Тетяна Кирієнко,
магістрантка II курсу
факультету природничої та
фізико-математичної освіти
Глухівського національного педагогічного
університету імені Олександра Довженка

РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ ЯК МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РЕАЛІЗАЦІЇ НАСКРІЗНОЇ ЛІНІЇ «ЕКОЛОГІЧНА БЕЗПЕКА ТА СТАЛИЙ РОЗВИТОК»

Реалізація наскрізної лінії «Екологічна безпека та сталий розвиток» передбачає вивчення рівнянь і нерівностей не тільки як абстрактних математичних понять, а й у формі моделей реальних природних процесів та явищ. Це сприяє органічному поєднання теоретичного матеріалу змістової лінії «Рівняння та нерівності» з матеріалом попередніх розділів, дає учням можливість зрозуміти зв'язок між поняттями курсу, забезпечує зв'язок навчального матеріалу з життям, реалізуючи відповідний принцип навчання.

Проаналізувавши чинні програми з математики [4] різних рівнів навчання можна сказати, що змістову лінію «Рівняння та нерівності» вивчають на всіх трьох рівнях. Але, аналізуючи підручники цих рівнів навчання з алгебри та початків аналізу для 10 і 11 класів ми можемо сказати, що задачі екологічного змісту, які пов'язані з рівняннями і нерівностями, є тільки у підручниках [1; 2]. Змістова лінія «Рівняння та нерівності» в навчальних програмах різних рівнів вивчається в такому обсязі (табл. 1):

Таблиця 1

Державні стандарти вивчення рівнянь і нерівностей у різних рівнях навчальної програми

Рівень програми (к-сть годин)	**Зміст навчального матеріалу**	**Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів**
Рівень стандарту, 10 клас	Функції, їх властивості і графіки	Учень/учениця: **моделює** реальні процеси за допомогою степеневих функцій
Рівень стандарту, 10 клас	Найпростіші тригонометричні рівняння	**розв'язує** найпростіші тригонометричні рівняння
Рівень стандарту, 11 клас	Найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності	**застосовує** показникову та логарифмічну функції до опису реальних процесів; **розв'язує** найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності

Профільний рівень, 10 клас	Тригонометричні рівняння і нерівності	**розв'язує** тригонометричні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами
Профільний рівень, 11 клас	Методи розв'язування рівнянь з однією змінною (рівносильні перетворення, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо). Методи розв'язування нерівностей з однією змінною (рівносильні перетворення, метод інтервалів, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо). Системи рівнянь та методи їх розв'язування (рівносильні перетворення та використання рівнянь-наслідків, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо)	**застосовує** загальні методи та прийоми до розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем; **розв'язує** рівняння, нерівності, системи рівнянь та нерівностей з параметрами; за описами реальних ситуацій; **розв'язує** задачі, моделями яких є відомі рівняння або системи рівнянь
Поглиблений рівень, 10 клас (24 год)	Степенева функція Ірраціональні рівняння. *Ірраціональні нерівності. Ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи з параметрами*	**розв'язує** ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами; **застосовує** властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей
Поглиблений рівень, 10 клас (42 год)	Тригонометричні рівняння і нерівності Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки. Найпростіші тригонометричні рівняння. *Тригонометричні нерівності. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції*	**формулює** означення обернених тригонометричних функцій; **обґрунтовує** формули коренів тригонометричних рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$; **розв'язує** тригонометричні рівняння, тригонометричні нерівності, зокрема з параметрами; будує графічні образи, пов'язані з періодичними функціями
Поглиблений рівень, 11 клас (36 год)	ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ Застосування показникової та логарифмічної функцій у прикладних задачах	**розв'язує** показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами

На думку дослідників [3, с. 34], розгляд практичних ситуацій буде корисним на таких етапах курсу:

– розв'язування задач природничого змісту, які приводять до поняття показникового рівняння (задачі, умова яких містить показникову функціональну залежність з параметрами, після знаходження значень яких одержують показникові рівняння);
– розв'язування задач екологічного змісту, які приводять до поняття логарифмічного рівняння.

Розглянемо детальніше методику розв'язування задач, які приводять до показникового рівняння.

Задача 1. Після скількох періодів піврозпаду з 30 г радіоактивної речовини залишиться 7,5 г? Чи є піврозпад радіоактивної речовини небезпечним для суспільства? [3, с. 34].

Розв'язання. Використаємо рівняння радіоактивного розпаду:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Де y – частка речовини, яка залишається внаслідок розпаду після x періодів піврозпаду, отримаємо математичну модель даної задачі:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$$

Розв'язавши дане рівняння, отримаємо x=2.

Відповідь: після 2-х періодів напіврозпаду; період пірозпаду радіоактивної речовини є небезпечним для суспільства, але не несе великої загрози.

Після введення означення показникового рівняння виділяють типи рівнянь і з'ясовують способи їх розв'язування. Цей етап розв'язування задач має певні особливості: не всі типи рівнянь можуть відігравати роль математичної моделі природничого процесу. Існують типи показникових рівнянь, за допомогою яких можна описати різні природні явища і процеси. При розв'язуванні цих рівнянь зазвичай використовується логарифмування.

Перший спосіб розв'язування показникових рівнянь – зведення обох його частин до спільної основи.

Другий спосіб розв'язування показникових рівнянь – спосіб заміни.

Третій спосіб розв'язування показникових рівнянь – логарифмування. Під час логарифмування найчастіше використовують десятковий і натуральний логарифми (залежно від основи степеня у рівнянні).

Розглянемо кілька задач.

Задача 2. Є 6 г радіоактивної речовини, період напіврозпаду якої становить 6 років, і 8 г радіоактивної речовини, період напіврозпаду якої становить 3 роки. Через скільки років маса першої речовини буде на 1 г більше маси другої речовини? [3, с. 38].

Вказівка. У процесі розв'язування задачі слід використати рівняння радіоактивного розпаду

$$m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Де m_0 – початкова маса радіоактивної речовини, m – маса речовини, що залишилась після x періодів напіврозпаду, $x = \frac{t}{T}$ – відношення часу протікання реакції до періоду напіврозпаду даної речовини.

Розв'язання. Через t років маса першої та другої речовини становитиме відповідно:

$$m_1 = 6 * \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$$

$$m_2 = 8 * \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$$

Складаємо рівняння:

$$6 * \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} - 8 * \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} = 1$$

Введемо заміну:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$$

Тоді:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} = y^2$$

Перепишемо рівняння:

$$6y - 8y^2 = 1$$

Запишемо квадратне рівняння у стандартному вигляді:

$$-8y^2 + 6y - 1 = 0$$

$$8y^2 - 6y + 1 = 0$$

Розв'язуємо це рівняння:

$$y^2 - \frac{3}{4}y + \frac{1}{8} = 0$$

За теоремою Вієта:

$$y_1 = \frac{1}{2};\ y_2 = \frac{1}{4}$$

Звідси:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{6}} = \frac{1}{2}$$

Або

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{6}} = \frac{1}{4}$$

Звідси: $t_1=6$, $t_2=12$.

Відповідь. Маса першої речовини буде на 1 г більше маси другої речовини після 6 і 12 років від початку розпаду.

Задача 3. Кількість бактерій збільшується за годину на 15 %. Якщо на початку було 20000 бактерій, то через який час їх буде 50000? Через який час бактерій стане вдвічі більше [3, с. 39]?

Розв'язання. Використавши формулу складних відсотків, отримуємо залежність

$$P(t) = 20000 * 1{,}15^t$$

Запишемо математичну модель задачі:

$$\begin{cases} 20000 * 1{,}15^t = 50000 \\ 20000 * 1{,}15^t = 40000 \end{cases}$$

Рівносильні їм рівняння мають такий вигляд:

$$1{,}15^t = 2{,}5$$

$$1{,}15^t = 2$$

Розв'язуємо ці рівняння:

$$t_1 = \frac{\ln 2{,}5}{\ln 1{,}15} = 6{,}6 \text{ років}$$

$$t_2 = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}15} = 5 \text{ років}$$

Відповідь: 6,6 років; 5 років.

Введення означення логарифмічного рівняння та вивчення способів розв'язування логарифмічних рівнянь також доцільно розглядати на прикладі задач екологічної тематики.

Задача 4. У результаті зростання температури води Північного моря виникла екологічна катастрофа – забруднення синьо-зеленими водоростями акваторії довжиною приблизно 10 км (площа, на якій вбито морське життя). Визначте середній приріст синьо-зелених водоростей протягом доби, виражений у відсотках, якщо кожного місяця їх кількість збільшується у 10 разів [3, с. 41].

Розв'язання. Використаємо формулу $l = l_0(1+p)^t$, де l – довжина забрудненої території, l_0 – початкова довжина забрудненої території, p – середній приріст водоростей протягом доби, виражений у відсотках, t – час, вимірюється добами. Отримуємо рівність:

$$10(1+p)^{30} = 100$$

Запишемо рівність, рівносильну даній:

$$(1+p)^{30} = 10$$

Для визначення p можна піднести обидві частини рівняння до степеня $\frac{1}{30}$ і за допомогою певних перетворень отримати

$$p = \sqrt[30]{10} - 1 \approx 0{,}079 \approx 8\%$$

Можна розв'язати рівняння іншим способом. Для цього слід прологарифмувати рівність $(1+p)^{30}$ за основою 10 і використати основну властивість логарифма:

$$30\lg(1+p) = 1$$

Звідси:

$$\lg(1+p) = \frac{1}{30}$$

У результаті отримано рівняння, в якому змінна міститься лише під знаком логарифма. Ці рівняння називаються логарифмічними.

$$1 + p = 10^{\frac{1}{30}}$$

$$p = 10^{\frac{1}{30}} - 1 \approx 8\%$$

Відповідь: 8 %.

Також логарифми можуть бути ефективно використані під час розв'язування задач, які містять статистичний ряд двох змінних.

На основі вищесказаного можна зробити висновок про те, що перебіг значної кількості фізичних, хімічних, біологічних процесів і явищ виражається показниковими рівняннями і нерівностями. Під час складання задач екологічного змісту слід врахувати ці залежності.

Список використаних джерел

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Освіта, 2018. 288 с.
2. Бевз Г. П., Бевз. В. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Освіта, 2019. 272 с.
3. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: навч. посіб. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 128 с.
4. Програма з математики. Програма затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 23.10.2017 № 1407. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (дата звернення: 12.10.2021).