**УДК 37.022+378.016:53.01
DOI: 10.31499/2307-4906.2.2022.262956**

ДО МЕТОДИКИ ВИВЧЕННЯ ОСНОВ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Юрій Краснобокий, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук, Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини.
ORCID: 0000-0003-2103-9978
E-mail: ymk201113@gmail.com
Ігор Ткаченко, доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук, Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини.
ORCID: 0000-0003-1775-1110
E-mail: tkachenko.igor1071@gmail.com
Катерина Ільніцька, кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук, Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини.
ORCID: 0000-0002-6179-5543
E-mail: e-ilnitskaja@udpu.edu.ua

У пропонованому матеріалі описано один з апробованих варіантів методики вивчення основних положень спеціальної теорії відносності у загальному курсі фізики, який викладається за програмами підготовки вчителів фізики. Основні підходи, на яких базується пропонована методика, полягають у посиланні на принцип відповідності щодо трансформації фізичних теорій від їхніх часткових випадків до більш загальних. У цьому плані проаналізовано межі застосування класичної механіки Галілея – Ньютона.

Посилаючись на постулати Ейнштейна, які лежать в основі теорії відносності, виведено формули перетворень координат і часу Лоренца. У результаті математично строго доведено відносність понять «одночасності подій», «проміжків часу», «зміни розмірів та форми тіл» тощо.

Ключові слова: *система відліку; принцип відносності; принцип відповідності; просторово-часовий інваріант; перетворення координат і часу.*

TO THE METHOD OF STUDYING THE BASICS OF SPECIAL THEORY OF RELATIVITY

Yurii Krasnobokyi, Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph.D.), Docent, Associate Professor at the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences, Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University.
ORCID: 0000-0003-2103-9978
E-mail: ymk201113@gmail.com
Ihor Tkachenko, Doctor of Pedagogic Sciences, Professor, Professor at the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences, Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University.
ORCID: 0000-0003-1775-1110
E-mail: tkachenko.igor1071@gmail.com

Kateryna Ilnitska, Candidate of Pedagogic Sciences (Ph.D.), Senior Lecturer at the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences, Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University.
ORCID: 0000-0002-6179-5543
E-mail: e-ilnitskaja@udpu.edu.ua

Special Theory of Relativity (STR) is a fundamental physical theory that underlies modern physics and has enormous worldview potential. At the same time, in the process of teaching (studying) the elements of STR in school and higher education institutions face a number of problems. These problems are primarily related to the complex mathematical apparatus that describes it; consideration of imaginary model representations that do not really exist in nature; formation of the concept of "event" and distinguishing under different initial conditions of the concepts of "relative", "portable" and "absolute" movements, etc. In this regard, it is important to find ways to improve the methodology of studying the elements of STR, which is what this article is about.

The article offers one of the tested options for studying the main provisions of the special theory of relativity in the general course of physics, which is taught in the programs of physical and mathematical specialties of pedagogical universities. The main approaches on which the proposed methodology is based are the reference to the principle of conformity in the transformation of physical theories from their partial cases to more general ones. In this regard, the limits of application of classical Galilean-Newton mechanics in the plane of absolutization by this theory of categories of space and time, the simultaneity of events in a different frame of reference, the instantaneous transmission of interactions between bodies at a distance, etc. are analyzed.

The physical meaning of Einstein's postulates, which underlie the theory of relativity, regarding the special status of the speed of light propagation as a natural phenomenon is clarified. On the basis of these postulates, the formulas of the Lorentz coordinate and time transformations are deduced. A consistent, detailed derivation of the formula for the transition coefficient from the Galilean coordinate and time transformations (for the transition from one inertial frame of reference to another) to the Lorentz coordinate and time transformations, which reflects their relativistic content, is given. The establishment of these formulas is based on the mathematical apparatus, which corresponds to the level of school mathematical training of participants in the educational process. Based on the obtained results on the formulas of Lorentz transformations, the relativity of the concepts of "duration of events", "time intervals", "changes in size and shape of bodies", etc. is demonstrated mathematically, if they are considered in reference systems that are in motion relative to each other.

Keywords: *classical mechanics; reference system; the principle of relativity; space-time invariant; coordinate and time conversion.*

Спеціальна теорія відносності (СТВ) є фундаментальною фізичною теорією, яка лежить в основі сучасної фізики і має колосальний світоглядний потенціал. У той же час під час викладання (вивчення) елементів СТВ в школі і ЗВО стикаються з низкою проблем. Ці проблеми пов'язані, насамперед, зі складним математичним апаратом, що її описує; розглядом уявних модельних представлень, які реально в природі не існують; (на кшталт «інерціальних систем відліку», які вимагають наявності тіл відліку, що не взаємодіють з іншими тілами); формуванням поняття «подія» та розрізненням за різних початкових умов понять «відносного», «переносного» й «абсолютного» переміщень тощо [6].

У зв'язку з цим актуальним є пошук шляхів удосконалення методики вивчення елементів СТВ [6], чому й присвячена ця стаття.

Йтиметься про отримання формул перетворень координат і часу Лоренця, на яких фактично базуються всі висновки СТВ. Основою цих формул є коефіцієнт $k = 1\Big/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, де v – швидкість об’єкта (системи відліку), а c – швидкість поширення світла у вакуумі. Саме в коректному математично обґрунтованому виведенні формули цього коефіцієнта полягає оптимальний методичний підхід до подальшого вивчення елементів СТВ.

З цією метою звернемося до кількох підручників (посібників), які використовуються на фізико-математичних факультетах педагогічних університетів, і спробуємо віднайти оптимальний варіант отримання виразу *k*, який відповідав би рівню математичної підготовки студентів першого курсу, які щойно закінчили школу (основи СТВ вивчаються в першому семестрі у розділі «Механіка»).

Найскладніше, на нашу думку, виведення формули коефіцієнта *k* дається у перекладеному українською мовою підручнику «Курс фізики» (Детлаф А. А., Яворський Б. М.) [10, с. 174–177]. Тут складається система з шести рівнянь, до яких входять 6 невідомих функцій швидкості рухомої системи відліку α_1, α_2, α_3, γ_1, γ_2, γ_3, – вид яких необхідно визначити. Подальше «спрощення» виведення зводиться до введення ще двох проміжних нових невідомих функцій швидкості – b_1 і b_2 і низки недостатньо обґрунтованих припущень, що робить його дещо схематичним.

У навчальному посібнику «Класична механіка» (Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В.) [3, с. 104–105] зв’язок між швидкістю, координатами і часом у двох інерціальних системах відліку, які перебувають у відносному русі, подається у формі двох рівнянь $x' = \alpha(x - vt)$ і $t' = \beta x + \gamma t$, до яких входять три постійних, залежних лише від модуля швидкості коефіцієнти *α, β, γ*. Подальші маніпуляції з цими рівняннями дають наведену вище формулу коефіцієнта *k*. Такі ж три коефіцієнти *α, β, γ* використовують й автори [7, с. 193–195]. На відміну від зазначеного навчального посібника [3] у підручнику «Фізика для університетів. Повний курс в одному томі» (Воловик П. М.) [2, с. 178–179] у подібні два рівняння $x' = \alpha(x - vt)$ і $x' = \alpha(x + vt')$ вводиться один і той же коефіцієнт *α* (у нашому випадку – це *k*), причому це супроводжується словами «природно припустити, що в будь-який момент часу» координати точки в обох системах відліку «відрізнятимуться на якийсь множник *α*» (однаковий для обох систем). Зрозуміло, що автор заздалегідь (наперед) знає, що це саме так, але не для всіх студентів це «природно очевидно».

Аналогічний підхід для виведення виразу для *k* використовується й у посібнику «Общий курс физики. Оптика» (Сивухін Д. В.) [8, с. 636–637].

У посібнику «Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка» (Дущенко В. П., Кучерук І. М.) [4, с. 142] вираз для *k* вводиться без жодного виведення, чомусь як «поправка, яка практично потрібна для розрахунку сучасних прискорювачів заряджених частинок». Формули перетворень координат і часу за Лоренцом, про що йтиметься далі, наводяться без доведень [4, с. 148].

У підручнику «Фізика» (Бойко В. В., Сукач Г. О., Кідалов В. В.) [1, с. 108–111] (попри те, що він рекомендований для ЗВО) про теорію відносності згадується лише на чотирьох сторінках, що опосередковано може свідчити про її математичну складність і несприйняття її логіки з позиції так званого «здорового глузду».

Тому основною метою статті є розробка оптимального варіанта методики вивчення основних положень СТВ, яка передбачає розв’язання наступних завдань:

– проаналізувати принцип відносності Галілея й основні закони механіки Ньютона з точки зору меж їх застосування;
– подати оптимальне за математичною складністю встановлення формул перетворення координат і часу Лоренца;
– продемонструвати «відносний» характер перебігу деяких фізичних явищ.

Розв’язання поставлених завдань розпочинаємо з розкриття змісту важливого методологічного «*принципу відповідності*», який є одним з елементів формування у студентів надпредметної (ключової) компетентності.

Під час підготовки відповідного до мети статті матеріалу використовувалися загальнонаукові методи – аналізу (наявних публікацій із проблеми) і синтезу (їхніх результатів) з напрацюванням авторів щодо впровадження їх у педагогічну практику.

Принцип відповідності у його найбільш загальній формі стверджує, що теорії, достовірність яких встановлена експериментально для тієї чи тієї галузі природознавства, з появою нових, більш загальних теорій, не відкидаються як помилкові, а зберігають своє значення для попередньої сукупності явищ як гранична форма і частковий випадок нових теорій.

У розгорнутому вигляді принцип відповідності стверджує: по-перше, що кожна природничо-наукова теорія є відносною істиною, яка містить елемент абсолютної істини; по-друге, він стверджує, що зміна природничо-наукових теорій – це не послідовність руйнування різних попередніх теорій, а логічний процес розвитку природознавства, руху через послідовність відносних істин до абсолютної; по-третє, принцип відповідності стверджує, що як «нові», так і «старі» теорії утворюють єдине ціле.

Наш досвід викладання основ СТВ переконує, що краще її сприйняття студентами відбувається тоді, коли вона представляється як до певної міри узагальнення механіки Галілея – Ньютона, що й відповідає принципу відповідності.

Вивчення цього матеріалу нами реалізується у формі *комбінованого лекційно-практичного заняття*, під час якого теоретичні його основи подаються викладачем, а математичні розрахунки проводяться студентами. За цього вивчення основних положень СТВ здійснюється у процесі поступового переходу від аналізу теоретичних установок механіки Галілея – Ньютона, які мають бути засвоєні студентами зі шкільного курсу фізики.

Як відомо, основний закон класичної механіки Ньютона аналітично виражається формулою

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a} = \vec{F}\,, \tag{1}$$

де $\vec{F}$ – сила, яка діє на матеріальну точку, а $\vec{r}$ – радіус-вектор, який визначає положення матеріальної точки відносно будь-якої інерціальної системи відліку.

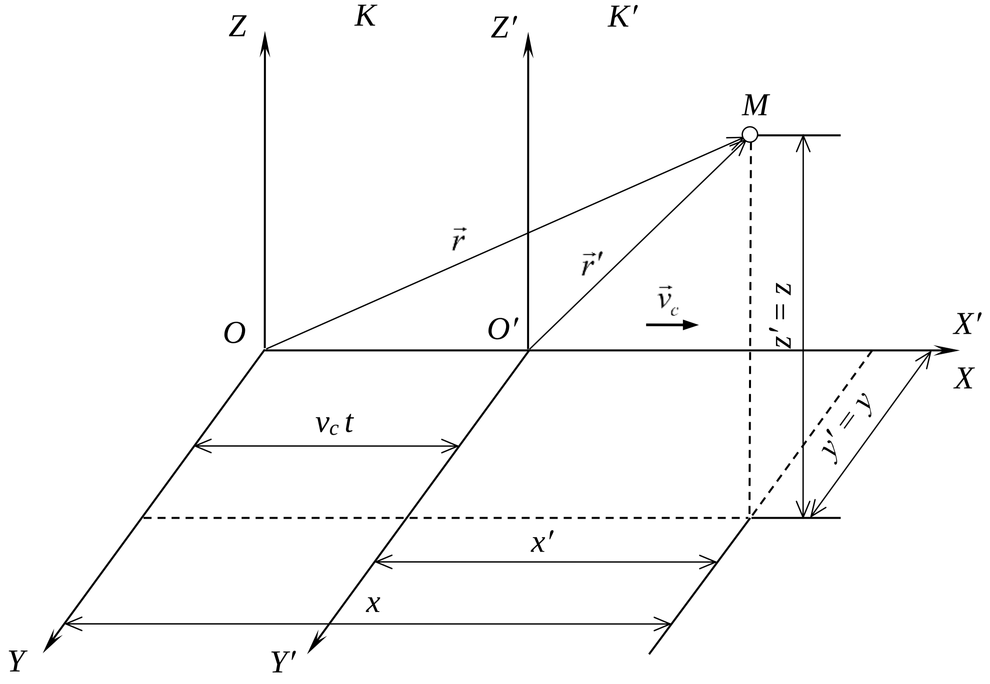

Рис. 1

Розглянемо дві інерціальні системи відліку, одну з яких позначимо через K і будемо вважати її нерухомою (або «нештрихованою»), а другу – через K', називаючи її рухомою (або «штрихованою») (рис. 1). Нехай система K' рухається відносно системи K рівномірно і прямолінійно зі швидкістю v_c у додатному напрямі вісі OX (індекс «*c*» означає «система»). Якщо $\vec{r}$ і $\vec{r}\,'$ – радіуси-вектори, що визначають положення рухомої матеріальної точки відносно цих систем відліку в момент часу t, то вони зв'язані між собою *перетворенням* Галілея

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + v_c t\,. \tag{2}$$

За цього пам'ятаємо, що у ньютонівській механіці час t вважається *абсолютним*, тобто він однаковий у всіх системах відліку.

Для спрощення, яке не вплине на загальність подальших міркувань, вважатимемо, що відлік часу ведеться з того моменту, коли початки координат систем K і K' співпадали.

Двічі диференціюючи співвідношення (2) за часом, знаходимо формули перетворення швидкості і прискорення:

$$\vec{v}_T = \vec{v}_T' + \vec{v}_c\,,\ \vec{a} = \vec{a}\,'\,. \tag{3}$$

(Індекс «*T*» означає швидкість «точки»).

З (3) видно, що *прискорення інваріантне* відносно перетворень Галілея, тобто воно однакове в обох системах K і K'. Радіуси-вектори $\vec{r}$ і $\vec{r}\,'$ та швидкості $\vec{v}_T$ і $\vec{v}_T'$ неоднакові. Проте різниці радіусів-векторів $\vec{r}_{12}$, а також різниці швидкостей $\vec{u}_{12}$ двох будь-яких матеріальних точок (*1* і *2*) одні і ті ж, оскільки вони визначають відносні положення і швидкість однієї точки відносно другої:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{v}t) - (\vec{r}_2 - \vec{v}t) = \vec{r}_1 - \vec{r} = \vec{r}_{12},$$
$$\vec{u}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (\vec{v}_1 - \vec{v}_c) - (\vec{v}_2 - \vec{v}_c) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{u}_{12}. \quad (4)$$

Сила $\vec{F}$ у механіці Ньютона залежить лише від різниць радіусів-векторів і швидкостей взаємодіючих матеріальних точок. Тому вона, а разом з нею й рівняння (1) не змінюються (є інваріантними) за перетворень Галілея. Те ж належить і до диференціальних рівнянь руху *систем матеріальних точок* у механіці Ньютона. Саме з таких міркувань формулюється наступний висновок: рівняння механіки Ньютона, які визначають зміни стану руху механічних систем, інваріантні відносно перетворень Галілея. Це положення називається *принципом відносності Галілея*. Йому можна надати й більш розгорнутого формулювання: закони природи, які визначають зміни стану руху механічних систем, не залежать від того, до якої з двох інерціальних систем відліку, які рухаються одна відносно одної прямолінійно і рівномірно, вони належать.

Дорелятивістська фізика вважала обидва наведені формулювання тотожними, оскільки за рівномірного поступального руху інерціальних систем відліку однієї відносно іншої вона не припускала жодного іншого перетворення $\vec{r}$ і t, крім перетворень Галілея. Насправді ж друге формулювання має більш загальний зміст, ніж попереднє, оскільки в ньому не конкретизується вид того перетворення координат і часу, відносно якого інваріантні рівняння механіки.

Тут студентам особливо варто відзначити, що принцип відносності аж ніяк не стверджує, що одне й те ж фізичне явище проявляється однаковим чином у різних інерціальних системах відліку. Річ у тім, що одні лише диференціальні рівняння механіки не визначають однозначно характер руху системи. До них необхідно додавати ще й початкові умови, наприклад, задавати координати і швидкості всіх взаємодіючих частинок у певний момент часу. А ці початкові умови змінюються за переходу від однієї системи відліку до іншої. Саме через різницю в початкових умовах рух предмета, який, наприклад, падає з верхньої полиці рівномірно рухомого вагона, відбувається вниз по прямій лінії (вертикально), якщо його розглядати відносно самого вагона, у той час як відносно колії залізної дороги рух того ж предмета відбувається по параболі.

У формулюванні принципу відносності йдеться не про однаковість явищ, а про *однаковість законів*, які визначають зміну станів руху механічних систем. Саме тому формулювання першого постулату Ейнштейна, що «всі фізичні *явища* у всіх інерціальних системах відліку відбуваються однаково» [4, с. 142] і, що «всі фізичні *процеси* відбуваються однаково у всіх інерціальних системах відліку» [9, с. 119] без вказівки на однаковість початкових умов, як це правильно зроблено у [3, с. 103], звучать некоректно.

Сутність принципу відносності можна продемонструвати ще й на такому прикладі. Оберемо довільну замкнуту (ізольовану) систему тіл Δ і задамо їх початкові положення і швидкості відносно інерціальної системи *K*. І нехай існує тотожна з Δ друга замкнута система тіл Δ', у якій створено такі ж початкові умови, але вже відносно інерціальної системи відліку K'. Тоді рух у системі тіл Δ відносно *K* буде тотожний з рухом у системі тіл Δ' відносно K'. Саме в цьому полягає *рівноправність інерціальних систем відліку*, що й встановлює принцип відносності.

Не лише наукові спостереження, а й навіть повсякденний практичний досвід засвідчує, що явища природи неможливо розділити на чисто «механічні» і «немеханічні». Дійсно, будь-яке «механічне» явище пов'язане з багатьма іншими «фізичними» явищами і зумовлюється ними. Тож коли б принцип відносності не був справедливий для цих «фізичних» явищ, то він не міг би залишатися справедливим і для «чисто механічних» явищ. У зв'язку з цим виникла потреба поширити принцип відносності на всі явища природи, що й зробив А. Ейнштейн, надавши йому наступного формулювання: *закони природи, які визначають зміну станів фізичних систем, не залежать від того, до якої з двох інерціальних систем відліку, які рухаються одна відносно одної прямолінійно і рівномірно, вони відносяться*.

На основі цього принципу, який встановлює рівноправність *лише* інерціальних систем відліку, Ейнштейн у 1905 році й створив часткову, або *спеціальну*, теорію відносності (СТВ). Через 10 років він узагальнив принцип відносності на випадок довільних неінерціальних систем відліку і створив *загальну теорію відносності* (ЗТВ), яка ще має назву *релятивістської теорії тяжіння*. ЗТВ стала основною теорією в астрофізиці, зокрема в космології. Особливого значення ця фундаментальна теорія набула у зв'язку з астрофізичними відкриттями останніх десятиріч.

Розширення змісту принципу відносності змусило переглянути й відповідність йому перетворень Галілея. Проблема зводиться до наступного: якщо x, y, z, t – координати і час певної події в системі відліку K, а в системі відліку K' координати і час тієї ж самої події мають значення x', y', z', t', – то яким чином за значеннями x, y, z, t знайти значення x', y', z', t' і навпаки? Розв'язання цього завдання ґрунтується на трьох припущеннях.

Перше з них *постулює*, що *простір однорідний і ізотропний*, а *час однорідний*. Однорідність простору і часу означає, що всі точки простору і всі моменти часу, що в системі K, що в системі K', абсолютно *еквівалентні*. Ізотропія ж простору означає повну еквівалентність всіх просторових напрямів у системі K, а також у системі K'. На основі такої однорідності й ізотропії простору і часу зв'язок між x, y, z, t і x', y', z', t' має бути *лінійним*.

Друге припущення стосується різних співвідношень між категоріями простору і часу у класичній фізиці і теорії відносності. У дорелятивістській фізиці *простір* і *час* вважалися незалежними один від одного. *Відстань* між двома матеріальними точками в один і той же момент часу, а також *проміжки часу* між двома подіями вважалися однаковими у всіх системах відліку. Іншими словами, обидві величини вважалися *інваріантними* за переходу від однієї системи відліку до другої. У теорії відносності така інваріантність була утрачена. Замість двох інваріантів – просторового і часового – в ній зберігся лише один, *просторово-часовий інваріант*, який на основі лінійного зв'язку між x, y, z, t і x', y', z', t' можна сформувати на основі оптико-геометричних міркувань, про що йтиме мова далі.

Третє припущення, яке випливає з двох перших, стосується понять «*одночасності*» і «*неодночасності*» перебігу однакових подій, які відбуваються в різних системах відліку.

За цього спочатку варто відмітити особливості швидкості поширення світла, які складають зміст другого постулату Ейнштейна: *швидкість поширення світла у вакуумі «с» не залежить від руху його джерела або приймача і однакова в усіх напрямках*.

Тож оскільки завжди можна вибрати галілеєву систему відліку, яка рухається з такою ж швидкістю, з якою рухається джерело світла (у певний момент часу), то другий постулат тотожний твердженню, що швидкість світла у вакуумі однакова у всіх інерціальних системах відліку. Це свідчить про те, що швидкість поширення світла у вакуумі посідає особливе місце у природі. На відміну від усіх інших швидкостей матеріальних об'єктів, які змінюють свою величину за переходу від однієї системи відліку до іншої, *швидкість світла у вакуумі є інваріантною величиною*: $c = inv$.

Наявність такої швидкості у природі суттєво змінює уявлення про простір і час, а саме: простір і час, як відзначалося, утворюють єдиний чотиривимірний просторово-часовий континуум так, що за переходу від однієї інерціальної системи відліку до другої зберігається незмінною (інваріантною) величина просторово-часового інтервалу Δs між подіями: $\Delta s = inv$. Величина Δs визначається за виразом $\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2}$, або $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2$, де Δr – просторовий інтервал, Δt – часовий інтервал.

Повернемося знову до двох інерціальних систем відліку *K* і *K′*, які рухаються рівномірно і прямолінійно з швидкістю *v* одна відносно одної, і нехай у деякий момент часу джерело, яке нерухомо розташоване в точці *N* (рис. 2) системи *K*, випромінює світловий спалах. Через проміжок часу *t* цей спалах у системі *K* одночасно досягне всіх точок, що лежать на поверхні сфери *C* з центром у точці *N* і радіусом $r = ct$.

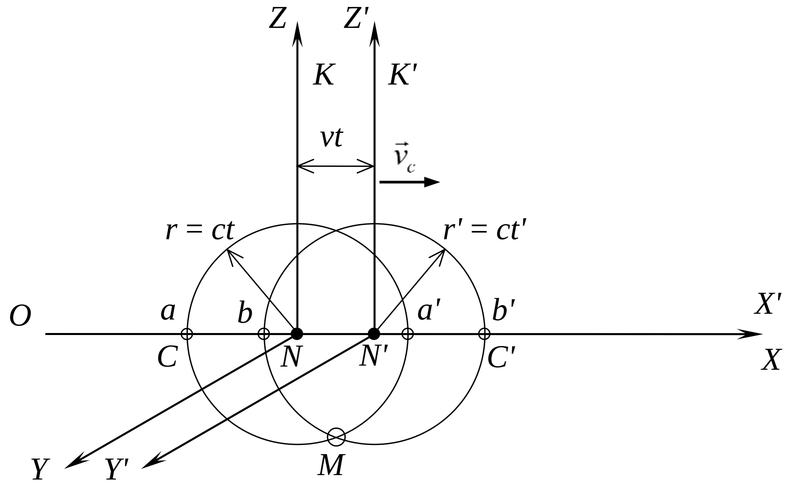

Рис. 2

У системі *K′* швидкість світла, згідно з другим постулатом, не залежить від руху джерела по відношенню до цієї системи. Оскільки в системі *K′* спалах поширюється від точки *N′* (у момент часу $t = 0$ положення точок *N* і *N′* співпадали), то згідно з першим постулатом Ейнштейна, світло в цій системі відліку досягне одночасно всіх точок сфери *C′* (відмінної від сфери *C*) з центром у точці *N′* і радіусом $r' = ct'$.

За цього, хвильовий фронт (поверхня однакової фази) повинен зберігати форму сферичної поверхні не лише в системі відліку, відносно якої джерело світла нерухоме, а й бути сферичним, коли він спостерігається у системі відліку, яка перебуває в стані рівномірного і прямолінійного руху відносно джерела (інакше за зміною форми хвильового фронту можна було б виявити, що джерело рухається). Тобто для підтвердження *істинності* сформульованого вище постулату, що швидкість світла не залежить від руху джерела, необхідно, щоб за формою хвильового фронту не можна було довести, чи знаходиться джерело в стані рівномірного і прямолінійного руху, чи ні. Це у свою чергу зводиться до задачі знаходження такої форми перетворень координат і часу, де б величина швидкості світла була незалежною від руху джерела або приймача.

Отже, спостерігач у системі K через час t буде констатувати, що світловий сигнал пошириться в усіх напрямках на відстань r і створить фронт сферичної світлової хвилі

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \text{ або } x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0. \quad (5)$$

Цей світловий сигнал можуть виявити фотоелементи a і b та прилад M (рис. 2).

Спостерігач у системі K', який перебуває, наприклад, у точці N', теж буде констатувати, що світловий сигнал з початку координат поширюється з швидкістю c (згідно з другим постулатом) і за час t' (відповідний t) досягне поверхні сфери

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2,\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2, \text{ або } x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0. \quad (6)$$

Цей спостерігач вважатиме себе нерухомим у центрі (у точці N') цієї сферичної хвилі.

Оскільки координати (x, y, z, t) і (x', y', z', t') є координатами одного і того ж явища, наприклад, координатами приладу M, який зафіксував сигнал у системі K через час t, то вирази (5) і (6) згідно з першим постулатом повинні тотожно перетворюватися один в одного за переходу від системи K до системи K', тобто:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2. \quad (7)$$

Якщо ж у (6) підставити вирази перетворень Галілея $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$, то отримається вираз $x^2 - 2xvt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$, що явно не узгоджується з виразом (5).

У теорії відносності, де заперечуються поняття абсолютного простору й абсолютного часу, вираз (7) визначає форму просторово-часового інваріанту за переходу від однієї системи відліку до іншої. Як видно, цей інваріант не задовольняється галілеєвими формулами перетворення координат, де час вважається однаковим для всіх систем відліку. Це означає, що в теорії відносності повинні існувати інші формули перетворень координат і часу за переходу від однієї системи відліку до іншої [5, с. 366–367].

Для встановлення цих формул будемо спиратися на наше припущення, що системи K і K' одна відносно одної перебувають у русі з швидкістю v. З цього припущення випливає, що точка N' переміщується в системі K з швидкістю v, а точка N в системі K' – з швидкістю ($-v$). Тоді координата $x' = 0$ за $x = vt$, а $x = 0$ за $x' = -vt'$. З цих умов складаються два рівняння для координат x і x':

$$x' = k\,(x - vt); \quad (8)$$

$$x = k'\,(x' + vt'), \quad (9)$$

де k і k' – коефіцієнти, які залежать лише від модуля швидкості v, але не від її напрямку, і поки що непередбачувано, що вони можуть бути однаковими, як це апріорі покладалося в [2, с. 176–195].

Далі задача зводиться до встановлення формул для визначення коефіцієнтів k і

k'. Різні автори по різному розв’язують цю задачу, про що йшлося в огляді літературних джерел. За цього, у більшості підручників, у яких викладаються основи СТВ [5; 8; 10], після укладання вихідних рівнянь, наводиться такий, приблизно, текст: «після нескладних підстановок і математичних перетворень одержуємо …», і подаються кінцеві формули для шуканих коефіцієнтів k і k', які студенти мають сприйняти «на віру».

Досвід нашого викладання означеної теорії свідчить, що за цього втрачається логіка викладу матеріалу, а з нею і повнота розуміння та рівень засвоєння студентами основ СТВ, адже не таким уже й «тривіальним» є встановлення виразу цих коефіцієнтів.

Тому ми практикуємо методику детального виведення формул для обчислення коефіцієнтів k і k' із залученням студентів у такій послідовності.

1. Розглядаємо рух обох систем відліку в додатному напрямі осей OX і OX', які співпадають, а осі $OY = OY'$ і $OZ = OZ'$ залишаються паралельними самі собі (рис. 1). Тоді інваріант (7) набуває виду:

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2. \tag{10}$$

Підставивши значення x' з (8) у (9) визначаємо час t': $x = k'[k(x - vt) + vt']$; розкриваємо квадратні дужки: $x = k'kx - k'kvt + k'vt'$, або $x - k'kx + k'kvt = k'vt'$. Ділимо всі члени цієї рівності на $k'k$: $\frac{x}{k'k} - \frac{k'kx}{k'k} + \frac{k'kvt}{k'k} = \frac{k'vt'}{k'k}$ і отримуємо $\frac{x}{k'k} - x + vt = \frac{v}{k}t'$, або $\frac{\left[x\left(\frac{1}{k'k} - 1\right) + vt\right]k}{v} = t'$. Ділимо чисельник і знаменник цього виразу на v і отримуємо:

$$t' = \frac{\left[\frac{x}{v}\left(\frac{1}{k'k} - 1\right) + \frac{v}{v}t\right]k}{\frac{v}{v}}, \text{ або } t' = k\left[\frac{x}{v}\left(\frac{1}{k'k} - 1\right) + t\right] = k\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{k'k}\right)\right].$$

Отже,

$$t' = k\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{k'k}\right)\right]. \tag{11}$$

2. Далі, щоб отримати вирази коефіцієнтів k і k', підставляємо значення x' з (8) і t' з (11) у праву частину (10):

$$x^2 - c^2t^2 = [k(x - vt)]^2 - c^2\left\{k\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{kk'}\right)\right]\right\}^2. \tag{12}$$

Розкриваємо квадрати виразів у правій частині рівності (12):
$x'^2 = [k(x - vt)]^2 = k^2(x - vt)^2 = k^2(x^2 - 2xtv + v^2t^2) = k^2x^2 - 2k^2xtv + t^2k^2v^2$, або

$$x'^2 = x^2k^2 + t^2k^2v^2 - 2xtk^2v. \tag{13}$$

Розкриваємо вираз $c^2t'^2 = c^2\left\{k\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{kk'}\right)\right]\right\}^2$; спочатку підносимо до квадрату вираз у фігурних дужках (t'^2): $t'^2 = k^2\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{kk'}\right)\right]^2$; потім підносимо до квадрату вираз у квадратних дужках:

$$\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{kk'}\right)\right]^2 = t^2 - \frac{2xt}{v}\left(1 - \frac{1}{kk'}\right) + \frac{x^2}{v^2}\left(1 - \frac{1}{kk'}\right)^2 = t^2 - \frac{2xt}{v} + \frac{2xt}{vkk'} + \frac{x^2}{v^2}\left(1 - \frac{2}{kk'} + \frac{1}{k^2k'^2}\right) =$$

$$= t^2 - \frac{2}{v}xt + \frac{2}{vkk'}xt + x^2\frac{1}{v^2} - x^2\frac{2}{v^2kk'} + x^2\frac{1}{v^2k^2k'^2}.$$

Домножуємо кожен член отриманого виразу на c^2k^2:

$$c^2t'^2 = t^2c^2k^2 - xt\frac{2c^2k^2}{v} + xt\frac{2c^2k^2}{vkk'} + x^2\frac{c^2k^2}{v^2} - x^2\frac{2c^2k^2}{v^2kk'} + x^2\frac{c^2k^2}{v^2k^2k'^2}. \quad (14)$$

3. Підставляємо отримані значення x'^2 з (13) і $c^2t'^2$ з (14) у праву частину (10):

$$x^2 - c^2t^2 =$$

$$= x^2k^2 + t^2k^2v^2 - 2xtk^2v - t^2c^2k^2 + xt\frac{2c^2k^2}{v} - xt\frac{2c^2k^2}{vkk'} - x^2\frac{c^2k^2}{v^2} + x^2\frac{2c^2k^2}{v^2kk'} - x^2\frac{c^2k^2}{v^2k^2k'^2}. \quad (15)$$

Групуємо члени рівності (15), які стоять справа при x^2, t^2, xt:

$$x^2 - c^2t^2 =$$

$$= x^2\left(k^2 - \frac{c^2k^2}{v^2} + \frac{2c^2k^2}{v^2kk'} - \frac{c^2k^2}{v^2k^2k'^2}\right) + t^2\left(k^2v^2 - c^2k^2\right) - xt\left(2k^2v + \frac{2c^2k^2}{vkk'} - \frac{2c^2k^2}{v}\right). \quad (16)$$

Ділимо члени рівності (16), які стоять у дужках, на $\frac{c^2k^2}{v^2}$:

$$x^2 - c^2t^2 =$$

$$= x^2\left(\frac{v^2}{c^2} - 1 + \frac{2}{kk'} - \frac{1}{k^2k'^2}\right) + t^2\left(\frac{v^4}{c^2} - v^2\right) - xt\left(\frac{2v^3}{c^2} + \frac{2v}{kk'} - 2v\right). \quad (17)$$

4. Прирівнюємо коефіцієнти при x^2, t^2, xt зліва і справа у рівності (17); зліва: коефіцієнт при x^2 дорівнює 1; при t^2 – дорівнює ($-c^2$); при xt – дорівнює 0. Отримуємо систему трьох рівнянь:

$$-\frac{1}{k^2k'^2} + \frac{2}{kk'} + \frac{v^2}{c^2} - 1 = 1; \quad (18)$$

$$\frac{v^4}{c^2} - v^2 = c^2; \quad (19)$$

$$\frac{2v^3}{c^2} + \frac{2v}{kk'} - 2v = 0. \quad (20)$$

У рівнянні (18) міняємо знаки; члени рівняння (19) ділимо на c^2; члени рівняння (20) ділимо на $2v$.

$$\frac{1}{k^2k'^2} - \frac{2}{kk'} + 1 - \frac{v^2}{c^2} = -1; \quad (21)$$

$$\frac{v^4}{c^4} - \frac{v^2}{c^2} = 1; \quad (22)$$

$$\frac{1}{kk'}+\frac{v^2}{c^2}-1=0. \qquad (23)$$

Переписуємо ці рівняння, виділивши в них подібні елементи:

$$\frac{1}{k^2k'^2}-\frac{2}{kk'}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=-1; \qquad (24)$$

$$\frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=-1; \qquad (25)$$

$$\frac{1}{kk'}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right). \qquad (26)$$

Підставляємо (26) у (24) й отримуємо:

$$\frac{1}{k^2k'^2}-\frac{1}{kk'}=-1; \qquad (27)$$

$$\frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=-1. \qquad (28)$$

Прирівнюємо ліві частини рівнянь (27) і (28): $\frac{1}{k^2k'^2}-\frac{1}{kk'}=\frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$. Отримуємо квадратне рівняння:

$$\frac{1}{k^2k'^2}-\frac{1}{kk'}-\frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=0. \qquad (29)$$

Очевидно, що рівняння (29) матиме розв’язок за умови $k=k'$, що відповідає рівності модулів швидкостей матеріальної точки в системах K і K'. За цієї умови воно набуває виду: $\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}-\frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=0$, а рівняння (26) відповідно:

$$\frac{1}{k^2}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right), \text{ звідки } k=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (30)$$

5. Підставляючи значення k у рівняння (8), (9), (11), отримуємо формули перетворення координат і часу за переходу від однієї системи відліку до іншої в теорії відносності, які суттєво відрізняються від перетворень Галілея, а саме:

за переходу від системи K до K'

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad y'=y; \quad z'=z; \quad t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \qquad (31)$$

за переходу від системи K' до K

ISSN 2307-4906

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad y=y';\quad z=z';\quad t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (32)$$

(Фрагменти доведення 1 – 5 виконуються окремими студентами біля дошки).

У теорії відносності отримані вирази називаються перетвореннями координат і часу Лоренца. З історії фізики відомо, що вперше ці перетворення були опубліковані у 1900 році у книзі англійського фізика Дж. Лармора «Aether and Matter» («Ефір і матерія») у зв’язку з поясненням від’ємного результату досліду Майкельсона – Морлі. У 1904 році незалежно від Лармора такі ж формули отримав нідерландський учений Х. А. Лоренц, який, проте, не надав їм належного фізичного пояснення. У теорії відносності А. Ейнштейна ці перетворення набули фундаментального тлумачення у зв’язку зі встановленням відносності понять простору і часу і єдиного просторово-часового континууму.

Аналізуючи формули перетворень Лоренца, звертаємо увагу на те, що за $v > c$ вони втрачають зміст, адже у знаменнику під квадратним коренем отримується від’ємне число. Саме цей факт свідчить, що в теорії відносності швидкість світла у вакуумі є граничною швидкістю для всіх систем відліку. За $v << c$ формули Лоренца переходять у формули перетворень Галілея:

$$x'=x-vt';\quad y'=y;\quad z'=z;\quad t'=t. \qquad (33)$$

Отже, перетворення Лоренца, які базуються на принципі відносності, є більш загальним відображенням процесів природи, перетворення ж Галілея – Ньютона і закономірності класичної фізики, які пов’язуються з ними, справедливі лише для малих швидкостей тіл порівняно з швидкістю світла.

З перетворень Лоренца випливає й ще кілька важливих наслідків, з’ясування яких знову пропонується студентам (фрагменти 6–8).

У перетвореннях координат Галілея – Ньютона відстань між двома точками або ж довжина, наприклад, стержня за переходу від однієї системи до іншої є інваріантом. З погляду ж перетворень Лоренца таке твердження позбавлене змісту.

6. *Відносність довжини*. Нехай у системі *K* вздовж додатного напряму осі *OX* лежить стержень довжиною l_0. Виражаючи довжину стержня через координати його кінців, дістанемо $x_2-x_1=l_0$. Визначимо довжину цього стержня в системі *K′*, яка рухається відносно системи *K* з швидкістю *v* в напрямі осі *OX*. Для цього треба знайти різницю координат його кінців $x_2'-x_1'=l$ в один і той же момент часу за годинником системи *K′*. Використовуючи формули перетворень Лоренца, виражаємо координати кінців стержня, а саме:

$$x_1=\frac{x_1'+vt_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\; x_2=\frac{x_2'+vt_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Знаходимо їх різницю за умови, що $t_1'=t_2'$, і отримуємо:

$$x_2-x_1=\frac{x_2'-x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\; l_0=\frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ \text{або}\ l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (34)$$

З виразу (34) видно, що в теорії відносності *довжина стержня залежить від швидкості системи відліку* – вона тим менша, чим більша швидкість руху системи.

Оскільки за цього, якщо хоча б один розмір тіла зазнає скорочення, то й *об'єм тіла* під час руху теж зазнаватиме зменшення:

$$V = V_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,. \qquad (35)$$

Скорочення лінійних розмірів тіла у напрямку руху позначається й на *зміні форми тіла*. Так, наприклад, тіло сферичної форми, яке перебуває в стані спокою в системі *K*, з точки зору спостерігача в рухомій системі *K′* буде здаватися еліпсоїдом обертання. Тут доречно звернути увагу студентів, що висновок про скорочення лінійних розмірів тіл у напрямі їх руху не означає наявності якихось фізичних змін у них, наприклад, деформації стиску у стержні тощо. Йдеться про процес і значення вимірювання координат кінців стержня у різних (рухомій і нерухомій) системах відліку.

7. *Відносність одночасності подій*. З перетворень Лоренца випливає, що дві події, які відбуваються в системі *K* одночасно, але в різних точках простору, будуть неодночасними в системі *K′*, яка рухається відносно системи *K* з швидкістю *v*. Дійсно, якщо $t_1 = t_2$, то

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,;\; t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,; \qquad (36)$$

звідси видно, що за $x_1 \neq x_2$, t_1' не дорівнюватиме t_2'. Отже, *одночасність є поняття відносне*.

Довести це твердження можна й «експериментально», розташувавши відповідним чином (рис. 2) у системах *K* і *K′* певні прилади (наприклад, фотоелементи). Якщо розташувати фотоелементи *a′* і *b′* нерухомі в системі *K′* і фотоелементи *a* і *b* нерухомі в системі *K*, то в системі *K* фотоелементи *a* і *b* одночасно зареєструють прихід світлових сигналів за годинником цієї системи; фотоелемент же *a′* зареєструє прихід світлового сигналу раніше, ніж фотоелементи *a* і *b* (оскільки, *a′* знаходиться ближче до джерела *N*), а фотоелемент *b′* – пізніше, ніж *a* і *b*. І навпаки, за годинником системи *K′* одночасно зафіксують сигнали фотоелементи *a′* і *b′*; фотоелемент же *b* зафіксує прихід сигналів раніше, ніж *a′* і *b′*, а фотоелемент *a* – пізніше, ніж *a′* і *b′*.

Таким чином, події, які одночасні в системі відліку *K* (досягнення світловим спалахом точок сфери *C*), є неодночасними в системі *K′* і навпаки.

Отже, у різних інерціальних системах відліку поняття одночасності є різним, тож ньютонівська концепція «абсолютного часу» виявляється такою ж необґрунтованою, як і концепція «абсолютного простору».

8. *Поняття відносності проміжків часу*. Нехай у системі *K′*, яка переміщується відносно системи *K* зі швидкістю *v*, знаходиться годинник. Уявимо, що в цьому місці, де знаходиться цей годинник, відбулися дві події, наприклад, початок і закінчення дзвону «будильника», і нехай проміжок часу між цими подіями у системі *K′* дорівнює $\Delta T_0 = t_2' - t_1'$.

Застосовуючи формули перетворень Лоренца, знайдемо проміжок часу між цими подіями у системі *K*:

$$\Delta T = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

зауваживши, що події відбулися в одній і тій же точці, тобто ($x_1' = x_2'$), одержуємо:

$$\Delta T = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ або } \Delta T = \frac{\Delta T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (37)$$

де ΔT_0 – проміжок часу в тій системі відліку, в якій обидві події відбулися в одній і тій же точці простору; його називають *власним часом*.

З виразу (37) випливає, що проміжок часу між двома подіями в теорії відносності залежить від системи відліку. Проміжок часу, який виміряний у системі *K*, більший за проміжок часу, що його зареєструє годинник, який рухається разом з системою *K′* і перебуває в тій же точці, де відбулися події. *У рухомій системі K′ час минає повільніше, ніж у нерухомій K.*

Запропонований варіант методики вивчення основ СТВ ґрунтується на логічній послідовності переходу від менш складного (механіки Галілея – Ньютона) до більш складного – спеціальної теорії відносності Ейнштейна. За такого підходу забезпечується безпосереднє залучення студентів до вивчення матеріалу і завдяки цьому більш свідомому формуванню у них надпредметної компетентності, адже використовуються міжпредметні зв’язки методології науки (фундаментальний принцип відповідності), геометрії, алгебри, кінематики, динаміки, оптики тощо.

Подальший розвиток досліджуваної теми може стосуватися розробки (удосконалення) методики вивчення основ загальної теорії відносності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бойко В. В., Сукач Г. О., Кідалов В. В. Фізика: підручник для вищих навч. закладів. Донецьк: Юго-Восток, 2012. 488 с.
2. Воловик П. М. Фізика: для університетів (Повний курс в одному томі). Київ; Ірпінь: Перун, 2005. 864 с.
3. Дудик М. В., Діхятренко Ю.В. Класична механіка (курс лекцій): навч. посіб. для студентів вищих навч. закл. фізико-математичних спеціальностей. Умань: ПП «Жовтий», 2015. 160 с.
4. Дущенко В. П., Кучерук І. М. Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. Київ: Вища школа, 1987. 431 с.
5. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Курс физики. Т. І. Механика. Москва: Наука, 1971. 479 с.
6. Краснобокий Ю. М. Еволюція поняття відносності у фізиці та елементи методики щодо його вивчення. *Підготовка майбутніх учителів фізики, хімії, біології та природничих наук у контексті вимог Нової української школи:* матеріали ІІІ Міжнар. наук.-практ. конф. (Тернопіль, 20 травня 2021 р.). Тернопіль, 2021. С. 130–136.
7. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Київ: Техніка, 1999. Т. 1. 532 с.
8. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Оптика: учеб. пособие. Москва: Наука, 1985. Т. IV. 752 с.
9. Фелінський Г. С. Загальна фізика: підручник. Київ: Каравела, 2018. 656 с.
10. Яворський Б. М., Детлаф А. А. Курс фізики, Київ: Вища школа, 1973. Т. ІІІ. 499 с.

ISSN 2307-4906

REFERENCES

1. Boiko, V. V., Sukach, H. O., Kidalov, V. V. (2012). Fizyka: pidruchnyk dlia vyshchykh navchalnykh zakladiv. Donetsk: Yuho-Vostok [in Ukrainian].
2. Volovyk, P. M. (2005). Fizyka: Dlia universytetiv (Povnyi kurs v odnomu tomi). Kyiv; Irpin: Perun [in Ukrainian].
3. Dudyk, M. V., Dikhiatrenko, Yu. V. (2015). Klasychna mekhanika (kurs lektsii). Uman: PP “Zhovtyi” [in Ukrainian].
4. Dushchenko, V. P., Kucheruk, I. M. (1987). Zahalna fizyka. Fizychni osnovy mekhaniky. Molekuliarna fizyka i termodynamika. Kyiv: Vyshcha shkola [in Ukrainian].
5. Kittel', Ch., Najt, U., Ruderman, M. (1971). Kurs fiziki. T. I. Mehanika. Moskva: Nauka [in Russian].
6. Krasnobokyi, Yu. M. (2021). Evoliutsiia poniattia vidnosnosti u fizytsi ta elementy metodyky shchodo yoho vyvchennia. *Pidhotovka maibutnikh uchyteliv fizyky, khimii, biolohii ta pryrodnychykh nauk u konteksti vymoh Novoi ukrainskoi shkoly*: proceedings of the III International Scientific and Practical Conference. Ternopil, *130–136* [in Ukrainian].
7. Kucheruk, I. M., Horbachuk, I. T., Lutsyk, P. P. (1999). Zahalnyi kurs fizyky. Kyiv: Tekhnika, Vol. 1 [in Ukrainian].
8. Sivuhin, D. V. (1985). Obshhij kurs fiziki. Optika. Moskva: Nauka, Vol. IV [in Russian].
9. Felinskyi, H. S. (2018). Zahalna fizyka. Kyiv: Karavela [in Ukrainian].
10. Yavorskyi, B. M., Detlaf, A. A. (1973). Kurs fizyky. Kyiv: Vyshcha shkola, Vol. III [in Ukrainian].