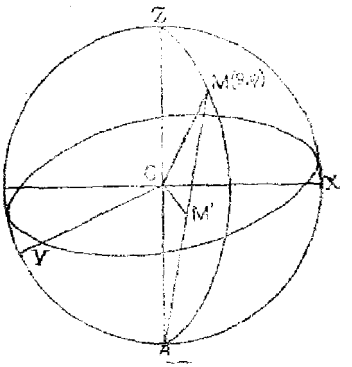


Рис. 64.

Справді

$$\angle XOM' = \psi \quad \angle MAO = \angle M'AO = \frac{\theta}{2}$$

$$OM = OA \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \qquad (AO = 1).$$

Тому

$$X = OM \cos \psi = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \psi$$

і

$$Y = OM \sin\psi = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \cdot \sin\psi$$

$$ds_1^2 = dX^2 + dY^2 = \frac{1}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2) = \frac{ds^2}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}$$

Відображення, що зберігають площі.

Крім відображень, що зберігають кути, в картографії вживають відображення, що не зберігають рівности кутів, але зберігають взаємне відношення площ поверхні, що відображають. Такі відображення площ поверхні скорочено звуть відображеннями еквівалентними

Для поверхні, для якої

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

площа, визначається формулою

$$\iint \sqrt{EG - F^2}du.dv$$

Ця площа повина бути в сталому відношенні (зокрема = 1) з відповідною площею відображення

$$M = [(Xu, v),\ Y(u, v)],$$

що дано через формулу,

$$\iint dxdy.$$

але цей інтеґрал дорівнює:

$$\iint_\Omega \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} du.dv$$

тому

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = \sqrt{EG - T^2}.$$

Отже маємо лише одне рівнання для визначення двох функцій X та Y від u й v.

Одну функцію можна взяти довільно.

Для відображення сфери дістанемо

$$X'_\theta Y'_\psi - X'_\psi Y'_\theta = \pm \sin\theta.$$

Візьмемо $Y = \psi$, тоді $X'_\theta = \pm \sin\theta$, звідси $X = \pm\cos\theta + F(\psi)$, де $F(\psi)$ довільна функція від ψ. Зокрема можна взяти

$$X = \cos\theta \quad Y = \psi.$$

ЗМІСТ

Розд. I. Теорія плоских кривих

Розд. II. Теорія просторових кривих та поверхонь.

Розд. III. Кривина поверхонь.

Розд. IV. Окремі типи поверхонь та системи прямих

V. Додатки

ПОМІЧЕНІ ПОМИЛКИ.

Стор.	*Ряд.* $\pm$ зв. $\pm$ зн.	*Надруковано:*	*Треба:*
5	— 8	За 67 років...	67 років...
11	+ 12	$= 2(2x^2 + y^2)$	$= 2a(2x^2 + y^2)$
11	— 3	$(x + a)(x^2 + y^2) = a^2y^2$	$(x + a)^2(x^2 + y^2) = a^2y^2$
13	— 4	Roberval та Torricelli в XVIII стор.	Torricelli та у XVIII стор. Roberval
14	+ 1	$. BDc . \operatorname{tg}\theta,$	$. BD = c . \operatorname{tg}\theta,$
14	+ 12	$OP . PM = k^2$	$OM . PM = k^2$
14	— 8	$(x^2 + x^2)(x - a) =$	$(x^2 + y^2)(x - a) =$
15	+ 13	$y = f\left(x + \frac{xy_0}{y_0 - y} - \right)$	$y = f\left(x + \frac{xy_0}{y_0 - y} - l\right)$
17	— 3	кінця O	кінця O'
18	—11, —12	$(x + y - a)(y^2 - b^2) + (xy + b^2 - y^2)^2$	$(x + y - a)^3(y^2 - b^2) + (xy + b^2 - y^2)^2 = 0$
19	+ 3	точки T	точки S
19	+ 10	$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}}$	$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
20	— 13	$- 4a^2$	$= 4a^2$
20	— 11	$= y^2(x - \xi)^2(y - \eta)^2$	$= 4a^2(x - \xi)^2(y - \eta)^2$
31	— 5	Отож	Так
33	— 13	$y^2 + y^2\left(\frac{ax}{ay}\right)^2 = a^2$	$y^2 + y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = a^2$
33	— 3	$r^4dx\theta^2 =$	$r^4d\theta^2 =$
34	— 5, — 7	$\angle MDN =$ D і N	$\angle MPN =$ P і N
37	+ 12	$M'N = r + dr - r\cos\Delta\theta = \Delta\theta + r(1 - \cos\Delta\theta)$	$M'N = r + \Delta r - r\cos\Delta\theta = \Delta r + r(1 - \cos\Delta\theta)$
39	+ 3	$= \arcsin\left(\frac{r}{a}\right)$	$- \arcsin\left(\frac{r}{a}\right)$
40	+ 19	або $\Delta y - y'\Delta x \gtrless 0$	або $\Delta y - y'\Delta x \gtrless 0$
41	— 14	$12x(x^2 - a^2) =$	$12x^2(x^2 - a^2) =$
43	+ 15	(бо просто Φ_k	або просто Φ_k
43	— 9	$= m\Phi_m = (m-1)\Phi_{m-1} + \ldots$	$= m\Phi_m + (m-1)\Phi_{m-1} + \ldots$
44	— 4	$- (\Phi'_x + y\Phi_y) =$	$- (x\Phi'_x + y\Phi'_y) =$
46	+ 5	III-й на $(m-1)z^{m-1}$	III-й на z^{m-1}
46	+ 15	$z\Phi'_z - mt$	$z\Phi_z - m\Phi$
53	+ 13	$h + - \frac{\varphi_{m-1}(\mu)}{\varphi'_m(\mu)}$	$h = - \frac{\varphi_{m-1}(\mu)}{\varphi'_m(\mu)}$
53	— 1	$= \frac{\varphi_2(\mu)}{\varphi'_2(\mu)} =$	$= - \frac{\varphi_2(\mu)}{\varphi'_2(\mu)} =$
60	— 1	$(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2x^2$	$(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2x^2$
60	— 10	$F'_x = 0 = F'_yF''_{xx} = 2(c - a).$ $F''_{xy} = F'_{xy} = 2p.$	$F'_x = 0 = F'_y,\ F''_{xx} = 2(c - a),$ $F''_{xy} = 0,\ F''_{yy} = 2p.$
63	+ 5	$= x^2\left(1 + \sqrt{\frac{x}{m}}\right)$	$= x^2\left(1 - \sqrt{\frac{x}{m}}\right)$
63	— 7	$\Phi'_x = - bx^5 + 4x^3b^2 = 0,$ $\Phi'_y = 2a^2y = 0$	$\Phi'_x = - 6x^5 + 4x^3b^2 = 0,$ $\Phi'_y = 2a^2y = 0$
64	— 5	$\left(\frac{u}{x}\right)^2 + b_3\left(\frac{u}{x}\right) = a_4 = 0$	$\left(\frac{u}{x}\right)^2 + b_3\left(\frac{u}{x}\right) + a_4 = 0$

Стор.	Ряд. $\pm$ зн.	Надруковано:	Треба:
71	$+6$	$v^2w = -\frac{4}{24}u^3$	$v^2w = -\frac{4}{27}u^3$
73	$+9$	$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$	$\frac{(m+1)(m-2)}{2}$
77	$+4$	(але $\left(\frac{dx}{dy}\right)_\infty = 1$)	(але $\left(\frac{dx}{dy}\right)_\infty = 0$)
78	-15	$, y' \pm \sqrt{k\pi}.$	$, y' = \pm \sqrt{k\pi}.$
79	$-6, -7$	$y - f(x)$ така.	$y = f(x)$ така,
80	$+6$	$\lim\limits_{+3} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}$	$\lim\limits_{+0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}$
80	$+7$	$y = x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}, f(0) = 0$	перенести в рядок $+8$ до слів: „приклад 2“.
81	-10	$= r(1 - \frac{\Delta\theta^2}{1.2} + \ldots)$	$= r(\Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{1.2.3} + \ldots)$
83	-7	$= \Delta\theta +$	$= \Delta r +$
83	-3	$\overline{M'M}^2 = r^2\Delta\theta^2(1 - \frac{1}{2!}\Delta\theta^2) +$	$\overline{M'M}^2 = r^2\Delta\theta^2(1 - \frac{1}{6}\Delta\theta^2)^2$
85	$+5, +6$	$+\frac{1}{12}\frac{4y'y''' + 3y''^2}{1+y'^2}\Big)\Delta x.\Delta x -$	$+\frac{1}{12}\frac{4y'y''' + 3y''^2}{1+y'^2}\Delta x\Big)\Delta x -$
		$-\frac{1}{8}\frac{y'^2y''^2}{(1+y')}\Delta x^2$	$-\frac{1}{8}\frac{y'^2y''^2}{(1+y'^2)^2}\Delta x^2$
85	$+9$	$\Delta x^3, \Delta x^4$	$\Delta x^3, \Delta x^4$ і т. д.
87	$+5$	$\frac{1}{\nu} = \frac{\alpha}{S}, \frac{1}{\nu'}, \frac{\alpha'}{S}, \frac{1}{\nu''} = \frac{\alpha''}{S}$	$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{S}, \frac{1}{r'} = \frac{\alpha'}{S}, \frac{1}{r''} = \frac{\alpha''}{S}$
90	$+14$	$C_1B = \frac{b^2}{a} =$	$C_1A = \frac{b^2}{a} =$
94	$+16$	$r'' = mr^2$	$r'' = m^2r$
94	-4	**§ 28.**	**§ 28a.**
99	-14	$d(\lambda F'_x + \mu' F_1)$	$d(\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1})$
101	$+14$	$y'' = f''(x)$	$y'' = 0$
104	$+8$	$-a\cos\alpha d(-a\cos\alpha) = a\sin\alpha\, d\alpha$	$-a\cos\alpha$, бо $d(-a\cos\alpha) = a\sin\alpha\, d\alpha$
105	-10	$F''xy - F''xx F''yy = 0$	$F''^2xy - F''xx F''yy = 0$
112	-18	Помноживши на ξ' і η'	Помноживши на ξ' і η'
113	$+1$	ці інволюти мають дотичними нормалі заданої кривої	ці інволюти мають за нормалі дотичні до заданої кривої
114	-10	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \pi ab = \cos t$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \pi ab = \text{const}$
119	$+8$	$F''xcx'c + F''yey'c + F''e^2 0$	$F''xcx'c + F''yey'c + F''e^2 = 0$
121	-4	$-1 - y'^2 + y''Y(-y) = 0$	$-1 - y'^2 + y''(Y-y) = 0$
121	-15	$Y - y = y'(X - x) = 0$	$Y - y - y'(X - x) = 0$
122	-12	$\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta =$	$\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta =$
123	$+1$	є похідна від цього	є похідна від цього по x
123	$+9$	$= q(x + yy')(y - xy')$	$= 2(x + yy')(y - xy')$
127	-1	$z = x(t)$	$z = \chi(t)$
129	-15	де a та b сталі	де a та b є довільні сталі
132	-8	великий	велике
133	$+6$	$+ F'y dy +$	$+ F'_y dy +$
134	$+2$	M	M'
134	$+3$	$MM'k$	MM' є
135, 136	—		Скрізь на стор. 135 та 136 слід замінити букви ϕ через Φ і ψ через Ψ

Стор.	Ряд.	± зв. — зн.	Над:	Треба:
137	— 8		$+ d^{2}\Sigma$	$+ d^{2}\Sigma$
139	+ 6		$\frac{A}{y'y'' - z'y''} =$	$\frac{A}{y'z'' - z'y''} =$
139	+ 11		$(Z - z)$	$(Z - z) = 0$
140	+ 12		досить близьких.	досить близьких поміж себе.
141	— 12		рівнань (17) та (18)	рівнань (17d) та (19)
143	+ 10		4° — рівнань	4° — 3 рівнань
143	+ 3		$\alpha\lambda + \beta\mu + \mu\nu = 0$	$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$
143	+ 5		$\beta\gamma + mn + \lambda\nu = 0$	$\beta\gamma + mn + \mu\nu = 0$
143	— 6		відносно діі-	відносно λ, μ, ν, діі-
143	— 10		$= \frac{m}{\nu\alpha - \nu\gamma} =$	$= \frac{m}{\nu\alpha - \lambda\gamma}$
144	— 17		с. 139	с. 140
146	+ 4		$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{z''s - z's''}{s'^{3}}$	$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{z''s' - z's''}{s'^{3}}$
146	+ 6		$- 2s's''\Sigma x'x'' +$	$- 2s's''\Sigma x'x'' +$
146	— 14		Якщо $t = x$, $x' = 1$,	Якщо $t = x$, то $x' = 1$,
146	+ 5		$(z''s' - s'z'')^{2}] =$	$(z''s' - s''z')^{2}] =$
146	— 2		а сама міра	а сама міра
147	+ 9		$(x'y'' - y'y'')$	$(x'y'' - y'x'')$
147	— 1		$\sqrt{\lambda'^{2} + \mu'^{2} + \nu'^{2}}$	$\sqrt{\lambda'^{2} + \mu'^{2} + \nu'^{2}}$
148	+ 13		$\sqrt{(A^{2}+B^{2}+C^{2})s'^{2} - (Ax'+By'+Cz')^{2}}$	$\sqrt{(A^{2}+B^{2}+C^{2})s'^{2} - (Ax'+By'+Cz')^{2}}$
149	+ 10		$\lambda'^{2} + \mu'^{2} + \nu'^{2}$	$\lambda'^{2} + \mu'^{2} + \nu'^{2}$
150	+ 13		„невної кривини“	„повної кривини“
150	— 1		дотичні	щільнодотичні
151	+ 8		ν	r
151	— 1		(18c) $= \frac{1}{r}$	(17c) $= -\frac{1}{r}$
152	— 12		$\frac{l}{\rho} = r'\frac{\lambda}{r} +$	$\frac{l}{\rho} = r'\frac{\lambda}{r} +$
155			і c' площини	і c) площини
155	— 12		§ 10. Взаємне розміщення нормалів.	§ 10. Взаємне розміщення зазначених елементів.
156	+ 6		$m(Y - y)\ n(Z - z)$	$m(Y - y) + n(Z - z)$
156	+ 11		$\frac{X - x}{\nu\lambda - l\rho r'} =$	$\frac{X - x}{r\lambda - l\rho r'} =$
156	— 10		$c, c', c'', d'', d,$	$c, c', c'', d,$
156	— 4		міра кривини	міра другої кривини
158	+ 1		$- \beta ds =$	$- \beta ds -$
158	+ 4		$ds'^{2} = \frac{r^{2}}{\rho^{2}} as^{2}$	$ds'^{2} = \frac{r^{2}}{\rho^{2}} ds^{2}$
169	+ 8		$F'_{a}(x, y, z, a) = 0$	$F'_{a}(x, y, z, a) = 0$
170	+ 13		$[F'_{y}(x_1 y_1 z_1 \varphi_1(x_1 y_1 z_1)) +$	$[F'_{y}(x_1 y_1 z_1 \varphi_1(x_1 y_1 z_1)) +$
175	+ 10		кривої січення	кривої січення;
176	— 4		$y' = at \sin t$	$y' = at \sin t$
177	— 9		—	Проти рівнан. $l(X - x) +$
178	+ 4		ще (a) дістанемо	$+ m(Y - y) + \ldots$ поставити інд (a) ще (a) стор. 177 дістанемо
184	+ 17		$= \frac{z - \zeta}{-1}$	$= \frac{\zeta - z}{-1}$
191	— 3 прим.		*) Якщо (8$_1$) та (8$_2$)	[1]) Якщо (81$_1$) та (81$_2$)
193	— 6		(8$_3$) const = K^{3}	$abc = \text{const} = k^{3}$
193	— 1		abc	
194	+ 4		$- \frac{z}{c} + \lambda = 0$	$- \frac{z}{c} + \frac{\lambda}{c} = 0$

Стор.	*Рад.* $\frac{+\text{зв.}}{-\text{зн.}}$	*Надруковано:*	*Треба:*
194	+6	$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=$	$\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=$
196	−6	$2h-rx^2+2sxy+ty^2+2\Sigma_s$	$2h=rx^2+2sxy+ty^2+2\Sigma_s$
199	−9	$\frac{Z-z-dz}{-1}-\frac{Y-y+dy}{q+dq}=$	$\frac{Z-z-dz}{-1}=\frac{Y-y-dy}{q+dq}=$
200	+15	при заміні в $p=q=0$	при заміні в (7) $p=q=0$
200	+16	(7)	(7')
201	−4	$p\gamma x'+qy'-z'=0$	$px'+qy'-z'=0$
205	+12	переріз щільнодотичної площини.	де R—радіюс кривини перерізу поверхні щільнодотичною площиною.
205	−7	ZOQ	NOQ
206	−1	(коло Meusnier'ове)	(коло Meusnier)
207	−3	$\frac{4r^2+(r-t)^2}{r-t}$	$\frac{4s^2+(r-t)^2}{r-t}$
208	+1	cor 2α	cos 2α
208	+8	$\left(\frac{1}{R}\right)'_\alpha$	$\left(\frac{1}{R}\right)''_\alpha$
208	−3	$\frac{1}{R_1}=$	$\frac{1}{R}=$
208			Між рядками 10 і 11, рах. зв., вставити: „Ці—найбільший та найменший радіюси кривини називаються головними радіюсами кривини для точки поверхні, а відповідні нормальні січення—головними нормальними січеннями. Полозвавши формулу (18') з відповідною формулою на ст. 200, знеповуємо:"
209	+6	кривини двох	кривини всяких двох
209	−15	виразу (b)	виразу (стор. 206)
212	−3	$\frac{(rt-s^2)z^2}{c^4}+$	$\frac{(rt-s^2)z^2}{c^4}=$
214	+11	$-\frac{1}{(x^2+y^2)^2+1)}$	$-\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}$
214	−5	$\zeta=\frac{-1}{1+p^2+q^2}$	$\zeta=\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$
216	+1, +3	k k	K K
219	−12	$v'(\alpha)(y-b)$ $w'(\alpha)(z-c)$	$v'(\alpha)(y-b)+w'(\alpha)(z-c)$
221	+8	(10)	(11)
221	+12	(10')	(11')
222	+15	$\frac{\Phi'_p}{\Phi'_q}=\cos t=m$	$\frac{\Phi'_p}{\Phi_q}=\text{const}=m$
222	−1	$\frac{r}{s}=\frac{s}{t}$	$\frac{r}{s}=\frac{s}{t}=-\frac{y-b}{x-a}$
223	+12	руба поворота	ребра зворота
223	−14	(16)	(15)
223	−11	(92) (92)	(15) (15)
223	−8	(16)	(15)
223	−5	(92)	(15)
223	−4	(92)	(15)
224	+4	$\frac{\theta'_x}{\theta'_y}$	$\frac{\theta'_x}{\theta'_y}$
224	+14	$=\frac{\alpha'}{\beta}=$	$=\frac{\alpha'}{\beta'}=$
224	+17	(16)	(15)

Стор.	Ряд. $\pm$ зн. $-$ зн.	Надруковано:	Треба:
224	-9	$\frac{\beta s+r}{\beta t+\rho}=-\beta$	$\frac{\beta s+r}{\beta t+s}=-\beta$
230	-1	$\ldots\frac{+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2)}}$	$\ldots\frac{+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}$
231	-8	(B')	(B)
236	$+11$	куті в	кутів
237	-18	$+\nu\sigma-$	$+\nu\sigma'-$
238	$+2$		
238	-4		$\sqrt{}$
241	-1	$\frac{\delta}{\varphi}=\frac{\sqrt{\alpha'\beta'-b'\alpha')(1+\alpha'^2+\beta'^2)}}{\alpha'^2+\beta'^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}$	$\frac{\delta}{\varphi}=\frac{(\alpha'\beta'-b'\alpha')(1+\alpha'^2+\beta'^2)}{\alpha'^2+\beta'^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}$
244	-10	(5)	(15)
248	-10	$+2F'yF'x\,dxdy+$	$2F'xF'y\,dxdy+$
249	$+2$	$-\frac{1}{(F'^2_x+F'^2_y=F'^2_z)^2}$	$-\frac{1}{(F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z)^2}$

Починаючи з стор. 137 слід виправити нумерацію рисунків аж до стор. 247.