В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ

ПЕДАГОГИКА МАТЕМАТИКИ

ИСТОРИЧЕСКІЕ И МЕТОДИЧЕСКІЕ ЭТЮДЫ

ОБ
1910

В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ.

Педагогика математики.

ИСТОРИЧЕСКІЕ И МЕТОДИЧЕСКІЕ ЭТЮДЫ.

Томъ первый.

Съ 76 рисунками и чертежами (часть цвѣтныхъ).

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО О. БОГДАНОВОЙ.

Типографія Акц. О-ва Тип. Дѣла въ СПб. (Герольдъ)
Изм. п., 7 рота, 26.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Настоящая книга и по характеру, и по содержанію неразрывно связана съ тѣмъ общественнымъ, научнымъ и педагогическимъ фономъ, на которомъ развернулись событія послѣдняго десятилѣтія. Эпоха Толстого и Делянова, смѣнившая весну 60-хъ годовъ, въ свою очередь уступила мѣсто эпохѣ 1905 г., выдвинувшей устами передовой демократіи [1]) необходимость коренной ломки старой школы. На помощь этимъ требованіямъ пришли авторитетные голоса психологовъ и педагоговъ; новыя теченія въ области воспитанія, мірное завоеваніе культурныхъ странъ экспериментальной психологіей и экспериментальной педагогикой, — все это выдвинуло еще и новый вопросъ: „какъ дѣлать?“ Старая истина „школьный учитель побѣдилъ“ расширилась и углубилась: мало учить, нужно учить, какъ слѣдуетъ. Перемѣстился и центръ тяжести обученія. Экономія мышленія и практическія знанія — вотъ двѣ изъ основъ современныхъ реформъ! И волна общественнаго подъема, своимъ лозунгомъ „къ жизни и для жизни!“ заставила присоединиться къ реформаторскому движенію и представителей науки. Международная Математическая Комиссія 1908 г., избранная IV-мъ Между-

---

[1]) См. *В. Чарнолусскій*, Основные вопросы организаціи школы въ Россіи, 1909, и *С. Знаменскій*, Средняя школа за послѣдніе годы. Ученическія волненія 1905—1906 г. и ихъ значеніе, 1909.

народнымъ Математическимъ Конгресомъ (Римъ, апрѣль 1908 г.), своею дѣятельностью показываетъ, что математики всѣхъ странъ сознали, наконецъ, уродливость существующаго школьнаго образованія и принялись за рѣшительныя реформы.

Съѣзды послѣднихъ лѣтъ показали, насколько укрѣпилось въ массѣ учительства недовольство настоящимъ и сознаніе необходимости реформы. Но этому движенію не достаетъ литературы, недостаетъ знамени. Цѣль настоящей книги — заполнить эти пробѣлы, познакомить всѣхъ интересующихся вопросами обученія съ завоеваніями въ области педагогики вообще и педагогики математики — въ частности; дать не только указанія, но и основанія. Трудности, связанныя съ выполненіемъ такой задачи, удерживали насъ, не смотря на то, что матеріалъ былъ въ общемъ собранъ. Однако тотъ сочувственный пріемъ, какой встрѣтили наши доклады и лекціи на II-мъ Всероссійскомъ Съѣздѣ по Педагогической Психологіи, на I-мъ Всероссійскомъ Съѣздѣ Учителей Городскихъ Училищъ и на С.-Петербургскихъ лѣтнихъ учительскихъ Курсахъ, побудилъ насъ издать настоящую книгу.

Заглавіе книги можетъ вызвать вопросы. Но мы хотѣли дать не методику математики, не сборникъ готовыхъ рецептовъ, опирающійся на личный опытъ того или иного практика-учителя; узость такихъ рецептурныхъ сборниковъ очевидна; она-то, наравнѣ съ репетиторствомъ и материнскими уроками, является могущественной поддержкой умственной неразвитости европейскихъ дѣтей. Сейчасъ работа учителя-воспитателя ставится на другую плоскость: воспитатель является не просто исполнительнымъ органомъ для государственныхъ и общественныхъ предписаній, а духовнымъ творцомъ своей и общественной дѣятельности. Сооб-

разно съ этимъ изъ педагогики должны быть изгнаны дилетантизмъ и грубый эмпиризмъ, „практическій опытъ“ и субъективныя мнѣнія. Исторія математики въ связи съ исторіей культуры и школъ, исторія обученія математикѣ, философское обоснованіе научныхъ проблемъ и гносеологія математическихъ понятій, сравнительная методологія и научныя завоеванія, наконецъ, демократизація науки,—вотъ что должно составить основу педагогики математики.

Самъ терминъ „педагогика математики“ прививается за послѣдніе годы повсюду. Въ предисловіи Шоттена ко 2-му изданію Рейдта „Anleitung zum mathematischen Unterricht“ сказано, что эта книга явилась „die erste spezielle Pädagogik der Mathematik“. Въ Соединенныхъ Штатахъ довольно давно уже существуютъ кафедры „Pedagogy of mathematics“, и т. п.

Новое движеніе въ области психологіи и педагогики нашло убѣжденныхъ пропагандистовъ и въ Россіи. Общія проблемы разрабатываетъ съ успѣхомъ проф. А. П. Нечаевъ и его школа; въ частности съ лабораторной методой въ математикѣ ознакомили публику В. В. Лермантовъ и Н. А. Томилинъ, давно уже словомъ, письмомъ и дѣломъ работающіе на этой нивѣ.

Въ заключеніе мы считаемъ пріятнымъ долгомъ принести благодарность директору Педагогическаго Музея, З. А. Макшееву, такъ широко предоставившему намъ возможность пользоваться библіотекой и коллекціями Музея, а также завѣдывающимъ русскимъ и иностраннымъ отдѣленіями СПБ. Публичной библіотеки, В. И. Саитову и Р. Г. Кизерицкому, за ту неизмѣнную отзывчивость, съ какой они помогали намъ въ нелегкой работѣ въ отдѣленіяхъ въ теченіе двухъ лѣтъ.

В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ.

Мартъ, 1910 г. СПБ., Гончарная, 11.

ЧАСТЬ I.

ГЛАВА I.

Эволюція педагогики математики.

Греція, Римъ и Средніе вѣка (VI ст. до Р. Х.—XV ст. п. Р. Х.).

Задачи педагогики математики.

1. „Какъ [1]) въ старинное время побѣдители міра желали въ день отдыха среди своихъ походовъ установить границы своихъ владѣній, затѣмъ чтобы здѣсь привлечь еще свободный народъ къ уплатѣ себѣ дани, тамъ — въ лишенной воды пустынѣ — найти неодолимую для своихъ кавалеристовъ преграду и такимъ образомъ узнать настоящую грань своей мощи, — такъ и побѣдившему въ наши дни міръ естествознанію ничто не можетъ быть пристойнѣе, какъ—отдыхая отъ работы по случаю празднествъ — попытаться ясно опредѣлить границы своихъ владѣній".

Эти вступительныя слова знаменитой рѣчи Дю-Буа-Реймона какъ нельзя болѣе подходятъ къ современному положенію математики какъ науки и какъ предмета обученія. Періодъ напряженной работы геніевъ миновалъ; крупныя открытія стали достояніемъ уже многихъ; богатство накопившагося матеріала и отсутствіе законченной классификаціи его затрудняютъ знакомство съ этими сокровищами знанія. Наступилъ моментъ, когда общество вправѣ потребовать и свою долю въ умственномъ пиру, вправѣ сказать: дайте намъ то, что такъ долго хранилось подъ спудомъ.

---

[1]) *Du Bois-Reymond*, Ueber die Grenzen des Naturerkennens, 1872.

На зарѣ XX столѣтія, какъ это отчасти уже бывало не разъ и раньше, появилась громадной важности задача: классифицировать собранный математическій матеріалъ, отдѣлить общедоступные элементы отъ предметовъ роскоши, найти средства и пути для сообщенія этихъ элементовъ наибольшему числу лицъ при наименьшей затратѣ индивидуальныхъ усилій ума и воли.

Это — задача современной педагогики математики.

2. Исторія педагогики показываетъ намъ, что школьныя реформы вообще сильно запаздывали по сравненію съ реформами окружающей среды; но гораздо больше запаздываній наблюдается въ отношеніи реформъ метóдъ [1]) обученія. Въ настоящей главѣ мы покажемъ, какъ эволюція преподаванія зависѣла отъ условій окружающей среды и насколько медленно эволюціонировали пріемы обученія, начиная съ первой греческой школы.

Іонійцы и Пиѳагорейцы.

3. Въ концѣ VII и началѣ VI ст. до Р. Х. началась новая эпоха въ жизни человѣчества, эпоха общественныхъ школъ. Основатель Іонійской школы, Ѳалесъ Милетскій (640—548), впервые провозгласилъ принципъ единой „общедоступной“ школы; созывая своихъ учениковъ со всѣхъ сторонъ тогдашняго культурнаго міра, онъ говорилъ имъ: „я васъ буду учить всему тому, чтó я самъ знаю“. Правда, это обученіе было чисто словеснымъ, и Ѳалесъ въ подтвержденіе своихъ доводовъ часто лишь говорилъ: „Это такъ“. Отсюда пошла знаменитая *догматическая метóда* обученія: фраза „*αὐτός ἔφα*“—*учитель такъ сказалъ*—сдѣлалась единственной основой доказательства. Догматическое обученіе, породившее авторитетъ, этотъ „великій идолъ человѣчества“ (Ф. Бэконъ), еще до сихъ поръ сохранилось въ нѣкоторыхъ предметахъ обученія; одно это обстоятельство показываетъ, какъ медленно движется эволюція воспитанія...

4. Съ легкой руки Ѳалеса школьное развитіе пошло дальше; Пиѳагоръ (569—500) открываетъ цѣлый рядъ своихъ школъ, главнымъ образомъ въ Италіи. Его

---

[1]) Различіе понятій „мéтодъ“ и „метóда“ будетъ выяснено дальше въ главѣ V.

первые публичные уроки въ гимназіяхъ и храмахъ, проводимые по идеѣ Ѳалеса, т. е. открыто и общедоступно, впослѣдствіи смѣнились другими, обособленными. Старый принципъ Халдеи и Египта—дѣленіе учениковъ на посвященныхъ и непосвященныхъ, внутреннихъ (эзотериковъ) и внѣшнихъ (эксотериковъ), опять выбился наружу. Появилась новая каста—„аристократія ума“, нашедшая себѣ яркихъ представителей въ лицѣ Пиѳагора, Платона и Аристотеля. Тяжелый режимъ предназначался ученикамъ. „Когда [1]) являлся новый ученикъ, Пиѳагоръ осматривалъ его и зачислялъ въ отдѣлъ *эксотериковъ* или *внѣшнихъ учениковъ*. Затѣмъ онъ испытывалъ его скромность, послушаніе, терпѣніе. На новичка налагалось молчаніе въ теченіе двухъ, трехъ, даже пяти лѣтъ. Во все это время онъ долженъ былъ только слушать, не дѣлая никогда вопросовъ и не спрашивая ни малѣйшаго объясненія... Его поведеніе въ теченіе этого долгаго срока рѣшало, будетъ ли онъ исключенъ или допущенъ, наконецъ, въ число *эзотериковъ*, т. е. *внутреннихъ учениковъ*“.

„Ковромъ или перегородкою школа была раздѣлена на двѣ части, и учитель былъ скрытъ отъ глазъ нѣмой половины аудиторіи. Эта половина только слышала голосъ Пиѳагора, но не видѣла его. Для нея ученіе было облечено въ эмблематическія и загадочныя формы; другая половина, имѣвшая право спрашивать, была посвящаема въ объясненіе и подробное изложеніе ученія. Къ внутренней аудиторіи принадлежало также нѣсколько женщинъ“.

Школы въ Греціи до реформы V вѣка. 5. Наряду съ этими школами существовали и начальныя училища двухъ типовъ: *дидаскалейонъ*, для духовнаго воспитанія, и *палестра* — для физическаго. Открытыя въ началѣ VI ст., эти училища отличались убожествомъ учебной программы; центръ тяжести лежалъ въ гимнастикѣ и музыкѣ (правда, въ послѣднюю входили чтеніе и письмо). Отличительный характеръ школы—ея стремленіе къ художественному воспитанію юношества, съ одной стороны, къ нераздѣльности ин-

---

[1]) *Фигье*, Свѣтила науки.

дивидуальной и соціальной нравственности—съ другой. Нѣкоторое различіе существовало между Спартой и Аѳинами: болѣе физическое воспитаніе въ первомъ государствѣ противопоставлялось болѣе эстетическому, литературному и музыкальному—во второмъ. Но общая цѣль—одна и та же. Это—стремленіе къ „καλοκἀγαθία", къ соединенію прекрасной физической организаціи съ моральной доблестью. Школа преслѣдовала главную цѣль—подготовить патріотовъ-гражданъ. „Въ [1]) эту эпоху школа не была отдѣлена отъ жизни, складъ жизни былъ немногосложенъ, содержаніе предметовъ, изучаемыхъ въ школѣ, было настолько тѣсно связано съ соціальными интересами, что мальчикъ, посѣщая съ 7 лѣтъ школу, почерпалъ изъ нея въ гораздо большей степени для жизни, чѣмъ, напримѣръ, въ наше время. Въ сущности говоря, онъ уже въ школѣ велъ въ миніатюрѣ ту политическую жизнь, которая ожидала его внѣ стѣнъ училища; музыкальная школа, гдѣ онъ изучалъ поэмы, воспѣвавшія національныхъ героевъ, служила для него подготовкой на „ἀγορά" (*агора*—мѣсто народныхъ собраній въ Греціи, дословно *площадь*), а палестра замѣняла для него гимназію—мѣсто атлетическихъ состязаній взрослыхъ".

Демократизація Греціи.

6. Таково было положеніе школъ въ теченіе VI столѣтія. Но къ концу его условія жизни измѣнились. Осложненіе соціальныхъ формъ быта, явившееся слѣдствіемъ экономическаго роста страны, начало новаго строя, столь ярко иллюстрируемаго создавшейся въ то время поговоркой „*деньги дѣлаютъ человѣка*" (χρήματ' ἀνήρ), это—внутренній факторъ переворота. Внѣшнимъ его проявленіемъ сдѣлалась борьба между мелкой торгово-промышленной демократіей и крупными рабовладѣльцами изъ-за гражданскаго равноправія. Наступила революція. Аристократія ума, въ то время державшая въ своихъ рукахъ и политическую власть, подвергается гоненіямъ. Великая волна демократическаго движенія съ яркой анархистической окраской проносится по Греціи, Южной Италіи и Архипелагу.

---

[1]) *Лапшинъ*, Исторія педагогическихъ теорій.

Вездѣ рушится тиранія, вездѣ народъ заявляетъ о своихъ верховныхъ правахъ. Въ Аѳинахъ убійство Гиппарха (514) и изгнаніе Гиппія (510), въ Сибарисѣ изгнаніе Телиса (510), въ Кротонѣ изгнаніе Пиѳагора (501) и убійство его годъ спустя въ Метапонтѣ—все это происходитъ одновременно. Демократизація Греціи началась—и это сейчасъ же отразилось на образованіи.

Реформа школъ.

7. Періодъ освободительной войны (Греціи съ Персіей), закончившійся полной побѣдой демократическаго союза надъ абсолютизмомъ, является переходомъ къ реформѣ школы. За это время успѣло созрѣть въ народѣ убѣжденіе въ необходимости энциклопедическаго образованія; прежнее, исключительно эстетическое, являлось недостаточнымъ для гражданъ-правителей. Разсѣявшіеся по всей Греціи ученики Пиѳагора на время отказались отъ высокихъ задачъ, завѣщанныхъ имъ учителемъ, и принялись за разработку преподаванія ариѳметики и геометріи. Наука дѣлается достояніемъ многихъ, и въ первую голову рушатся религіозные и космогоническіе предразсудки грековъ. Софисты (Протагоръ, Продикъ, Горгій, Гиппій, Демокритъ и др.) разрабатываютъ логику и этику, кладутъ основу ученію о государствѣ, разбиваютъ старое воспитаніе и провозглашаютъ новыя педагогическія теоріи. Именно софистамъ Греція обязана школьной реформой. Въ половинѣ V-го столѣтія (около 460 г.) школьная программа видоизмѣняется; вводится философія, математика и географія; намѣчается основная часть программы—грамматика, риторика и діалектика (позднѣйшее trivium), затѣмъ высшая часть—ариѳметика, геометрія, астрономія и музыка (позднѣйшее quadrivium). Въ то же время мѣняются и методы преподаванія. Старое „учитель сказалъ“ замѣняется сократовскими бесѣдами, *эвристической методой обученія* (Сократъ называлъ ее „майевтикой“—повивальнымъ искусствомъ). На ряду съ этимъ появляется и книжная метода; издаются руководства по всѣмъ отраслямъ знанія, начиная съ математики и риторики и кончая кулинарнымъ искусствомъ. Библіотека становится необходимымъ достояніемъ всякаго образованнаго человѣка. Наконецъ, развивается книго-

продавческое дѣло, главнымъ образомъ, конечно, въ Аѳинахъ [1]).

8. Не слѣдуетъ, однако, думать, что обученіе было на практикѣ всеобщимъ; далеко нѣтъ! Столь быстрая эволюція не могла свершиться въ умахъ грековъ; массы неохотно разставались съ суевѣріями и заблужденіями, скорѣе враждебно относясь къ проповѣди матеріалистическаго міровоззрѣнія. Эта умственная незрѣлость массъ пагубно отразилась на судьбѣ греческой демократіи. Послѣ пышнаго ея расцвѣта наступаетъ реакція. Казнь Сократа въ 399 году — яркое выраженіе этого переворота. Она стала возможной лишь послѣ того, какъ въ апрѣлѣ 404 года Лизандръ разрушилъ Аѳинскія стѣны и возстановилъ олигархію. Продолжительныя греческія междуусобицы, давшія возможность окрѣпнуть Македоніи и закончившіяся ея гегемоніей надъ всей Греціей, отодвинули на другой планъ заботы о наукѣ и воспитаніи. За это время только дѣятельность Платона (429—348), основавшаго въ 380 г. гимназію въ садахъ Академа [2]), прославившуюся подъ именемъ *Академіи*, отразилась на методахъ обученія; но его дѣятельность совпадаетъ какъ разъ съ кратковременнымъ возрожденіемъ демократіи въ Аѳинахъ.

Платонъ. 9. Въ своихъ „Республика“ и „Законы“ великій мыслитель на первый планъ въ образованіи выдвигаетъ математику. Онъ создаетъ ея методологію, отдѣляетъ ея методы отъ методовъ наукъ о природѣ, пытается придать ея изложенію характеръ стройной системы. Онъ вводитъ названія *анализъ* и *синтезъ* и обосновываетъ впервые *методъ наведенія*. Ему также мы обязаны методомъ *доказательства отъ противнаго* (reductio ad absurdum—приведеніе къ нелѣпости), столь часто примѣняемымъ въ геометріи. Обращая свое вниманіе на цѣли школьной математики, онъ указываетъ громадное практическое значеніе ариѳметики въ торговлѣ, геометріи на войнѣ, астрономіи въ мореплаваніи, но особенно подчеркиваетъ воспитательное ихъ

---

[1]) *Birt*, Das antike Buchwesen, 1882.—Стр. 430 и далѣе.

[2]) Согласно Діогену Лаертскому, надо читать: Экадемъ и Экадемія.

значеніе для міра идей: „Утвердимъ закономъ, чтобы упражнялись въ наукѣ счисленія не для купли и продажи, а входили мыслію въ созерцаніе чиселъ съ цѣлью облегчить душѣ обращеніе отъ вещей преходящихъ къ истинѣ и вѣчной сущности, и т. д.“.

Наука и общество.

10. Однако, недолго существовала связь между наукой и обществомъ. Политическія бѣдствія, обрушившіяся на Грецію, поколебали положеніе науки, такъ какъ интересъ общества направился въ другую сторону. Соціальныя неурядицы, вызванныя слишкомъ быстрымъ экономическимъ ростомъ страны, какъ-то: прикрѣпленіе земельныхъ надѣловъ, конкуренція дешеваго рабскаго труда съ наемничествомъ, создавшая классъ безземельныхъ и безработныхъ — классъ „пролетаріевъ“, — неудержимо толкали Грецію къ соціальной революціи. Къ этому надо прибавить постоянное зло, наносимое происками изгнанниковъ (въ 324 году ихъ насчитывалось свыше 20.000 во всей Греціи), постоянные раздоры и внутренніе перевороты. Понятно, Греціи было не до науки. Къ тому же „развитіе[1]) науки высшаго класса въ обществахъ классическаго міра шло въ сторону техники и экономическаго прогресса только до тѣхъ поръ, пока господа не сложили съ себя фактически своей производительной роли; а когда это произошло, ихъ психологія стала развиваться не въ производительномъ, а въ потребительномъ—паразитномъ направленіи. Съ тѣхъ поръ почти прекратился техническій прогрессъ, а развивались только искусство, отвлеченнѣйшія изъ наукъ и философія“. — Насталъ новый періодъ — уединенной работы ученыхъ, не педагогически обобщающей рѣчи философа, а литературно-кабинетнаго труда спеціалиста. Ученые уединились отъ жизни массъ, порвали съ реализмомъ, и хотя въ этомъ уединеніи могли совершить блистательныя работы, но самая ихъ задача была непонятна большинству. Все болѣе и болѣе росло невѣжество большинства, преданнаго руководству предразсудковъ и фанатизма. Лишенная опоры науки, философія была безсильна въ

---

[1]) *Богдановъ*, Краткій курсъ экономической науки.

дальнѣйшей борьбѣ противъ нихъ; лишенная союза съ философіей, наука не имѣла никакой точки соприкосновенія съ большинствомъ общественныхъ дѣятелей. Борьба была неравна, и катастрофа не замедлила послѣдовать. Послѣ самаго блестящаго періода научнаго развитія невѣжество и фанатизмъ задушили науку древняго міра.

Метóды въ Греціи.

11. Міровая политика Александра Македонскаго привела грековъ къ порабощенію; благодаря смерти Александра даже внѣшнее могущество не могло удержаться, какъ не могло быть сліянія между Греціей и Востокомъ, этими вѣковыми врагами. Правда, спросъ на науку продолжаетъ возрастать, династія Птоломеевъ сосредоточиваетъ въ Александріи философовъ и профессоровъ; Александрійская Академія съ ея музеемъ и библіотекой, содержавшей до 700.000 свертковъ рукописей, является новымъ центромъ культуры. Но бѣда въ томъ, что эта культура была чисто наносной, придворной и чиновничьей, нисколько не затрагивая массъ. И египтяне, и македоняне относятся къ ней равнодушно. Повторяется исторія: появляется аристократія ума, тѣмъ ярче выдѣляющаяся на фонѣ соціальнаго рабства массъ. Римляне, наслѣдники міровой идеи Александра, тяготѣли къ греческимъ искусствамъ, но не къ наукѣ. И школы республики, и императорскія блистали лишь извнѣ; преподаваніе шло обычнымъ словеснымъ путемъ. „Въ древности,—говоритъ Веймеръ,—какъ и въ средніе вѣка, вообще знали только одну учебную метóду, которая опиралась исключительно на память дѣтей. Умственное развитіе питомца не принималось во вниманіе; ему одному предоставлялось умственно переработать массу заучиваемаго наизусть матеріала. Поэтому не было также нужды въ какой-нибудь особой подготовкѣ учителей. Кто получилъ потребное научное образованіе, тотъ считалъ себя вправѣ и учить искусствамъ и наукамъ, и довольствовался въ преподаваніи традиціонными механическими пріемами“.

Римляне, школа и наука.

12. Ростовщики и сутяги, Римляне естественно заботились о юриспруденціи и пренебрегали математикой. Иначе и не

могло быть. Войны еще въ Греціи отвлекали мысль въ другомъ направленіи; отвлеченными математическими изысканіями могли интересоваться лишь отдѣльныя личности. Съ другой стороны, войны породили рабство, соціальныя условія — пролетаріатъ. Рабы и пролетаріи несли на себѣ всю тяжесть физическаго труда; изнѣженные свободные граждане, Греки и Римляне, презрительно относясь къ физическому труду, не могли—въ силу вѣковой психики—разрабатывать прикладную науку. Этимъ объясняется *отсутствіе опыта* у древнихъ, отсутствіе практической механики и математики. Пиѳагоръ надменно говоритъ о вычислительной ариѳметикѣ: „наука торгашей". Архимедъ (287—212 до Р. Х.) „на[1]) всѣ механическія приспособленія, вообще на всякое искусство, служащее житейскимъ потребностямъ, смотрѣлъ, какъ на низменную работу ремесленника". Эвклидъ (330—275), замкнувшись въ узко-логическомъ кругу мышленія, не желаетъ даже слушать о движеніи и непрерывности. Словомъ, не было почвы для прикладного знанія и исчезла почва для отвлеченнаго мышленія. Вотъ почему съ I-го ст. до Р. Х. замѣчается безповоротное крушеніе математики, какъ предмета научныхъ изысканій. Едва появившись въ школахъ, она оттуда уходитъ, вытѣсняемая любимицами Римлянъ, литературой и риторикой; некому заниматься ею въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, такъ какъ послѣднія изъ нихъ закрываются одно за другимъ. Первыя христіанскія школы—въ Александріи, Антіохіи, Эдессѣ и Низибѣ—еще отчасти пользовались языческими знаніями, чтобы побить противниковъ ихъ же оружіемъ. Но вторженіе германцевъ въ римскую имперію сразу измѣнило положеніе дѣлъ. Гальскія школы Меровинговъ, жалкіе остатки школъ Александріи и Аѳинъ—школы лишь по имени.

Византія. Послѣ смерти Юліана Отступника (363 г. по Р. Х.) наступаетъ рѣшительный моментъ въ борьбѣ христіанства съ язычествомъ: воцареніе христіанскаго міросозерцанія. Положеніе самой науки рѣзко мѣняется; школы и ученые подвергаются преслѣдова-

---

[1]) *Плутархъ*, Жизнь Марцелла.

ніямъ; толпы фанатиковъ разрушаютъ храмы, сжигаютъ школы, музеи и библіотеки, убиваютъ послѣднихъ представителей знанія. Такъ при Θеодосіи I Великомъ, въ 392 г., епископъ Θеофилъ лично руководитъ осадой и разрушеніемъ храма Озири-Гапи и избіеніемъ укрывшихся туда защитниковъ, и безжалостно предаетъ огню находившуюся при храмѣ знаменитую Александрійскую библіотеку съ ея вѣками накоплявшимися сокровищами [1]); въ огнѣ погибли труды многихъ столѣтій, для насъ же сохранились лишь ихъ названія. Въ 416 г., при Θеодосіи II-омъ, подобная же толпа, во главѣ съ епископомъ Кирилломъ, разрушаетъ послѣднюю александрійскую школу и буквально растерзываетъ на улицѣ ея руководительницу, извѣстную ученую Гипатію [2]). Пережившіе погромъ ученики ея бѣгутъ въ Аθины; около 520 г. школа начинаетъ процвѣтать вновь. Но замѣчательно, что церковь, имѣя очевидный интересъ даже послѣ своей побѣды сохранить классическое школьное образованіе, въ то же время неумолимо преслѣдуетъ точное знаніе. Математика низводится на одну ступень съ шарлатанствомъ, какъ это видно изъ Codex Theodosianus (lib. IX, tit. XVI): „Nemo consulat haruspicem aut mathematicum"—(никто да не совѣщается съ гадателемъ или математикомъ). Зоркій глазъ слѣдитъ за Аθинами, и эта послѣдняя школа закрывается въ 529 г. императорскимъ декретомъ, воспрещающимъ „языческое обученіе". Вышедшій же въ августѣ того же года Кодексъ Юстиніана содержитъ, среди прочихъ, законъ озаглавленный „De maleficiis, mathematicis et caeteris similibus"—(о злоумышленникахъ, математикахъ и тому подобныхъ); въ немъ находится слѣдующій пунктъ „Ars autem mathematica damnabilis interdicta est omnino"—(само же достойное осужденія искусство математики воспрещается совершенно).

---

[1]) Къ сожалѣнію, до сихъ поръ продержалась легенда о сожженіи библіотеки арабами при калифѣ Омарѣ; но жечь уже было нечего. Эта легенда впервые появляется у одного христіанскаго писателя XIII вѣка; его разсказъ отличается бросающейся въ глаза неправдоподобностью.

[2]) *Rouse Ball*, History of mathematics. — Существуетъ мнѣніе, что Кириллъ невиновенъ, см. *Dr. Joseph Kopallik*, Cyrillus von Alexandrien, 1881, pp. 12—43.

Церковь и школы. 13. Одновременно съ такими гоненіями математики Бенедиктъ изъ Нурсіи (480—543), основывая въ 529 г. орденъ бенедиктинцевъ, ставитъ *трудъ* въ строжайшую обязанность новому ордену. Современный ему писатель Кассіодоръ (490—566) разработалъ его положеніе, примѣнивъ его и къ умственному труду [1]). Монастыри бенедиктинцевъ дѣлаются центрами оживленной научной дѣятельности; при нихъ открываются школы и книгохранилища. Вліяніе государства заставляетъ бенедиктинцевъ устраивать кромѣ монастырской школы еще и школу для мірянъ. Въ томъ же 529 году духовные соборы въ Оранжѣ и Валенсѣ требуютъ учрежденія школъ; тотъ же убѣдительный призывъ раздается въ 681 году на VI Вселенскомъ Соборѣ.

Въ концѣ VIII столѣтія на помощь монастырямъ приходитъ Карлъ Великій (742—814). Его заботы о насажденіи просвѣщенія всѣмъ извѣстны; но съ его смертью основанныя имъ школы падаютъ и пробудившійся ненадолго духъ древности замираетъ.

Интересно посмотрѣть на программы средневѣковой школы. Цѣлью обученія являлось образованіе хорошаго духовенства. Девизомъ школы было *„non ultra“*—(не далѣе); этотъ девизъ одинаково относился какъ къ низшей, такъ и къ высшей школѣ—университету; и тутъ и тамъ царило пережевываніе стараго. Понятно, что въ подобныхъ школахъ ариѳметика и астрономія были нужны лишь настолько, насколько онѣ относились къ вычисленію церковныхъ праздниковъ; геометрія представляетъ пародію на греческую науку и преподается изъ рукъ вонъ плохо. Сочиненія Капеллы, Боэція, Кассіодора и учебники Алькуина служили важнѣйшими пособіями. Географію и математику часто изучали лишь по Cisio-Lanus, праздничному календарю изъ 24 стиховъ.

Методы. 14. О методахъ обученія уже говорилось раньше. Необходимо добавить, что духъ обученія, господствовавшій всецѣло въ школахъ, являлся

---

[1]) *Cassiodorus*, De artibus ac disciplinis liberalium litterarum. Въ его сочиненіяхъ разрабатывается преподаваніе тривія и квадривія, о которыхъ говорилось раньше.

полной противоположностью теоретическимъ взглядамъ христіанства на природу ребенка. Въ Греціи ребенокъ разсматривался, какъ нѣчто незаконченное, но какъ начало взрослаго человѣка; христіанство, напротивъ, выдѣляло дѣтей, приписывая имъ особую нравственную цѣнность, и такимъ образомъ противопоставляло ихъ взрослымъ. Ясно, что и тѣ, и другіе ошибались. Они не допускали мысли, что существуетъ особая *психологія дѣтской среды*, что дѣти нуждаются въ совершенно иныхъ пріемахъ воздѣйствія, чѣмъ взрослые. Все это было для того времени книгой за семью печатями. Но все-таки мы видимъ теперь, что греческая школа сумѣла привязать къ себѣ своихъ питомцевъ. Въ чемъ же дѣло? „Секретъ цѣлесообразности и жизненности греческаго воспитанія,—отвѣчаетъ проф. Лапшинъ,—при скудости предметовъ и педагогической неподготовленности учителей, заключался въ примѣненіи, хотя и несознательномъ, психологическаго принципа интереса и эстетическаго внушенія“.

Между тѣмъ христіанство выдвинуло на первый планъ подавленіе личности. Эта проповѣдь индивидуальнаго смиренія, самоотреченія—съ одной стороны, проповѣдь униженія тѣла и самоистязанія—съ другой, нашла какъ нельзя болѣе благопріятную почву въ тотъ варварскій періодъ нравовъ, когда Римляне создали международный „пролетаріатъ“ у себя и пробудили духъ независимости среди полудикихъ германцевъ и франковъ. Проповѣдь рабства на землѣ была съ восторгомъ принята всѣми, обездоленными и угнетателями: первые видѣли въ ней залогъ будущаго счастья, основаннаго на блаженствѣ своего „я“ и возмездіи „тѣмъ“; вторые видѣли въ ней залогъ добровольнаго подчиненія массъ, безопасное и одобренное свыше ихъ порабощеніе. Неудивительно, что школьная практика впитала цѣликомъ господствующее міросозерцаніе. Культъ памяти—единственная цѣль обученія и вмѣстѣ съ тѣмъ его метода. Развитіе памяти достигалось палкой, лишеніемъ пищи и свободы. Розга прославлялась какъ даръ Св. Духа. Извѣстны вошедшія въ обычай педагогическія прогулки въ лѣсъ, четыре раза въ годъ, во время которыхъ ученики сами собирали прутья для

розогъ. Еще лѣтъ тридцать тому назадъ существовалъ обычай въ католическихъ семьяхъ заучивать наизусть хвалебный гимнъ розгѣ. Тѣлесныя наказанія стали такой неотъемлемою частью воспитанія, что лишь недавно вывелся обычай сѣчь по пятницамъ дѣтей въ воспоминаніе муки Господней. Пытливость ума разсматривалась какъ преступленіе; существовали разсказы о томъ, что Іисуса Христа разъ высѣкли за то, что онъ, обучаясь въ школѣ, вздумалъ пуститься въ разсужденія по поводу одной буквы.

Результаты воспитанія не замедлили сказаться: даже среди духовенства находилось много священниковъ, не умѣющихъ читать по требнику. Что же касается научнаго образованія—оно для средневѣковой Европы не существовало. Съ III-го до XI-го столѣтія въ Европѣ не сказано ни одного новаго слова ни въ наукѣ, ни въ литературѣ; всѣ силы болѣе выдающихся личностей уходили на формированіе политическаго организма для борьбы папства съ государствомъ.

Крестовые походы.

15. Эпоха крестовыхъ походовъ является началомъ новой эры для Европы. Съ одной стороны, этими походами нанесены гибельные удары теократическому принципу: неудачная борьба папства съ мусульманствомъ выдвинула на очередь вопросъ о смыслѣ жертвъ, о цѣли этихъ походовъ. Разъ зародившееся сознаніе пошло дальше — и въ результатѣ Европа постаралась сбросить съ себя теократическое иго. Съ другой стороны, сношенія съ арабами, знакомство съ ихъ культурой породило массу недоумѣній, запросовъ и даже требованій. Чтобы удовлетворить этимъ требованіямъ, пришлось на спѣхъ открывать цѣлый рядъ университетовъ и высшихъ спеціальныхъ школъ. Наконецъ, пробудился духъ меркантилизма—образовались сословія горожанъ и купцовъ, столь могущественныя, что они измѣнили соотношеніе силъ въ Европѣ. Рыцарство развилось, окрѣпло и тоже подняло голову. Волна движенія захватила и низшіе классы средневѣковаго общества; она породила чисто-соціальное возстаніе „пролетаріата“, такъ называемое возстаніе „братьевъ міра“ или *капюшонниковъ* (1172—1182). Возстаніе было пода-

влено совмѣстными усиліями феодальной и клерикальной властей, но оно лишь ушло во внутрь. Дальнѣйшая исторія Европы становится соціальной исторіей.

Городскія школы.

16. Первыми требованіями рыцарства и горожанъ явились школьныя требованія. Магистраты городовъ съ XII-го вѣка добились собственныхъ школъ, сначала при приходскихъ церквахъ, а затѣмъ, подъ видомъ „городскихъ школьныхъ домовъ“ перешедшихъ въ завѣдываніе городовъ. О математикѣ въ нихъ не было и помину; начала ариѳметики письменной, замѣнившей собою счисленіе на абакѣ къ концу XII-го вѣка, правда сообщались, но не выходили за предѣлы примитивныхъ вычисленій. Собственно ариѳметика, алгебра, геометрія и начала тригонометріи составили предметъ изученія въ Университетахъ.

Наука въ Средніе вѣка.

17. Математическія, астрономическія, географическія, медицинскія, естественно-научныя, юридическія и философскія знанія прививались въ Европѣ благодаря посредничеству арабовъ. Европейская молодежь XI и XII ст. училась въ Кордовѣ, Саламанкѣ, Севильѣ, Толедо и др. центрахъ арабской культуры. Начало XIII ст. — первая ласточка эпохи Возрожденія. Въ 1215 г. Англія провозглашаетъ великую хартію вольностей, Франція примыкаетъ къ раціонализму альбигойцевъ, Парижская Сорбонна протестуетъ противъ деспотизма богословія, въ Монпелье арабскіе врачи основываютъ знаменитый медицинскій факультетъ. Фридрихъ II словомъ и дѣломъ насаждаетъ въ Германіи и Италіи науку и свободомысліе. Но ласточка прилетѣла и скоро улетѣла. Крестовый походъ Инокентія III противъ альбигойцевъ превратилъ южную Францію въ пустыню; Испанія ревностно занялась истребленіемъ арабовъ; послѣ смерти Фридриха II (1250) Германія и Италія утратили своего покровителя въ ожесточенной борьбѣ съ папствомъ. Реакція наступаетъ быстро, реакція политическая, соціальная и научная. Она глубоко отразилась на школахъ.

18. Уступивъ на время, церковь рѣшила захватить въ свои руки университеты, разъ ужъ нельзя было ихъ закрыть. Въ это время центромъ вниманія явля-

лись сочиненія Аристотеля. Извѣстные сперва въ видѣ испорченныхъ и сокращенныхъ арабскихъ переводовъ, эти сочиненія не вызывали гоненій. Но толкованія Аверроэса (1126—1198) и знакомство съ точнымъ переводомъ Аристотеля на латинскій языкъ, выполненымъ учеными Неаполитанскаго университета по приказанію Фридриха II — измѣнили отношеніе Папства къ Аристотелю. Сначала Григорій IX въ 1231 г. запретилъ читать его книги по философіи природы, пока онѣ не будутъ исправлены и очищены учеными богословами. Но запрещеніе осталось бумажнымъ. Тогда присмотрѣлись къ Аристотелю поближе. Оказалось, что его идеи гораздо больше подходятъ къ нуждамъ церкви, чѣмъ стремленіе передовыхъ элементовъ къ опыту и изслѣдованію. Девизу послѣднихъ *„plus ultra!“*—впередъ! былъ противопоставленъ уже упоминавшійся девизъ церкви—„non ultra!“—не далѣе! Сочиненія Аристотеля стали изучаться богословами; съ высоты папскаго престола было заявлено, что его творенія единственный источникъ познанія мірскихъ вещей, а всѣ, несогласные съ нимъ, отнынѣ будутъ разсматриваться какъ еретики. Наконецъ, видя, что и это не помогаетъ, занялись вопросомъ о *пріобщеніи Аристотеля къ лику святыхъ.* Всѣ приготовленія были сдѣланы, и только случайность помѣшала осуществиться этимъ замысламъ.

19. Въ сочиненіяхъ греческаго энциклопедиста единственный пробѣлъ—математика. Аристотель ею не занимался и интересовался не особенно. Поэтому математика, едва появившись въ университетахъ, вторично изъ нихъ изгоняется. Жалкіе остатки ея были терпимы то здѣсь, то тамъ, но въ какомъ видѣ! До XIV вѣка сохранился обычай довольствоваться отъ ищущихъ степени магистра лишь клятвою, что магистрантъ слушалъ 6 первыхъ книгъ эвклидовыхъ „Элементовъ“. Въ Италіи профессора подъ видомъ математики преподавали астрологію. Алгебра, какъ наука арабовъ, была изгнана; ей обучали тайкомъ такъ называемые „коссисты“ [1]) — бродячіе учителя XIII — XVI вѣковъ.

[1]) Италіанское „cosa“ (вещь, нѣчто) служило для обозначенія неизвѣстнаго въ уравненіи. Отсюда названіе алгебры „Regula della cosa“ въ Италіи и „Regel Coss“ въ Германіи.

Въ 1388 году Парижская Сорбонна разрѣшаетъ по праздникамъ читать курсъ геометріи Эвклида. Обнародованный въ 1511 г. курсъ ариѳметики Пурбаха (1423—1461) „Algorithmus“, предназначенный для студентовъ Вѣнскаго университета, излагаетъ ариѳметику нашей начальной школы.

Таково положеніе математики подъ конецъ средневѣковья и въ эпоху Ренессанса. Ею не интересовались, такъ какъ въ ней не было нужды; ее изгоняли, такъ какъ она шла изъ еретическихъ школъ востока; лишенная опоры въ несуществовавшей еще техникѣ, гонимая схоластиками-богословами, она замерла на долго. Лишь крупныя событія конца XV-го и начала XVI-го вѣковъ дали могущественный толчокъ развитію математики. Съ воцареніемъ естественно-научныхъ принциповъ наступаетъ нарожденіе новой европейской математики, совершенно порвавшей съ прежней и такъ могуче заполонившей собою міросозерцаніе XIX вѣка.

ГЛАВА II.

Эволюція педагогики математики.

Европа съ XV вѣка (1453 г. — 1909 г.).

Гуманизмъ. 1. Въ концѣ XIV вѣка, когда борьба папства съ императорской и королевской властью заканчивалась въ пользу послѣдней, въ несчастной Италіи, вѣковой аренѣ борьбы, возникаетъ новое движеніе въ пользу чисто-человѣческаго образованія, противопоставляемаго господствовавшему религіозному. Петрарка († 1374) и Бокачіо († 1375) являются родоначальниками гуманизма. Ихъ проповѣдь подготовила почву; ихъ послѣдователи, разсѣянные по всей Италіи, продолжали начатое дѣло вплоть до того момента, когда со взятіемъ Константинополя турками въ 1453 г. греческіе ученые перекочевали въ Италію, неся съ собою сокровища древней науки и искусствъ. Началась эпоха Ренессанса, предвозвѣстница великаго освободительнаго движенія— протестантизма. Забытый въ средніе вѣка римскій педагогъ Квинтиліанъ (умеръ около 100 г. по Р. Х.), провозгласившій въ своемъ „Institutio oratoria“ (ораторское образованіе) принципы: общественнаго воспитанія; пробужденія интереса играми [1]. прежде чѣмъ начнется обученіе; пагубнаго дѣйствія тѣлесныхъ наказаній; пробужденія честолюбія, какъ воспитательнаго средства; спеціальной подготовки учителей, и т. п., — теперь становится почетнымъ руководителемъ школь-

[1]) Идея, разработанная въ XIX ст. Фрёбелемъ.

наго дѣла. Реформа воспитанія въ его духѣ проводится въ Италіи, оттуда переносится во Францію, Германію, Англію. Въ началѣ XVI вѣка гуманизмъ окрѣпъ настолько, что университетское богословіе не могло его побѣдить и должно было сдаться. Правда, сдача происходила исподволь, но непрерывно.

Книгопечатаніе.

2. Развитіе просвѣщенія породило спросъ на книги, а это, въ свою очередь, отразилось на способахъ ихъ изготовленія. Въ годъ взятія Константинополя застучалъ первый типографскій станокъ, и вскорѣ печатныя изданія явились прочнѣйшимъ цементомъ международнаго свободомыслія. Приведемъ великолѣпную характеристику событія—знаменитыя слова Виктора Гюго: „Это убьетъ то. Книга убьетъ зданіе.“ — И далѣе: „Изобрѣтеніе книгопечатанія — это величайшее изъ всѣхъ историческихъ событій, это — мать всѣхъ революцій. Способъ выраженія мыслей человѣчества радикально измѣнился... Подъ видомъ печати человѣческая мысль болѣе нетлѣнна, чѣмъ когда-либо; она сдѣлалась летучей, неуловимой, неразрушимой. Она стала носиться въ воздухѣ“... „Это убьетъ то—означало: печать убьетъ церковь“.

Географическія открытія.

3. Аристотель, между тѣмъ, продолжалъ царить въ офиціальной наукѣ. Богословы въ немъ находили убѣжденнаго защитника геоцентризма, неподвижности и центральнаго положенія земли во вселенной. Старое ученіе Пиѳагорейцевъ, система геліоцентризма, данная Аристархомъ Самосскимъ (310—250 до Р. Х.) — были отвергнуты и почти забыты. Съ возрожденіемъ классицизма въ Италіи эти идеи нашли новыхъ сторонниковъ; главнѣйшими изъ нихъ являются кардиналъ Николай Куза (1401—1464) и Леонардо да-Винчи (1452—1519). Послѣдній даетъ уже идею притяженія отдѣльнымъ свѣтиломъ его элементовъ [1]).

Между тѣмъ открытья идутъ за открытьями. Богатыя Генуя и Венеція давно уже ищутъ новые пути

---

[1]) *Любимовъ.* Исторія физики, т. II, стр. 131.

въ сказочно-богатую Индію [1]), надѣясь расширить свое экономическое могущество, пріобрѣтя новые рынки и новые источники торговли. Выразитель этихъ замысловъ, Колумбъ, стремясь въ Индію на западъ, открываетъ 12 Окт. 1492 г. американскій островъ Гванагани, но даже и умирая былъ твердо убѣжденъ, что имъ открыта именно Индія. Въ 1498 г. Васко да-Гама объѣзжаетъ кругомъ Африку и находитъ, наконецъ, путь въ Индію. Португальцы основываютъ свои колоніи въ Африкѣ и Индіи; испанцы захватываютъ американскіе острова, центральную Америку и Перу. Въ 1519 г. Магелланъ совершаетъ первое кругосвѣтное путешествіе. Такимъ образомъ всестороннее изученіе земного шара подвигается чрезвычайно быстро. Не трудно и сторонникамъ движенія земли высказать свои идеи: появившаяся въ 1544 г. книга Коперника „Libri VI de Revolutionibus orbium coelistium“ (Шесть книгъ о вращательныхъ движеніяхъ по орбитамъ небесныхъ тѣлъ) радостно встрѣчена не только астрономами, но даже церковью. Высшее духовенство между прочимъ расчитывало при помощи этой системы произвести реформу календаря, ставшую въ то время неотложной.

Общество въ XVI в.

4. Таковъ былъ фонъ картины общественной жизни въ началѣ XVI вѣка. Сама картина — это изображеніе новаго мануфактурнаго періода, могучимъ толчкомъ которому послужило открытіе и завоеваніе новыхъ рынковъ. До этого періода процвѣтало цеховое производство, особенно развившееся въ богатыхъ городахъ южной Германіи. Техника инструментовъ и часовъ достигла изумительной степени совершенства въ Нюренбергѣ; стеклянное производство (очки, зрительные приборы) сосредоточилось въ Италіи, особенно въ Венеціи съ ея знаменитыми заводами на островѣ Мурано. Задачи техники начинаютъ связываться съ задачами вычисленій. Развивается тригонометрія, зарождаются пріемы графическихъ вычисленій. Но лишь только горячка колоніальной дѣятельности охватила Европу,

---

[1]) Прежде существовавшій путь черезъ Аденъ и Красное Море закрылся послѣ завоеванія Египта магометанами.

какъ работа цеховъ оказалась недостаточной. Появилась потребность въ большемъ производствѣ товаровъ, появилась система сдаточной работы. „Всякое [1]) крупное изобрѣтеніе въ механической техникѣ имѣетъ своимъ слѣдствіемъ большее распредѣленіе труда, а всякое повышеніе раздѣленія труда вызываетъ въ свою очередь новыя механическія открытія“.

Наконецъ, выступилъ на сцену промышленный капитализмъ. Захвативъ въ свои руки сперва сдаточное производство, онъ вскорѣ овладѣлъ и торговлей. Въ теченіе XVI вѣка образуются трёсты и синдикаты на почвѣ колоніальныхъ предпріятій; среди нихъ особенную извѣстность снискалъ антверпенскій „пряный трёстъ“.

Протестантизмъ и школы.

5. Одновременно съ экономическимъ переворотомъ происходитъ и религіозный. Волненія различныхъ сектъ и обществъ, раньше не выступавшія ярко наружу, теперь достигли низшихъ слоевъ общества, и Лютеру оставалось только сдѣлать послѣдній шагъ—порвать съ папствомъ, отложиться отъ Рима. Этотъ шагъ встрѣтилъ поддержку со стороны государства; но попытка соціальныхъ реформъ, предпринятая Мюнцеромъ (Крестьянская война 1525 года), кончилась и на этотъ разъ неудачей.

Протестантизмъ прежде всего обратилъ свое вниманіе на школы. Въ 1524 г. Лютеръ обнародовалъ свое воззваніе „Къ бургомистрамъ всѣхъ городовъ нѣмецкой земли, чтобы они учреждали и поддерживали христіанскія школы“. Въ изданномъ въ 1530 году своемъ сочиненіи „О желательности посылать дѣтей въ школу“ онъ провозглашаетъ право государства на принудительное обученіе. Другъ и совѣтникъ Лютера, Филиппъ Мелянхтонъ (1493—1560), убѣжденный гуманистъ, получилъ почетный титулъ „praeceptor Germaniae“ за свои труды по насажденію просвѣщенія. Имъ составленъ Саксонскій учебный планъ (1528 г.), реформированы всѣ университеты въ протестантской Германіи, написаны многочисленные учебники и сочиненія, дающіе массу реальныхъ знаній.

---

[1]) *Marx*, Elend der Philosophie, 1882, стр. 124.

Въ 1559 г. издается Виртембергскій учебный планъ: онъ вводитъ принципъ всеобщаго обязательнаго обученія, открываетъ доступъ математикѣ въ старшіе классы школъ, возвышаетъ правовое положеніе учителя и даетъ рядъ удачныхъ методическихъ указаній. Десять лѣтъ спустя появляется подобный же Брауншвейгскій планъ, затѣмъ — Липпскій и въ 1580 г. — новый Саксонскій; по послѣднему плану ариѳметика и астрономія назначены предметами преподаванія въ старшихъ классахъ. Вообще въ семидесятые годы математика начинаетъ проникать понемногу въ школы.

Самыя школы растутъ въ числѣ. Послѣ реформаціи большинство монастырей отводится подъ школьныя зданія: въ 1554 г. — *Росслебенскій, въ 1561 г.* — Донндорфскій; 21 мая 1543 г. саксонскій курфюрстъ Морицъ издаетъ указъ объ учрежденіи трехъ княжескихъ школъ въ Мейссенѣ, Мерзебургѣ и Пфорта (эти школы слишкомъ 200 лѣтъ служили образцами для всей Германіи), а еще раньше (1541) имъ же были отданы всѣ монастырскія имѣнія на обученіе бѣдныхъ дѣтей.

Математика въ школахъ XVI в.

6. Мы упоминали не разъ, что математика все время не включалась въ школьныя программы — и это вѣрно; но подъ математикой въ то время подразумѣвали ариѳметику (высшую), алгебру и геометрію. Вычислительная ариѳметика (*calculatio*), *напротивъ*, являлась необходимой принадлежностью каждой школы. Въ началѣ XVI вѣка стали обучать десятичной нумераціи и письменному счисленію; одно и то же лицо являлось учителемъ ариѳметики и чистописанія. Вслѣдъ за нумераціей появляются новые пріемы вычисленій и широко распространяется учебникъ Адама Ризе (1492—1556): „Rechnung auf der Linien und Federn, 1522“. О его распространенности свидѣтельствуетъ 26-ое изданіе въ 1656 году.

На 11 страницахъ этого учебника излагается сперва вычисленіе при помощи жетоновъ или марокъ (всѣ 4 дѣйствія); затѣмъ—переходъ къ цыфрамъ. Каждое дѣйствіе начинается съ опредѣленія, дальше правило и примѣръ съ повѣркой. Умноженіе излагается чисто механически; большинство правилъ: „дѣлай такъ:...“

Эта механизація ариѳметическихъ вычисленій держалась въ школахъ до второй половины XVIII ст. Понятно, что о методѣ обученія не было и рѣчи. Да и откуда была браться методистамъ? Ариѳметика находилась въ періодѣ разработки, дѣленіе составляло сложную и трудную задачу, простыя дроби и десятичныя числа только-что вводились. Далѣе, потребности окружающей среды ярко сказывались на программахъ. Трёсты и синдикаты породили вообще систему мелкихъ товариществъ, нуждавшихся въ процентныхъ разсчетахъ. Въ силу этого спеціальнымъ указомъ было предписано проходить въ школахъ „правило товарищества“ и „цѣпное правило“. Желаніе привлечь въ школу дѣтей привиллегированныхъ сословій повело за собою расширеніе математики (въ началѣ XVII вѣка) няряду съ физикой, географіей, исторіей, генеалогіей, геральдикой и политикой. Всѣ эти предметы вмѣстѣ взятые составляли „галантныя знанія“ [1]). Кассельскій приказъ 1618 года говоритъ: „Занятія математикой и астрономіей не только привлекательны и увеселительны для умовъ солидныхъ и разборчивыхъ; но они даютъ дворянамъ, которые позже займутся военными дѣлами, превосходное наставленіе для постройки, защиты или аттаки укрѣпленныхъ мѣстностей и для опредѣленія хорошаго боевого строя“.

Этотъ приказъ — отголосокъ милитаризма, наполнившаго собою XVIII столѣтье, столѣтье религіозно-политическихъ войнъ.

Борьба католицизма съ протестантизмомъ.

7. Пробужденіе духа свободнаго изслѣдованія, къ сожалѣнію, опиралось на шаткую почву. Чѣмъ громче заявляли свободомыслящіе о своихъ идеяхъ и планахъ, тѣмъ упорнѣе Церковь отстаивала Аристотеля. Къ половинѣ XVI вѣка, вдобавокъ, усилилась рознь между гуманистами и протестантами. Какъ это ни странно, гуманисты явились противниками теоріи Коперника, съ глубокимъ равнодушіемъ относились къ лютерантству и гордо замкнулись, наконецъ, въ тиши кабинетовъ, испуганные фанатизмомъ сектантовъ въ родѣ

---

[1]) *Paulsen*, Geschichte des gelehrten Unterrichts in Deutschland.

Кальвина, Цвингли и имъ подобныхъ. Въ то же время Церковь увидѣла слабость протестантизма, довольно медленно прививавшагося среди массъ: тамъ царствовалъ глубокій религіозный индифферентизмъ. И вотъ во второй половинѣ XVI вѣка наступаетъ католическая реакція. Церковь отказалась отъ борьбы съ государствомъ, по крайней мѣрѣ открытой, и заключила союзъ съ властью, чтобы тѣмъ успѣшнѣе подавить протестантизмъ. 23 Августа 1572 г. организуется Варѳоломеевская ночь, во время которой погибло болѣе 30 тысячъ протестантовъ, въ ихъ числѣ знаменитый Пьеръ Рамюсъ (1515—1572), борецъ противъ схоластики и Аристотеля, крупный математикъ, астрономъ и физикъ. Филиппъ II (1556—1598), предпочитая царствовать надъ пустыней, чѣмъ надъ еретиками, выселяетъ мавровъ изъ Гренады и разрушаетъ цвѣтущіе Нидерланды. Инквизиція свирѣпствуетъ во всю. Въ правленіе Филиппа III (1598—1621) изгоняется 800 тысячъ мавровъ; плодородная Валенсія превращается въ пустыню. Въ Германіи вспыхиваетъ тридцатилѣтняя война (1618—1648). „Страна [1]) была опустошена, разграблена, безлюдна, сдѣлалась пустыней, годной лишь для волковъ и лютыхъ звѣрей. О школахъ и учителяхъ почти не было и помину“.

Параллельно съ этимъ усиливается гоненіе противъ науки. Въ 1582 г. заканчивается реформа календаря; въ 1609 г. Кеплеръ издаетъ свою „Astronomia Nova“ и даетъ законы движенія планетъ. Сейчасъ же (1616) ученіе Коперника объявляется еретическимъ, какъ противное разуму и Библіи. Первой жертвой становится Джордано Бруно (1548—1600); 17 февраля 1600 года великій мыслитель погибаетъ на инквизиціонномъ кострѣ. За нимъ вслѣдъ 19 февраля 1619 г. погибаетъ на французскомъ кострѣ Ванини (1585—1619); 27 лѣтъ проводитъ въ тюрьмѣ и пыткахъ Кампанелля (1568—1639). Ореоломъ мученичества окружена вся жизнь Кеплера (1571—1630). Далѣе подвергается гоненію Галилей (1564—1642). Длинная цѣпь невзгодъ, обрушившихся на него, заканчивается послѣднимъ самоуни-

---

[1]) *Raumer*, Geschichte der Pädagogik, B. III.

женіемъ: 22-го іюня 1633 года Галилей торжественно отрекся отъ своего ученія, сохранивъ этимъ жизнь, но не свободу. Но скоро борьба противъ новаго міросозерцанія стала не подъ силу Церкви. За эпохой молчаливаго согласія послѣдовало вынужденное оффиціальное признаніе вращенія земли (1822—1835) [1]).

Здѣсь умѣстно указать на другое оффиціальное признаніе — на признаніе теоріи развитія (иначе говоря, Дарвинизма). Въ началѣ XX-го столѣтія, послѣ ожесточенной борьбы, идея эволюціи, наконецъ, признана сперва бенедиктинцами, а затѣмъ и іезуитами [2]).

8. Придерживаясь рамокъ историческаго очерка, невозможно дать болѣе полную картину эволюціи мысли за послѣднія три столѣтія; эта задача, какъ она ни привлекательна, выходитъ далеко за предѣлы намѣченнаго курса. Приходится ограничиться краткими штрихами развитія самой математики и разработки учебныхъ плановъ; исторія новыхъ методъ обученія выдѣлена нами въ слѣдующую особую главу.

Открытія и изобрѣтенія XVII в.

9. До XVII ст. техника находилась въ зачаточномъ состояніи: потребностей у феодальнаго общества не было, а современное общество еще не сформировалось. Съ воцареніемъ протестантизма начинается быстрый ростъ государственно-общественнаго организма. Во Франціи Нантскій эдиктъ 1598 г., въ Нидерландахъ — крушеніе Испанской власти въ 1600 г., въ Германіи — Вестфальскій міръ 1648 г., въ Англіи — окончательная побѣда протестантизма въ 1559 г. даютъ этому росту главный толчокъ.

Гуманистически настроенныя правительства мелкихъ итальянскихъ государствъ еще раньше заботятся о развитіи наукъ и искусствъ. Передъ инженернымъ искусствомъ того времени выдвигается цѣлый рядъ животрепещущихъ вопросовъ. Урегулированіе горныхъ рѣкъ порождаетъ новую механику, и Леонардо да-Винчи,

---

[1]) *White*, A history of warfare between science a. theology.

[2]) *E. Wasmann* S. J. Die moderne Biologie und die Entwicklungstheorie, 1904. Буквы „S. J.“ означаютъ „Societatis Jesu“ (Общества Іисуса).

Торичелли и Галилей разрабатываютъ основы гидростатики и гидродинамики, завѣщанныя еще Архимедомъ и Герономъ; артезіанскіе колодцы приводятъ къ установленію атмосферическаго давленія и барометра (Галилей, Торичелли, Паскаль); законы качанія маятника и примѣненіе его къ улучшенію часовъ для нуждъ мореплаванія составляютъ предметъ изысканій Гюйгенса (1629—1695); практическій вопросъ о сгибаніи бруса, укрѣпленнаго однимъ концомъ въ неподвижную стѣну и подверженнаго дѣйствію силы, приложенной къ другому концу, — вопросъ архитектуры всѣхъ вѣковъ, — начинаетъ разрабатываться Галилеемъ, Гукомъ и Марріоттомъ, понемногу разрастаясь вширь и вглубь, пока наконецъ въ рукахъ Навье, Коши, Пуассона, Сенъ-Венана и др. онъ не сталъ цѣлой наукой, механической теоріей упругости твердыхъ тѣлъ (XIX ст.). Изобрѣтеніе зрительной трубы (Іенсенъ, 1608) въ связи съ ростомъ астрономическихъ наблюденій привело къ математической обработкѣ данныхъ у Кеплера и Ньютона. Изобрѣтеніе въ томъ же году микроскопа открываетъ новые міры: въ 1616 г. Гарвей провозглашаетъ принципъ кровообращенія и устанавливаетъ основы физіологіи; въ 1661 г. Мальпиги обнародовываетъ свои работы по микроскопіи крови и растеній, а въ 1675 г. Левенгукъ — начала анатоміи растеній. Стекольное производство выдѣляетъ оптику въ отдѣльную науку, независимую отъ остальной физики, и создаетъ для нея особую каѳедру въ университетахъ. Колебанія маятника разрабатываются Мерсенномъ (1588—1648), и ихъ законы оказываются приложимы и къ звуковымъ колебаніямъ; Гассенди (1592—1655) кладетъ механическія основы ученія о свѣтѣ, а Гримальди (1618—1663) выдвигаетъ идею волнообразной теоріи свѣта, являясь предтечей Гюйгенса; опредѣленіе объема винныхъ бочекъ, сплавляемыхъ по Дунаю, приводитъ Кеплера [1]) къ рѣшенію вопроса объ объемѣ тѣлъ вращенія вообще и къ началу интегральнаго исчисленія.

10. На другомъ концѣ Европы скромный инспекторъ водяныхъ сооруженій (голландскихъ шлюзовъ),

---

[1]) *Kepler*, Stereometria doliorum (Стереометрія бочекъ), 1615.

Симонъ Стевинъ (1548—1620), въ борьбѣ съ непокорной стихіей, порывающейся прорвать плотины, создаетъ свою „Statique et Hydrostatique, 1586“, ничего не зная о работахъ въ томъ же направленіи Леонардо да-Винчи. Начатое имъ дѣло продолжилъ Паскаль. Практика водяныхъ сооруженій и теорія статики стараются обогнать другъ друга въ развитіи. Наконецъ, вопросы объ ударѣ тѣлъ (фортификація и артиллерія) разрабатываемые Галилеемъ, Декартомъ, Валлисомъ и Гюйгенсомъ, дали первые основы ученію о сохраненіи энергіи, столь блестяще развитому въ XIX вѣкѣ.

Даже отдѣлы чистой математики, какъ биномъ Ньютона и теорія вѣроятностей, развивались въ силу запросовъ жизни. Еще Тарталья, занимаясь вычисленіемъ шансовъ для двухъ игроковъ въ кости, положилъ основы комбинаторики и вычислилъ коэффиціенты разложенія $(a+b)^n$, при цѣломъ положительномъ n. Въ 1654 г. знаменитый игрокъ Шевалье де-Мере предложилъ Паскалю задачу: Два игрока равной силы бросаютъ партію, не доигравъ ее до конца. Какъ имъ разсчитаться? Завязалась переписка между Паскалемъ и Ферма; оба пришли къ одинаковому рѣшенію, но различными путями — и въ результатѣ появилась математическая теорія вѣроятностей.

Созданіе анализа.

11. Вся эта кипучая дѣятельность техниковъ неминуемо отразилась на развитіи математики. Такъ называемая „чистая математика“ мирно дремала въ тиши кабинетовъ, пока мощный призывъ жизни не вызвалъ ея оттуда и не пригласилъ къ участью въ работахъ. Оказалось, что спросъ далеко превзошелъ предложеніе: теорія оказалась безсильной помочь практикѣ. И первый Декартъ рѣшилъ сдѣлать переворотъ, соединить теорію съ практикой (какъ это было нѣкогда въ Греціи, см. главу „Статика и динамика въ Геометріи“) и создать новую математику. „Должна существовать общая наука, объясняющая все, касающееся порядка и мѣры. И такая наука достойна названія математики“— этими словами характеризуетъ Декартъ свою Аналитическую Геометрію, полученную отъ соединенія въ одно ариѳметики, алгебры и геометріи. Заложенные здѣсь

принципы непрерывности и движенія приводятъ Лейбница (1646—1716) къ установленію Началъ Анализа (1677) (Дифференціальнаго и Интегральнаго исчисленій). Будущность опытныхъ изслѣдованій обезпечена: отнынѣ теорія и практика могутъ идти рука объ руку. И пророческія слова Лейбница: „Я полагаю [1]), что мы можемъ еще въ этомъ вѣкѣ довести до завершенія анализъ чиселъ и линій, по крайней мѣрѣ, въ главномъ, ut haec cura genus humanum absolvamus [2]), чтобы съ этихъ поръ всѣ силы человѣческой мысли обратились къ изученію природы“, — оправдались на дѣлѣ; развитіе наукъ о природѣ превзошло самыя смѣлыя мечтанія мыслителей прежнихъ вѣковъ.

Философія и школы въ XVII в.

12. Посмотримъ теперь, что творилось въ школахъ Европы. Безъ всякой натяжки можно сказать, что въ теченіе XVI вѣка математики въ школахъ не существовало; но и пробудившееся научное движеніе не смогло бы оказать вліянія на программы школъ, если бы наукѣ на помощь не пришли люди совершенно противоположныхъ лагерей: философы-теоретики и политики-практики.

13. Обыкновенно Фрэнсиса Бэкона (1561—1626) считаютъ родоначальникомъ эмпиризма, забывая, что онъ не такъ глубокъ, какъ его несчастный предшественникъ, Роджеръ Бэконъ (1214—1294), истинный проповѣдникъ опытной науки, и что творенія Фрэнсиса болѣе напыщены, чѣмъ содержательны. Самъ Бэконъ 2-ой понималъ свою роль правильно, говоря, что онъ лишь

Великая труба, зовущая на бой!

Какъ бы то ни было, труба пришлась какъ нельзя болѣе кстати. Она пробудила Гоббса и Локка въ Англіи; Коменскаго — въ Германіи; Дидро, Ляметри, Гольбаха — во Франціи. Она совпала съ проповѣдью Гассенди (1592—1655), ученаго аббата, настоятеля монастыря, явившагося реставраторомъ матеріализма Эпикура и основателемъ атомизма. Оба эти направленія — эмпиризмъ и матеріализмъ, вначалѣ почти не раздѣлялись.

---

[1]) *Лейбницъ*, Письмо къ Гюйгенсу, 1691 г.

[2]) Чтобы хотя отъ этой заботы освободить человѣческій родъ.

Оба требовали опыта, оба отрицали главенство ума, оба звали къ природѣ, какъ источнику познанія. Но ихъ вліяніе на школу парализовалось третьей философской системой — раціонализмомъ, ведущимъ начало отъ Декарта (1596—1650) и черезъ Малебранша, Спинозу, Лейбница, Канта и Фихте приведшаго къ идеализму Шеллинга и Гегеля. Каждый изъ трехъ главныхъ очаговъ просвѣщенія — Англія, Франція, Германія — подпалъ подъ вліяніе особыхъ философскихъ теченій, не говоря уже о политико-экономическихъ. Съ XVII ст. исторія школы распадается на три части; мы прослѣдимъ ихъ по очереди.

Англія въ XVII и XVIII вв.

14. Пока на материкѣ Европы бушевали религіозныя и политическія страсти, Англія развивалась сравнительно спокойно. Коллежи существовали въ ней съ XIII вѣка и подвергались незначительнымъ преобразованіямъ; они, какъ и сейчасъ, предназначались для состоятельныхъ классовъ; духъ обученія былъ пропитанъ классицизмомъ; математика играла второстепенную роль и сохранила ее до 60-хъ годовъ XIX ст. Главное вниманіе удѣлялось геометріи, причемъ руководствомъ сталъ подлинникъ Эвклида. Эта особенность англійскихъ школъ, сохранившаяся и понынѣ, въ XX вѣкѣ (!!), обусловлена слѣдующимъ. Во 1-хъ, ариѳметика и алгебра разрабатывались вплоть до XIX вѣка и матеріалъ накоплялся медленно; символическія обозначенія стали вводиться лишь въ XVII ст., а методическая разработка и вовсе отсутствовала. Геометрія, напротивъ, представляла законченное цѣлое, систему, стройность которой не вызывала сомнѣній до Лобачевскаго и Гаусса (XIX в.), съ одной стороны, и до аксіоматиковъ послѣднихъ 30 лѣтъ — съ другой. Эта стройность Эвклидовой Геометріи превозносилась до Небесъ всѣми математиками XV—XVII вѣковъ. Книга Эвклида признавалась не только геніальной, но и общедоступной, единственно доступной; такъ смотрѣли на нее Галилей, Кеплеръ, Паскаль, Декартъ, Ньютонъ и др. Во 2-хъ, что касается наглядной геометріи, то ея необходимость отвергалась школой раціоналистовъ, повліявшихъ отчасти и на Англію.

Франція въ XVII и XVIII вв.

15. Идеи раціоналистовъ оказали могущественное вліяніе на французское воспитаніе и образованіе; въ XIX столѣтіи это вліяніе распространилось на большинство Европейскихъ государствъ и живо еще и понынѣ. Декартъ, правда, отводилъ опыту большую и важную роль: „Возможно [1]) пріобрѣсти знанія, которые окажутся весьма полезными для жизни. И вмѣсто той спекулятивной философіи, которой обучаютъ въ школахъ, можно найти практическій методъ, при посредствѣ котораго, зная силу и дѣйствіе огня, воды, воздуха, звѣздъ, неба и всѣхъ другихъ окружающихъ насъ тѣлъ настолько же точно, насколько мы знаемъ различные приборы, употребляемые нашими ремесленниками, мы могли бы такимъ же образомъ пользоваться ими во всѣхъ обстоятельствахъ, когда онѣ пригодны, и сдѣлаться такимъ путемъ господами и повелителями природы“. Но его ученики и наслѣдники совершенно устранили опытъ, какъ средство познанія. Переоцѣнивая значеніе разума, признавая врожденныя идеи и полагая, что ребенокъ можетъ легко заинтересоваться отвлеченнымъ, метафизическимъ и математико-логическимъ мышленіемъ, раціоналисты дали слѣдующую программу школьнаго образованія: математика и естествовѣдѣніе, далеко за ними исторія, литература и др. Характеръ изложенія строго дедуктивный, такъ какъ чувственный опытъ лишь затемняетъ сознаніе (мнѣніе раціоналистовъ).

Понятно теперь, почему не могла развиться наглядная геометрія. Если ребенокъ имѣетъ врожденныя идеи о пространствѣ, тѣлахъ и формахъ, то онъ прямо послѣ чтенія и письма можетъ приступить къ изученію систематической геометріи и вообще математики.

16. Наряду съ раціоналистами завѣдывали воспитаніемъ и іезуиты. Игнатій Лойола, основывая въ 1540 г. орденъ Іисуса, на первомъ мѣстѣ поставилъ воспитаніе молодежи. Зная вѣками сложившійся взглядъ Церкви на математику, легко догадаться, что и въ іезуитскихъ

---

[1]) *Descartes,* Discours de la methode. — A Leyde. C I) I) C XXXVII. Стр. 62.

школахъ она отсутствовала. Дѣйствительно, въ курсѣ начальной и средней школы проходится лишь ариѳметика и только въ 1752 г. генералъ ордена Ротанъ, въ цѣляхъ болѣе успѣшной борьбы со свѣтскими школами, отводитъ нѣкоторое мѣсто въ курсѣ другимъ отдѣламъ математики.

Съ изгнаніемъ іезуитовъ началась временная реакція противъ раціонализма. Руссо (1712—1778) и его школа выставляютъ лозунгъ „Revenons à la nature!“ (назадъ къ природѣ!); его „Эмиль“ въ тріумфѣ распространяется по Европѣ. Великая революція 1789 г. осуществляетъ многія изъ его идей. Наполеонъ I особенно заботится о математикѣ; основывается Нормальная Школа (1794 г.) съ цѣлью подготовить будущихъ преподавателей, и лишь только Наполеонъ I становится у власти, онъ приглашаетъ туда Лягранжа, Ляпляса, Монжа, Лякруа, Безу и др. въ качествѣ лекторовъ и руководителей работъ. При немъ же основывается и Политехническая школа, давшая Франціи цѣлый рядъ крупныхъ инженеровъ, а міру—знаменитыхъ ученыхъ. Одновременно создана система французскихъ лицеевъ, послужившая образцомъ для русскихъ гимназій по уставу 1804 г.

Этотъ періодъ кратковременнаго разцвѣта школъ закончился съ паденіемъ Наполеона. Дальше мы увидимъ, что́ было въ Европѣ въ первую половину XIX вѣка.

Германія въ XVII и XVIII вв.

17. Германскія школы представляютъ новыя особенности. Врожденный духъ противорѣчія, съ одной стороны, желаніе опереться на народъ, съ другой стороны, заставляли протестантизмъ добиваться какъ разъ того, въ чемъ ему отказывалъ католицизмъ. Итакъ: въ школахъ изучали только древніе языки—протестанты потребовали введенія народнаго нѣмецкаго языка; въ школахъ царило гуманистическое направленіе — протестанты вводятъ реальныя знанія; въ противовѣсъ вербалистамъ (словесникамъ) появляются съ 1708 г. реалисты, т. е. появляются классическія и реальныя гимназіи. Раньше школы существовали лишь для привиллегированныхъ сословій; съ побѣдой протестантизма вводится всеобщее обязательное обученіе—въ 1619 г.

въ Веймарѣ, въ 1634 г. въ Гессенъ-Дармштадтѣ, въ 1642 г. въ Готѣ, въ 1647 г. въ Брауншвейгъ-Вольфенбюттелѣ и въ 1646 г. въ Вюртембергѣ. Въ Саксоніи еще планъ 1528 г. вводитъ воскресныя школы для дѣтей рабочихъ и простолюдиновъ, съ цѣлью обученія чтенію и письму, а также катехизису и церковному пѣнію. Католическая церковь не отстаетъ въ данномъ случаѣ отъ протестантовъ. На Тридентскомъ Соборѣ (1562—64) рѣшено организовать воскресныя школы; программы ихъ—точная копія протестантскихъ. Отдѣльныя духовные ордены и общества искренно заботятся о развитіи народнаго образованія; особенно выдѣлились въ этомъ отношеніи ордены піаристовъ, урсулинокъ, англійскихъ сестеръ и елизаветянокъ; послѣдніе три ордена занялись спеціально женскими школами.

Конечно, все сводилось къ религіозной пропагандѣ; конечно, и протестанты и католики прежде всего и больше всего заботились о духѣ просвѣщенія, а не объ умственномъ воспитаніи юношества. Но главное—идея необходимости всеобщаго обученія—было достигнуто: массы понемногу свыклись съ этой идеей, она стала имъ близка и даже важна. Никакія усилія реакціи не смогли впослѣдствіи вытравить ея изъ сознанія массъ. Вотъ на какой почвѣ выросли педагогическіе идеалы Коменскаго и Песталоцци, вотъ почему они привились тамъ и главнымъ образомъ—тамъ.

18. Методы обученія долгое время оставались прежними. Дрессировка памяти—съ одной стороны; тѣлесныя наказанія—съ другой. Въ одномъ изъ школьныхъ распоряженіи 1704 г. читаемъ: „Задаваемый примѣръ учитель продѣлываетъ самъ передъ учениками и заставляетъ затѣмъ учениковъ продѣлать снова тоже самое. Такимъ образомъ продѣлываніе по одному примѣру ежедневно и повтореніе учениками дадутъ полную возможность въ младшихъ классахъ пройти 4 дѣйствія, тройное правило, дробныя и именованныя числа. Въ старшихъ классахъ отводить одинъ урокъ еженедѣльно на доказательство и объясненіе терминовъ и болѣе обстоятельное изученіе правилъ... Но побоевъ при обученіи не слѣдуетъ примѣнять, дабы не возбудить тѣмъ неохоты и отвращенія къ дальнѣйшему ученію“.

Все XVIII ст. идетъ медленная реформа изложенія учебнаго матеріала, причемъ замѣчательно, что современное дѣленіе — на учебники для общеобразовательныхъ школъ и на учебники для техническихъ школъ, практиковалось уже тогда. Образецъ формы изложенія былъ данъ Христіаномъ Вольфомъ въ сочиненіи „Rechenkunst, 1728“, посвященномъ ариѳметикѣ; каждая статья у него начинается съ опредѣленій, теоремъ, задачъ; затѣмъ идутъ выводы, слѣдствія, заключенія, примѣчанія, дополненія и т. п. Такимъ образомъ на первый планъ выдвигается формальная цѣль обученія, затушевывая практическую. Въ борьбѣ съ утилитаризмомъ выдвигается принципъ „образованія ума“, заполонившій собою въ XIX в. всякое школьное обученіе и такъ ярко формулированный Шлегелемъ: „Высшее благо и единственно полезная вещь въ жизни есть образованіе“. Еще проф. Гюбшъ въ своей „Arithmetica partensis, 1748“, писалъ: „Если главная цѣль ариѳметики состоитъ съ разрѣшеніи задачъ, то одна изъ *побочныхъ* цѣлей состоитъ въ изощреніи разсудка, какъ на точильномъ ремнѣ, или на точильномъ камнѣ,—въ пріученіи учащихся думать отчетливо, послѣдовательно и осмотрительно“. А въ „Учебникѣ ариѳметики“ Гауффа (1793 г.) сказано уже рѣшительно: „Ариѳметика есть настоящая наука умозрительная. При всякихъ умозаключеніяхъ слѣдуетъ обращать на формальное значеніе вывода такое же вниманіе, если не большее, какъ и на матеріальное значеніе вывода. Наука имѣетъ тѣмъ болѣе формальное значеніе, чѣмъ больше она даетъ опредѣленнаго, вполнѣ законченнаго матеріала для размышленія; примѣромъ такой науки можетъ служить ариѳметика. Но формальная цѣль не можетъ быть достигнута, если ариѳметикѣ обучать точно такъ же, какъ какому нибудь ремеслу или искусству“.

Однако, тѣ же Гюбшъ и Гауффъ рекомендовали преподавать ариѳметику въ ремесленныхъ школахъ безъ объясненій и доказательствъ!

Послѣдняя выписка — изъ Гауффа — совершенно не измѣнилась въ теченіе столѣтія. Преподаватели старой формаціи, къ сожалѣнію, сохранившіеся еще и понынѣ, съ наслажденіемъ подпишутся подъ нею — ибо

такъ мыслятъ и они. Этотъ взглядъ на ариѳметику и— что̀ и слѣдовало ожидать — на всю школьную математику былъ понятенъ въ концѣ XVIII в., какъ выраженіе извѣстнаго прогресса мысли, какъ протестъ противъ догматизма, дрессировки и памятной метòды обученія, царившихъ до него; но сейчасъ, въ XX-мъ вѣкѣ, при наличности психологіи дѣтства и исторіи науки, онъ является лишь уродливымъ пережиткомъ старины.

19. Наряду съ изложеніемъ измѣняется и сама программа математики. Въ XVII ст. цѣлью обученія была подготовка офицеровъ (см. Кассельскій приказъ 1618 г., стр. 22). Въ XVIII ст. — подготовка придворныхъ, гражданскихъ и военныхъ чиновъ. Учебные планы, начиная съ конца XVII ст., измѣняются и на мѣсто древнихъ языковъ вводятъ: геометрію и тригонометрію съ ихъ приложеніями къ топографіи, къ военному и гражданскому инженерному искусству, къ астрономіи и къ механикѣ. Вводятся и практическія занятія по геодезіи. Появляются астрономія и физика. Утилитарный характеръ знаній и отсутствіе экзаменовъ по математикѣ—отличительныя черты этой программы.

Наполеоновскія войны дали новый могучій толчокъ въ сторону усиленія математики; теперь изъ 32 часовъ въ недѣлю въ каждомъ классѣ на матемагику отводится 6; программа дополняется вплоть до аналитической геометріи, сферической тригонометріи, основъ механики и теоріи вѣроятности. Но это продолжалось недолго, и мы увидимъ дальше, какъ въ началѣ XX-го ст. математика стремится завоевать себѣ то мѣсто, какое она по праву занимала уже сто лѣтъ тому назадъ.

Начало XIX вѣка.

20. Наполеоновскія арміи съ воспитанниками Политехнической школы во главѣ, не замедлили показать Европѣ все превосходство математической культуры; французскіе офицеры оказались не только блестящими полководцами и инженерами, но и не менѣе способными администраторами. Старая истина „побѣжденный выигрываетъ“ сказалась и въ началѣ XIX вѣка. Разбитая и уничтоженная Германія послѣ 1806 г. рѣшительно вступаетъ на путь реформъ; Пруссія идетъ впереди. Фридрихъ Вильгельмъ III приглашаетъ Штейна

стать во главѣ правительства, и цѣлый рядъ плановъ реформы создается мгновенно. На первомъ мѣстѣ — реформа школы. Фихте пишетъ свои вдохновенныя „Рѣчи къ нѣмецкой націи“ (1807—1808), указывая на Песталоцци, какъ апостола новой педагогики. Немедленно командируется цѣлый рядъ молодыхъ учителей въ замокъ Ивердонъ, гдѣ Песталоцци открылъ свою вторую школу (1805—1825). Въ 1809 г. директоромъ департамента народн. просвѣщенія назначается Вильгельмъ Гумбольдтъ, его помощникомъ (и вскорѣ преемникомъ) проф. Зифферпъ. Въ 1809—1810 гг. выработанъ новый учебный планъ, которымъ, по справедливости, гордятся до сихъ поръ нѣмецкія народныя школы и университеты. Но въ средней школѣ этотъ планъ подвергся такимъ перипетіямъ, что описаніе ихъ составляетъ одну изъ самыхъ любопытныхъ страницъ всемірной исторіи.

Ново-гуманизмъ.

21. Мы уже указывали, что въ концѣ XVIII вѣка началась реакція противъ сухого утилитаризма раціоналистовъ, противъ рецепта „готовить джентльмэна“. Эта реакція вылилась въ форму ново-гуманистическаго движенія, осчастливившаго насъ классицизмомъ. Справедливость требуетъ признать, что родоначальники ново-гуманизма, Геснеръ (1691—1761) и Эрнести (1707—1781), возставали *именно противъ латинской школы*, противъ ея безсмысленнаго долбленія грамматики и потугъ говорить и писать на древнихъ языкахъ. Ученики и продолжатели обоихъ, Гейне (1729—1812), Гердеръ (1742—1803) и побѣдитель Фридрихъ Вольфъ (1752—1824), шли тѣмъ же путемъ. Внутренняя цѣнность греческой литературы (латинскій языкъ вначалѣ былъ *исключенъ* изъ программы), „божество человѣчности“, выразившееся въ наиболѣе чистомъ видѣ у Грековъ—вотъ что̀ выдвигалось ново-гуманистами на первый планъ. Поменьше грамматики, чтеніе и только чтеніе авторовъ — вотъ ихъ лозунгъ. Въ этомъ они вполнѣ сходились съ реалистами (Ратихій, Коменскій, Лейбницъ, Франке, Базедовъ, Траппъ, Песталоцци, Гербартъ и др.). Оба педагогическихъ лагеря провозглашали принципъ индивидуализаціи. „Чтеніе древнихъ авторовъ

можно рекомендовать и въ школѣ, ибо оно способно внушать любовь къ свободѣ и ненависть къ деспотизму", говоритъ реалистъ Траппъ (1745—1818). „Греческій народъ представляетъ собою образцовое воплощеніе идеи человѣчества" — вторитъ ему Вильгельмъ Гумбольдтъ (1767—1835) [1]). И лозунгъ „Bilde dich griechisch" (воспитай въ себѣ грека) становится наиболѣе передовымъ лозунгомъ въ Германіи.

22. Въ великомъ дѣлѣ преобразованія націи новогуманисты и реалисты пошли рука объ руку. Вольфъ, Гумбольдтъ, Шлегели (два брата) и Зиффернъ — съ одной стороны, школа Гербарта—съ другой, совмѣстно выработали новый учебный планъ 1809—1810 гг., разработанный на широкихъ демократическихъ началахъ, въ которомъ классики и реальныя науки занимали одинаково почетное мѣсто (программа математики была нами указана на стр. 33). Этотъ планъ былъ введенъ въ дѣйствіе въ 1816 г. — и вотъ тутъ-то съ нимъ произошла замѣчательная метаморфоза.

Классицизмъ въ Германіи.

23. Послѣ вторичнаго паденія Наполеона, 25 сентября 1815 г. въ Парижѣ былъ заключенъ Священный Союзъ Александромъ I-мъ, Фридрихомъ Вильгельмомъ III-мъ и Францомъ II-мъ, даже безъ участья ихъ министровъ. Вскорѣ къ союзу примкнули остальныя государства, за исключеніемъ Англіи. Политическое значеніе Союза извѣстно; его можно охарактеризовать словами „эпоха Меттерниха". Вліяніе Союза на школу оказалось рѣшительнымъ и роковымъ. Во Франціи Людовикъ XVIII, принявъ программу Жозефа де-Мэстра (1754—1821), фанатическаго представителя церковнаго абсолютизма и старого порядка, одолжилъ его Александру I, чтобы по французскому образцу организовать и Россію. Въ Австріи и Италіи — Меттернихъ... Въ Пруссіи Фридрихъ-Вильгельмъ III, правда, не рѣшился взять данное обратно, но постарался свести все это къ нулю. Въ 1817 г. учреждается министерство народнаго просвѣщенія, и первымъ министромъ назна-

---

[1]) Старшій братъ знаменитаго Александра, прозваннаго „Аристотель XIX вѣка".

чается баронъ Альтенштейнъ; онъ пробылъ на своемъ посту до смерти (1840 г.). Докладчикомъ по дѣламъ гимназій въ теченіе того же времени состоялъ Іоганнъ Шульце, истинный насадитель казеннаго классицизма. А въ 1819 г. къ нимъ присоединяется извѣстный „фанатикъ трусости“ фонъ-Кампцъ, авторъ „Кодекса жандармеріи“ (1815 г.) [1]), для „удобства“ соединившій въ своихъ рукахъ управленіе двумя департаментами: *департаментомъ полиціи* и *департаментомъ народнаго просвѣщенія*. Дальше идти было некуда...

24. Судьба учебнаго плана Пруссіи, созданнаго Гумбольдтомъ и Зифферномъ и проведеннаго въ жизнь Альтенштейномъ, Шульце и Кампцемъ, особенно интересна для Россіи. Этотъ учебный планъ былъ цѣликомъ введенъ и у насъ—дважды; существенныя черты его сохранились и сейчасъ. Въ виду этого читатели, вѣроятно, не посѣтуютъ на слѣдующія небольшія выдержки.

Гегель и его ученіе объ абсолютѣ царили въ умахъ прусской бюрократіи. Министерскіе „гегельянцы“ издали рядъ замѣчательныхъ циркуляровъ и указовъ. Въ 1820 году учреждается институтъ классныхъ наставниковъ; въ „Инструкціи“ министерство говоритъ: „*Обстоятельства времени болѣе, чѣмъ когда-либо, заставляютъ дорожить введеніемъ въ школы строгой дисциплины, дабы подрастающее поколѣніе не заражалось духомъ разнузданной свободы и дерзости и съ младыхъ лѣтъ пріучалось къ покорности и повиновенію закону. За учениками необходимъ самый бдительный надзоръ не только въ стѣнахъ школы, но и внѣ ея, и при такихъ условіяхъ одни директора гимназій, очевидно, не въ состояніи будутъ удовлетворить необходимо являющимся здѣсь высокимъ требованіямъ*“. Въ 1824 г. министерство полиціи, по соглашенію съ министерствомъ народнаго просвѣщенія, предписало окружнымъ школьнымъ коллегіямъ (русскіе учебные округа) помнить, „*что учебныя учрежденія вовсе еще не достигаютъ своей цѣли, давая воспитанникамъ одно научное образованіе, да не позволяя развиваться при этомъ никакимъ вреднымъ мыслямъ и направленіямъ. Конечная за-*

---

[1]) Эта книга въ числѣ другихъ 28 сожжена на Вартбургскомъ празднествѣ 1817 г.

дача этихъ учрежденій—развивать въ питомцахъ чувство преданности, вѣрности и покорности государю и государству". Въ связи съ этимъ предписывалось „*строжайше слѣдить съ этой точки зрѣнія за преподавателями и подъ личной отвѣтственностью каждаго изъ членовъ коллегіи немедленно доносить о замѣченныхъ признакахъ неблагонадежности не только министерству народнаго просвѣщенія, но одновременно и высшей мѣстной полицейской власти*". Въ томъ же году цензура воспретила переизданіе „Рѣчей къ нѣмецкой націи", впервые прочтенныхъ и напечатанныхъ Фихте въ 1807—1808 гг. съ разрѣшенія военнаго губернатора Берлина, маршала Даву... Комментаріи излишни.

Какъ должны работать гимназисты? Какъ надо вести преподаваніе? Въ указѣ 29 марта 1829 г. министерство требуетъ вывести изъ школы всякія облегченія работы: „*напротивъ того, уже въ школѣ и черезъ школу они должны ясно представить себѣ тѣ труды, тягости и жертвы, которыя являются неизбѣжными условіями плодотворнаго служенія наукѣ, государству и церкви, и съ юности привыкнуть должны къ мысли о суровой высотѣ своего призванія*".

Общество, ученые, врачи, нѣкоторые изъ педагоговъ, конечно, протестовали. Но на ихъ протесты всегда слѣдовалъ знаменитый отвѣтъ: „Arbeiten oder untergehen!" (работать или—вонъ!). Знаменитый мартовскій циркуляръ именно это и говоритъ: никакихъ поблажекъ! Но и этого мало: а если ученикъ *дома* читаетъ что-либо... не по программѣ? Такъ какъ институтъ классныхъ наставниковъ основанъ еще въ 1820 г., то по указу 1829 г. о *внѣклассномъ чтеніи* педагогическому персоналу предписывалось: 1) слѣдить за тѣмъ, что ученикъ читаетъ дома, 2) требовать отъ учениковъ составленія списка всѣмъ книгамъ, попадающимъ въ ихъ руки, 3) просматривать эти списки регулярно въ началѣ каждой учебной четверти, и 4) экстренно требовать ихъ во всякое время. А средствами для давленія на персоналъ служили *кондуитные листы*: классные наставники вели ихъ относительно учениковъ, директора — относительно учителей, Schulrat'ы (окружные инспектора) — относительно директоровъ...

25. Послѣ вступленія на престолъ въ 1840 г. Фридриха-Вильгельма IV стало еще хуже. По иниціативѣ короля на гимназіи нахлынула волна протестантскаго фанатизма. Въ 1843 г. министерство предписало учителямъ ежемѣсячно собираться *„и для взаимной поддержки читать укрѣпляющіе душевный строй рефераты (gesinnungskräftige Vorträge): ибо въ наше надутое знаніемъ время, по взгляду верховныхъ руководителей народнымъ просвѣщеніемъ, важнѣе всего работать надъ духовнымъ складомъ, надъ развитіемъ духа смиренія, ставящаго дѣйствіе благодати неизмѣримо выше личныхъ человѣческихъ усилій“*.

Вспышка 1848 г. повлекла за собою дальнѣйшую реакцію. Гимназіи въ 1856 г. реформировались — выбросивъ за бортъ естествовѣдѣніе и увеличивъ за его счетъ число часовъ по Закону Божію. Гоненіе естественныхъ наукъ и гоненіе математики связано съ политическими и экономическими условіями времени. Крупное развитіе техники создало капитализмъ XIX вѣка, создало крупную буржуазію; послѣдняя потребовала свою долю правъ въ жизни, но натолкнулась на сплоченый союзъ правительства съ дворянствомъ. Оставалось одно—перейти на сторону либераловъ,—и буржуазно-либеральныя революціи XIX вѣка носятъ характерный отпечатокъ этого сплоченія. Но для правительствъ послѣ этого стало яснымъ, что требованія демократизаціи школы и реальности программы наряду съ требованіями политической свободы идутъ изъ одного лагеря. Въ отвѣтъ на эти требованія была наложена печать неблагонадежности на всѣ науки о природѣ и на самыя реальныя школы. Вторую половину XIX ст. можно охарактеризовать, какъ эпоху борьбы реализма съ классицизмомъ, борьбы—только теперь разгорѣвшейся на всемъ земномъ шарѣ, во всѣхъ его культурныхъ уголкахъ [1]).

26. Что же за это время сдѣлалось съ математикой? Судьба ея, печальная, но поучительная, показываетъ

---

[1]) Подробная исторія реформы математики въ концѣ XIX и началѣ XX вв. помѣщена въ нашей книгѣ „Реформа школьной математики“, готовящейся къ печати.

намъ убѣдительно ясно, что педагогическія теоріи создаются на почвѣ политическихъ и экономическихъ условій жизни народовъ. Подвергшись гоненію въ „эпоху Меттерниха“, математика должна была бороться за само свое существованіе и измѣнить радикально свой характеръ и духъ обученія. Широкія утилитарно-прикладныя цѣли конца XVIII и начала XIX вв. смѣнились узко-логическими и формальными; казенный классицизмъ не только понизилъ число часовъ и урѣзалъ матеріалъ (по плану 1837 г., существующему и понынѣ во многихъ государствахъ, Германіи, отчасти въ Австріи, Даніи и Россіи, на математику отведено 38 недѣльныхъ часа вмѣсто прежнихъ 60 и оставлены лишь элементы алгебры, геометріи и тригонометріи); самъ матеріалъ подвергся коренному пересмотру: все конкретное было выброшено, всѣ главы, дающія матеріалъ для приложеній, были замѣнены другими, дающими лишь теоретическія знанія; такъ появились въ алгебрѣ главы объ основныхъ дѣйствіяхъ надъ буквенными выраженіями, о непрерывныхъ дробяхъ и пр.; въ тригонометріи—ученіе о круговыхъ функціяхъ; въ ариѳметикѣ—ученіе о величинахъ и дѣйствіяхъ надъ ними. О характерѣ и цѣли обученія математикѣ краснорѣчиво говоритъ циркуляръ 1834 г. „*Главная цѣль обученія математикѣ состоитъ не въ изученіи теоремъ, которыя—въ томъ или иномъ случаѣ изъ жизни—могутъ быть приложены къ конкретнымъ объектамъ. Она скорѣе состоитъ въ упражненіи разсудка ученика, въ пріученіи его къ ясности и точности своихъ идей, къ логичностив ъ его мышленіи*“.

Вотъ гдѣ зародилась современная умозрительная математика, математика европейской общеобразовательной школы, ничего общаго не имѣющая съ настоящимъ знаніемъ.

Россія въ XIX ст.

27. Намъ могутъ возразить: все это происходило въ Западной Европѣ, но не въ Россіи; *тамъ* утилитаризмъ XVIII вѣка смѣнился классицизмомъ XIX в.; *у насъ* же сразу ввели такой типъ школы и поэтому здѣсь ваши выводы непримѣнимы. Дѣйствительно, исторія школъ въ Россіи до сихъ поръ неизвѣстна почти всѣмъ, не исключая и педагоговъ. Дѣйствительно, принято

думать, будто въ Россіи начали съ классицизма и лишь въ послѣднее время стали ему измѣнять. Однако достаточно будетъ прочесть слѣдующія страницы, чтобы это укоренившееся заблужденіе рухнуло. Читатели съ удивленіемъ увидятъ, что и въ области педагогики математики Россія сказала нѣкогда первое слово—и теперь, 100 лѣтъ спустя, эхо его приходитъ въ Россію обратно изъ-заграницы.

28. До 1803—1804 гг. гимназій въ Россіи не было, за исключеніемъ нѣсколькихъ духовныхъ учебныхъ заведеній, отчасти подходящихъ подъ этотъ типъ. Въ 1803 г. труды Фусса и Румовскаго [1]) положили прочный камень народнаго образованія. Учрежденное въ 1802 году Министерство Народн. Просв. принялось тотчасъ же за созданіе школы трехъ ступеней: начальной, городской, средней. Уставъ 5 ноября 1804 г. предусматриваетъ непрерывность программы для школъ всѣхъ 3 типовъ; каждая школа (городская и средняя) начинаетъ съ того, чѣмъ кончила предыдущая; такимъ образомъ обезпеченъ прямой переходъ изъ одной школы въ другую. Собственно Гимназія была разсчитана на 4 года обученія, соотвѣтствуя приблизительно 4 старшимъ классамъ современной гимназіи. Вотъ ея табель уроковъ.

Классы.	Математика, чистая и прикладная, и Опытная физика	Исторія и Географія.	Статистика.	Логика и Граммат.	Психологія и Нравоученіе.	Эстетика и Риторика.	Право Естественное и Народное.	Политт. Экономія.	Естеств. Исторія.	Технологія.	Наука о торговлѣ.	Латинскій.	Французскій.	Нѣмецкій.	ИТОГО.
I	6	6	—	4	—	—	—	—	—	—	—	6	4	4	30
II	6	6	—	—	4	—	—	—	—	—	—	6	4	4	30
III	6	—	4	—	—	4	—	—	4	—	—	4	4	4	30
IV	—	—	2	—	—	—	4	4	4	4	4	—	4	4	30

[1]) Николай Фуссъ (1755—1826), помощникъ и другъ Эйлера, непремѣнный секретарь С.-Петербургской Академіи Наукъ, извѣстный математикъ и педагогъ. Его труды по начальной математикѣ были первыми гимназическими и кадетскими учебниками. Вмѣстѣ съ нимъ дѣятельное участіе въ выработкѣ программъ принималъ астрономъ Румовскій (1734—1815), бывшій преподаватель, потомъ вице-президентъ Академіи Наукъ и наконецъ попечитель Казанскаго учебнаго округа.

Росписаніе занятій по днямъ недѣли было слѣдующее:

Понедѣльникъ	8—12 ч. и	2—4 ч.
Вторникъ	8—12 ч. и	2—4 ч.
Среда	8—11 ч.	—
Четвергъ	8—12 ч. и	2—4 ч.
Пятница	8—12 ч. и	2—4 ч.
Суббота	8—11 ч.	—

Кромѣ того, на рисованіе отводилось по 2 часа въ недѣлю: по Средамъ съ 1 до 3 первый и второй классы (уроки общіе), по Субботамъ—третій и четвертый.

Любопытно, что въ Гимназіи не было уроковъ по Закону Божію и русскому языку, и только по указу 16 ноября 1811 г. предписано преподавателямъ (а не духовенству) ввести добавочныя занятія по религіи и экзаменовать по Закону Божію въ присутствіи особо приглашенныхъ духовныхъ лицъ.

Каковы были программы, духъ обученія, цѣли и методы—объ этомъ пусть свидѣтельствуетъ самъ уставъ. Вотъ выдержки изъ него.

„§ 4. Учрежденіе Гимназій имѣетъ двоякую цѣль: 1) приготовленіе къ Университетскимъ наукамъ юношества, которое по склонности къ онымъ, или по званію своему, требующему дальнѣйшихъ познаній, пожелаетъ усовершенствовать себя въ Университетахъ; 2) преподаваніе наукъ, хотя начальныхъ, но полныхъ въ разсужденіи предметовъ ученія, тѣмъ, кои, не имѣя намѣренія продолжать оные въ Университетахъ, пожелаютъ пріобрѣсть свѣденія, необходимыя для благовоспитаннаго человѣка [1]).

§ 6. Каждая Гимназія имѣетъ восемь учителей, которые преподаютъ помянутые предметы ученія слѣдующимъ образомъ: одинъ Учитель преподаетъ Чистую и Прикладную Математику и Опытную Физику; другой Исторію, Географію и Статистику; третій Философію, Изящныя Науки и Политическую Экономію; четвертый Естественную Исторію, основанія наукъ, относящихся

---

[1]) Кромѣ того, Гимназія имѣла цѣлью подготовить преподавателей для начальныхъ и городскихъ училищъ.

къ торговлѣ и Технологіи; пятый обучаетъ Латинскому языку; шестой Нѣмецкому; седьмой Французскому; восьмой рисованію.

§ 9. Учители Наукъ, преподаваемыхъ въ Гимназіи, называются старшими, и состоятъ въ 9 классѣ Государственныхъ чиновниковъ. Учители языковъ называются младшими, и состоятъ въ 10 классѣ. Учитель рисованія состоитъ въ 12 классѣ.

§ 18. Ученіе въ Гимназіяхъ начинается съ тѣхъ предметовъ, которые слѣдуютъ за оконченными въ уѣздныхъ Училищахъ.

§ 21. Учитель Мат. и Физики преподаетъ уроки въ недѣлю по 18 часовъ: въ первомъ классѣ обучаетъ по шести часовъ въ недѣлю, проходя по порядку части Чистой Математики: Алгебру, Геометрію и Плоскую Тригонометрію. Учитель сей долженъ стараться вести Алгебру наравнѣ съ Геометріею, дабы показать необходимость и пользу оной въ рѣшеніи геометрическихъ задачъ. Во второмъ классѣ сей же Учитель, обучая по шести часовъ въ недѣлю, оканчиваетъ Чистую и начинаетъ Прикладную Математику и Опытную Физику. Въ третьемъ классѣ, обучая также по 6 часовъ въ недѣлю, продолжаетъ и оканчиваетъ Прикладную Мат-ку и Опытную Физику.

§ 28. Дабы лучше соединить теорію съ практикою и дать ученикамъ ясное понятіе о многихъ предметахъ, которые проходили они въ классахъ, Учители, преподающіе Математику, Естественную Исторію и Технологію, должны съ болѣе успѣвшими изъ своихъ учениковъ ходить во время вакаціи за городъ; сіе послужитъ тѣмъ ученикамъ нѣкотораго рода награжденіемъ. Учитель Математики пріобучаетъ учениковъ къ главнѣйшимъ дѣйствіямъ Практической Геометріи и показываетъ имъ въ сихъ прогулкахъ различные роды мельницъ, гидравлическихъ машинъ и другихъ механическихъ предметовъ, если оные находятся въ окрестностяхъ того мѣста, гдѣ состоитъ Гимназія. Учитель Ест. Ист. и Технологіи собираетъ травы, различные роды земель, камней, и изъясняетъ ихъ свойства и отличительные признаки. Въ зимнее время, сей же Учитель съ частью своихъ учениковъ осматриваетъ

въ городѣ фабрики, мануфактуры и мастерскія художниковъ, дабы предметы, которые онъ преподаетъ по сей части, объяснить практикою: ибо рисунки и описанія не могутъ дать яснаго и достаточнаго о томъ понятія.

§ 31. Сверхъ того въ каждой Гимназіи должны быть: 1) Библіотека, избранная изъ разныхъ извѣстнѣйшихъ классическихъ Авторовъ и лучшихъ ученыхъ твореній иностранныхъ и Россійскихъ, наипаче относящихся до учебныхъ предметовъ, преподаваемыхъ въ Гимназіи. 2) Собраніе географическихъ картъ, глобусовъ и армилярныхъ сферъ съ небольшимъ атласомъ древней Географіи, для употребленія Учителя, толкующаго Латинскихъ классиковъ, и для учителя Исторіи и Географіи. 3) Собраніе естественныхъ вещей изъ всѣхъ трехъ царствъ природы, потребныхъ къ изъясненію и наглядному познанію Естественной Исторіи, особливо-жъ всѣхъ естественныхъ произведеній той Губерніи, въ коей Гимназія находится. 4) Собраніе чертежей и моделей машинъ, наиболѣе употребляемыхъ къ изъясненію Механики и другихъ частей Прикл. Мат. и Техн—гіи. 5) Собраніе геометрическихъ тѣлъ, геодезическихъ орудій, астролябій, компасовъ и прочее. 6) Собраніе орудій физическихъ. Каждое изъ сихъ собраній должно быть ввѣрено надзиранію Учителя той науки, къ объясненію которой они способствуютъ.

Обязанности Учителей Гимназій, общія всѣмъ Учителямъ.

§ 38. Учитель, всѣхъ приходящихъ въ классъ учиться его предметамъ, долженъ обучать, не требуя отъ нихъ никакой платы за ученіе; при самомъ же ученіи не долженъ пренебрегать дѣтей бѣдныхъ родителей; но всегда имѣть въ памяти, что онъ приготовляетъ членовъ обществу.

§ 40. Онъ долженъ стараться всѣми силами, дабы ученики преподаваемые имъ предметы понимали ясно и правильно; быть терпѣливымъ и исправнымъ, и полагаться больше на свою прилежность и порядочныя правила, нежели на чрезмѣрный трудъ учениковъ своихъ. Для малолѣтнихъ дѣтей онъ старается сдѣлать

ученіе свое легкимъ, пріятнымъ и болѣе забавнымъ, нежели тягостнымъ.

Объ ученикахъ.

§ 59. Каждый ученикъ обязанъ имѣть по одному экземпляру начальныхъ курсовъ, преподаваемыхъ въ Гимназіи, въ которыхъ между печатными листами должны быть вплетены листы бѣлые, дабы каждый ученикъ во время преподаванія ученія, или по выходѣ изъ классовъ, могъ на оныхъ записывать объясненія и замѣчанія Учителя, который долженъ разсматривать по крайней мѣрѣ одинъ разъ въ недѣлю сіи примѣчанія, дабы удостовѣриться, такъ ли учащійся понялъ его наставленія".

Мы думаемъ, что Уставъ говоритъ самъ за себя. Не пора-ли, парафразируя Руссо, воскликнуть: „Назадъ, къ духу устава 1804 года"!

Уваровъ. 29. Но это было время минутныхъ, мгновенныхъ событій. Люди и учрежденія изнашивались и мѣнялись, какъ перчатки. Вскорѣ на сцену выступилъ первый насадитель классицизма—графъ Уваровъ (1786—1855). Его формуляръ довольно интересенъ. Получивъ домашнее образованіе, онъ уже четырнадцатилѣтнимъ юношей состоитъ на службѣ въ Министерствѣ Иностранныхъ Дѣлъ, затѣмъ знакомится съ Европой въ качествѣ посланника. Блестящій даръ рѣчи, великолѣпное знаніе новыхъ и древнихъ языковъ—его умственный багажъ. Съ похвалой о немъ отзывался, между прочимъ, и Гёте. Въ 1810 г. онъ оставляетъ службу по М. И. Д. и назначается директоромъ департамента мануфактуръ и торговли и директоромъ государственнаго заемнаго и коммерческаго банковъ. Но въ апрѣлѣ 1810 г. министромъ нар. просв. назначается гр. Разумовскій, и уже 31 декабря его молодой зять получаетъ СПб. Учебный округъ. 24-хъ-лѣтній попечитель рѣшаетъ заняться проектомъ новаго гимназическаго устава; 31 октября 1811 г. такъ наз. „Уваровскій планъ" представленъ Министру. Первоначальный уставъ, вѣрнѣе—его эскизъ, находился подъ вліяніемъ идей бар. Штейна, прусскаго реформатора; но уже въ томъ же году на горизонтѣ

вырисовалась зловѣщая фигура гр. Жозефа де-Мэстра; къ его планамъ сочувственно относится гр. Разумовскій.

Уставъ 1804 г. пока не отмѣняется, но исправляется. Такъ, вновь открывающіяся гимназіи вводятъ понемногу классическіе языки; сдѣлано обязательнымъ преподаваніе Закона Божія; кое-гдѣ прибѣгаютъ къ тѣлеснымъ наказаніямъ. Манифестъ объ образованіи Священнаго Союза (1815) встрѣченъ съ глубокой радостью въ правящихъ кругахъ, и его привѣтствуетъ однимъ изъ первыхъ Сперанскій. Появляются на сцену Аракчеевъ и Магницкій. Въ 1819 г. Уваровскій планъ введенъ циркулярнымъ распоряженіемъ, Магницкій принимается за исправленіе университетовъ, а его вѣрный сподвижникъ Руничъ, отставной Лейбъ-Гвардіи сержантъ, назначается членомъ Главнаго Правленія Училищъ. Для цензуры учебниковъ создается особый Ученый Комитетъ. Такъ какъ Уваровъ 1819 года еще не сталъ Уваровымъ сороковыхъ годовъ, то гоненіе направляется и противъ него. Магницкій и Руничъ ополчаются противъ естественнаго права и естествознанія вообще; въ 1821 г. Уваровъ терпитъ пораженіе при ихъ защитѣ и уходитъ изъ округа обратно въ свой департаментъ и банки. На его мѣсто назначается попечителемъ Руничъ, доведшій до конца разрушеніе СПБ. Университета. Въ то же время адмиралъ Шишковъ назначается министромъ; въ его руки передана и цензура, управленіе коей прославило его имя.

30. Уставъ Уварова—это уставъ Прусскій. Въ немъ самобытна лишь знаменитая Уваровская тройца *„православіе, самодержавіе, народность“*. Семилѣтній гимназическій курсъ имѣлъ цѣлью отдѣлить гимназію отъ остальныхъ училищъ и затруднить переходъ изъ городскихъ училищъ въ гимназіи. Характеръ курса—чисто образовательный; но математика сохранила свой прикладной характеръ, хотя программа была значительно уменьшена (исключены начала дифф. и интегр. исчисленій).

Николаевская эпоха.

31. Николаевская эпоха кладетъ рѣшительный отпечатокъ на школу. Цѣлымъ рядомъ распоряженій затрудняется доступъ въ гимназію для лицъ непривиллегированныхъ

сословій, начиная съ 1827 года. Въ гимназіяхъ заводятся „благородныя“ скамейки для дворянъ, отдѣльно для плебеевъ. Въ 1828 г. Уваровскій уставъ слегка преобразуется: греческій языкъ признанъ необязательнымъ, увеличена плата за право ученія, введены тѣлесныя наказанія. Математика проходится до коническихъ сѣченій включительно (ариѳметика, алгебра, геометрія, тригонометрія, начертательная и аналитическая геометрія). Въ VII классѣ—общій обзоръ пройденнаго: „По окончаніи сего учитель излагаетъ кратко связь и обозрѣніе всего, что было преподано во всѣхъ классахъ, и тѣмъ сближаетъ понятія учениковъ о предметахъ, въ разное время ими познанныхъ“.

Въ 1832 г. Уваровъ назначается помощникомъ Министра Н. Пр., въ 1833 г.—управляющимъ министерствомъ и, наконецъ, въ 1834 г. министромъ. На этомъ посту онъ остается до конца 1849 года. Теперь Уваровъ, послѣ 12 лѣтъ, уже измѣнился; онъ весь на сторонѣ своей тройцы. Ограниченія идутъ за ограниченіями—и даже излюбленный его классицизмъ подвергается гоненіямъ прежняго своего покровителя. Въ 1837 г. послѣдовалъ Высочайшій рескриптъ на имя Уварова: „О точномъ и повсемѣстномъ наблюденіи правилъ о пріемѣ въ учебныя заведенія людей различныхъ состояній“. 11 Іюня 1845 г. Уваровъ вноситъ проэктъ „О возвышеніи платы за право обученія“. Проэктъ Высочайше утвержденъ съ помѣткою: „Притомъ надо сообразить, нѣтъ-ли способовъ затруднить доступъ въ Гимназіи для разночинцевъ?“ 3 дня спустя Уваровъ спѣшитъ донести, что онъ это предвидѣлъ и что еще 3-го сего Іюня имъ внесена въ Комитетъ Министровъ записка „О средствахъ устранить отъ Гимназій дѣтей купцовъ, мѣщанъ и другихъ лицъ податного состоянія“.

Одновременно съ этимъ подвергается измѣненіямъ учебный планъ. Въ 1844 г. прекращено преподаваніе статистики, въ 1847 г.—логики. 15 декабря 1845 г. урѣзана программа по математикѣ—исключена начертательная и аналитическая геометрія и число часовъ уменьшено до 20. Но интересно, что духъ обученія математикѣ остался прежній — прикладной. „Преподава-

тель [1]) преимущественно долженъ былъ заботиться о томъ, чтобы развить и укрѣпить въ ученикахъ самодѣятельность, въ примѣненіи извѣстныхъ имъ теоретическихъ началъ къ рѣшенію практическихъ задачъ".

32. 1848 годъ какъ ураганъ пронесся надъ Европой. Когда все было приведено въ образцовый порядокъ, стали доискиваться причинъ волненій. Оказалось, что все горе отъ классицизма въ школахъ: „знакомство [2]) съ древними литературами и съ условіями жизни классическихъ народовъ способствуетъ къ распространенію республиканскихъ идей и къ культу языческаго просвѣщенія". Въ одинъ и тотъ же 1849 годъ Франція и Россія изгнали классиковъ и поручили естественнымъ наукамъ и математикѣ заботиться о порядкѣ и нравственности. 21 марта Гимназіи были раздѣлены на два отдѣленія (бифуркація)—классическое и реальное; да и то доступъ на первое былъ открытъ преимущественно дворянамъ, какъ болѣе надежному элементу. Первые три класса были общіе, латинскій и греческій начинались съ 4-го на классическомъ отдѣленіи. Усилена опять математика до 30 часовъ, введено законовѣдѣніе. 12 Октября 1851 г. новыя перемѣны: просматривая таблицу уроковъ на 1852 г., Николай I вычеркнулъ совершенно греческій языкъ и только, уступая просьбамъ министра, согласился оставить его въ 9-ти гимназіяхъ; математика опять подверглась сокращенію до 22½ ч. Освободившіеся отъ греческаго часы были отданы на уроки по естествознанію.

33. Наступило 18 февраля 1855 г.—и почувствовалась новая живительная струя... Уже въ Сентябрѣ того же года Министръ Народнаго Просвѣщенія, разъѣзжая по Россіи, всюду произносилъ знаменательныя слова: „Наука, господа, всегда была для насъ одной изъ главнѣйшихъ потребностей, *но теперь она первая.*

---

[1]) *Е. Шмидъ,* Исторія среднихъ учебныхъ заведеній въ Россіи, стр. 351.

[2]) *бар. Николаи,* Pia desideria.—Въ своей запискѣ авторъ, бывшій Попечитель Кіевскаго Учебнаго Округа, затѣмъ Товарищъ Министра (до 1866 г.) и, наконецъ, Министръ Нар. Просв. (1881—1882)—слѣдовательно, лицо вполнѣ компетентное — излагаетъ исторію и результаты насажденія классицизма 1871 г.

Если враги наши имѣютъ надъ нами перевѣсъ, то единственно силою своего образованія. И такъ мы должны всѣ наши силы устремить на это великое дѣло“.

Эти слова особенно интересны еще и потому, что ихъ произносилъ одинъ изъ столбовъ прежняго режима, Норовъ, принявшій на себя обязанности министра 11 апрѣля 1854 г. и такъ быстро усвоившій новую точку зрѣнія [1]). Но таковы были всѣ дѣятели послѣднихъ лѣтъ до 1855 г.; по знаменитому выраженію Шевченки „Отъ хладныхъ финскихъ скалъ до пламенной Колхиды Россія молчала, ибо—благоденствовала“...

Реформы шестидесятыхъ годовъ.

34. Общество не замедлило отозваться на этотъ призывъ Норова. Онъ совпалъ какъ разъ съ небывалымъ, изумительнымъ расцвѣтомъ наукъ о природѣ. Дарвинъ и дарвинизмъ—это цѣлая революція; на ряду съ нимъ и даже раньше Либихъ, Дюма, Гофманъ, Бертло и др. создаютъ органическую химію; Сенъ-Клеръ-Девиль, Бертло и Томсонъ—физическую химію; Майеръ и Гельмгольцъ—ученіе объ энергіи; Гельмгольцъ, Клодъ Бернаръ и Дюбуа-Реймонъ—физіологію и т. д., и т. д. И все это одновременно и сразу. Къ 60-му году революція была закончена, основы для дальнѣйшей эволюціонной работы созданы. Раздавшійся въ это время призывъ—посвятить свои силы наукѣ—пришелся какъ нельзя болѣе кстати. Безъ этого призыва „можетъ [2]) быть Менделѣевъ и Ценковскій скоротали бы свой вѣкъ учителями въ Симферополѣ и Ярославлѣ, правовѣдъ Ковалевскій былъ бы прокуроромъ; юнкеръ Бекетовъ [3]) эскадроннымъ командиромъ, а саперъ Сѣченовъ рылъ бы траншеи по всѣмъ правиламъ своего искусства“.

---

[1]) Недурна самохарактеристика Норова, подписанная подъ его портретомъ:

Безъ дѣла и безъ скуки
Сижу, сложа я руки.

[2]) *К. А. Тимирязевъ,* Пробужденіе естествознанія въ третьей четверти XIX вѣка, стр. 4.

[3]) Рѣчь идетъ о ботаникѣ А. Н. Бекетовѣ и геологѣ В. О. Ковалевскомъ.

Организуется въ 1858 г. „Торговый Домъ Струговщикова, Пахитонова и Водова“, впослѣдствіи преобразованный въ издательство „Общественная Польза“. Этотъ оригинальный „Торговый Домъ“ вскорѣ устраиваетъ въ залахъ С.-Петербургскаго Пассажа рядъ блестящихъ популярныхъ лекцій—первое начало Народнаго Университета. Здѣсь читаютъ физикъ Ленцъ, біологъ Ценковскій, механикъ Вышнеградскій (будущій министръ финансовъ), медикъ Пеликанъ, наконецъ, „Сократъ въ густыхъ эполетахъ“—Петръ Лавровъ. Его лекціи по исторіи мысли и исторіи наукъ до сихъ поръ являются первой ласточкой. Задуманная имъ трилогія: Аристотель — Бэконъ — Контъ, прервана на Аристотелѣ въ силу резолюціи высшаго военнаго начальства: „а сему полковнику не разрѣшаю“. Популяризація науки шла и изъ рядовъ литераторовъ, гдѣ царствовалъ тогда Писаревъ, такъ недостаточно оцѣненный до сихъ поръ Россіей.

Реформа 1871 г.

35. Этотъ пышный отвѣтъ на призывъ, однако, не пришелся по вкусу. Дарвинизмъ и матеріализмъ вскорѣ показали, что науки о природѣ далеко не такъ въ сторонѣ отъ общественнаго строя, какъ думали о нихъ раньше. Проэктъ устава 1860 г., гдѣ латинскій начинался съ III-го класса, греческій — съ V-го, на математику отводилось снова $27^1/_2$ часовъ, а на естествознаніе и физику — цѣлыхъ 20 часовъ, — подвергся ожесточеннымъ нападкамъ. Его передѣлывали дважды — въ 1862 и 1864 гг. Въ угоду защитникамъ классицизма постепенно уменьшались программы по математикѣ и естественнымъ наукамъ и увеличивались по древнимъ языкамъ. Этотъ переходъ къ классицизму совершался незамѣтно. Уставъ 1864 г., давая возможность выбирать между классической и реальной гимназіей, и предоставляя воспитанникамъ обѣихъ одинаковыя права, былъ лебединою пѣсней либеральныхъ реформъ. Съ этого же момента Катковъ и Леонтьевъ начинаютъ рѣшительную борьбу за насажденіе классицизма, но не классицизма ново-гуманистовъ, нѣтъ! Ихъ цѣли и стремленія совсѣмъ иныя. Тройственный союзъ—Катковъ, Леонтьевъ, графъ Толстой—распредѣлилъ между

сочленами роли,—и работа закипѣла. Въ 1866 г. графъ Толстой становится министромъ и беретъ на себя проведеніе проэктовъ, Катковъ—подготовку общественнаго мнѣнія, Леонтьевъ—изготовленіе проэктовъ. На долю послѣдняго выпала главная, но неблагодарная, незамѣтная работа. До сихъ поръ Россія считаетъ творцомъ устава 1871 г. Каткова. Но такъ какъ единственнымъ творцомъ является Леонтьевъ, то небезъинтересно привести его мнѣніе о задачахъ школы. Вотъ оно: „Необходимо всѣми силами бороться противъ народнаго образованія. Если Россія сопротивлялась сколько-нибудь успѣшно духу времени, то этимъ мы обязаны до извѣстной степени безграмотности народа“.

Такъ какъ даже Леонтьевъ не думалъ, что возможно уничтожить гимназіи, то оставалось одно: охранять ихъ отъ всякаго размышленія, убить самостоятельность и пріучить къ механизму дѣйствій. Лучшимъ средствомъ для этого оказались... латинскій и греческій языки! „Усиленіе [1]) изученія древнихъ языковъ должно способствовать къ отрезвленію юношества отъ современнаго свободомышленія какъ религіознаго, такъ и политическаго“.

36. 30 іюля 1871 г. давно желанная реформа, наконецъ, свершилась. Естествознаніе окончательно изгнано, бифуркація отмѣнена, математика приведена къ минимуму и къ логикѣ: все прикладное исключено, на первый планъ выдвинута формальная цѣль обученія. Достаточно указать, что учебные планы списаны съ прусскихъ, съ ихъ грамматикой и „extemporalia“; внутреннее устройство—тоже (институтъ классныхъ наставниковъ и проч., и проч.). Вмѣсто реальныхъ гимназій учреждены реальныя училища съ ограниченными правами; ихъ цѣль, по уставу 15 мая 1872 г., „общее образованіе, приспособленное къ практическимъ потребностямъ и къ пріобрѣтенію техническихъ познаній“.

---

[1]) *бар. Николаи*, Pia desideria.—Тамъ же онъ добавляетъ: „Изданіе устава 1871 г. состоялось, хотя и негласно, подъ вліяніемъ предвзятаго убѣжденія противъ сочинителей предшествующаго устава (1864), будто бы поклонявшихся идеямъ, такъ называемымъ, либеральнымъ, въ противуположность охранительнымъ“.

Только теперъ былъ нанесенъ ударъ математикѣ. Сведенная къ 28 часамъ изъ общаго числа 226 часовъ, принужденная питаться учебниками Малинина, Давыдова и Киселева, загнанная на задворки школы, она вскорѣ порвала съ традиціями и превратилась въ орудіе отупѣнія. Математикѣ учились, кто хотѣлъ; обыкновенно успѣхи ученика по древнимъ языкамъ заставляли начальство смотрѣть сквозь пальцы на полное его пренебреженіе даже элементами математики...

Неправда-ли, хочется воскликнуть: Revenons à 1804!

Заключеніе. 37. Дальнѣйшая исторія русской школы всѣмъ извѣстна и изложеніе ея выходитъ за предѣлы нашей задачи. Мы хотѣли показать, насколько безпомощны программы сами по себѣ и какъ онѣ слагаются подъ вліяніемъ политическихъ и соціальныхъ условій; въ этомъ отношеніи исторія русскихъ школъ за послѣднее столѣтіе очень поучительна. Мы видѣли, какъ естествознаніе мѣнялось на классиковъ, классики на естествознаніе и опять естествознаніе на тѣхъ же классиковъ; на нашихъ глазахъ эта смѣна происходитъ уже въ четвертый разъ. Старая борьба реализма съ вербализмомъ закончится на землѣ не скоро, но оцѣнка классическаго образованія дана уже давно и не подвергнется переоцѣнкѣ. Она—въ слѣдующихъ словахъ нѣмецкаго педагога Магера: „*Наша средняя школа одно изъ проявленій той великой лжи, которою страдаетъ вся наша общественная жизнь. Когда на нее глядишь, то кажется, что тамъ идетъ какая-то игра, гдѣ всѣ участники расплачиваются другъ съ другомъ фальшивою монетой*“.

А оріенталистъ и публицистъ Лягардъ выразился покороче: „*Три вещи являются плодомъ нашего образованія: больные глаза, смертельное отвращеніе къ тому, что̀ осталось позади, и неспособность смѣло идти впередъ*“.

ГЛАВА III.

Наглядная и лабораторная методы.

„Наглядное представленіе есть абсолютный фундаментъ всякаго познанія".
Песталоцци.

„Путь къ уму черезъ глаза и руки".
Кропоткинъ.

Идея нагляднаго обученія.

1. Идея нагляднаго обученія стара какъ міръ. Великая учительница — природа даетъ первые уроки по наглядной методѣ, правда, не особенно заботясь, какъ эти уроки отразятся на воспринимающемъ ихъ ребенкѣ. Ребенокъ падаетъ, обжигаетъ и порѣзываетъ руки, обвариваетъ языкъ и т. д., и эти наглядные уроки съ ихъ конкретными послѣдствіями суть первыя начала ученія о связи между явленіемъ и его причиной, между „имѣемъ" и „слѣдовательно"; выражаясь математически — эти уроки знакомятъ съ идеей функціональной зависимости.

Но переходъ отъ *идеи* нагляднаго обученія къ разработанной *методѣ* нагляднаго обученія совершался крайне медленно. Прошли тысячелѣтья, пока человѣчество измѣнило свою точку зрѣнія на обученіе, пока положеніе науки: „психологія взрослаго человѣка совершенно иная, чѣмъ психологія дѣтскаго возраста"—завоевало себѣ мѣсто въ педагогикѣ. Исторія созиданія и распространенія наглядной методы — какъ и исторія педагогики и школъ — лишній разъ подчеркиваетъ диктатуру среды, а не отдѣльныхъ личностей, не исключая и геніевъ.

Индія и Греція.

2. Условія жизни у различныхъ народовъ древности способствовали различной степени развитія тѣхъ или иныхъ пріемовъ изложенія мыслей. Въ этомъ отношеніи интересно сопоставить

Индусовъ съ Греками. „Мелкій [1]), разсчетливый и опутанный софизмами умъ грека вѣчно боялся ловушки, вѣчно искалъ подробнѣйшихъ разъясненій и не довѣрялъ чувствамъ; отсюда произошло то исключительное увлеченіе разсужденіемъ, логическимъ построеніемъ доказательства, которое у Эвклида дошло до апогея... Совершенно иной складъ ума проявился у Индусовъ. Роскошная тропическая природа съ ея богатствомъ формъ пробуждала чувства, разжигала фантазію, манила на просторъ; мы видимъ у Индусовъ отсутствіе чисто логическихъ вычисленій и широкій вычислительный розмахъ. Доказуемость замѣнена интуиціей. Тамъ, гдѣ Грекъ исписывалъ страницы сухихъ отвлеченныхъ разсужденій, Индусъ помѣщалъ чертежъ и вмѣсто всѣхъ доказательствъ подписывалъ единственное слово: „*смотри!*“ —

Арабы.

3. Попытки ввести наглядность въ преподаваніе, однако, были сдѣланы не скоро. Въ этомъ виноваты арабы, перенявшіе отъ грековъ мѣтодъ изложенія и превзошедшіе даже своихъ учителей. Заслуга арабовъ громадна: они сохранили древнюю науку; но въ то же время ихъ собственный научный вкладъ невеликъ благодаря, главнымъ образомъ, тому, что они совершенно не допускали опыта въ естественныхъ наукахъ и не признавали рисованія. „Въ глазахъ [2]) мусульманина — преступленіе прикоснуться къ трупу иначе, какъ для погребенія. Онъ вѣритъ, что душа постепенно уходитъ изъ тѣла, по мѣрѣ того, какъ оно разлагается. Поэтому онъ съ ужасомъ отвергаетъ дѣйствіе, которое, какъ разсѣченіе, насильственно бы отдѣляло душу отъ тѣла. Кромѣ того, наиболѣе ревностные магометане считаютъ грѣхомъ дѣлать изображенія мужчинъ, женщинъ, даже животныхъ. Что отвѣтишь ты этой рыбѣ, — говорятъ они — въ день суда, когда она спроситъ у тебя ея душу?“

Такимъ образомъ мы видимъ, что наука и опытъ въ то время не могли соединиться воедино; и мусуль-

---

[1]) *В. Мрочекъ*, Прямолинейная тригонометрія, часть I. — Историческій очеркъ, стр. X.

[2]) *Cuvier*. Histoire des sciences naturelles, I, 381.

манскій, и христіанскій міръ одинаково отвергали опытныя изслѣдованія даже въ тѣхъ областяхъ знанія, гдѣ безъ нихъ, казалось, нельзя обойтись. Умозрѣніе и его дѣтище — фантазія, — царствовали оффиціально. Оставалось одно: искать истину тайно и знакомить съ добытыми результатами — также тайно.

Союзы и общества.

4. Всемірная трагедія крестовыхъ походовъ дала Европѣ громадные минусы въ области политики, но зато ознаменовалась огромными плюсами въ области духа. Сношенія съ Арабами оказались весьма плодотворными. Пробудилась пытливость, проснулся религіозный скептицизмъ, возросло стремленіе къ обновленію и расширенію личной и общественной жизни. Еще въ 1170 г. въ эпоху перваго Ренессанса, югъ Франціи оказался покрытымъ тайными общинами Вальденсовъ; ихъ цѣль — реформа церкви, освобожденіе мысли. Рядомъ съ ними распространяли свои взгляды мистически настроенные Катары (чистые). Къ началу XIII вѣка ихъ общины (Вальденсовъ и Катаровъ) разсѣялись по южной Франціи, сѣверной Германіи, Швейцаріи, Лотарингіи и даже за Пиринеями — въ Испаніи. Альбигойскія войны (1215—1235) уничтожили ихъ во Франціи, по крайней мѣрѣ явно, но остатки перебрались въ Германію и Испанію. Тайное ученіе распространялось. Измѣнялись названія обществъ, суть оставалась та же. Возникли „Божьи друзья“ (Германія, Италія, Венгрія), „Братья совмѣстной жизни“ (Германія, Нидерланды, Чехія), „Богемскіе братья“ (Германія, Польша), Анабаптисты (Швейцарія, Германія) и добрый десятокъ имъ подобныхъ. Всѣ эти общины, путемъ совмѣстной жизни и интернатовъ, смогли выполнять великую задачу — *воспитаніе народа и юношества.*

Одновременно съ этимъ существовали тайныя Академіи, извѣстныя подъ названіемъ „Союзовъ Алхимиковъ“. Алхимическое ученіе, занесенное чрезъ посредство испанскихъ арабовъ въ Европу, стало офиціальной вывѣской всѣхъ ученыхъ XII вѣка. Въ XIII в. имена Альберта Великаго (1193—1280), Ѳомы Аквинскаго (1225—1274), Роджера Бэкона (1214—1294), Арнольда изъ Вилляновы (1240—1314) и Раймонда Люл-

люса (1234—1315) олицетворяютъ собою разцвѣтъ науки. Эти лица — явныя свидѣтельства существованія Академій. Густой мракъ, окутывавшій ихъ, теперь понемногу разсѣялся; разсказы о занятіяхъ ихъ членовъ, до сихъ поръ наводнявшіе исторію, оказались легендарными и злостными выдумками. „Эти алхимическіе союзы, — говоритъ знатокъ вопроса, Георгъ Шустеръ, — которые на самомъ дѣлѣ представляли собой настоящія академіи математиковъ и естествовѣдовъ, пользовались всей своей апокалиптической высокопарной болтовней, всѣми своими таинственными образами въ рѣчи, переплетавшими самое высокое и святое, что только занимало умъ человѣка и волновало его сердце, съ алхимическими ученіями и операціями, — пользовались всѣмъ этимъ спеціально для того, чтобы замаскировать свои религіозныя и научныя убѣжденія и натурфилософскія свѣдѣнія, находившіяся въ прямомъ противорѣчіи съ господствующимъ ученіемъ церкви“.

Роджеръ Бэконъ.

5. Во второй половинѣ XIII вѣка на папскомъ престолѣ сидѣлъ Климентъ IV, французъ по происхожденію, бывшій до того легатомъ въ Англіи. Его сношенія съ Бэкономъ, котораго благоговѣвшіе передъ нимъ современники уже тогда называли „doctor mirabilis“, подали мысль опубликовать ученіе алхимиковъ въ видѣ отдѣльнаго сочиненія. Такъ возникъ безсмертный „Opus majus“ (1267). Въ этомъ и другихъ сочиненіяхъ геніальный мыслитель проводитъ въ жизнь идеи научнаго опыта и нагляднаго обученія. „Недостаточно [1]) аргументовъ, требуется опытъ. Это ясно и въ математикѣ, гдѣ доказательства имѣютъ наиболѣе силы. Имѣющій, безъ опыта, хотя бы наилучшее доказательство теоремы о равнобедренномъ треугольникѣ, всетаки не успокоится и не убѣдится, пока не будетъ сдѣланъ ему опытъ черезъ пересѣченіе двухъ круговъ и проведеніе отъ него линій къ концамъ данной линій. Тогда приметъ доказательство съ полнымъ удовлетвореніемъ. Когда Аристотель говоритъ, что *доказательство* [2]) *даетъ знаніе,*

---

[1]) „Opus majus“, VI, 336.
[2]) Курсивъ вездѣ нашъ.

то понимать нужно: *если сопровождается опытомъ, не есть голое доказательство.* А когда въ „Метафизикѣ“ именуетъ знающаго причину и разумъ вещей болѣе мудрымъ, чѣмъ тотъ, кто пользуется только опытомъ, то разумѣетъ тѣхъ пользующихся опытомъ, которые познаютъ голую истину, не доходя до причинъ. Я же говорю о тѣхъ, кои *путемъ опыта познаютъ разумъ и причину вещей*“.

— „Изложеніе [1]) должно быть нагляднымъ; послѣднее невозможно безъ опыта; у насъ три источника знанія: авторитетъ, разумъ, опытъ. И однако авторитетъ не удовлетворяетъ, если не дается его разумнаго основанія; онъ не даетъ пониманія, а лишь принятіе на вѣру: вѣримъ авторитету, но не черезъ авторитетъ понимаемъ. И разумъ не можетъ узнать, софизмъ ли передъ нимъ или доказательство, если не умѣетъ оправдать заключеніе опытомъ, какъ покажу ниже, когда буду говорить объ экспериментальной наукѣ. А между тѣмъ ничѣмъ — какъ увидимъ ниже — такъ мало и такъ неумѣло не пользуются, какъ именно этимъ способомъ въ изученіи наукъ. Оттого толпа изучающихъ остается въ крайнемъ невѣжествѣ относительно скрытыхъ сокровищъ и великихъ тайнъ науки“.

Отъ Бэкона до Лютера.

6. Великое твореніе Бэкона оставалось въ теченіе 600 лѣтъ недосягаемымъ вѣнцомъ человѣческаго генія. Его призывъ не нашелъ отзвука въ массахъ, а тѣ, кто его понялъ, постарались зажать ротъ мыслителю и проповѣднику. Примѣръ Бэкона показываетъ, что безъ массъ ни одна реформа невозможна, или — если она навязана насильно — остается безплодной и чуждой. Это понимали, очевидно, и руководители тайныхъ союзовъ и обществъ; по крайней мѣрѣ лишь 400 лѣтъ спустя попытка Бэкона была повторена Коменскимъ — и успѣхъ превзошелъ ожиданія.

Реформаторское движеніе, подавляемое извнѣ, ушло во внутрь. Стремленіе къ поднятію умственнаго уровня массъ стало отличительнымъ признакомъ перечисленныхъ выше тайныхъ обществъ. Школы, явныя и тай-

---

[1]) „Compendium studii philosophiae“, 397.

ныя, вскорѣ подпали подъ это могущественное вліяніе. Особенно много сдѣлали для народнаго образованія „Богемскіе братья“. Къ 1500 году, т. е. къ началу реформаціи, они насчитывали до 200.000 членовъ, имѣли собственныя типографіи и огромную литературу. Ихъ школы въ Германіи и Польшѣ считались образцовыми. Кромѣ того, они оказывали крупное вліяніе на цехи и корпораціи.

Мы увидимъ дальше, какъ они обучали въ своихъ школахъ; теперь же возникаетъ вопросъ: гдѣ получали свою научную подготовку эти тысячи учителей, разсѣянныхъ по всей Европѣ? Ясно, что университеты такой подготовки дать не могли, слѣдовательно, на ряду съ оффиціальными учрежденіями должны были существовать и тайныя, наряду съ оффиціальной наукой, схоластической и мертвой — тайная, одухотворенная и живая. Такъ оно и было. Такими тайными Академіями являлись упоминаемые уже нами „Союзы Алхимиковъ“ (оставимъ за ними это историческое названіе). Программа ихъ — *поощреніе науки о воспитаніи*. Ихъ кругъ дѣятельности — Верхняя Италія, Германія, Англія, Нидерланды, Франція и Испанія; въ XVII столѣтьи еще и колоніи. Ихъ членами состояли почти всѣ выдающіеся умы XV—XVII вв. О многихъ изъ нихъ широкой публикѣ ничего неизвѣстно, а между тѣмъ имена Іоахима Юнгіуса (1587—1657), получившаго прозвище „нѣмецкій Бэконъ“, или Самуэля Гартлиба (ум. 1662 г.) — о немъ рѣчь впереди — достойны занять мѣсто наравнѣ съ ихъ прославленными сочленами по организаціямъ, Амосомъ Коменскимъ (1595—1670) и Готфридомъ Лейбницемъ (1646 — 1716) [1]).

Наконецъ, учителя учителей объединялись въ высшемъ тайномъ обществѣ — „Братствѣ Розенкрейцеровъ“, о которомъ имѣются до сихъ поръ лишь

---

[1]) Получивъ дипломъ *доктора правъ* въ Нюренбергскомъ Альтдорфскомъ Университѣ (1666 г.), Лейбницъ въ слѣдующемъ году становится членомъ, а вскорѣ и секретаремъ Нюренбергскаго „Союза Алхимиковъ“. Его философскія изысканія находятся въ непосредственной связи съ тайнымъ ученіемъ „С. А.“ Онъ занималъ среди „Союзовъ“ выдающееся положеніе; по его порученію въ 1676 г. Вюльферъ объѣздилъ 13 германскихъ „С. А.“.

отрывочныя свѣдѣнія; его статутъ (за немногими исключеніями) остался тайнымъ.

Рабле и Монтень.

7. Побѣдное шествіе реформаціи позволяетъ нѣкоторымъ писателямъ высказываться за реформу обученія. Послѣ Рамюса, погибшаго трагически раньше, чѣмъ его теорія и практика воспитанія завоевала французскую школу, сатирика Рабле (1483 — 1553), выдвинувшаго идею „предметныхъ уроковъ", Людвига Вивеса (1492 — 1540), попытавшагося построить педагогику на этическомъ и психологическомъ основаніи, выступаютъ въ защиту реформы обученія Монтень (1533—1592) и его духовный наслѣдникъ Локкъ (1632—1704). Среди этихъ писателей мы встрѣчаемъ трехъ французовъ, испанца и англичанина. Ихъ сочиненія и идеи заслуживаютъ бо́льшаго уваженія, чѣмъ это имъ оказали современники. И неуспѣхъ ихъ пропаганды лишній разъ показываетъ, что въ дѣлѣ воспитанія отдѣльныя лица безсильны, если ихъ проповѣдь безпочвенна.

А между тѣмъ мы встрѣчаемъ у нихъ великолѣпныя страницы. Рабле при помощи предметныхъ уроковъ „стремится сообщить воспитанію болѣе жизненный и общеобразовательный характеръ. Преподаваніе выходитъ за предѣлы школы. Воспитанникъ долженъ посѣщать всевозможныя мастерскія, заводы, музеи, публичныя лекціи, народныя увеселенія, чтобы воочію познакомиться со всевозможными видами производства предметовъ, чтобы изучить ихъ назначеніе, чтобы, наконецъ, самолично наблюдать всевозможныя стороны жизни" [1]).

Развѣ это не современныя намъ теченія педагогической мысли?

Въ томъ же духѣ высказывается и Монтень („Essais", главы XXV и XII): „Постоянно кричатъ ученику въ уши, какъ будто льютъ въ воронку; а обязанность ученика состоитъ только въ повтореніи сказаннаго... Я не хочу, чтобы учитель находилъ и говорилъ всегда одинъ; я хочу, что-бъ онъ въ свою очередь выслушивалъ слова ученика. Сократъ и потомъ Архезилай

---

[1]) *Лапшинъ*, **Исторія педагогическихъ теорій.**

сначала заставляли говорить своихъ учениковъ, а потомъ уже сами говорили имъ".

Въ этихъ словахъ слышенъ призывъ къ современной индуктивно-эвристической методѣ; а вотъ прекрасный призывъ къ самодѣятельности учащихся: *„Мы всѣ богаче, нежели сами думаемъ, но насъ пріучаютъ къ займу и къ милостынѣ; насъ пріучаютъ пользоваться болѣе другими, чѣмъ самими собой"*.

Ратихій. 8. Между тѣмъ протестантизмъ продолжалъ крѣпнуть въ Германіи и Скандинавіи—и оказалось возможнымъ отъ словъ перейти къ дѣлу. За эту работу взялся голштинецъ Вольфгангъ Ратихій (1571—1635). Вся его жизнь посвящена борьбѣ за реформу школы, за введеніе новыхъ методъ обученія. Его попытки устроить новыя школы (правительственнаго типа) въ Аугсбургѣ (1614), Кеттенѣ (1618), Магдебургѣ (1620—22) и, наконецъ, въ Швеціи (ок. 1634) закончились неудачно; всѣ эти школы вскорѣ закрывались или видоизмѣнялись. Правда, что эта дѣятельность Ратихія совпала какъ разъ съ первымъ періодомъ Тридцатилѣтней войны, когда борьба католицизма съ протестантизмомъ достигла высшаго напряженія. Ратихій понималъ, что онъ началъ работу слишкомъ рано; вотъ почему онъ не рѣшался опубликовать свою методу и только въ силу необходимости изложилъ письменно главнѣйшія ея положенія. Но и эти немногія положенія составляютъ эпоху въ педагогикѣ.

Вотъ они:

1. Все должно сообразоваться съ ходомъ и порядкомъ самой природы.
2. Не болѣе, какъ одно что-либо за разъ.
3. Слѣдуетъ многократно повторять одно и то же.
4. Все сначала на родномъ языкѣ.
5. Все безъ принужденія (учитель вовсе не тюремный надзиратель).
6. Ничто не должно быть заучиваемо безсознательно.
7. Единство во всѣхъ предметахъ (въ методѣ, правилахъ, учебникахъ).
8. Сначала предметъ самъ по себѣ, а потомъ относящіяся къ нему правила.
9. Все посредствомъ опыта и предметнаго обученія.

Образованіе Академій Наукъ.

9. Ратихій умеръ разбитый нравственно и физически, съ горькимъ сознаніемъ своихъ неудачъ, не подозрѣвая вовсе, что брошенная имъ перчатка будетъ поднята Коменскимъ и его дѣло разростется въ могучую школьную организацію. Но именно къ этому неудержимо шло человѣчество. Съ торжествомъ реформаціи, казалось, роль тайнаго обученія обществъ кончилась; считали возможнымъ „проявиться“ и дѣйствовать открыто. Это „проявленіе“ началось въ половинѣ XVII вѣка. Сначала „Богемскіе братья“ преобразовались въ Анабаптистовъ, въ то время уже, послѣ Мюнстерской трагедіи, болѣе извѣстныхъ подъ названіями „Меннониты“ и „Баптисты“. Послѣднія двѣ секты существуютъ и понынѣ: Меннониты—въ Голландіи, Германіи и Россіи, Баптисты—въ Англіи и Америкѣ. Наряду съ этимъ тайныя общества высшей ступени — Союзы Алхимиковъ стали преобразовываться въ явныя, утвержденныя правительствами, Академіи Наукъ. Такъ, благодаря усиліямъ Гартлиба въ 1662 утверждено „Королевское Общество“; въ него вступили члены прежнихъ англійскихъ тайныхъ обществъ и союзовъ: Робертъ Бойль, Робертъ Гукъ, Валлисъ, Брункеръ, Форстеръ, Ринъ и др. — все имена, составляющія гордость науки. Далѣе, въ 1666 г. Парижскій „С. А“., членами коего являлись — въ разное время — Декартъ, Роберваль, Мерсеннъ, Гассенди, Паскаль, Гюйгенсъ, Маріоттъ и др., преобразовался въ Парижскую Академію Наукъ. Наконецъ, въ 1700 г. Лейбницъ и его сотоварищи (Яблонскій, ф. Крозигкъ, Гофманъ, Штурмъ, Дона, Вюльферъ и др.) преобразовали германскіе „С. А.“ въ „Берлинское Общество Наукъ“, которому Фридрихъ Великій присвоилъ современное названіе — Академія наукъ и искусствъ.

Старые обычаи, правила, принципы прежнихъ тайныхъ обществъ сохранились и въ Академіяхъ; ихъ членами могли быть всѣ работники на нивѣ науки безъ различія національности, сословія, вѣроисповѣданія; сохранилось дѣленіе членовъ по степенямъ—въ видѣ дѣленія ихъ на дѣйствительныхъ членовъ и членовъ — корреспондентовъ, постоянныхъ и временныхъ,

Стремленіе къ „проявленію“ отразилось и на Розенкрейцерахъ; послѣ 1620 г. они рѣшили стать болѣе доступными и преобразовали свои „Братства“ въ ложи франкъ-масоновъ, существующія и нынѣ.

Коменскій. 10. Мы принуждены были остановиться подробнѣе на вышеизложенной просвѣтительной дѣятельности тайныхъ обществъ по двумъ причинамъ. Во I-хъ, исторія умственнаго прогресса сама по себѣ интересна и необходима для уясненія исторіи педагогики вообще; во II-хъ, она необходима для уясненія роли Коменскаго въ исторіи и въ педагогикѣ. Человѣкъ, занимающій центральное мѣсто въ исторіи воспитанія, творецъ „Великой Дидактики“, которая *и сейчасъ* должна быть настольной книгой всякаго, кто берется за обученіе, реформаторъ воспитанія, спеціально приглашаемый съ этой цѣлью Германіей, Польшей, Англіей [1]), Швеціей, Венгріей и Нидерландами, — не могъ явиться какъ deus ex machina, какъ какой-то недосягаемый и непостижимый геній, котораго теоріи *созданы имъ самимъ*. Такихъ чудесъ всемірная исторія не знаетъ и знать не можетъ. Напротивъ, примѣръ Коменскаго ясно показываетъ, насколько *одинъ человѣкъ* не въ состояніи выполнить *коллективную работу человѣчества*. Другъ и товарищъ вождей тайныхъ обществъ — Гартлиба. Андреэ, Юнгіуса и др., впитавшій ихъ идеи и взгляды наряду съ теоріями Вивеса, Рабле, Монтеня, Бэкона и Ратихія, послѣдній епископъ „Богемскихъ братьевъ“, наконецъ, другъ и приверженецъ педагогической методы Розенкрейцеровъ (по мнѣнію такихъ солидныхъ историковъ какъ Качъ, Квачала, Келлеръ и др.),—*Коменскій является продуктомъ среды и яркимъ обобщителемъ работы нѣсколькихъ столѣтій.*

Великая Дидактика. 11. Иначе и не могло быть. „Великая Дидактика“ — это сборникъ всѣхъ тайныхъ предписаній и наставленій, выводъ изъ коллективной работы учителей всей Европы, обоснованіе — натурфилософское и психологическое — зна-

---

[1]) Подъ вліяніемъ Гартлиба англійскій парламентъ пригласилъ въ 1641 г. Коменскаго для реформы школъ.

менитыхъ положеній Ратихія. Принимая во вниманіе заявленіе самого Коменскаго: „Никто не имѣетъ у насъ права издавать книги отъ себя; онѣ должны быть разсмотрѣны другими и утверждены съ общаго согласія“ (изъ устава Бог. Бр.) ясно, что такую книгу могъ написать лишь человѣкъ, передъ которымъ не было ничего тайнаго, и издать ее тогда, когда реформація окончательно восторжествовала и тайныя общества рѣшились выступить открыто.

Школьныя задачи.

12. Бросимъ теперь взглядъ на задачи школъ, основанныхъ тайными обществами. Эти задачи явились какъ слѣдствіе условій, окружавшихъ и обусловливавшихъ обученіе и воспитаніе въ разсматриваемый періодъ. Во 1-хъ, наука до XVIII вѣка была аристократической, служила господамъ, поддерживала ихъ могущество — и ее ненавидѣли рабы, которые сами были не въ состояніи пользоваться ею и видѣли въ ней лишь орудіе притѣсненій. Реформаторы воспитанія, поэтому, прежде всего постарались популяризировать знаніе какъ путемъ общедоступнаго обученія, такъ и главнымъ образомъ — путемъ изысканія новыхъ путей, наиболѣе легкихъ и наиболѣе краткихъ. Такъ создались педагогическіе рецепты „Великой Дидактики“. Во II-хъ, необходимо было увеличить численность своихъ аудиторій, сдѣлать ихъ народными. Такъ какъ научное и элементарное обученіе въ правительственныхъ учебныхъ заведеніяхъ преподносилось на латинскомъ языкѣ, незнакомомъ и чуждомъ массамъ, то борьба за родной языкъ при обученіи стала лозунгомъ реформаторовъ всѣхъ вѣковъ и странъ. Побѣда „материнскаго языка“ олицетворяла собою демократизацію школы.

Эти два пункта программы — *доступность*, въ смыслѣ языка и изложенія, и *практичность*, въ смыслѣ приложеній къ требованіямъ ежедневной жизни массъ — обезпечили побѣду новой педагогикѣ. Первый привелъ къ разработкѣ *наглядной методы обученія*, второй — *лабораторной*.

13. Писать о Коменскомъ и его трудахъ — это писать объ общеизвѣстныхъ вещахъ, и этой ошибки мы, конечно, не сдѣлаемъ. То, что являлось наиболѣе важ-

нымъ — обрисовка фона, — сдѣлано. Дальнѣйшая наша задача — изложить основы наглядной метòды. Такъ какъ сомнительно, чтобы удалось выполнить это лучше Коменскаго, то мы и предоставляемъ слово ему, кое-гдѣ лишь прибавляя необходимыя поясненія и замѣчанія.

Предлагаемые отрывки взяты изъ „Великой Дидактики“, изданія 1893 г. Курсивъ вездѣ Коменскаго.

Основы наглядной метòды.

„*Школы обучаютъ языку раньше чѣмъ предметамъ*, такъ какъ онѣ нѣсколько лѣтъ занимаютъ умы словесными науками и уже позже, Богъ знаетъ когда, допускаютъ къ изученію реальныхъ наукъ: математики, физики и т. д. *А между тѣмъ предметы — существенное, а слова — нѣчто случайное, предметы суть тѣло, слова — одежда, предметы — ядро, а слова — скорлупа или шелуха.*

— „Отсюда слѣдуетъ, что для исправленія метòды обученія въ самомъ ея основаніи необходимо, чтобы:

I) были наготовѣ книги и всѣ другія пособія,

II) разсудокъ развивался прежде, чѣмъ языкъ,

III) ни одному языку не учились по грамматикѣ, а изъ писателей,

IV) реальныя науки предшествовали вспомогательнымъ и

V) примѣры — правиламъ“.

Пункты II и V полезно перечитать составителямъ учебниковъ по математикѣ.

— „*Съ дѣтьми слѣдуетъ начинать лишь то, что не только допускаютъ ихъ возрастъ и природныя способности, но къ чему они также обнаруживаютъ склонность*“. —

— „*Для того, чтобы все это легче запечатлѣвалось въ ихъ умахъ, необходимо дѣйствовать, насколько можно на ихъ внѣшнія чувства*“. Такова и современная точка зрѣнія экспериментальной психологіи.

— „*Надо постоянно пользоваться вмѣстѣ и слухомъ, и зрѣніемъ, языкомъ и рукою*, т. е. не только произнося то, чтò надо знать, чтобы оно воспринималось на слухъ, но и рисуя это, чтобы оно запечатлѣвалось въ воображеніи при помощи глазъ. Пусть дѣти съ самого начала пріучаются попеременно произносить языкомъ и изображать рукою, такъ что отъ всякаго

предмета будутъ отходить только тогда, когда онъ запечатлѣется съ достаточной ясностью въ ихъ ушахъ, глазахъ, въ умѣ и памяти. *Съ этою цѣлью было бы хорошо нарисовать по стѣнамъ каждаго класса все, что въ немъ обыкновенно проходится*, какъ-то теоремы и правила, рисунки и рельефныя изображенія, относящіяся къ преподаваемой наукѣ. Это удивительно какъ усиливало бы впечатлѣніе".

— „*Облегченіемъ для ученика будетъ то, что ему каждый разъ покажутъ, какое примѣненіе имѣетъ въ ежедневной жизни то, чему его учатъ.* Этого надо держаться рѣшительно вездѣ: при преподаваніи грамматики, діалектики, ариѳметики, геометріи, физики и т. д. Безъ соблюденія этого условія, что̀ бы ты ни разсказалъ, все будетъ казаться какимъ-то чудомъ изъ иного міра, и мальчикъ, не очень-то заботящійся о томъ, существуетъ-ли оно вообще и каково оно на самомъ дѣлѣ, скорѣе будетъ вѣрить, чѣмъ знать. Напротивъ, если ты покажешь, для чего служитъ каждая вещь, то ты дашь ему полную возможность убѣдиться, что онъ знаетъ, и возбудишь желаніе дѣйствовать. Слѣдовательно, *учить надо только тому, что̀ можетъ имѣть немедленное примѣненіе*". —

— „*При всякомъ новомъ пріобрѣтеніи знанія нужно тотчасъ подумать, какое примѣненіе оно можетъ имѣть, чтобы ничему не учиться понапрасну*". —

Спеціально о математикѣ Коменскій говоритъ лишь въ одномъ мѣстѣ „Великой Дидактики" — когда разсматриваетъ программу средней школы. 6 классовъ этой школы носили названіе: грамматическій, естествовѣдѣнія, математическій, этическій, діалектическій, реторическій. Такое раздѣленіе предметовъ не абсолютно, а показываетъ лишь, на какой учебный предметъ падаетъ центръ тяжести въ данномъ классѣ.

— „*Относительно математическаго класса можетъ быть сомнѣніе, долженъ-ли онъ слѣдовать за классомъ естествовѣдѣнія или предшествовать ему.* Конечно, древніе имѣли обыкновеніе начинать изученіе существующаго занятіями по математикѣ; поэтому они и самимъ занятіямъ дали названіе „предметы изученія" (μαθήματα), и Платонъ не допускалъ въ свою Академію

ни одного не-геометра (ἀγεωμέτρητον). Причина очевидна: науки эти, имѣя дѣло съ числами и величинами, основываются болѣе на чувственномъ воспріятіи, поэтому онѣ легче и опредѣленнѣе и способствуютъ накопленію и удержанію силы воображенія; наконецъ, онѣ располагаютъ и побуждаютъ къ изученію другихъ предметовъ, болѣе удаленныхъ отъ внѣшнихъ чувствъ".

„Это совершенно вѣрно; однако мы должны при этомъ принять во вниманіе и нѣкоторыя другія соображенія. Именно: 1) Мы дали совѣтъ въ школѣ родного языка постоянно упражнять внѣшнія чувства и пробуждать умъ при помощи того, что доступно внѣшнимъ чувствамъ, уже послѣ того, какъ ученіе о числахъ будетъ тщательно пройдено; слѣдовательно, наши ученики въ этомъ случаѣ не будутъ вполнѣ невѣждами въ геометріи (ἀγεωμέτρητοι). 2) Наша метода преподаванія всегда идетъ впередъ шагъ за шагомъ. Поэтому, прежде чѣмъ приступить къ разсмотрѣнію величинъ, которыя представляютъ нѣчто высшее, цѣлесообразно будетъ ввести между тѣмъ ученіе *о тѣлахъ* конкретныхъ предметовъ, какъ переходную ступень къ болѣе тонкому пониманію вышеуказанныхъ отвлеченностей. 3) Къ курсу математическаго класса мы присоединяемъ большую часть того, что̀ входитъ въ область искусства, а объ этомъ едва ли можно получить легкое и вѣрное понятіе безъ изученія естествовѣдѣнія. Поэтому мы и ставимъ впередъ послѣднее".

Подъ „искусствами" Коменскій понималъ преимущественно общеобразовательный ручной трудъ: *„Школы суть не что иное, какъ мастерскія, въ которыхъ кипитъ работа.* Только такимъ образомъ всѣ сами путемъ собственной удачной дѣятельности испытаютъ справедливость извѣстной поговорки: *образовывая, образуемъ самихъ себя".*

Начала лабораторной методы.

15. Если Коменскій является общепризнаннымъ авторитетомъ въ области наглядной методы обученія, то онъ не менѣе заслуживаетъ имени родоначальника и лабораторной методы. То, что̀ до него высказывали отдѣльные мыслители, какъ Рабле и Монтень, было имъ впервые формулировано ясно и опредѣленно: *Школа должна быть*

мастерской не только для духа, но и для тѣла. Это положеніе было подхвачено сенсуалистами (Локкъ и др.); подготовка человѣка къ жизни, къ самопомощи и самодѣятельности стала задачей воспитанія въ XVIII в., и наиболѣе яркимъ представителемъ общественнаго мнѣнія явился Даніэль Дефое (1661—1731) въ незабвенной книгѣ „Жизнь и удивительныя приключенія Робинзона Крузё“.

Если лабораторная метода не утвердилась прочно тогда же, при своемъ возникновеніи, то виноваты въ этомъ люди и обстоятельства; люди — такъ какъ подготовки преподавателей не существовало, слѣдовательно, всякій училъ по наитію; обстоятельства — такъ какъ мрачный XIX вѣкъ наложилъ свою тяжелую бронированную руку какъ на школы, такъ и на методы. Возрожденіе наглядной и лабораторной методъ стало возможнымъ лишь въ послѣднюю треть XIX вѣка — и тогда на помощь имъ пришла могущественная союзница — наука, въ лицѣ теоріи познанія съ одной стороны, психологіи и экспериментальной педагогики, съ другой. Отнынѣ за новыми методами будущее обезпечено.

Реализмъ и утилитаризмъ.

16. Работами Коменскаго заканчивается долгая борьба за материнскій языкъ при обученіи. Его ученики и послѣдователи начинаютъ разрабатывать реальную часть программы. Появляются учебники по математикѣ, новаго типа и содержанія. Таково, напр., *наглядное руководство Штурма* (общая математика, практическая ариѳметика, теоретически-практическая геометрія, оптика, фортификація, строительное искусство, космографія, хронологія, гномоника и механика), впервые введенное въ Нюренбергской гимназіи. А вотъ и отзывъ о методѣ Штурма, данный ректоромъ гимназіи Фейерлейномъ: „мальчики весьма ловко пріучаются владѣть циркулемъ, угломѣромъ, масштабомъ, мѣрною линейкою и т. п., и уже послѣ нѣсколькихъ упражненій могутъ опредѣлять весьма вѣрно и отчетливо, даже прямо на глазъ, величину стола, окна, комнаты, дома и т. д.“.

Педагогическій реализмъ, какъ окрестили вскорѣ новое направленіе, привелъ къ созданію новаго типа

школы — реальнаго училища. Крупный организаторъ Франке (1663—1727) явился родоначальникомъ учительскихъ семинарій и „педагогіумовъ“ (реформированныхъ въ духѣ реализма гимназій). Введена предметная система [1]), общеобразовательныя прогулки, практическія занятія. Математическія упражненія должны носить по возможности практическій характеръ. Естествознаніе и физика проходятся наглядно. При педагогіумѣ въ Галле имѣлись: ботаническій садъ, естественно-научный и физическій кабинеты, химическая лабораторія, анатомическій театръ, географическіе аппараты и модели. Къ такъ называемымъ рекреаціоннымъ упражненіямъ относились: музыка, рисованіе, токарное искусство, картонажныя работы, шлифовка стеколъ при помощи особыхъ мельницъ, анатомированіе животныхъ, набиваніе чучелъ.

Ученикъ Франке, Землеръ (ум. 1740), въ 1708 г. открылъ *первую реальную гимназію* подъ названіемъ „математическая и механическая реальная школа“; здѣсь мы встрѣчаемъ всестороннее примѣненіе наглядной методы. Наряду съ этимъ вводится принципъ *педагогическаго утилитаризма*, ярко выраженный въ девизѣ Землера „Non scholae sed vitae discendum“ (слѣдуетъ учиться не для школы, но для жизни). Въ 1748 г. открывается другимъ ученикомъ Франке, Гекеромъ (1707—1768), „экономическо - математическая реальная школа“ въ Берлинѣ, уже годъ спустя переименованная въ „Королевскую Реальную школу“ (Фридрихъ Великій). 8 классовъ этой школы носили названія: математическій, геометрическій, архитектурный, естественно-научный, мануфактурный, торговый, экономическій и художественный. Обученіе было поставлено на практическую почву, улучшена наглядная метода, увеличено число пособій; учителями уже являлись (отчасти) спеціалисты.

Руссо. 17. Въ 1762 г. появляется „Эмиль“ Ж. Ж. Руссо. Если Коменскій ввелъ болѣе внѣшнюю природосообразность въ воспитаніи, то Руссо,

---

[1]) По каждому предмету ученики назначаются въ тотъ классъ, который соотвѣтствуетъ ихъ познаніямъ.

напротивъ, центръ воспитанія видитъ въ естественномъ развитіи ребенка.

„Истинное воспитаніе состоитъ не столько въ правилахъ, сколько въ упражненіяхъ". — „Жить это не значитъ дышать: это значитъ дѣйствовать" — „Первое, что въ насъ возбуждается и развивается, это — чувства. Поэтому усовершенствованіе ихъ и надо прежде всего имѣть въ виду; но обыкновенно они-то чаще всего пренебрегаются въ воспитаніи. Пусть упражняются въ дѣтяхъ не только однѣ силы, а всѣ чувства, управляющія этими силами, пусть, по возможности, пользуются каждымъ чувствомъ и провѣряютъ впечатлѣнія одного чувства посредствомъ другихъ. Дайте питомцу все мѣрить, вѣсить, считать, сравнивать и прежде всего образуйте въ немъ тѣло: этимъ образуется и душа". — „Упражнять чувства это не только значитъ пользоваться ими, это значитъ учиться хорошо судить съ помощью ихъ, учиться — такъ сказать — чувствовать, ибо мы умѣемъ осязать, видѣть, слышать только то, чему научились. Упражняйте же не только силы, но и всѣ чувства, ими управляющія; извлекайте изъ каждаго всю возможную пользу, затѣмъ впечатлѣнія одного повѣряйте другими. Измѣряйте, считайте, взвѣшивайте, сравнивайте". —

18. Руссо былъ теоретикомъ, безъ всякой научной подготовки, безъ всякаго педагогическаго опыта; но такова сила вещей: книга Руссо была восторженно принята, „Эмиль началъ свое тріумфальное шествіе по образованному европейскому міру" именно потому, что все общество ждало реформъ именно въ этомъ направленіи. Одновременно съ Руссо Базедовъ (1723—1790) издаетъ рядъ своихъ педагогическихъ трудовъ и устраиваетъ *Филянтропинъ* (1774), послужившій прообразомъ новыхъ школъ. Вопросы воспитанія и обученія начинаютъ, наконецъ, разрабатываться научно. Подъ вліяніемъ „Эмиля" и реформъ Базедова на путь научной педагогики вступаетъ Кантъ (1776), а за нимъ Гербартъ (1802)". Въ то же время апостолъ педагогическаго альтрюизма, Песталоцци (1746—1827), производитъ реформу методики обученія и примѣняетъ наглядную и лабораторную методы въ обученіи ариѳметикѣ.

Песталоцци. 19. Основная мысль Песталоцци: „*Истинная причина матеріальной нищеты народа есть его умственная и нравственная нищета*“ послужила главной идеей книги „Лингардъ и Гертруда“ (1781); книга встрѣтила колоссальный успѣхъ. Принципы Франке и Землера были имъ развиты и обоснованы въ книгѣ „Какъ Гертруда учитъ своихъ дѣтей?“ (1801), самомъ замѣчательномъ произведеніи Песталоцци. Ему принадлежатъ положенія: „Прежде всего надо обучать тому, что̀ предлагаетъ и требуетъ ближайшее настоящее и ежедневная жизнь“. — „*Знанія безъ умѣнія* составляютъ, можетъ быть, *страшнѣйшій даръ*, который принесенъ нашему вѣку злѣйшимъ геніемъ“.

— „Всѣ наши познанія получаются путемъ нагляднаго созерцанія, даются *числомъ*, *формою и словомъ*“.

Самъ Песталоцци не написалъ руководства по Методикѣ Ариѳметики; „Наглядное ученіе объ отношеніяхъ чиселъ“ принадлежитъ его ученику, американцу Крюзи. Но различныя положенія, разсѣянныя по томамъ его сочиненій, свидѣтельствуютъ, что онъ первый изслѣдовалъ процессъ зарожденія отвлеченныхъ понятій въ ребенкѣ; ему же принадлежатъ какъ формулировка закона развитія отвлеченнаго мышленія, такъ и указанія, какъ содѣйствовать этому развитію. „Когда мать такимъ образомъ выучитъ ребенка узнавать количества бобовъ, камешковъ, являющихся какъ одинъ, два, три и т. д., выучитъ называть данную группу предметовъ, то слова: *одинъ*, *два*, *три* остаются постоянно неизмѣнными въ умѣ; слова же: бобъ, камешекъ и т. п. мѣняются постоянно съ перемѣной названія предметовъ; при этомъ остающееся постояннымъ названіе числа выдѣляется отъ постоянно мѣняющагося названія предмета. Въ умѣ ребенка создается отвлеченное понятіе *число*, устанавливается сознаніе опредѣленнаго отношенія *большаго* къ *меньшему*, независимо отъ рода предметовъ, являющихся предъ глазами ребенка въ бо̀льшемъ или меньшемъ числѣ“.

Необходимо указать, что система Песталоцци отличалась односторонностью; одновременно съ ней Люильё (1750—1840) создалъ свою мето̀ду, вскорѣ заброшенную и воскрешенную только въ 50 гг. XIX в. Но несомнѣнно

одно, что дѣти по новымъ пріемамъ усвоивали матеріалъ несравненно легче и съ большимъ интересомъ, выучиваясь одновременно практическимъ разчетамъ. Эта приспособляемость къ жизни оцѣнивалась даже необразованными классами общества; объ этомъ и о характерѣ методы краснорѣчиво свидѣтельствуетъ слѣдующій разсказъ Блохмана. — „Однажды посѣтилъ училище богатый нюренбергскій купецъ, слышавшій много о быстротѣ вычисленій учениковъ. Онъ вошелъ въ I классъ и попросилъ позволенія предложить ученикамъ задачу. Ему, конечно, это позволили. Онъ далъ задачу на правило товарищества, гдѣ приходилось разлагать число на 4 части пропорціонально дробямъ. Ученики тотчасъ же озадачили его вопросомъ, какъ вычислять—письменно или устно? Купецъ отвѣтилъ на это, что если они осмѣливаются, то пусть попробуютъ вычислить въ умѣ, затѣмъ спросилъ себѣ бумаги и занялся вычисленіемъ самъ. Еще онъ не сдѣлалъ и половины работы, какъ ученики одинъ за другимъ стали заявлять, что задача ими рѣшена. Когда результаты, найденные учениками, оказались тѣми-же, которые получилъ онъ самъ, окончивъ нѣсколько позже свою работу на бумагѣ, то онъ обратился къ Песталоцци со словами: у меня дома три мальчугана, я пришлю ихъ къ тебѣ поучиться“.

20. Мы принуждены ограничиться лишь эскизными набросками въ періоды отъ Коменскаго до Песталоцци и отъ Песталоцци до Фрёбеля; но это не значитъ, что въ эти періоды не появлялись и другіе работники. Напротивъ. Въ первый періодъ достаточно указать имена Шпенера, Франка, Нимейера, Базедова, Траппа, Кампе, Зальцманна, Геккера, Землера, Рохова, Фельбигера, Резевица — мы перечисляемъ лишь главныхъ работниковъ на почвѣ организаціи народной и реальной школъ. О представителяхъ ново-гуманизма говорилось раньше. Отъ Песталоцци до Фрёбеля достаточно указать длинный рядъ работавшихъ надъ методикой математики и, въ частности, *ариѳметики*: Крюзи, Шмидъ, Нидереръ, Овербергъ, Дистервегъ, Тиллихъ, Тюркъ, Каверау, Гофманъ, Стефани, Шольцъ, Грубе. Послѣднимъ закончена вѣковая работа по методикѣ ариѳме-

тики и найденъ путь для изученія ея въ школѣ. Теперь методика двинулась, правда, гораздо дальше, но заслуга Грубе и его предшественниковъ отъ этого не уменьшилась.

Фрёбель. 21. Дѣятельность Фридриха Фрёбеля (1782—1852) начинаетъ собою новый періодъ воспитанія и обученія. Ученикъ Песталоцци, естественникъ по образованію и педагогъ отъ природы, Фрёбель посвятилъ вторую половину своей разнообразной жизни задачѣ воспитанія. Съ 1816 г. онъ начинаетъ педагогическую дѣятельность. Десять лѣтъ спустя появляется его „Erziehung des menschen“ (Воспитаніе человѣка), трудъ, послужившій основой современной теоріи дошкольнаго воспитанія (до 8 лѣтъ). Великій педагогъ успѣлъ разработать лишь первую часть—„Kindergarten“ (дѣтскій садъ) и, къ сожалѣнію, не далъ указаній для воспитанія юношества; вѣроятно, мы лишились драгоцѣнныхъ новыхъ путей, важной новой теоріи. „Мы не имѣемъ права потерять ни одного слога изъ цѣнной позитивной философіи Фрёбеля, этого глубочайшаго мыслителя среди современныхъ педагоговъ“ —такъ выражается о немъ Стэнли Холлъ.

Основной принципъ Фрёбеля—общее развитіе ребенка путемъ всесторонняго упражненія его чувствъ. Дѣйствія ребенка не произвольны, но они незамѣтно для него самого становятся осмысленными; прогрессивная метода Фрёбеля позволяетъ воспитателю импульсы произвольной активности дѣтей подчинять контролю воли. Такимъ образомъ ребенокъ учится управлять жизнью чувствъ и этимъ развиваетъ свои способности. Ясно, что при такой методѣ воспитанія необходимо предоставить дѣтямъ возможность разнообразнаго ручного труда, наблюденій, опытовъ и т. п. При такой методѣ дѣти сразу становятся лицомъ къ лицу съ явленіями внѣшней жизни, реагируютъ на нихъ и своими симпатіями или антипатіями — въ лучшемъ случаѣ равнодушіемъ — помогаютъ въ свою очередь воспитателямъ намѣчать центры дѣтскаго интереса. Геніальная метода Фрёбеля приноситъ пользу не только дѣтямъ, но и воспитателямъ. Дѣти играя, учатся—и такимъ образомъ осуществлена мечта Локка и Базедова;

воспитатель учится, наблюдая склонность дѣтей, когда они по возможности предоставлены самимъ себѣ—и этимъ кладетъ основу экспериментальной наукѣ о дѣтствѣ. Можно съ увѣренностью сказать, что экспериментальная психологія и экспериментальная педагогика родились въ дѣтскихъ садахъ.

Эта дѣятельность ребенка приспособлена Фрёбелемъ къ его *дарамъ*. До 3 лѣтъ ребенку послѣдовательно даютъ: цвѣтные мячики, кубъ, шаръ и цилиндръ. Съ 3 до 8 наступаетъ эпоха *дѣтскаго сада*. Программа занятій слѣдующая.

A. *Твердыя тѣла:*

1. Построенія при помощи кубиковъ.
2. Лѣпка изъ глины.
3. Работы изъ папки.

B. *Поверхности:*

1. Сгибаніе, разрѣзываніе и планировка бумаги.
2. Складываніе дощечекъ.
3. Краски и ихъ приложенія.

C. *Линіи:*

1. Складываніе полочекъ.
2. Тканіе на бумагѣ.
3. Вышиваніе.
4. Рисованіе.

D. *Точка:*

1. Игры съ бусами.
2. Размѣщенія.
3. Просверливаніе бумаги.

Къ этому нужно добавить: выпиливаніе изъ дерева, рисованіе вообще, уходъ за растеніями и животными; наконецъ, дѣтское пѣніе.

22. Система Фрёбеля является въ сущности системой образовательнаго ручного труда, впослѣдствіи получившей названіе *лабораторная метода*. Разработка деталей, теоретическое обоснованіе и практическое примѣненіе закрѣпили за Фрёбелемъ званіе второго родоначальника лабораторной метóды (теорія Коменскаго осуществлена впервые Фрёбелемъ). Мы видѣли, что

ручной трудъ проповѣдывался многими, но никто изъ нихъ не съумѣлъ дать хотя бы схему его примѣненія, ограничиваясь общими фразами. Стройность, педаго-

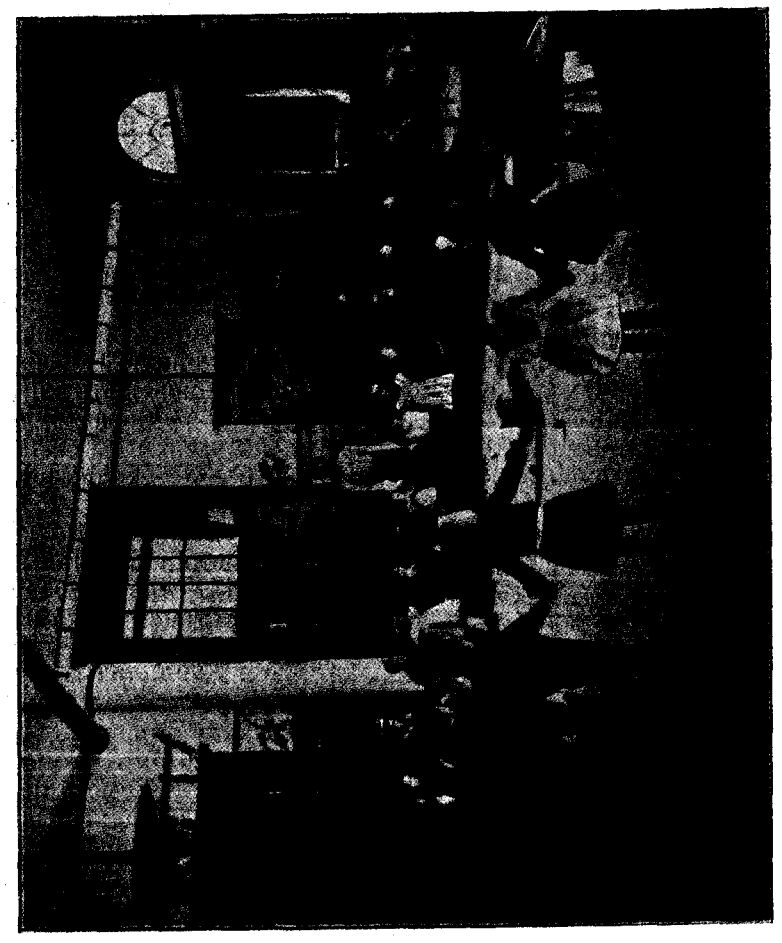


Рис. 1. Фрёбелевскія игры. Направо акваріумъ, необходимая принадлежность класса.

гичность и практичность новой методы обезпечили ей всемірное завоеваніе. Кратковременное преслѣдованіе Фрёбеля Прусскимъ правительствомъ, запретившимъ

7 Августа 1851 г. „дѣтскіе сады“, какъ соціалистическія и атеистическія организаціи [1]), вызвало лишь бурю протеста со стороны цивилизованнаго міра и, пожалуй, помогло укрѣпиться его идеѣ. Вскорѣ послѣ смерти Фрёбеля „дѣтскіе сады“ въ качествѣ „народныхъ“ стали организовываться во всѣхъ культурныхъ странахъ міра.

Россія, наглядность и ручной трудъ.

23. Принято думать, что „новыя“ методы обученія — наглядная и лабораторная — являются новинками конца XIX вѣка; надѣемся, что въ настоящей главѣ это заблужденіе окончательно опровергнуто. Но что дѣйствительно интересно и характерно, это — незнаніе заслугъ Россіи въ этомъ направленіи. Цитированный выше Уставъ 1804 г. рекомендуетъ примѣнять различныя методы въ обученіи; таковы наглядная, лабораторная (хотя нѣтъ названія, но сущность та же), ленкэстерская [2]) и др. Дѣятели этой эпохи (Фуссъ, Румовскій, Озерецковскій и др.) находились подъ вліяніемъ французскихъ педагоговъ; система ручного труда Политехнической Школы перенесена ими въ Россію, хотя и въ очень элементарномъ видѣ. Необходимость нагляднаго обученія математикѣ, знакомство съ механизмами на фабрикахъ и заводахъ, выполненіе главнѣйшихъ дѣйствій практической геометріи, столярныя и др. работы—вотъ что провозглашалъ Уставъ 1804 г. Но это движеніе шло сверху, не встрѣчая отклика среди преподавателей. Громадное большинство ихъ не умѣло и не хотѣло примѣнять новыя методы. Это побудило издать знаменательный циркуляръ 8 Іюля 1810 г. Его бы не мѣшало переиздать вторично, до того мы не избалованы попеченіями въ этомъ направленіи. Вотъ главная часть циркуляра: — „Усмотрѣно, что во многихъ училищахъ преподаются науки безъ всякаго вниманія къ пользѣ учащихся, что учителя стараются болѣе обременять, нежели изощрять память

---

[1]) Первый „дѣтскій садъ“ открытъ Фрёбелемъ въ Блянкенбургѣ, близъ Рудольфштадта (Тюрингія), въ 1840 г.

[2]) Названа по имени Іосифа Ленкэстера (1778—1838), англійскаго піонера всеобщаго обученія.

ихъ, и, вмѣсто развиванія разсудка постепеннымъ ходомъ, притупляютъ оный, заставляя выучивать наизусть отъ слова до слова то, изъ чего ученикъ долженъ удерживать одну только мысль и доказывать, что понимаетъ ее, собственными, хотя бы и несвязными, но не книжными выраженіями. Таковый способъ ученія сколько легокъ для учителей, столько вреденъ для истиннаго образованія юношества, и на сіе тѣмъ менѣе можно взирать съ равнодушіемъ, что, сверхъ потраты дѣтьми наилучшаго въ жизни времени, обманывается надежда правительства, и употребляемыя имъ на воспитаніе издержки остаются мало вознагражденными; въ прекращеніе сего министръ народнаго просвѣщенія сообщилъ всѣмъ попечителямъ учебныхъ округовъ, дабы они предложили университетамъ: 1) Чтобы при опредѣленіи учителей требовано было отъ нихъ знаніе методы ученія не механической, но способствующей къ дѣйствительному обогащенію ума полезными и нужными истинами. 2) Чтобы предписано было директорамъ и смотрителямъ училищъ имѣть неослабный надзоръ за учителями, дабы въ облегченіе себя не затрудняли дѣтей однимъ только вытверживаніемъ наизусть уроковъ, но приводили бы ихъ легкимъ, простымъ образомъ, къ пониманію всего имъ преподаваемаго, останавливаясь на каждомъ словѣ, сколько нибудь для нихъ не понятномъ, и объясняя оныя удобовразумительнымъ для ихъ лѣтъ способомъ. Изъ сего исключаются лучшія мѣста изъ писателей по части словесности, которыя для примѣровъ и подражанія вытверживать наизусть весьма полезно и нужно, но не прежде, какъ послѣ яснаго и аналитическаго истолкованія оныхъ. 3) Чтобы визитаторы первое обращали вниманіе на способъ, какимъ преподаются науки въ осматриваемыхъ ими училищахъ, и объ учителяхъ, не знающихъ доброй методы ученія, или не желающихъ слѣдовать оной представляли университетамъ, которые съ таковыми поступать имѣютъ по власти имъ данной и т. д.“.

24. Мы уже указывали, какимъ преображеніямъ подверглись школы въ николаевскую эпоху. Наглядность мало по мало исчезла, о ручномъ трудѣ и думать позабыли. Къ концу 50-хъ годовъ наглядность исче-

заетъ даже въ университетахъ при прохожденіи курсовъ по естественнымъ наукамъ. Если и существуетъ химическая лабораторія Петербургскаго Университета, то это лишь громкое названіе при 300 рублевомъ годовомъ бюджетѣ, темной комнатѣ и сырыхъ дровахъ. Въ другихъ отрасляхъ естествовѣдѣнія царила номенклятура, заучиваніе этикетокъ и массы мелкихъ фактовъ. Профессора принадлежали къ типу, окрещенному Шлейденомъ именемъ — мѣткимъ, но и обиднымъ — Grasfresser. Въ Петербургскомъ Университетѣ до 1854 г. каѳедру ботаники занималъ Шиховскій. „Аккуратно разъ въ годъ—разсказываетъ цитированный уже нами Тимирязевъ—онъ появлялся въ аудиторіи съ микроскопомъ, колоссальнымъ, скорѣе напоминавшимъ телескопъ, микроскопомъ Chevalier и неизмѣнно повторялъ слѣдующую фразу: *Вотъ, господа, если очень острымъ скальпелемъ сдѣлать очень тоненькій разрѣзъ сѣрной спички, то можно увидѣть интереснѣйшее строеніе древесины сосны. Я и самъ пробовалъ, да что-то очень темно, плохо видно.* А затѣмъ микроскопъ тѣмъ же порядкомъ убирался въ шкапъ до слѣдующаго года“. Тоже самое творилось и въ остальныхъ Университетахъ.

Весна 60-хъ годовъ, возродившая наглядное обученіе въ начальной и средней школѣ, создавшая русскую науку и намѣтившая цѣлый рядъ реформъ, кончилась скоро. Въ школахъ воцарилось опять и на долго царство трехъ китовъ, по выраженію Литца, система *зубренія*, *долбленія*, *поторенія*. И вотъ въ это именно время Россія облагодѣтельствовала Америку новой методой ручного труда, до сихъ поръ сохранившей у американцевъ названіе „русская система“. Помощникъ директора Московскаго Техническаго училища, Викторъ Делляфоссъ (Della Voss), ввелъ съ 1868 г. свою систему обученія ручному труду, съ цѣлью развить у студентовъ конструктивныя и прикладныя способности. На Всемірной Филядельфійской выставкѣ 1876 г. Делляфоссъ демонстрировалъ свою коллекцію приборовъ и систему обученія ручному труду, а также коллекцію выполненныхъ подъ его руководствомъ студенческихъ работъ. Американцы не замедлили

воспользоваться этими демонстраціями. Уже годъ спустя директоръ Бостонскаго Техническаго Института Рёнкль (Runkle) открываетъ механическую школу съ широкой программой ручного труда по „русской системѣ“. Одновременно съ нимъ неутомимый Вудвардъ (Woodward) начинаетъ свою 25-ти лѣтнюю пропаганду общеобразовательнаго ручного труда, словомъ и дѣломъ, рѣчами, книгами и школами убѣждая Американцевъ въ правотѣ своей идеи. Одна за другой открываются общеобразовательныя школы ручного труда: въ Бостонѣ (1877), Сенъ-Люи (1879), Бальтиморѣ (1883), Чикаго и Толедо (1884); за ними слѣдуютъ Нью-Іоркъ, Филядельфія, Омаха, Денверъ, Клевеляндъ, Нью-Гевенъ, Чинчиннати, Индіанополисъ и рядъ другихъ.

Ручной трудъ въ Америкѣ.

25. „Русская“ система даетъ возможность изготовить часть предмета, но на ней зато демонстрируется рѣшеніе задачи на извѣстный процессъ. Около 1890 г. въ Бостонъ—эти Аѳины Соединенныхъ Штатовъ—проникла „шведская“ система или „sloyd“; она даетъ возможность ученику изготовить массу мелкихъ предметовъ въ законченномъ видѣ, встрѣчаемыхъ въ домашнемъ обиходѣ. Сопоставленіе этихъ системъ привело къ выработкѣ третьей, смѣшаннаго типа, въ настоящее время принятой въ большинствѣ школъ Америки; однако до сихъ поръ встрѣчаются сторонники „русской“ и „шведской“ системъ въ чистомъ видѣ.

Отличительный признакъ американской школы, столь ярко выраженный въ ея девизѣ „Learning by doing“ (учиться дѣйствуя) является общимъ для школъ всѣхъ типовъ: начальной, средней, высшей. Идея ручного труда шла сразу съ двухъ сторонъ; снизу ее пропагандировалъ Фрёбель и его „дѣтскіе сады“, сверху — техническіе институты. Встрѣтившись въ средней школѣ они ее захватили сразу — и въ настоящее время *лабораторная метода* является наилучшимъ образовательнымъ средствомъ. Между тѣмъ какъ въ большинствѣ странъ Европы на ручной трудъ смотрятъ свысока и его вводятъ лишь въ ремесленныя училища и отчасти въ техническія школы, въ Америкѣ, напротивъ, придаютъ ручному труду громадное образовательное значеніе.

Мы должны остановиться на этомъ и перейти непосредственно къ лабораторной методѣ преподаванія математики. Если этотъ терминъ понятенъ въ приложеніи къ химіи, физикѣ и естествовѣдѣнію, то онъ какъ-то странно звучитъ въ приложеніи къ математикѣ. Какая здѣсь возможна лабораторія? И если даже находятся подобные лаборанты, то каковы ихъ научныя данныя для производства столь невиданныхъ опытовъ?

Отлагая до слѣдующей главы отвѣтъ на второй вопросъ, мы дадимъ иллюстраціи лабораторной методы, почерпнутыя изъ практики школъ Америки, Англіи, Франціи и Германіи.

Америка и лабораторная метода.

26. Интереснѣйшимъ школьнымъ уголкомъ является Вашингтонъ съ его садами. Кромѣ садовъ при школахъ Департаментъ Земледѣлія отвелъ два акра (около десятины) подъ опытное садоводство для начальныхъ и среднихъ школъ. Ежегодно тамъ работаетъ 45000 дѣтей. Вотъ какъ описываетъ Omer Buyse эти работы. „Предметные уроки, ручной трудъ, вычисленія, географія и т. п., преподаваемыя въ классахъ Вашингтона, развиваются въ кругу этихъ маленькихъ садиковъ и пополняютъ свои курсы свѣжими и конкретными данными, относящимися къ почвѣ, влажности, оріентировкѣ, сѣменамъ, проростанію, типамъ листьевъ, почекъ, цвѣтовъ, плодовъ — въ ихъ наиболѣе разнообразныхъ видахъ, въ зависимости отъ сортовъ растеній и времени года“.

„Дѣти держатъ въ рукахъ тетрадки, въ которыя они заносятъ сроки посѣва, наблюденія надъ выростаніемъ растеній, появленіемъ цвѣта, созрѣваніемъ и уборкой плодовъ“.

„Дѣти собираютъ тамъ пышные букеты, которые затѣмъ служатъ моделями при рисованіи“.

„Рисованіе, упражненія въ наблюденіяхъ и объясненіяхъ идутъ параллельно съ этими садовыми работами“.

„Въ общемъ планѣ сада имѣется отдѣлъ садиковъ и отдѣлъ географическихъ культуръ; одинъ квадратъ отведенъ животнымъ, характеризующимъ различныя области С.-Ш., остальное мѣсто предназначено для культуры садовыхъ и плодовыхъ продуктовъ штата Вашингтонъ“.

„Воспитательницы извлекаютъ удивительную пользу изъ этихъ разведеній растеній; онѣ съ ними связываютъ уроки о вѣтрахъ, дождѣ, образованіи почвы и о вліяющихъ на это условіяхъ. Продукты являются живой иллюстраціей флоры С.-Ш. Географія рѣшительно сбрасываетъ здѣсь съ себя банальность книгъ и представляется въ видѣ привлекательныхъ и свѣжихъ формъ жизни“.

„Садоводство представляетъ не менѣе живую помощь

Рис. 2. Урокъ геометріи и исчисленія въ садахъ.

урокамъ вычисленія и геометрическихъ формъ. Какъ это видно на прилагаемомъ рисункѣ, дѣти измѣряютъ и дѣлятъ протяженія, поверхности; вычисляютъ стоимость удобренія на квадратную единицу, стоимость задѣльной платы, необходимое количество сѣмянъ; они придумываютъ живые геометрическіе мотивы при помощи орнаментирующихъ растеній или зелени и овощей; они выбираютъ такія фигуры, которыя годятся для мѣтсныхъ разсчетовъ, для измѣреній и для вычисленій,

вводящихъ основные принципы геометріи и ариѳметики. Эти геометрическіе и ариѳметическіе уроки, восходящіе къ первоначальнымъ даже источникамъ знанія, могутъ ли идти въ сравненіе съ уроками, даваемыми въ нашихъ классахъ?"

Въ американскихъ школахъ существуетъ особый курсъ подъ названіемъ Form Study (изученіе формъ); сюда относятся: лѣпка, рисованіе, вырѣзываніе изъ дерева и т. п. Въ „Руководствѣ" для учителей Нью-Іорка, между прочимъ, сказано о Form Study: „дѣти лѣпятъ изъ глины шаръ, затѣмъ, стискивая равномѣрно этотъ шаръ съ 4 сторонъ, они получаютъ кубъ; изъ цилиндра подобнымъ же путемъ получается четырехгранная призма, изъ конуса — пирамида и т. д. Участіе мускульнаго чувства въ ознакомленіи съ формами больше всего сказывается въ томъ, что при лѣпкѣ форма шара получается отъ вращательнаго движенія руки, форма цилиндра — отъ движенія взадъ и впередъ и т. д.".

Form Study распространяется не только на область геометріи. Повсюду учитель стремится къ тому, чтобы физическое усиліе предшествовало или сопровождало умственное; учебные предметы, наиболѣе сухіе въ Европѣ, принимаютъ вещественный и конкретный обликъ, и усвоеніе ихъ требуетъ непремѣнно въ равной мѣрѣ ловкости рукъ, какъ и живости сужденія. Географія проходится въ лабораторіи, гдѣ изготовляютъ рельефы мѣстностей, чертятъ карты и т. п. Занятія литературой сопровождаются зарисовываніемъ и лѣпкой типовъ и силуэтовъ, набросками описаній природы или замѣчательныхъ сценъ, и т. д., и т. д.

Лабораторная метода въ Англіи.

27. Въ 1889 г. была основана знаменитая школа въ Аббатсхольмѣ, послужившая прототипомъ подобныхъ школъ въ другихъ странахъ. Духъ школы и характеръ школьныхъ занятій ясно виденъ изъ слѣдующихъ описаній: англичанина, француза и нѣмца.

„Въ моментъ моего прибытія — пишетъ г. Бевериджъ — нѣсколько учениковъ были заняты раскрашиваніемъ крикета, который они сами сдѣлали въ прошломъ году. Проэктируется выстроить новый мостъ черезъ

рѣку шириною 30—40 метровъ; столбы для большей прочности будутъ каменные. Все это будетъ исполнено учениками".

„Небольшая долина, поросшая лѣсомъ, ведетъ отъ пахатныхъ полей къ школьнымъ строеніямъ, стоящимъ на довольно значительной высотѣ, приблизительно футовъ на сто надъ уровнемъ рѣки. По этой долинѣ протекаетъ маленькій ручеекъ. Ученики устроили цѣлую систему маленькихъ, соединенныхъ между собою, прудовъ. Всѣ земляныя работы были исполнены ими самими, за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, когда необходимо нужна была помощь каменщика".

„Рѣшено было также увеличить школьное зданіе, чтобы оно могло вмѣстить сто воспитанниковъ (максимальное число, при которомъ д-ръ Редди считаетъ возможнымъ управлять своимъ учрежденіемъ). Въ видѣ подготовительной работы ученикамъ поручено дѣлать измѣреніе площади и составленіе точнаго плана дома".

— „Къ преподаванію математики — говоритъ Демоленъ — прилагается также практическій способъ: ученикамъ даютъ примѣнять на дѣлѣ тѣ вычисленія, которымъ ихъ обучали; напримѣръ, они исполняютъ нѣкоторыя работы, при которыхъ нужно комбинировать измѣренія, занимаются межеваніемъ. Имъ раздаются счета по расходамъ фермы, сада, мастерскихъ, игръ, канцелярскихъ принадлежностей, химической лабораторіи, класса рисованія, пищи, отопленія: они приводятъ ихъ въ порядокъ и дѣлаютъ всѣ необходимые для этого разсчеты. Нельзя не согласиться, что этотъ способъ придаетъ отвлеченному изученію математики особый интересъ: всякій видитъ его практическую пользу; цифры оживаютъ; является умѣнье вести хозяйство, промышленное или торговое дѣло, словомъ, дѣйствительно готовятся практическіе люди, способные дѣйствительно жить въ обществѣ".

— „Первая часть урока геометріи — разсказываетъ д-ръ Литцъ — происходила не въ классѣ, а въ ближайшей балкѣ, гдѣ было сдѣлано измѣреніе двухъ, срубленныхъ недавно, съ помощью учениковъ, деревьевъ, послѣ чего весь классъ, вмѣстѣ съ учителемъ и гостемъ, вернулся бѣгомъ домой, чтобы вычислить на

классной доскѣ объемъ деревьевъ и ихъ кубическое содержаніе".

„Главнымъ учебнымъ пособіемъ по геометріи въ Аббатсхольмѣ служитъ не Кемпбель и не какой-нибудь другой учебникъ, а мастерская съ ея досками, балками и листами картона всякой формы и величины, и еще больше — сама природа, ея поля, рѣки, дороги, холмы, деревья и т. д. На нихъ мальчики изучаютъ геометрическія фигуры и упражняются въ „геометріи", само названіе которой, какъ извѣстно, означаетъ науку объ измѣреніи земли. Одно это слово достаточно говоритъ всякому, что безъ такихъ практическихъ измѣреній не можетъ быть геометріи, такъ же какъ и ботаника немыслима безъ ботаническихъ экскурсій".

Геометрія въ новыхъ школахъ.

28. Такъ было поставлено преподаваніе математики еще 20 лѣтъ тому назадъ въ частной англійской школѣ. Съ тѣхъ поръ подобныхъ школъ народилось уже много въ Англіи, Франціи, Германіи; сдѣлана попытка даже въ Россіи. Чтобы не вдаваться въ повторенія, мы ограничимся описаніемъ преподаванія геометріи въ школахъ нѣмецкаго піонера лабораторной методы, д-ра Литца, согласно годовымъ отчетамъ этихъ школъ. „Первыя понятія о геометрическихъ тѣлахъ и фигурахъ, приготовленныхъ самими учениками изъ папки или дерева, о плоскостяхъ, линіяхъ и углахъ ученики получаютъ въ столярной мастерской, а затѣмъ уже, познакомившись съ ними наглядно, легко переносятъ ихъ изображенія на классную доску. Усвоивъ себѣ всѣ эти понятія, ученики переходятъ къ измѣренію линій, поверхностей и объемовъ. Опредѣляютъ, напримѣръ, высоту летящаго змѣя по длинѣ шнурка и углу наклоненія; прокладываютъ мысленно или по плану шоссе изъ школы въ одинъ изъ ближайшихъ городовъ; измѣряютъ поверхность полей и садовъ и составляютъ ихъ планы. Затѣмъ переходятъ къ тригонометрическимъ измѣреніямъ, пользуясь для этого всѣми нужными землемѣрными инструментами. Лежащій на разстояніи нѣсколькихъ сотенъ метровъ отъ школы Гарцъ даетъ имъ достаточно матеріала для опредѣленія высотъ. Каналы, туннели, плотины, бассейны, дома, колодцы, башни, воздушные

шары, словомъ — все, что находитъ себѣ примѣненіе въ жизни, служитъ имъ — въ теоріи, а отчасти и на практикѣ, объектомъ для построеній и измѣреній".

29. Новыя методы обученія математикѣ завоевали не только начальную и первую ступень — онѣ проникли и во второй циклъ, въ среднюю школу, ту самую среднюю школу, которую схоластическіе педагоги Европы такъ ревниво оберегаютъ отъ всякихъ дерзновенныхъ посягателѣствъ здраваго смысла. Защитники старой школы съ ужасомъ видятъ, что ея умозрительная чистота рискуетъ запятнаться ручнымъ творчествомъ, оставляющимъ характерный отпечатокъ личности. Съ искреннимъ удовольствіемъ спѣшимъ увѣрить ихъ, что эти опасенія имѣютъ подъ собой конкретную почву въ Америкѣ и Франціи.

Цитированный уже нами Omer Buyse такъ описываетъ постановку преподаванія математики въ американскихъ среднихъ школахъ (14—18 лѣтъ).

„Согласно пожеланіямъ *Комитета Десяти*, большинство школъ начинаетъ курсъ *наглядной геометріи* тщательнымъ и всестороннимъ изученіемъ свойствъ пространства. Пространство непрерывно, имѣетъ 3 измѣренія; фигуры могутъ въ немъ перемѣщаться, не измѣняя ни размѣровъ, ни формы; прямыя линіи и плоскости могутъ быть въ немъ опредѣлены соотвѣтственно двумя или тремя точками; изъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ лишь одна можетъ быть параллельна прямой въ пространствѣ — такъ профессора формулируютъ геометрическія аксіомы. Изъ этихъ аксіомъ и основныхъ геометрическихъ опредѣленій выводятся всѣ факты, подлежащіе изученію. Комитетъ Десяти, а за нимъ и школы, предаютъ осужденію такой способъ изученія отношеній между размѣрами геометрическихъ величинъ, который основанъ на ихъ непосредственномъ численномъ измѣреніи. Вотъ въ видѣ примѣра ихъ способъ трактовки теоремы: *квадратъ суммы двухъ прямыхъ = суммѣ квадратовъ прямыхъ плюсъ удвоенный прямоугольникъ, построенный на этихъ прямыхъ;* теорема можетъ быть доказана путемъ дѣленія квадрата суммы на 4 прямоугольныхъ фигуры; отсюда можно вывести доказательство и алгебраической теоремы: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$".

„Первая метода чисто геометрическая. Ни одно изъ этихъ понятій не принадлежитъ ариѳметикѣ. Величины называются равными, если онѣ совпадаютъ при наложеніи; онѣ складываются и вычитаются геометрически путемъ прикладыванія и откладыванія, ихъ знанія не выражаются числами, но сравниваются непосредственно“.

„Вторая метода существенно ариѳметическая. Замѣняя величины ихъ измѣреніями, эта метода замѣняетъ равенство, сложеніе и вычитаніе геометрическія — равенствомъ, сложеніемъ и вычитаніемъ абстрактныхъ чиселъ“.

„Первая метода, являясь чистой и элементарной, не вноситъ абстрактности и наилучше приспособлена къ способностямъ начинающихъ. Болѣе того, съ точки зрѣнія геометріи, числовая метода является мудреной и искусственной, ея изложеніе строгимъ и труднымъ; ей недостаетъ объективности и жизни, хотя повидимому она болѣе проста. Постоянная ассоціація чиселъ и геометрическихъ величинъ способствуетъ затемнѣнію основного понятія о геометрическихъ величинахъ и ихъ непрерывности. Числовой методой слѣдуетъ пользоваться какъ приводящей къ измѣренію, но тамъ, гдѣ она вытѣсняетъ чистую методу, она не достигаетъ цѣли“.

„Геометрія—это матеріальная иллюстрація логическаго механизма. Лишь только ученикъ овладѣлъ искусствомъ строгаго доказательства, его трудъ долженъ перестать быть только воспринимающимъ. Пора начать самому находить построенія и доказательства“.

„Таково мнѣніе Комитета Десяти“.

„А затѣмъ онъ такъ характеризуетъ методу, которой нужно слѣдовать“.

„Геометрическія познанія не могутъ быть пріобрѣтены путемъ одного чтенія книжныхъ доказательствъ или устнаго изложенія; ихъ надо пополнять самостоятельными работами, привлекательными и возбуждающими. Геометрія въ американскихъ школахъ излагается для того, чтобы развить и оживить творческій талантъ. Геометрическіе матеріалы просты, конкретны

и допускаютъ безчисленное множество простыхъ или же сложныхъ комбинацій. Въ элементарной геометріи отсутствуетъ общій методъ доказательства. Каждая теорема должна разбираться отдѣльно, пріемомъ болѣе или менѣе отличнымъ отъ другихъ. Нахожденіе этихъ пріемовъ доказательства является гораздо болѣе могущественнымъ умственнымъ упражненіемъ, чѣмъ механическое приложеніе какого-либо общаго метода, какъ напр. дифференціальное и интегральное исчисленіе".

„Содержаніе плоской геометріи не отличается замѣтно отъ матеріала, проходимаго въ нашихъ школахъ; но въ курсѣ стереометріи американцы пользуются интуитивными пріемами, которые съ успѣхомъ могли бы вдохновить нашихъ преподавателей и авторовъ математическихъ сочиненій".

„Они исходятъ изъ принципа, что стереометрическія построенія не могутъ быть выполнены ни при помощи рельефа, ни линейки, ни циркуля, ни вообще какого-либо рисовальнаго прибора; такъ какъ они интуицію признаютъ неизбѣжной, то дѣлаютъ построенія при помощи тѣлесныхъ линій и плоскостей, стальныхъ палочекъ, прозрачныхъ плитокъ, деревянныхъ моделей. На каждомъ урокѣ преподаватель пользуется хитроумными интуитивными приборами большихъ размѣровъ, при помощи которыхъ ученики, раньше всякаго теоретическаго доказательства, ищутъ объясненій элементовъ и даже рѣшеній задачи или теоремы".

„Для усѣченной пирамиды, напримѣръ, на рисункѣ представленъ матеріалъ, которымъ пользуются для того, что-бы *заставить видѣть въ пространствѣ* и дать конкретное понятіе объ изображаемомъ тѣлѣ".

„Интуиція усиливается по мѣрѣ прохожденія курса и сопровождаетъ шагъ за шагомъ умозрительное доказательство; слѣдующіе примѣры даютъ еще подтвержденія этого. „Всякое сѣченіе шара плоскостью есть кругъ, центръ котораго — основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ центра шара на эту плоскость", и „Сѣченія шара, равноотстоящія отъ центра, равны, и обратно". Преподаватель ведетъ доказательство на большихъ шарахъ, гдѣ плоскости изображены металлическими или картонными листами".

„Эти интуитивные пріемы, идущіе изъ начальной школы или даже изъ принциповъ Фрёбеля, дѣйствительно оправдываютъ усилія учениковъ; пониманіе при посредствѣ матеріальнаго наблюденія великолѣпно подготовляетъ къ пониманію абстрактныхъ доказательствъ“.

30. Во Франціи съ 1905 г. преподаваніе математики и, въ частности, геометріи, преобразовано совершенно. Идеи Мерэ (Meray) завоевали, наконецъ, даже прави-

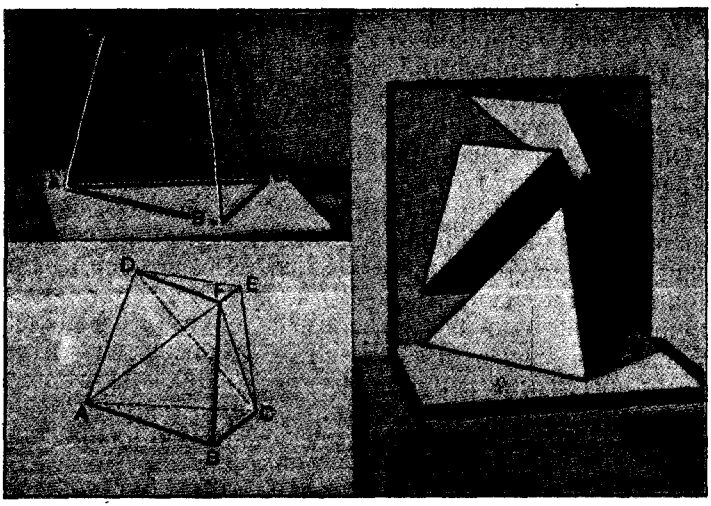


Рис. 3. На право—приборъ картонный, на верху—металлическій, внизу подъ нимъ—чертежъ на доскѣ.

тельственную школу. Среди многочисленныхъ отзывовъ о постановкѣ преподаванія математики за послѣдніе годы мы возьмемъ для иллюстраціи лишь одинъ. Директоръ Дижонской Ecole primaire superieure, Мартэнъ, разсказываетъ о своихъ посѣщеніяхъ классовъ.

„..... Но вотъ мы у г. Монно. Учитель тутъ, съ грознымъ жезломъ въ рукахъ (даже съ двумя); ученикъ на эстрадѣ; такой же жезлъ лежитъ на дощечкѣ. Развѣ мы будемъ присутствовать при урокѣ фехтованія? Всякій наблюдаетъ; интересъ сквозитъ во всѣхъ взгля-

дахъ. Мѣстоположенія мѣняются; одинъ жезлъ ставится перпендикулярно къ дощечкѣ, другой къ ней то приближается, то удаляется, и такъ оперируя все время жезлами и дощечкой, ученикъ — экспериментаторъ увѣренно излагаетъ свое небольшое повѣствованіе. Наконецъ, онъ опускаетъ съ торжествующимъ видомъ свой жезлъ, будучи убѣжденъ, что онъ сказалъ все, что́ нужно для сакраментальнаго: *что́ и требовалось доказать*".

ГЛАВА IV.

Психологія, педагогика и школа.

„Итакъ, если этотъ могущественный школьный механизмъ, въ который теперь всякій вѣруетъ непоколебимо, угрожаетъ хотя бы въ наименьшей мѣрѣ физическому здоровью человѣчества, то его надо признать скверным“.

Стэнли Холлъ.

„Нельзя, безъ опасности, оставаться равнодушнымъ къ запросамъ своего времени“.

Декартъ.

Общество и школа.

1. Современное поколѣніе — французы-ли это, нѣмцы, англичане или американцы — стоитъ лицомъ къ лицу съ кореннымъ вопросомъ воспитанія: чему учить и какъ учить? Старая школа рушилась безповоротно, новая создается на ея руинахъ. Упорная борьба классицизма и реализма принципіально рѣшена — и какъ разъ не тѣми лицами, которыя вели борьбу, не спеціалистами. Въ вѣковой споръ вмѣшались народы. „Мы [1]) живемъ уже не въ тѣ блаженныя времена, когда нѣмецкій народъ, по выраженію Бисмарка, тянуло къ Тюрингенскимъ горамъ; столица Германіи носитъ теперь имя Берлинъ, а не Веймаръ, нашъ взоръ перебѣгаетъ за моря, народный интересъ сосредоточенъ не на эстетикѣ и литературѣ, а на владычествѣ надъ силами природы и на завоеваніи земного шара. И это не можетъ оставаться безъ вліянія на строй мыслей и интересовъ нашей молодежи... Школа не въ силахъ создавать духовныя теченія, а если это такъ, то ей остается только сообразоваться съ ними... Классицизмъ, какъ общая основная форма средняго образованія, обреченъ на погибель“.

---

[1]) *Paulsen*, loc. cit.

На ряду съ измѣненіемъ типа школы необходимо, по мнѣнію всѣхъ, измѣнить систему воспитанія. „Стараго [1]) типа преподаватели очутились теперь въ затруднительномъ положеніи. Въ концѣ вѣка, во всей Европѣ, мы присутствуемъ при великомъ движеніи въ педагогикѣ. Быстрое измѣненіе современныхъ жизненныхъ условій требуетъ и соотвѣтствующаго новаго воспитанія... Стараго типа преподаватели воображали, что ихъ главная обязанность заключается въ обученіи молодежи латинскому языку, греческому, математикѣ, счету, чтенію и письму. Они воображали, что достаточно обладать этими знаніями, чтобы сообщать ихъ учащимся. Довольствовались тѣмъ, что диктовали упражненія, экстемпораліи, тщательно ихъ поправляли, ставили плохія отмѣтки, лишали отпуска... Вся наша система образованія, система экзаменовъ, гдѣ играетъ роль только одинъ чувственный элементъ, приняла характеръ чудовищной односторонности. Ничто не нанесло нашему воспитанію такого вреда, какъ это; ничто, какъ это, такъ сильно не способствовало появленію того невыносимаго положенія, съ которымъ мы теперь ведемъ борьбу“.

2. Германское правительство пока лишь внимательно прислушивается къ голосамъ нѣмецкаго общества. Не то мы видимъ у ихъ сосѣдей. Еще въ 1902 г. оффиціальныя новыя программы французской школы въ предисловіи помѣстили циркуляръ министра Лейга, въ которомъ, между прочимъ, сказано: „Въ такомъ государствѣ, какъ Франція, гдѣ профессіональная и активная часть населенія (промышленники, коммерсанты, земледѣльцы) составляетъ 48% всего населенія, а именно 18 милліоновъ на 38 милліоновъ жителей, гдѣ промышленный капиталъ достигъ 96 миліардовъ 700 милліоновъ франковъ; гдѣ земельный капиталъ доходитъ до 78 милліардовъ франковъ; гдѣ обороты по вывозу (въ 1900 г.) достигли суммы свыше 4 милліардовъ франковъ, — Министерство не можетъ удовольствоваться подготовкой молодыхъ людей, ему довѣренныхъ, къ свободнымъ профессіямъ, къ высшимъ учебнымъ заве-

---

[1]) *Litz*, Emlohstobba. Roman oder Wirklichkeit.

деніямъ и къ профессурѣ; оно должно готовить ихъ также къ промышленной и коммерческой дѣятельности“. —

3. Англія тоже вступила на путь реформы воспитанія. На ряду съ колледжами возникаютъ Public schools, успѣшно борющіяся именно съ тѣми сторонами старой школы, которыми такъ возмущался знаменитый Рёскинъ. „Надо, — говоритъ онъ, — чтобы ребенокъ былъ въ особенно несчастныхъ обстоятельствахъ, необходимо полное игнорированіе его со стороны учителей или особенная съ его стороны строптивость и непокорность для того, чтобы онъ имѣлъ возможность пускать въ ходъ свои глаза и руки; такъ что умѣющіе владѣть и тѣмъ и другимъ — большею частью дѣти или заброшенныя, или непослушныя, бродяги или дурные ученики, болтающіеся, самовольные и упорно противодѣйствующіе всякимъ формамъ воспитанія, тогда какъ наши благонравные и благовоспитанные школьники учебной тренировкой доведены до слѣпоты и подавленія половины ихъ способностей . . .“

4. Нигдѣ, конечно, не наблюдается такого рѣшительнаго перехода на сторону новой школы, какъ въ Америкѣ (если подъ нею подразумѣвать С.-Ш.). Не только система обученія и воспитанія радикально измѣнена, какъ это было видно въ предыдущей главѣ; самъ школьный учебный матеріалъ реформировался въ направленіи отъ литературныхъ дисциплинъ къ естественно-научнымъ и математическимъ. Въ цѣломъ рядѣ книгъ, брошюръ, журнальныхъ и газетныхъ статей американцы высказываются за практически — научный характеръ новаго воспитанія. „Въ Америкѣ, если не вездѣ въ культурныхъ странахъ, настало время, когда каждый гражданинъ призванъ судить и давать рѣшенія по вопросамъ соціальнымъ и экономическимъ, по вопросамъ — главнымъ образомъ — труда, и вотъ почему становится необходимымъ, чтобы молодое поколѣніе было ознакомлено съ формами труда въ стѣнахъ еще школы“. — „Желѣзныя дороги и фабрики, эти два продукта паровой силы, являются новыми факторами въ соціальной проблемѣ нашего вѣка, и для контроля этихъ факторовъ необходимы новыя формы знаній, а

ихъ нельзя извлечь при старыхъ педагогическихъ основаніяхъ". — „Недостатокъ здраваго сужденія въ практическихъ сторонахъ жизни характеризуетъ людей стараго, исключительно литературнаго образованія. Между тѣмъ въ наше время ежедневныхъ техническихъ открытій и усовершенствованій именно первое сужденіе всего нужнѣе человѣку. Одно электричество съ его разнообразными примѣненіями требуетъ ранняго воспитанія на конкретныхъ наблюденіяхъ, а между тѣмъ школа въ большинствѣ случаевъ до сихъ поръ еще спокойно сохраняетъ свой устарѣлый абстрактный характеръ, какъ будто бы на свѣтѣ не было вовсе такой вещи, какъ электрическій проводъ". —

— „Древніе не менѣе насъ, можетъ быть, были ознакомлены съ научными истинами, но они не умѣли связать ихъ съ техникой: примѣненіе науки къ обыденной жизни есть отличительная черта современной культуры". — „Въ наше время Эдиссонъ, Ваттъ, Пастеръ, Гельмгольцъ, Ньютонъ — все это люди, которые не имѣли бы почетнаго мѣста въ древности; напротивъ, сила главнымъ образомъ за людьми, имѣющими конкретное образованіе". — „Желѣзная дорога, телеграфъ и паровая машина имѣютъ въ настоящее время болѣе могучее вліяніе на судьбы человѣчества, чѣмъ юристъ, врачъ или священникъ". — „То, что дѣлало въ древности появленіе великихъ людей въ смыслѣ ускоренія прогресса, то дѣлаетъ нынѣ появленіе великихъ открытій. И дѣйствительно, промышленныхъ гигантовъ — паръ и электричество — надо съумѣть осѣдлать, чтобы заставить ихъ служить успѣхамъ человѣчества." —

— „Всякій добрый гражданинъ обязянъ нынѣ имѣть понятіе о сотнѣ вопросовъ, для которыхъ знаніе механики и промышленныхъ пріемовъ такъ же существенно, какъ умѣніе читать и писать". — „Міръ въ настоящее время представляетъ изъ себя великую мастерскую, рабочіе пріемы которой должны быть понятны всякому, кто хочетъ быть представителемъ прогрессивныхъ идей". — „Соединить работу и мысль воедино, сдѣлать изъ каждаго работника мыслителя и изъ каждаго мыслителя работника — вотъ что требуется въ наше время, а для этого нѣтъ лучше мѣста, какъ школа". — „Развитымъ,

въ полномъ смыслѣ слова, человѣкомъ можетъ назваться только тотъ, чья гибкая рука послушно исполняетъ ясныя и быстрыя велѣнья ума". — „Упражненія рукъ и всѣхъ пяти чувствъ человѣка составляетъ базисъ всего почти знанія въ настоящее время. Люди науки — инженеры, медики, агрономы — всѣ учатся на лабораторныхъ работахъ, т. е. черпаютъ знанія изъ данныхъ, какія имъ даютъ чувства зрѣнія, осязанія, слуха и т. д. Математикъ прибѣгаетъ къ лѣпнымъ работамъ для нагляднаго изученія кривыхъ поверхностей, о которыхъ трактуетъ высшая геометрія [1]). Ботаникъ съ инструментами въ рукахъ, работаетъ надъ анализомъ растеній. Физикъ и химикъ орудуютъ надъ всевозможными приборами и снарядами. Всѣ они черпаютъ знанія изъ первоисточника его — самаго предмета, надъ которымъ работаютъ, экспериментируютъ".

Американцы отъ словъ перешли къ дѣлу — объ этомъ въ настоящее время нѣтъ двухъ мнѣній. Школьный прогрессъ, по ихъ мнѣнію, заключается въ такомъ режимѣ, который обезпечиваетъ воспитаннику максимальную личную дѣятельность. Единственное стремленіе преподавателя — довести до минимума свое вмѣшательство, дать воспитаннику возможность проявить иниціативу, контроль надъ своими поступками, съ одной стороны; пріобрѣсти власть надъ собой, ту внутреннюю дисциплину, которая освобождаетъ человѣка отъ поисковъ за внѣшнимъ руководителемъ, съ другой. Задача реформированной школы — создать свободную личность, а для этого пути должны быть иные. Инспекторъ Бостонскихъ школъ, Эдвинъ Сиверъ (Seaver), въ своемъ докладѣ ясно подчеркиваетъ эти новые пути. „Умъ человѣческій создаетъ и пріобрѣтаетъ познанія. Его созидательныя способности должны быть воспитываемы наравнѣ съ пріобрѣтательными; важно развивать эти два средства формировки знанія, начиная съ ранняго дѣтства и до зрѣлаго возраста, проводя это черезъ всѣ занятія. Съ этой цѣлью нужно помѣстить между час-

---

[1]) Съ той же цѣлью пользуются моделями Брилля, Плюкера, Клебша, Клейна, ф. Дика и др. Съ 1892 г. въ Мюнхенѣ устроена постоянная выставка пособій по математикѣ, физикѣ и механикѣ.

тями школьной программы систематическія упражненія, которыя поднимутъ юношество на ступень преобразованія мысли въ дѣйствіе, перехода идей и внутреннихъ ощущеній къ матеріальному воспроизведенію этихъ идей и ощущеній".

Это *преобразованіе мысли въ дѣйствіе* въ настоящее время осуществлено почти во всѣхъ типахъ школъ. И поэтому президентъ Гарвардскаго Университета Эліотъ могъ спокойно заявить: „Наиболѣе важный прогрессъ, осуществленный въ воспитаніи за послѣдніе 20 лѣтъ, это — индивидуализація обученія, въ смыслѣ выдѣленія на первый планъ точныхъ потребностей и развитія способностей и свойствъ каждой отдѣльной личности, на всякой ступени ея развитія. Лабораторное обученіе и ручной трудъ однородны, какъ средства образованія, такъ какъ они предназначены для личности". —

Науки о школѣ. 5. Между тѣмъ, какъ общественные дѣятели, ученые, писатели и др. высказывали свои пожеланія и даже требованія, на помощь имъ явились двѣ новыя научныя дисциплины — *экспериментальная психологія* и *экспериментальная педагогика*. Цѣлый рядъ неутомимыхъ тружениковъ на зарѣ XX ст. открываетъ намъ дивную картину новой, научной педагогики, гдѣ все будетъ идти не по догадкамъ, не „нутромъ", а на основаніи точныхъ данныхъ, дѣйствительно законовъ развитія дѣтства и юношества. Глава этого научнаго движенія, Стэнли Холлъ (Stanley Hall), слѣдующимъ образомъ характеризуетъ принципы точной педагогики.

„Если начнемъ съ глубокой философіи, часто содержащейся въ словахъ, то мы вспомнимъ, что слово *школа* означаетъ отдыхъ, свободу отъ работы, продолженіе первобытнаго рая, созданнаго раньше, чѣмъ началась борьба за существованіе. Школа — означаетъ продолженіе человѣческаго дѣтства и не менѣе важное продолженіе юности. Она посвящена здоровью, росту и полученію наслѣдства; а одинъ фунтъ этого стоитъ больше тысячи фунтовъ обученія... Прежде чѣмъ ставить педагога передъ лицомъ дѣтства, не только нужно дать себѣ отчетъ въ каждой части его учебнаго плана,

но и позаботиться о томъ, чтобы его нападенія являлись правомощными въ глазахъ каждаго ребенка. Мы должны пересилить фетишизмъ алфавита, таблицы умноженія, граматики, счисленія и преклоненія передъ книгами, и подумать, что всего за нѣсколько поколѣній наши предки не умѣли читать и писать".

Педологія. 6. Когда были произведены изслѣдованія дѣтей группами, когда появилась массовая статистика и получились выводы на основаніи закона большихъ чиселъ, то оказалось, что старыя теоріи — „теоріи въ мягкомъ креслѣ" — рушились окончательно и съ позоромъ. Пришлось поставить основной вопросъ: „Что же такое, собственно, дитя?" Въ поискахъ за отвѣтомъ создалась незамѣтно *наука о ребенкѣ или педологія,* сейчасъ уже отвѣчающая опредѣленно на поставленный вопросъ. Понемногу выяснилось, что дѣти не являются вовсе взрослыми въ миніатюрѣ, но что у нихъ свой собственный душевный міръ, свои пріемы мышленія и приспособляемости. Взрослый — при самомъ тщательномъ наблюденіи — не въ состояніи воспроизвести душевный складъ дѣтства.

Здѣсь прежде всего мы встрѣчаемъ цѣлую группу психическихъ явленій, которыя исчезаютъ задолго до періода возмужалости, не оставляя слѣдовъ. Съ этимъ связаны многіе вопросы первостепенной важности — укажемъ на вѣроятное замѣщеніе ихъ развитіемъ высшихъ способностей, разъ; на выясненіе вопросовъ о перестановкѣ гласныхъ, о правилахъ согласованія, о нарѣчіяхъ — путемъ изслѣдованія ошибокъ дѣтскаго произношенія (Tracy, Lukens, Grant и др.), два; на типическія ошибки въ умозаключеніяхъ, выясняющія происхожденіе многихъ обманчивыхъ мнѣній и заблужденій, три. Все это остается неизвѣстнымъ для того психолога, который занимается лишь психологіей взрослаго человѣка. Эту психологію необходимо поставить послѣ дѣтской — въ генетическомъ порядкѣ, гораздо болѣе важномъ, чѣмъ логическій.

„Способности и недостатки дѣтскаго ума помогли найти наилучшую методу обученія — при помощи чиселъ и геометрическихъ формъ", говоритъ Холлъ. Наблюденія Lobsien'a (1903), Stern'a (1905) и др. подтвер-

дили этотъ выводъ. Наглядное обученіе отнынѣ получило научное обоснованіе (о немъ еще впереди).

Періоды развитія.

7. Посмотримъ теперь, какіе періоды необходимо установить въ развитіи дѣтей и какими особенностями отличается каждый періодъ.

А. Періодъ дѣтскаго сада, отъ 2 или 3 года до 6 или 7. Спеціально этотъ періодъ мы разсматривать не будемъ; укажемъ лишь, что на 7—8 году происходитъ весьма важный переломъ, во время котораго надо по возможности уменьшать работу и напряженіе мысли. Болѣе или менѣе сильные сердечные припадки, слабость нервной системы, малокровіе, болѣзни глазъ, зубовъ и горла — вотъ что встрѣчается чаще всего въ этотъ годъ перелома. Изслѣдованія показываютъ значительное пониженіе на 8 году способности къ отвлеченію — какъ бы регрессъ.

В. Періодъ отъ 8 или 9 до 13 года. Этотъ періодъ совпадаетъ съ началомъ школьныхъ занятій; кромѣ того, одна часть дѣтей къ 13 году оканчиваетъ или прекращаетъ занятія, другая — продолжаетъ ихъ въ старшихъ классахъ школы, гдѣ другія методы; поэтому на данный періодъ слѣдуетъ обратить большое вниманіе. Особенности развитія: уменьшеніе быстроты роста, слѣдовательно, отдыхъ для тѣла и усиленіе активныхъ и оборонительныхъ (противъ болѣзней) функцій организма; болѣе успѣшная борьба съ усталостью; наиболѣе развитое стремленіе къ дѣятельности, большее, чѣмъ въ остальные періоды жизни.

Сообразуясь съ этимъ, школа должна въ теченіе 4 лѣтъ заниматься главнымъ образомъ упражненіями, привычкой и механическимъ навыкомъ, координированіемъ дѣйствій ребенка. Теперь слѣдуетъ начать обученіе (болѣе серьезное) чтенію и письму; до этого періода мускулы слишкомъ нѣжны для тѣхъ усилій, какія необходимы при письмѣ, а зигзагообразное движеніе глазъ вредно отражается на зрѣніи. Въ то же время слѣдуетъ развивать память, пользуясь ея временной податливостью; точно также укрѣплять привычки и навыки техническіе особенно въ рисованіи, но начинать не съ угловъ, прямыхъ и кривыхъ линій,

а съ большихъ и свободныхъ формъ, со сценъ, полныхъ движенія и жизни (битвы, пожары, кораблекрушенія, случаи изъ желѣзнодорожной жизни и др.). Параллельно съ этимъ должны идти занятія по вычислительной ариѳметикѣ, наглядной геометріи и черченіи, только позже — по начальной алгебрѣ. Рисованіе и ручной трудъ необходимо также соединить съ географіей (начатки этнографіи, антропологіи, зоологіи, астрономіи, геологіи, метеорологіи и ботаники); между тѣмъ наша школьная географія — политическая и комерческая, т. е. занимается вопросами, возбуждающими интересъ лишь на 16—20 году жизни. Наконецъ, въ эти же годы нужно начать обученіе одному или двумъ языкамъ, конечно по наглядной, а не грамматической методѣ.

С. Періодъ юности, отъ 13 г. у дѣвочекъ и 14 г. у мальчиковъ и до 23—24 года. Усиленіе роста и большая склонность къ заболѣваніямъ — отличительныя черты первыхъ двухъ лѣтъ разсматриваемаго періода. Наряду съ этимъ быстро расширяется сердце и артеріи, увеличивается давленіе крови, проявляющееся въ краскѣ на лицѣ. Развиваются всѣ чувственныя состоянія (страхъ, гнѣвъ, любовь, сожалѣніе, зависть, соперничество, гордость, сочувствіе и др.). Полу-дѣти и полуюноши становятся крайне впечатлительными: рѣзкое или ласковое слово взрослаго дѣйствуетъ сильнѣе, чѣмъ когда-либо. Пробуждается страстное желаніе „быть взрослымъ“, ищутъ отношеній къ себѣ, какъ къ взрослымъ. Нѣсколькихъ лѣтъ (13—17) оказывается достаточно для формировки новаго существа, но эта эпоха формировки — самая тяжелая и щекотливая для воспитателей, она — пробный камень для родителей, учителей и методъ воспитанія.

Что-же слѣдуетъ предпринимать? Стэнли Холлъ отвѣчаетъ такъ: „Прежде всего должна уйти со сцены система муштровки, система механическая, и наоборотъ — слѣдуетъ основываться на чувствѣ свободы и интереса. Мы должны предоставить возможно бо́льшую свободу индивидуальности. Мы вправѣ и обязаны учить лишь тому, что́ возбуждаетъ столь большой интересъ, что оно кажется драгоцѣннѣйшимъ въ мірѣ. Нельзя

долѣе заставлять и ломить; слѣдуетъ руководить и пробуждать желаніе. Одна только муштровка теперь—это регрессъ. Если личность должна вполнѣ созрѣть, то каждую личность надо изучать отдѣльно".—

— „Обо всѣхъ этихъ вопросахъ преподаватели средней школы заботятся меньше, чѣмъ всѣ остальные, хотя въ общемъ догадываются, что такіе вопросы существуютъ. Для нихъ періодъ юности какъ разъ представляется той эпохой, когда молодежь усвоила больше, чѣмъ даетъ народная школа [1]), но еще слишкомъ мало, чтобы поступить въ высшую. Въ глазахъ такихъ преподавателей задача состоитъ лишь въ томъ, чтобы учениковъ передѣлать въ начинающихъ студентовъ; поэтому они съ тоской и безпокойствомъ ждутъ момента, когда цѣлью обученія станутъ университетскія требованія. Ихъ покинулъ духъ всякой предпріимчивости, они отказались отъ своей привилегіи—выяснять потребности этого періода развитія и служить имъ, они обладаютъ ничтожнымъ профессіональнымъ образованіемъ, мало интересуются воспитаніемъ въ серьезномъ значеніи этого слова и такъ же мало заботятся объ обученіи въ народной школѣ. Ихъ девизомъ, пожалуй, является изреченіе: „Non vitae, sed scholae discimus" (мы учимся не для жизни, но для школы)".—

— „Если понять сущность указанныхъ періодовъ развитія и подумать объ удовлетвореніи ихъ запросамъ, то въ средней школѣ окажутся необходимыми самыя радикальныя реформы изъ всѣхъ педагогическихъ реформъ. Всѣ народы—дикари или культурники—признаютъ періодъ юности. Дѣйствительно, въ извѣстномъ смыслѣ воспитаніе начинается именно здѣсь и распространяется вверхъ къ университету и внизъ къ дѣтскому саду, сообразуясь съ ходомъ цивилизаціи".

„Разсматриваемый съ точки зрѣнія высшаго біологическаго закона, періодъ юности является золотой эпохой жизни. Физическія и духовныя качества доходятъ до зенита, а человѣческая раса въ юности болѣе молода и болѣе юна, такъ какъ лишь на этой ступени появляется зародышъ сверхчеловѣка".—

---

[1]) Въ Россіи—городскія училища.

Чувственныя воспріятія.

8. Основной вопросъ педагогики—какъ вести воспитаніе и обученіе — поставленъ теперь на строго — научную плоскость. Прежде всего надо изучить общіе законы развитія, затѣмъ развитіе мышленія и, наконецъ, развитіе волевыхъ, активныхъ импульсовъ. Указавъ вкратцѣ главные періоды развитія, мы переходимъ ко второй и третьей части постановки вопроса. Всякое познаніе начинается съ чувственныхъ воспріятій. Въ основѣ психологическаго процесса лежитъ, такимъ, образомъ, *наблюденіе*, за нимъ слѣдуетъ *умственная обработка*, претворяющая наблюденіе въ *представленіе*.

Главнѣйшія изъ воспріятій—зрительныя; но въ нихъ наряду со свѣтовыми содержатся и моторныя (двигательныя). Неподвижно устремленный взоръ при наблюденіи приводитъ—согласно изслѣдованіямъ—къ болѣе ошибочнымъ результатамъ, чѣмъ движеніе глаза. Особенно ярко выступаетъ это при разсмотрѣніи пространственныхъ формъ. Хорошо, если осматривать фигуры и тѣла съ разныхъ сторонъ, еще лучше, если во время разсматриванія проводить по контурамъ рукой. То же относится и къ счисленію: «*Итакъ* [1], *если для воспріятія числа къ зрительнымъ ощущеніямъ мы присоединимъ еще и осязательныя, то результатъ обученія будетъ тѣмъ лучше и тѣмъ вѣрнѣе, и этотъ результатъ можетъ быть достигнутъ при помощи такого учебнаго пособія, которое въ существенныхъ частяхъ своихъ имѣетъ устройство нашего счетнаго аппарата*».

Слухъ развитъ вообще слабѣе зрѣнія — и это необходимо принимать во вниманіе. Дѣти со слабымъ слухомъ или — со слуховыми воспріятіями, развитыми недостаточно, зачисляются обыкновенно, при господствующей словесной методѣ обученія, въ разрядъ невнимательныхъ, разсѣянныхъ, малоспособныхъ. Нечего и говорить, что это совершенно невѣрное заключеніе.

Слушая, дѣти часто двигаютъ головой, складываютъ или раскладываютъ руки, качаютъ ногами и т. п., что

---

[1]) *Dr. W. A. Lay.* Führer durch den Rechenunterricht der Unterstufe, 1907 г. стр. 137 (русскій переводъ недавно вышелъ изъ печати).

является подтвержденіемъ существованія моторно-слуховыхъ воспріятій. Эти движенія облегчаютъ работу и наоборотъ — неподвижное слушаніе даетъ плачевные результаты [1]).

Такимъ образомъ *всякое чувственное воспріятіе является соединеніемъ двухъ воспріятій; одно изъ нихъ всегда моторное.*

Память и запоминаніе.

9. Перейдемъ теперь къ типамъ воспріятій, памяти и запоминанію. Многочисленные опыты показали, что типы воспріятія: зрительные, слуховые, моторные и смѣшанные (зрительно-моторные, моторно-слуховые и др.) являются въ то же время и типами памяти. Въ общемъ слуховая память менѣе важна, чѣмъ зрительная, а для математики особенно воспріимчивой оказывается зрительно-моторная и зрительно-слуховая. Такимъ образомъ обоснованіе для наглядной методы именно въ обученіи математикѣ—найдено.

Далѣе, необходимо придерживаться слѣдующихъ двухъ положеній: a) „Преподаваніе должно на всѣхъ ступеняхъ и во всѣхъ предметахъ считаться съ типами воспріятія“, и b) „Въ старшихъ классахъ учитель долженъ обратить вниманіе учениковъ на типъ воспріятія, къ которому каждый изъ нихъ принадлежитъ, такъ какъ это имѣетъ громадное значеніе при выборѣ профессій“.—

Слабая память и слабое вниманіе является результатомъ болѣзней носа и слизистой оболочки горла. По излѣченіи многія дѣти начинаютъ заниматься несравненно успѣшнѣе—„у нихъ появляются способности“, какъ говорятъ казенные педагоги. Вообще же болѣе сильные и здоровые физически ученики владѣютъ и лучшей памятью.

10. Въ основу ученія о запоминаніи надо положить правило: *Общая воспріимчивость памяти неизмѣнна, она не поддается развитію.* Поэтому насильственное упражненіе памяти—великое преступленіе. Каждый запоми-

---

[1]) См. рисунки и снимки въ книгѣ *Schulze*, Aus der Werkstatt der experimentellen Psychologie und Pädagogik, 1909, стр. 123—153, которую горячо рекомендуемъ читателямъ.

наетъ, какъ хочетъ и какъ можетъ. „Молодой [1]) англичанинъ не имѣетъ понятія о томъ, что мы называемъ *приготовленіе уроковъ*, т. е. тотъ молчаливый классъ (въ закрытыхъ учебныхъ заведеніяхъ и пансіонахъ при гимназіяхъ), гдѣ подъ надзоромъ безмолвнаго воспитателя учатъ наизусть прозу и поэзію. Англичанинъ долженъ придти къ учителю съ приготовленными уроками; но онъ свободенъ и воленъ приготовлять ихъ, когда и гдѣ ему угодно. Если ему нравится учить Гомера, зарывшись въ сѣно, или геометрію на деревѣ, никто противъ этого ничего не имѣетъ. Время, какъ и деньги всецѣло принадлежатъ ему; онъ и располагаетъ имъ по своему усмотрѣнію и желанію. Онъ одинъ отвѣтственъ за пользованіе этимъ сокровищемъ. Его судятъ только по результату".

Но горе даже не въ этомъ, а въ засореніи памяти массой ненужныхъ потребностей. Памятная метода обученія была возможна лишь тогда, когда каждый образованный человѣкъ могъ удержать въ памяти все, что̀ было извѣстно человѣчеству. Но времена ходячихъ энциклопедій канули въ вѣчность. Теперь задача умственнаго воспитанія не въ томъ, чтобы голову превратить въ энциклопедію, а въ томъ, чтобы сообщить личности тѣ пріемы и тѣ формулы, при помощи которыхъ откроются двери всякой науки. Не быть энциклопедіей, но умѣть разбираться въ энциклопедіяхъ; не заучивать формулы, но знать, *гдѣ* ихъ найти и *какъ* ими пользоваться — вотъ задача современнаго образованія. Даже университеты (правда, не у насъ, а за границей) становятся уже на эту точку зрѣнія. Выпускные экзамены — въ нѣкоторыхъ изъ нихъ — по математикѣ обставлены такъ: дается задача и — всѣ книги, какія только пожелаетъ экзаменующійся. Если онъ покажетъ, что умѣетъ справляться съ книгами и извлекать изъ нихъ все нужное для рѣшенія предложенной задачи, то онъ считается успѣшно окончившимъ факультетъ. У насъ же до сихъ поръ, особенно по математикѣ, царствуетъ памятная метода. Не умѣніе прилагать формулы изъ алгебры и тригонометріи, а знаніе этихъ

---

[1]) *Демоленъ*, Новое воспитаніе, 1900, стр. 45.

формулъ наизусть и знаніе ихъ доказательствъ (выводовъ) — вотъ что̀ выдвигается на первый планъ въ средней (да и не только въ средней!) школѣ; не умѣніе приложить теоремы геометріи, а знаніе доказательствъ и порядка слѣдованія теоремъ — единственная цѣль обученія. Математика въ русскихъ школахъ находится еще на уровнѣ средневѣковья.

Наконецъ, изъ указаннаго правила вытекаетъ важное заключеніе относительно выбора матеріала для запоминанія. Если воспріимчивость памяти неизмѣнна и ограничена, то, очевидно, она не поддается дрессировкѣ дальше извѣстнаго предѣла; если это такъ, то необходимо тщательно изслѣдовать *сравнительное достоинство* тѣхъ отдѣловъ учебнаго матеріала, какіе преподносятся дѣтямъ сейчасъ и какіе выдвигаются въ качествѣ новыхъ и желательныхъ. Ясно, что нельзя увеличивать программы, а лишь ихъ измѣнять по количеству и качеству содержимаго. Мозгъ ребенка и юноши не сосудъ, подлежащій наполненію, не комодъ съ ящиками, куда можно болѣе или менѣе плотно набить все, что вздумается; онъ даже не собраніе фотографическихъ пластинокъ, отразившихъ преподаваемое въ школѣ. Человѣческое мышленіе развивается по своимъ собственнымъ законамъ, и педагогическое воздѣйствіе лицъ, не знакомыхъ съ психологіей и педагогикой, — лишь уродованіе человѣка въ умственномъ отношеніи.

Основной психологическій процессъ.

11. Покажемъ теперь, что роль чистаго мышленія крайне ничтожна, что оно одно не въ состояніи дать *понятіе*.

До сихъ поръ считали, что роль мышленія, подразумѣвая подъ этимъ терминомъ преимущественно отвлеченное мышленіе, является главной въ психологическомъ процессѣ. Этотъ процессъ начинается съ *ощущенія*, за нимъ слѣдуетъ *воспріятіе* (перцепція) и, наконецъ, *представленіе*. Послѣ этого наступаетъ царство *абстрактнаго познаванія* или *мышленія*: *общія понятія*, *сужденія*, *умозаключенія*. Такъ вотъ эта цитадель абстрактности въ настоящее время сильно поколеблена. Начать съ того, что второй членъ процесса — воспріятіе или умственная обработка матеріала, доставленнаго ощуще-

ніемъ, происходитъ конкретно. Представленіе, равнымъ образомъ, есть воспроизведеніе, а не отвлеченіе. „Представленіе [1]) заключаетъ въ себѣ любую практическую, созидательную работу, образовываніе, формировку, построеніе, воспроизведеніе, и можетъ быть проведено: въ моделировкѣ — изъ песку, глины, пластилина и другихъ веществъ; въ производствѣ опытовъ изъ области естествознанія, физики, химіи и географіи; въ уходѣ за животными и растеніями; въ простомъ черченіи, въ проэкціонномъ черченіи, въ перспективномъ рисованіи и живописи, въ счетѣ и геометріи, устанавливающими извѣстные законы; въ словесномъ изображеніи, въ декламаціи, въ драматическомъ представленіи, въ пѣніи и музыкѣ вообще, въ играхъ, танцахъ, гимнастикѣ и спортѣ; въ участіи воспитанника въ семейной жизни, въ играхъ съ товарищами, въ школѣ, организованной на подобіе рабочей артели; въ политическихъ и религіозныхъ кружкахъ своей родины“.

Далѣе, „ясное [2]), отчетливое представленіе вмѣстѣ съ сопровождающими его чувствованіями и двигательными актами называемъ мы *понятіемъ*“.

Что же остается на долю мышленія? И что такое само мышленіе?

Установлено, что психическая жизнь состоитъ изъ процессовъ чувственной (сенсорной), умственной и волевой дѣятельности. Эти три процесса проявляются въ воспріятіи, сознаніи и дѣйствіи. Но сейчасъ уже немыслимо говорить о независимости каждаго процесса, напротивъ — между чувствами, разумомъ и волею существуетъ тѣснѣйшее взаимодѣйствіе, и каждый изъ трехъ перечисленныхъ процессовъ является функціей двухъ остальныхъ.

Біологически ученикъ — это сенсорно-моторный аппаратъ, съ нервной системой во главѣ. Сенсорная часть управляетъ воспріятіями; спинной и головной мозгъ — переработкой ихъ; моторные центры — воспроизведеніемъ и обобщеніемъ. Принимая во вниманіе, что моторные центры занимаютъ цѣлую *треть* мозговой

---

[1]) *Lay*, Experimentelle Pädagogik.
[2]) Ibid.

массы; что такъ наз. *мышечное чувство* есть то, къ чему сейчасъ сводятся наши представленія и понятія; что по мѣрѣ роста мышцъ отъ упражненій растутъ и клѣтки соотвѣтствующаго нервнаго центра, и т. д., и т. д., — придется сдѣлать важный и совершенно неожиданный выводъ, что *мышленіе — это овладѣваніе мускульными усиліями.*

Такимъ образомъ мышленіе оказалось сбитымъ со своей царственной позиціи, оно — между начальнымъ сенсорнымъ процессомъ и конечнымъ моторнымъ. *Все стремится перейти въ движеніе* — это послѣднее слово біологіи и психо-физіологіи, подтвержденное статистическими изслѣдованіями многихъ выдающихся экспериментаторовъ и формулированное въ 1905 г. однимъ изъ нихъ, Штерномъ: *„Въ основаніи психическаго процесса лежатъ не воспріятія, впечатлѣнія и понятія съ внутренней ихъ обработкой, а замѣна впечатлѣній моторными движеніями* [1]".

Задача школьнаго обученія.

12. Итакъ необходимо кореннымъ образомъ реформировать школьное обученіе. Мы теперь знаемъ, что „практическое, научное, техническое и художественное мышленіе и дѣйствіе носятъ характеръ созидающій, опредѣляющій, образующій и творческій, и соотвѣтственно съ этимъ связаны съ моторными процессами въ нервахъ и съ двигательными явленіями движенія. *Является потребность въ моторномъ воспитаніи и въ педагогикѣ дѣйствія.* Пассивно воспринимаемое обученіе должно уступить мѣсто обученію, основанному на наблюденіи и на конкретныхъ представленіяхъ, и школа простого обученія должна уступить мѣсто школѣ съ самостоятельной работою". —

---

[1]) Мы лишены возможности болѣе обстоятельно остановиться на этихъ вопросахъ и рекомендуемъ читателямъ обратиться къ первоисточникамъ, а именно:

Lay, Experimentelle Didaktik, 1903 (есть русскій переводъ).

Lay, Experimentelle Pädagogik, 1908 (тоже).

G. Stanley Hall, Ausgewählte Beiträge zur Kinderpsychologie und Pädagogik, 1902.

G. Stanley Hall, Adolescence its Psychology, 1905.

Милль, Система логики, 1899. Книга IV, глава I—III.

Психологическія основы лабораторной методы.

13. Шагъ за шагомъ мы шли къ обоснованію новой педагогики, къ реформѣ математическаго образованія въ частности. Отвлеченный процессъ мышленія сохранился лишь на послѣднихъ — 5-ой и 6-ой ступеняхъ психологическаго процесса. Но и здѣсь еще не сказано пока послѣдняго слова. Что же касается дѣтскаго возраста, то уже установлено, что *процессъ отвлеченія въ дѣтствѣ идетъ гораздо медленнѣе и не поддается никакимъ ускорительнымъ пріемамъ.* Это положеніе для педагогики математики имѣетъ громадное значеніе. Необходимо въ корнѣ измѣнить методу обученія, выдвинувъ на первый планъ общеобразовательный ручной трудъ.

Психо-физическая теорія общеобразовательнаго ручного труда выработана окончательно. Всякое сознательное движеніе начинается съ возбужденія моторныхъ клѣтокъ мозга. Мысль безъ дѣйствія можетъ развить воображеніе, но не развиваетъ воли; воля развивается лишь дѣйствіями. Всякое мускульное движеніе отражается на мозговыхъ клѣткахъ посредствомъ ощущеній, укрѣпляется въ проэктивныхъ центрахъ въ видѣ понятій и образовъ. Если пренебрегать упражненіями мышцъ, то это поведетъ за собою атрофію соотвѣтствующихъ центровъ. Необходимо увеличивать воспріимчивость мозга, и поэтому раціональное воспитаніе должно разнообразить характеръ движеній ручного труда, чтобы послѣдовательно заинтересовать всѣ группы клѣтокъ. Отсюда слѣдуетъ, что для развитія всей моторной области мозга необходимо увеличить число и видъ упражненій и упорядочить ихъ, такъ, чтобы заострить чувствительность и понятливость, заставить бить ключомъ мысль и укрѣпить волю. „Разумное и прилежное культивированіе мускуловъ у человѣка ведетъ къ развитію *широты мысли* столько же, какъ и къ развитію широты плечъ“.

Когда движеніе нѣкотораго вида становится привычнымъ, оно теряетъ свое образовательное значеніе. Дѣйствіе тогда не доходитъ до головного мозга, а производится за счетъ спинного; *сознательное* движеніе мало по малу переходитъ въ безсознательное, *реф-*

лекторное; тогда образуются умѣнія или *навыки*, независящія отъ нашей воли и сознанія. Именно здѣсь кончается періодъ образовательнаго труда и наступаетъ эпоха *ремесла*.

Изслѣдованія и статистика вопроса показали, что интересъ при занятіяхъ ручнымъ трудомъ есть функція числа упражненій. При нѣкоторомъ числѣ упражненій интересъ, повышаясь, доходитъ до максимума, и при дальнѣйшемъ увеличеніи числа упражненій стремительно падаетъ. Это предѣльное число различно для различныхъ упражненій, но необходимо установить его для каждаго вида ручного труда.

Сущность и различіе наглядной и лабораторной методы.

14. Теперь только мы имѣемъ возможность окончательно разсмотрѣть вопросъ о наглядной и лабораторной методахъ и выяснить ихъ сравнительную цѣнность для педагогики.

Наглядная метода состоитъ изъ двухъ главныхъ моментовъ: a) учитель показываетъ предметъ (въ цѣломъ или его частяхъ), о которомъ идетъ рѣчь и в) лично продѣлываетъ опыты. Въ большинствѣ случаевъ ученики ограничиваются зрительными воспріятіями, въ лучшемъ случаѣ могутъ пріобрѣсти *подражательные навыки*.

Лабораторная метода даетъ три момента: a) учитель показываетъ предметъ, b) ученики знакомятся съ нимъ каждый въ отдѣльности (осязаніе, лѣпка, черченіе и рисованіе, изготовленіе изъ папки и т. п.), c) ученики продѣлываютъ самостоятельные опыты. При лабораторной методѣ роль учителя сводится къ регулированію и поясненію индивидуальныхъ работъ учащихся. Такимъ образомъ лабораторная метода приводитъ къ *самостоятельнымъ навыкамъ*.

Изъ сказаннаго видно, что лабораторная метода идетъ гораздо дальше наглядной; исходя изъ общаго начала — зрительныхъ воспріятій, обѣ методы въ дальнѣйшемъ расходятся и приводятъ къ совершенно различнымъ результатамъ. Каковы эти результаты въ лабораторной методѣ — краснорѣчиво разсказываетъ Omer Buyse, знаменитый изслѣдователь школъ Европы и Америки:

„Европейская школа свидѣтельствуетъ о самомъ глубокомъ незнакомствѣ съ природой ребенка и человѣка. Она безъ стыда и смущенія занимается обработкой мозга; она подавляетъ своеобразность и съ упорнымъ рвеніемъ заставляетъ проходить всякую зарождающуюся личность подъ валиками уравнительной плющильной машины. Американская же школа возбуждаетъ индивидуальность и предоставляетъ ей проявить свои собственныя качества при помощи того трудового режима, при которомъ ребенокъ сохраняетъ свободу оцѣнки, собственное сужденіе, оригинальные поступки и отвѣтственность за нихъ“.

ГЛАВА V.

Основные принципы педагогики математики.

„Число освѣщаетъ глубины мірозданія".

Лейбницъ.

„Во всѣхъ народныхъ, сельскихъ и городскихъ школахъ общечеловѣческое образованіе должно какъ можно ранѣе и какъ можно прямѣе переходить въ реальное и прикладное".

Пироговъ.

„Я не могу ничему научить твоего сына, онъ меня не любитъ".

Сократъ.

Сущность и цѣль науки.

1. „Наука[1]) возникаетъ всегда въ процессѣ приспособленія нашихъ мыслей къ опредѣленной области опыта. Результатомъ этого процесса являются элементы мысли, въ которыхъ и можетъ быть обобщена и выражена вся область фактовъ. Само собою разумѣется, что результатъ этотъ долженъ быть различнымъ, находясь въ зависимости отъ рода и величины области. Разъ область опыта расширяется, или нѣсколько областей, бывшихъ до этого времени раздѣленными, объединяются въ одну область, то привычные, но устарѣвшіе элементы мысли оказываются для новой болѣе обширной области недостаточными. Въ борьбѣ пріобрѣтенныхъ привычныхъ взглядовъ съ стремленіемъ къ приспособленію возникаютъ *проблемы*, которыя съ завершеніемъ приспособленія исчезаютъ, чтобы уступить мѣсто новымъ проблемамъ, вновь возникающимъ".

„Для насъ цѣнно только установленіе *функціональныхъ отношеній*, выясненіе *зависимости, существующей*

---

[1]) *Э. Махъ*, Анализъ ощущеній, 1908, стр. 46—51. Курсивъ автора.

между нашими переживаніями... Во всѣхъ вопросахъ, которые можно признать здѣсь разумными и которые могутъ насъ интересовать, все дѣло въ установленіи различныхъ *основныхъ перемѣнныхъ* и различныхъ *отношеній зависимости*. Это—самое главное. Въ томъ, что̀ намъ фактически дано, въ функціональныхъ отношеніяхъ, не измѣняется ничего, безразлично, разсматриваемъ ли мы все данное—какъ *содержаніе сознанія*, или отчасти, либо вполнѣ — какъ нѣчто *физическое*. Біологическая задача науки — дать человѣческому индивидууму, владѣющему всѣми своими чувствами, возможно *полную оріентировку*. Другой научный идеалъ неосуществимъ, да и не имѣетъ никакого смысла".

Въ нашу задачу не входитъ выясненіе вопроса о наукѣ въ полномъ объемѣ; съ другой стороны такое выясненіе, полное и объективное, невозможно, такъ какъ въ настоящее время всякій научный и философскій лагерь трактуетъ вопросъ по своему. Но независимо отъ этихъ точекъ зрѣнія (позитивизмъ, матеріализмъ, натуралистическій идеализмъ, монизмъ и т. д.) мы считаемъ, что на формулѣ Маха могутъ сойтись всѣ, поскольку въ этой формулѣ выдвигаются на первый планъ принципы измѣненія и функціональности. Для насъ важно то обстоятельство, что въ настоящее время офиціально признано взаимодѣйствіе между явленіемъ и сознаніемъ и что это взаимодѣйствіе, будучи закономѣрнымъ, стремится облечь себя въ математическую форму функціи. *Вся совокупность существующаго есть великая неявная функція многихъ перемѣнныхъ.*

Классификація научныхъ отдѣловъ.

2. Единство науки—это идеалъ, о которомъ мечтали и продолжаютъ мечтать выдающіеся умы. Но пока, въ дѣйствительности, необходимо различать отдѣльныя части науки, какъ по содержанію, такъ и по пріемамъ изслѣдованія. Вотъ почему говорятъ обыкновенно о наукахъ, а не о наукѣ. Но установить какую-либо исчерпывающую классификацію наукъ до сихъ поръ не удалось, хотя попытки въ этомъ направленіи появляются постоянно. Начиная съ Аристотеля и его „описательной" классификаціи, основанной на „принципѣ дѣленія", мы имѣемъ затѣмъ системы Бэкона 2-го и Энциклопе-

дистовъ; „іерархія наукъ“ Огюста Конта съ подраздѣленіемъ на конкретную и абстрактную группы смѣняется тоже дуалистической системой Ампера, но подъ другимъ угломъ зрѣнія: Амперъ дѣлитъ науки на космологическія и ноологическія, на науки о матеріи и о духѣ, причемъ вводитъ еще 4 основныхъ точки зрѣнія; въ I-ой группѣ — отоптическая и криптористическая, во II-ой — тропономическая и криптологическая (т. е. явленія и выводы изъ нихъ; законы и слѣдствія). Ампера смѣнилъ Спенсеръ (о его классификаціи, равно какъ и о системѣ Гегеля распространяться не будемъ); далѣе Вундтъ далъ *генетическую* классификацію съ двумя видами ея: *конструктивнымъ*, дающимъ рядъ объектовъ въ логическомъ порядкѣ, и *реконструктивнымъ*, показывающимъ реальное развитіе отъ одного типа къ другому. Наконецъ, на совершенно другихъ основаніяхъ проведена классификація у Бернгейма и Навилля. Первый говоритъ: „обозрѣвая[1]) различныя науки, мы замѣчаемъ, что существуетъ три различныхъ рода разсмотрѣнія наукою ея объектовъ, смотря по тому, что она желаетъ знать о послѣднихъ: 1) каковы объекты сами по себѣ и какія свойства они имѣютъ, *ихъ бытіе*; 2) какъ они стали или становятся тѣмъ, что они суть, *ихъ развитіе*; 3) что означаютъ они въ ихъ связи другъ съ другомъ, *въ міровой связи*. Сообразно этому отграничиваются другъ отъ друга естественно-научный, историческій, философскій роды разсмотрѣнія“. У Навилля[2]) руководящая точка зрѣнія уже исключительно логическая. Его классификація разбиваетъ науки на три группы: 1) историческія (histoire), 2) теорематическія (théorématique) и 3) регулятивныя (sciences régulatives). Въ первую группу зачислены науки, трактующія о дѣйствительности; здѣсь рядомъ съ исторіей мы встрѣчаемъ статистику, геодезію, астрономію, геологію, ботанику, зоологію и др. Во вторую группу входятъ науки, формулирующія законы; таковы ариѳметика, механика, физика, химія, біологія, психо-

---

[1]) *Bernheim*, Lehrbuch der historischen Methode.
[2]) *Naville*, De la classification des sciences, 1888.

логія и др. Въ третью группу отнесены общественно-юридическія, экономическія и др. науки.

Математика въ ряду наукъ.

3. Этихъ примѣровъ достаточно. Они иллюстрируютъ тотъ хаосъ, который царитъ пока среди классификаторовъ и, вѣроятно, прекратится не скоро. Но въ одномъ направленіи всѣ классификаторы проявили удивительное единогласіе. У Ог. Конта математика занимаетъ первое мѣсто изъ 7 ступеней энциклопедической лѣстницы, она—старшая въ абстрактной группѣ наукъ; то же мы находимъ и у Ампера, который далъ ей имя *ариѳмологіи*; Спенсеръ, Вундтъ и др. поступили также. Слѣдовательно, математика по общему признанію занимаетъ среди наукъ первое мѣсто, и ея роль охарактеризована Кантомъ: „Въ каждой отрасли ученія о природѣ мы имѣемъ науку постольку, поскольку встрѣчаемъ въ ней математику“.

Чѣмъ обязана математика такому исключительному положенію?

Представимъ себѣ на мгновеніе, что благодаря какому-либо катаклизму на землѣ исчезли всѣ до одного минералы; существовала бы тогда наука, именуемая минералогіей? Конечно, нѣтъ, въ ней не было бы надобности. Такой же вопросъ можно поставить относительно любой науки—всѣ онѣ существуютъ постольку, поскольку существуютъ объекты научнаго изслѣдованія. Одна лишь математика въ данномъ случаѣ поставлена въ исключительныя условія. Она будетъ существовать до тѣхъ поръ, пока есть что считать и измѣрять: ея объектами является все сущее. Свойство измѣненія присуще всему, это свойство характеризуетъ величину, слѣдовательно, вселенная есть совокупность величинъ и—вселенная есть объектъ математики.

Примѣчаніе. Оставаясь на почвѣ объективнаго изложенія, мы должны указать, что понятіе „величина“ трактуется различно. Подробнѣе см. дальше, пунктъ 12.

Сущность математики.

4. Что такое математика? Въ теченіе столѣтій отвѣтовъ дано было множество. Сначала говорили, что это „наука о величинахъ“, затѣмъ „наука объ измѣреніи величинъ“ (Эйлеръ, 1708—83). Такъ какъ непосредственное измѣреніе воз-

можно въ исключительныхъ случаяхъ, то еще Hobbes (1588—1679) далъ поправку, принятую и О. Контомъ: „наука о косвенномъ измѣреніи величинъ“. Присоединивъ сюда понятіе о функціи (Лейбницъ, 1646—1716), мы можемъ формулировать опредѣленіе математики, какъ науки, такъ: „математика есть наука о законахъ измѣненія величинъ“—или еще лучше—„математика есть наука о функціяхъ“ (Робертъ Грассманнъ, 1872).

Это—одна сторона вопроса. Если же смотрѣть такъ, „что [1]) предметъ математики, какъ и всякой другой доказательной науки, составляютъ не вещи, какъ онѣ въ дѣйствительности, а умственныя отвлеченія“, что чистая математика есть цѣпь хорошо подобранныхъ силлогизмовъ—можно понять точку зрѣнія Германа Грассманна (1809—77): „наука объ особомъ мірѣ, созданномъ мышленіемъ“, или Hoene—Wroński: „наука о формахъ внѣшняго міра“, или Вундта: „математика—это исчерпывающее свой предметъ изслѣдованіе мыслимыхъ формъ чистаго воззрѣнія, такъ же, какъ и выполняемыя, на основаніи чистаго воззрѣнія, формальныя построенія понятій въ отношеніи всѣхъ ихъ свойствъ и взаимной зависимости“.

Наконецъ, Кантъ и Гамильтонъ (1805—1865) разсматриваютъ математику еще съ третьей точки зрѣнія. Они кладутъ въ основу воспріятія времени, разсматривая числа, какъ воззрительные акты послѣдованія, сложенія во времени; Гамильтонъ, поэтому, даетъ новое опредѣленіе: „математика есть наука чистаго времени“.

Итакъ мы во второй разъ должны установить отсутствіе соглашенія среди людей науки; подобно тому, какъ существуютъ различныя научныя классификаціи, существуютъ и самыя разнообразныя воззрѣнія на сущность математики. Попытки примирить крайности пока неудовлетворительны. Такъ, напр. Симонъ въ своей нашумѣвшей книгѣ [2]) говоритъ: „Математика есть наука объ упорядоченномъ творческомъ соединеніи и разло-

---

[1]) *Миль.* Система логики, I, 114.

[2]) *Simon*, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik, 1908, IX, 2. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ цитировать эту книгу какъ „Симонъ“.

женіи, о созидающемъ синтезѣ и анализѣ". Легко видѣть, что это опредѣленіе не по существу, а по методу; здѣсь намекъ на закономѣрность и на развитіе, но нѣтъ рѣчи о дѣйствительномъ содержаніи.

Содержаніе математики.

5.—По вопросу о содержаніи дѣло обстоитъ такъ же. Почти всѣ классификаторы придерживаются слѣдующаго порядка: ариѳмологія (сохранимъ терминъ Ампера), геометрія, механика, астрономія, физика и химія и т. д. Но по вопросу о содержаніи такъ называемой „чистой математики" (Россія), „mathématiques pures" (Франція), „reine Mathematik" (Германія) и т. д. мнѣнія раздѣляются больше. Въ то время, какъ одни считаютъ „чистой математикой" лишь ариѳмологію, другіе включаютъ туда геометрію, а третьи еще и кинематику (Hoene-Wroński, Kant, Карно, Гамильтонъ, Вундтъ и др.). Для иллюстраціи приведемъ интересную классификацію Вундта [1]).

I. Математическія науки общія.

A. Наука количественныхъ формъ: наука о величинахъ
1. Наука о дѣйствіяхъ надъ величиной: Алгебра.
2. Теорія зависимостей величинъ: Теорія функцій.

B. Наука качественныхъ формъ: теорія разнообразія.

II. Математическія науки спеціальныя.

A. Наука о числахъ.
1. Ариѳметика: Наука о дѣйствіяхъ надъ числами.
2. Теорія чиселъ: Наука о числахъ и зависимостяхъ между ними.

B. Наука о пространствѣ.
1. Геометрія синтетическая: Наука объ образованіи изъ элементовъ пространственныхъ формъ.
2. Геометрія аналитическая: Теорія примѣненія понятій о величинахъ къ пространственнымъ образованіямъ.

C. Наука о движеніи.
1. Кинематика синтетическая: Наука о сложеніи движеній.
2. Кинематика аналитическая: Примѣненіе общихъ понятій о величинахъ къ вопросамъ движенія.

---

[1]) *Wundt*, Ueber die Eintheilung der Wissenschaften.

Споры объ абсолютномъ опредѣленіи содержанія математики надо признать совершенно безплодными. Постоянное движеніе впередъ различныхъ научныхъ отдѣловъ, болѣе или менѣе полное выдѣленіе изъ нихъ абстрактированныхъ частей, обобщенія частичныхъ теорій въ общую—все это наполняетъ собою жизнь науки. Можно говорить только о динамической, а не о статической математикѣ. Вопросы о содержаніи чистой математики соприкасаются съ основными вопросами Теоріи познанія (Гносеологіи); не вдаваясь въ разборъ ихъ по существу можно лишь указать слѣдующее основаніе для классификаціи математическихъ наукъ.

Для вывода силлогизма необходимо имѣть двѣ посылки, бо́льшую и меньшую. Если въ качествѣ большей посылки принять, что A=A (то есть, принять на вѣру законы формальной логики), а въ качествѣ меньшей—гипотезу объ абстрактной величинѣ, то мы въ состояніи будемъ построить *ариѳмологію*. Присоединяя гипотезу о пространствѣ, получаемъ *геометрію*; новая гипотеза — о времени — даетъ намъ *механику*, гипотеза о силѣ — *астрономію*, еще новая — о матеріи — *физику* и *химію* и т. д. Ясно, что чѣмъ меньше гипотезъ, тѣмъ достовѣрнѣе окончательные выводы. Вотъ почему ариѳмологія стоитъ во главѣ наукъ. Эта точка зрѣнія, повидимому, въ неявномъ видѣ раздѣлялась многими, особенно защитниками „чистой“ геометріи и кинематики. Дѣйствительно, созданіе синтетической геометріи какъ бы снимало съ очереди гипотезу о пространствѣ; но попытки Штаудта, Кэли (Cayley), Клейна и др. остаются попытками, такъ какъ вмѣсто гипотезъ объ измѣряемомъ пространствѣ молчаливо принимается гипотеза о проэктивномъ пространствѣ.

Остальныя науки, конечно, относятся къ разряду прикладныхъ математическихъ наукъ. Феликсъ Клейнъ даетъ интересную классификацію послѣднихъ, основанную на степени точности вычисленій, примѣняемыхъ въ каждой изъ нихъ. Первое мѣсто занимаетъ астрономія и нѣкоторые отдѣлы физики; здѣсь число десятичныхъ знаковъ послѣ запятой доходитъ до 7. Затѣмъ слѣдуетъ геометрическое черченіе—3 или 4 знака, еще далѣе химія съ 2 знаками и т. д. Эта классификація

ничего общаго не имѣетъ съ научной, основанной на Гносеологіи, но она постоянно измѣняется и въ своемъ измѣненіи служитъ мѣрою развитія отдѣльныхъ наукъ.

Перечень отдѣловъ чистой математики.

6. Какъ бы то ни было, *сейчасъ* геометрія входитъ въ чистую математику—и мы ее оставимъ тутъ; вопросъ объ ея происхожденіи и аксіоматизаціи будетъ разсмотрѣнъ въ главѣ „Статика и динамика въ Геометріи“.

Слѣдующій перечень отдѣловъ чистой математики является по возможности наиболѣе полнымъ.

I. Исторія и философія математики.
II. Всеобщая алгебра (математическая логика).
III. Алгебра низшая и высшая.
IV. Ариѳметика низшая и высшая.
V. Теорія вѣроятностей. Комбинаторика.
VI. Ряды.
VII. Дифференціальное и Интегральное исчисленія
VIII. Теорія функцій.
IX. Геометрія элементарная чистая.
X. „ синтетическая „
XI. „ начертательная.
XII. „ аналитическая.
XIII. „ дифференціальная.
XIV. „ „Im Grossen“.
XV. „ многихъ измѣреній.
XVI. „ неэвклидова.
XVII. Общая теорія преобразованій (аналитическія группы преобразованій, отображенія (Abbildungen), векторіальныя поля, номографія).
XVIII. Теорія ансамблей.
XIX. Теорія группъ.

Выводы и заключенія.

7. Быть можетъ, все здѣсь (въ этой главѣ) изложенное покажется слишкомъ детализированнымъ и не имѣющимъ прямого отношенія къ педагогикѣ математики; поэтому мы сейчасъ изложимъ причины, побудившія насъ къ такому детализированію вопроса. Мы хотѣли показать, во I-хъ, какой хаосъ взглядовъ, неустановившихся понятій, спорныхъ вопросовъ и т. п. царитъ какъ разъ теперь

въ изслѣдованіяхъ по философіи математики; между тѣмъ принято восхвалять математическую стройность и достовѣрность—и молодые умы пріучаются смотрѣть на математику, какъ на какой-то абсолютъ. Во II-хъ, большинство лицъ, даже немного знакомыхъ съ т. наз. высшей математикой, не представляютъ себѣ конкретно ея содержанія и не видятъ, какъ расширились ея рамки за послѣднія два столѣтья. Жалкая школьная математика кажется имъ весьма обширной, а университетская наука (особенно жалкая въ Россіи)—вѣнцомъ человѣческой премудрости. Между тѣмъ каждый изъ 19 поименованныхъ отдѣловъ составляетъ особую отрасль изслѣдованій—и если нѣкоторые изъ нихъ лишь недавно зародились (таковыхъ два—три), то изъ остальныхъ за то, по содержанію, каждый въ отдѣльности превышаетъ всю древнюю и средневѣковую науку. Наконецъ, въ III-хъ, перечень можетъ послужить для иллюстраціи относительнаго положенія геометріи и анализа въ XX вѣкѣ. Большинство отдѣловъ переплелось настолько, что съ каждымъ днемъ все труднѣе установить, гдѣ кончается геометрія и начинается анализъ, или наоборотъ. Это положеніе вещей лучше всего охарактеризовать словами Пикара: „Взаимное переплетаніе различныхъ научныхъ отраслей стало сегодня крупнымъ фактомъ и съ каждымъ днемъ будетъ становиться все болѣе плодотворнымъ источникомъ важныхъ научныхъ открытій. Въ этомъ отношеніи существуетъ громадная разница между современной и минувшей эпохой. Сегодня мы съ трудомъ уразумѣли бы тѣ случаи, когда геометры презирали аналистовъ и наоборотъ; сегодня мы чувствуемъ, что эра замкнутыхъ школъ, тѣсно связанныхъ съ одной лишь точкой зрѣнія, исчезла навсегда“.

Изложенное позволяетъ намъ установить два главныхъ положенія:

I. Необходимо пересмотрѣть современный матеріалъ школьной математики и исключить изъ него все, являющееся пережиткомъ времени, замѣнивъ исключаемое новыми отдѣлами, соотвѣтственно современнымъ научнымъ и соціальнымъ требованіямъ, и

II. Необходимо возможно тѣснѣе переплести между собою отдѣльные математическіе учебные предметы [1]).

Наука и учебный предметъ.

8. Если бы даже въ педагогикѣ не существовало установленнаго разграниченія между наукой и учебнымъ предметомъ, то достаточно было бы изложеннаго на предыдущихъ 10 страницахъ, чтобы такое разграниченіе провести въ математикѣ.

Слѣдующая табличка показываетъ наглядно, на чемъ основано такое разграниченіе.

	Наука.	**Учебный предметъ.**
Содержаніе.	Безконечное.	Ограниченное.
Объемъ.	Безконечный.	Ограниченный.
Цѣли.	1) Познаніе, 2) Открытіе.	1) Ознакомленіе, 2) Воспитаніе.
Система.	Перемѣнная.	Опредѣленная.
Пути.	Методологія науки.	Методика уч. предм.
Адепты.	Взрослые, подготовленные.	Дѣти и юноши, начинающіе.

Эта табличка нуждается въ нѣкоторыхъ поясненіяхъ. *Содержаніе, объемъ и система* учебнаго предмета опредѣляются программами. Программы не вѣчны, но мѣняются спустя нѣкоторые промежутки времени, а не непрерывно; преподаватели часто включаютъ тѣ или иные добавочные вопросы, но число такихъ вопросовъ ограничено различными условіями и само названіе „добавочные“ опредѣляетъ ихъ сравнительную цѣнность.

Положеніе объ *адептахъ* достаточно обосновано въ главѣ IV-ой.

---

[1]) Подробности см. во II части, детальную мотивировку въ нашей книгѣ „Реформа школьной математики“.

Остается детальнѣе разсмотрѣть два вопроса: цѣли и пути, что́ мы сейчасъ и сдѣлаемъ.

Цѣли математики, какъ учебнаго предмета.

9. Цѣль математики, какъ учебнаго предмета, была опредѣлена нами, какъ *ознакомленіе* и *воспитаніе*. Эту мысль можно развить такъ.

а) *Практическая* цѣль—имѣетъ въ виду научить примѣнять математику къ житейскимъ вопросамъ; научить примѣнять математическіе методы и выводы къ изученію явленій природы.

б) *Образовательная* цѣль—далеко не столь развить формальное мышленіе, сколько дать міръ идей, оперируя надъ матеріаломъ, имѣющимъ научную и культурную цѣнность. Это можетъ быть достигнуто главнымъ образомъ путемъ „проявленія“ идеи закономѣрности, смутно сознаваемой всѣми, путемъ углубленія этой идеи и перехода ея въ стройную идею функціональной зависимости; наконецъ, путемъ ознакомленія съ сущностью и предѣлами примѣненія математическаго метода вообще, того символическаго метода, который стремится выразить всякую зависимость въ видѣ уравненія, съ тѣмъ чтобы дальше это *уравненіе за насъ думало.*

в) *Воспитательная* цѣль—пріучить къ экономіи мышленія, къ сосредоточиванію вниманія цѣлесообразнѣйшимъ образомъ; воспитать осторожность сужденія, его послѣдовательность и достаточную обоснованность. Это можетъ быть достигнуто путемъ не обученія, а изученія. А изучать — значитъ узнать генезисъ явленія и прослѣдить его связь съ другими.

Методъ и метода.

10. Пути, которыми идетъ ученый изслѣдователь, далеко не тѣ, по которымъ медленно подвигается руководитель начинающаго ученіе юношества. Наука имѣетъ свои методы, строго установленные и вполнѣ объективные; изученіе этихъ методовъ составляетъ предметъ *методологіи* данной науки. Такъ, напр., различаютъ методологію математики отъ методологіи естественныхъ наукъ или методологіи исторіи. Далѣе, научный методъ стремится представить рядъ истинъ въ стройномъ органическомъ развитіи независимо отъ цѣлей и условій внѣшнихъ; нако-

нецъ, онъ даетъ возможность сдѣлать новыя открытія въ данной области знанія.

Совершенно другая задача у учебной методы. Она ничего не открываетъ, такъ какъ оперируетъ надъ опредѣленнымъ заранѣе матеріаломъ, а лишь раскрываетъ передъ ученикомъ связную картину неизвѣстнаго ему до тѣхъ поръ уголка знаній. Учебная метода крайне субъективна, подвержена множеству постороннихъ вліяній, должна всецѣло приспособляться къ индивидуализаціи школы и къ условіямъ и законамъ развитія дѣтской среды, къ уровню ихъ пониманія и способностей. Учебная метода либо эволюціонируетъ подъ вліяніемъ успѣховъ науки, физіологіи нервной системы, гигіены умственнаго труда, психологіи и т. п., либо признается неудовлетворяющей педагогическимъ принципамъ эпохи.

Резюмируя вкратцѣ сказанное, можно формулировать это слѣдующимъ образомъ: *методъ служитъ интересамъ науки, метода—интересамъ личности* [1]).

Число методъ неограничено ничѣмъ; всякая эпоха вводитъ свои. Единственное условіе—это подчиненіе всякой методы законамъ цѣлесообразности и непротиворѣчія.

Изложеніе и сравнительное изученіе методъ, примѣняемыхъ въ каждомъ учебномъ предметѣ, составляетъ *методику* даннаго предмета.

Математическія методы. 11. Относительная цѣнность каждой методы различна. Каждая стремится къ достиженію максимума результатовъ при минимумѣ индивидуальныхъ затратъ ума и воли; но *никогда нельзя удовольствоваться въ школѣ одной методой*: умѣлое пользованіе нѣсколькими методами есть залогъ наибольшаго успѣха преподаванія.

---

[1]) Терминологія методическаго вопроса въ Россіи пока не установлена. Такъ, различаютъ дидактическій методъ (мы его назвали: учебная метода) и научный методъ. Въ иностранной педагогической литературѣ различаютъ: метода обученія и метода доказательства и рѣшенія (Die Methode des Unterrichts und die Methode der Beweisführung und der Auflösung) — въ Германіи; методъ и пріемъ (Method and Mode, — въ Англіи и Америкѣ. Мы остановились на названіяхъ *методъ* и *метода*.

Главнѣйшія математическія методы слѣдующія.

1. *Догматическая* — преподаваніе, т. е. лекціонное изложеніе (объясненіе урока) и заучиваніе ученикомъ по книгѣ или запискамъ. Легко переходитъ въ дрессировку.
2. *Катехизическая* — Даются вопросы и готовые отвѣты. Метода основана на зубреніи и спрашиваніи. Примѣняется иногда и теперь въ книгахъ по такъ наз. пропедевтикѣ математики и физики.
3. *Эвристическая* — Даются вопросы, наводящіе на отвѣтъ (Сократъ). Метода основана на подборѣ цѣлесообразныхъ задачъ.
4. *Генетическая* — Особый видъ синтеза — генезисъ даетъ картину развитія данной отрасли знанія. Особенно цѣнная метода для прохожденія началъ математики.
5. *Наглядная* —
6. *Лабораторная* — } см. гл. IV.
7. *Комбинаціонная* — Иногда 2 методы соединяютъ — комбомбинируютъ ихъ. Изъ такихъ комбинаціонныхъ методъ наибольшимъ успѣхомъ пользуются: генетическая (если ее разсматривать какъ соединеніе анализа съ синтезомъ), индуктивно-эвристическая и генетически-эвристическая.

Вопроса о научныхъ методахъ въ математикѣ мы здѣсь разсматривать не будемъ. Нѣкоторыя детали будутъ указаны въ главѣ „Статика и динамика въ Геометріи“; по общему же вопросу желающіе могутъ найти достаточно матеріала въ слѣдующихъ книгахъ:

Милль, Система логики, кн. II и III.—1899 г.

Duhamel, Des méthodes dans les sciences de raisonnement, t. I.—1865.

Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht.—1906.

Wundt, Logik, II, ss. 76—114.—1883.

Joung, The Teaching of Mathematics in the Elementary and the Secondary Schol. New-Iork, 1907.—Глава „Methods and Modes“.

Dauzat, Eléments de méthodologie mathématique, 1100 стр.—1901.

Основныя математическія понятія.

12. Первыя экскурсіи въ область ариѳметики сейчасъ же заставляютъ дѣтей столкнуться съ понятіями: величина, число, единица, нуль. Извѣстно, что русскіе современные учебники начинаются опредѣленіями этихъ понятій. Посмотримъ, какъ обстоитъ дѣло съ ними.

Житейское опредѣленіе величины—то, что̀ способно измѣняться, т. е. увеличиваться или уменьшаться. Легко убѣдиться въ томъ, что такое опредѣленіе качественное, а не количественное. Поэтому Больцано говоритъ: „Величина принадлежитъ къ такимъ предметамъ, изъ коихъ два любыхъ M и N или должны быть равны: $M=N$, или одинъ изъ нихъ есть сумма, заключающая въ себѣ другой, какъ часть: $M=N+\alpha$“. Но этими словами Больцано вовсе не думалъ опредѣлить величину: онъ только поясняетъ это понятіе, какъ и Ганкель; послѣдній говоритъ, что величина—это понятіе, вовсе не нуждающееся въ метафизическомъ опредѣленіи; оно требуетъ лишь разъясненія. Еще рѣзче ставитъ вопросъ Дю-Буа-Реймонъ. По его мнѣнію, опредѣленіе понятія „величина“ непремѣнно является „продуктомъ дипломатическаго искусства опредѣленія“. Мы не въ состояніи ознакомиться съ новымъ видомъ животнаго, если его намъ опредѣляютъ при помощи числа плоскостей, ограничивающихъ животное; точно также всѣ опредѣленія величины совершенно не даютъ намъ возможности уразумѣть, что такое математическая величина и чѣмъ она отличается отъ нематематической.

Мы не будемъ разбирать детально вопросъ о величинѣ. Работы Дю-Буа-Реймона и Гельмгольца позволили установить два подраздѣленія величинъ: 1) математическія и нематематическія (Spielgrössen, по D.-B.-R.) и 2) экстенсивныя и интенсивныя. Первыя—это тѣ символы, надъ которыми мы производимъ дѣйствія; вторыя—это настоящія величины, для которыхъ пока не существуетъ математики. Въ самомъ дѣлѣ, когда мы

оперируемъ надъ электропроводностью или теплоемкостью различныхъ тѣлъ, мы оперируемъ не надъ этими величинами „вещами въ себѣ“, а надъ нѣкоторыми условными символами. Вся заслуга современной математики въ томъ, что она свела эти условные символы къ тремъ основнымъ—длинѣ, времени и массѣ (система C. G. S. единицъ).

Мы имѣли случай упомянуть, что подъ словами „величина“ подразумѣвается всякій элементъ природы, и поэтому вселенная есть объектъ математики. Нѣкоторые изъ математиковъ, однако, указываютъ, что наша наука занимается изученіемъ не только величинъ. Таково мнѣніе Краузе, братьевъ Грассманнъ, Тиле и др. По Роберту Грассманну [1]) математика состоитъ изъ 5 частей: 1) наука о величинахъ, 2) логика, 3) комбинаторика, 4) теорія чиселъ, 5) наука о протяженіи (Ausenlehre). По Тиле [2]) предметы математическихъ изслѣдованій дѣлятся на 5 классовъ: 1) множества (индивидуумы), 2) величины (длины, поверхности, объемы, вѣса и т. п.), 3) вещественныя точки (Tingpunkter)—температура, время, точки на прямой, 4) члены (Led)—напр. члены безкон. ряда и 5) разные предметы, какъ напр. углы и др., не входящіе въ предыдущіе 4 класса.

Всѣ эти споры пока не разрѣшены; но одно установлено, а именно: *величина не поддается опредѣленію.*

Седьмая книга „Началъ“ Эвклида начинается слѣдующими опредѣленіями:

1. Единица есть то, что означаетъ одну вещь.
2. Число есть собраніе единицъ.

Изъ этого видно, что Греки не признавали единицу числомъ. Ясно выражено это у Теона (ок. 130 по Р. Х.): „οὔτε δὲ ἡ μονὰς ἀριθμὸς, ἀλλὰ ἀρχὴ ἀριθμοῦ“ (единица не есть число, но лишь источникъ числа). Такой взглядъ на единицу продержался до конца XVI в., когда Симонъ Стевинъ въ своей „Arithmétique, 1585“ выступилъ въ защиту единицы, какъ числа.

Сейчасъ въ русскихъ учебникахъ царитъ смѣсь воззрѣній. Такъ, говорятъ: „Каждый отдѣльный предметъ,

---

[1]) *R. Grassmann,* Die Formenlehre oder Mathematik, 1872.

[2]) *N. Thiele,* Til Afslutning af Regneundervisningen, 1883. — Съ классификаціей автора мы согласиться не можемъ.

каждое отдѣльное явленіе наз. единицей“ и „число есть одна единица или совокупность нѣсколькихъ однородныхъ единицъ“. Эти опредѣленія ничего, собственно, не опредѣляютъ; *единица же вообще принадлежитъ къ понятіямъ неопредѣлимымъ;* это—понятіе, стоящее особнякомъ.

Число принадлежитъ тоже къ разряду неопредѣлимыхъ понятій, но по другой причинѣ. Эвклидово опредѣленіе по существу примѣнимо лишь къ цѣлымъ положительнымъ числамъ; для опредѣленія дробныхъ приходится пользоваться единицей, раздѣленной на части. Отрицательное число не можетъ быть опредѣлено при помощи единицы. Когда появились дробныя безконечныя и ирраціональныя числа, придумали выходъ изъ затрудненія, прибѣгая къ помощи измѣренія: „Числомъ называется результатъ измѣренія“. Однако, уже комплексныя числа не подходятъ подъ это опредѣленіе. А что̀ сказать о бикомплексахъ Гамильтона (кватерніоны), Германа Грассмана и Шеффлера, трикомплексахъ Жмурки и поликомплексахъ Гамильтона и Вейерштрасса? А затѣмъ „трансфиниты“ Георга Кантора, „идеалы“ Куммера или „логическіе классы“ Піери и Русселя? Ясно, что вопросъ о числѣ остается пока вопросомъ и еще не скоро перейдетъ въ область понятій; поэтому нельзя и говорить объ опредѣленіи числа.

Нуль относится тоже къ разряду неопредѣлимыхъ понятій. Его упорно не признаютъ числомъ; не такъ давно уравненія съ корнемъ, равнымъ нулю, считали невозможными. Существованіе абсолютнаго нуля, допускается одними и оспаривается другими; словомъ, можно лишь въ видахъ поясненія принять предложенія Ганкеля: нуль есть то, что̀ удовлетворяетъ равенствамъ $a + o = a$ и $a - o = a$.

Таково положеніе вопроса о величинѣ, единицѣ, числѣ и нулѣ въ наукѣ. Мы показали, что три понятія: величина, число и нуль[1]) суть понятія динамическія, между тѣмъ какъ всякое опредѣленіе должно

---

[1]) Нуль въ ариѳметикѣ—отсутствіе числа, въ алгебрѣ—относительное число.

быть статическимъ. Поэтому въ математикѣ, какъ учебномъ предметѣ, динамическія понятія неопредѣлимы во всякомъ случаѣ. Что же касается единицы, то всякое опредѣленіе ея только затемнитъ, а не уяснитъ смыслъ термина, и поэтому единица не нуждается въ опредѣленіи.

Опредѣленія, ихъ типы и значеніе.

13. Мы подошли къ больному вопросу учебныхъ предметовъ—къ опредѣленіямъ. Съ легкой руки Платона опредѣленія привились въ наукѣ, а Эвклидъ закрѣпилъ ихъ въ математикѣ. Съ тѣхъ поръ принято каждый учебникъ начинать опредѣленіями. Не говоря уже о томъ, что основной психологическій процессъ заканчивается, а не начинается опредѣленіями, необходимо еще различать типы опредѣленій и ихъ сравнительную пригодность въ учебномъ предметѣ.

Собственно, составители нашихъ учебниковъ держатся старой точки зрѣнія, что опредѣленіе раскрываетъ природу вещи. Это совершенно невѣрно. „Отсюда и вытекаетъ тотъ странный парадоксъ, что системы научныхъ истинъ, болѣе того—всѣ рѣшительно истины, которыхъ мы достигаемъ при помощи умозаключеній, выводятся изъ произвольныхъ соглашеній человѣчества относительно значенія словъ“.

Эти слова Милля характеризуютъ и само опредѣленіе. Можно согласиться съ Кондильякомъ, что опредѣленіе есть анализъ, но только анализъ слова, а не вещи. Такъ, опредѣленіе окружности есть анализъ слова „окружность“. Теорему: „около всякаго треугольника можно описать окружность“ мы доказываемъ, не нуждаясь въ опредѣленіи заранѣе кривой, описываемой около Δ-ка.

Опредѣленія не могутъ служить посылками и изъ нихъ нельзя выводить слѣдствій—это основное положеніе логики въ одинаковомъ пренебреженіи у составителей учебниковъ [1]) и у преподавателей; нерѣдко

---

[1]) *Киселевъ*, Элементарная геометрія, 1906 г.—См. стр. 66, §§ 105, 108; стр. 205, §§ 303, 304, и др. Для курьеза приведемъ одинъ примѣръ—слѣдствіе 1-ое изъ опредѣленій окружности и радіуса: „Всѣ радіусы одной окружности равны“!!!!!

читаешь или слышишь фразы: „на основаніи такого-то опредѣленія получаемъ то-то“.

Различаютъ три типа опредѣленій.

1. *Діалектически-догматическія*—начинаются творительнымъ падежомъ: „Числомъ называется результатъ счета единицъ“, „Радіусомъ называется прямая, соединяющая центръ съ окружностью“, и т. п. Ими пестрятъ наши учебники. Въ результатѣ получается навязываніе понятій и создается тотъ умственный складъ, при которомъ царитъ знаменитое „Credo quia absurdum“.

2. *Генетическія* или опредѣленія посредствомъ указаній ближайшаго рода и видовыхъ отличій (definitio per genus et differentias). Являясь вполнѣ научными, эти опредѣленія связаны тѣсно съ классификаціей науки и—если наука динамическая, то динамически и ея опредѣленія, т. е. постоянно измѣняются. Но даже и помимо своей динамичности генетическія опредѣленія не подходятъ къ условіямъ учебной работы: указать родъ понятія, подлежащаго опредѣленію, и его видовыя отличія, т. е. характерные признаки—задача трудная, требующая большой систематизаціи матеріала, гораздо большей, чѣмъ это мыслимо въ каждомъ учебномъ предметѣ. Слѣдовательно, отъ генетическихъ опредѣленій слѣдуетъ отказаться.

Генетическія опредѣленія на первый планъ выдвигаютъ *родъ* опредѣляемаго предмета. Напр., „многоугольникъ, имѣющій три стороны, называется треугольникомъ“, или „число, получаемое при сложеніи, называется суммою“. За нимъ идутъ видовые признаки: „имѣющій три стороны“, „получаемое при сложеніи“. Характеръ генетическихъ опредѣленій таковъ, что здѣсь необходимо раньше установить родовыя понятія: *многоугольникъ* и *число*, т. е. въ изложеніи учебнаго предмета идти дедуктивнымъ путемъ, что совершенно недопустимо, по крайней мѣрѣ, въ начальныхъ и среднихъ классахъ школы.

3. *Генетически-психологическія*—опредѣленія посредствомъ обобщенія (definitio per generationem). Они вырабатываются путемъ постепеннаго охватыванія предмета, основываясь на послѣдовательности психологическихъ переживаній; они приводятъ къ сознанію необходимости условнаго обозначенія какого-либо по-

нятія—и этотъ элементъ *условности* необходимо всегда выдвигать на первый планъ при построеніи опредѣленій. Лучше всего поэтому начинать ихъ словомъ „если". Для иллюстраціи приведемъ три опредѣленія радіуса.

Радіусомъ наз. прямая, соединяющая центръ съ окружностью (діал.-догм.).

Прямая, соединяющая центръ съ какой-либо точкой окружности, наз. *радіусомъ* (генет.).

Если мы соединимъ центръ съ какой-либо точкой окружности, то получится отрѣзокъ прямой; его условились называть *радіусомъ* (ген.-пс.).

Нетрудно установить сравнительное достоинство трехъ приведенныхъ здѣсь опредѣленій, что̀ предоставляемъ сдѣлать читателямъ.

Въ заключеніе приведемъ отрывокъ изъ книги Юэля [1]), до сихъ поръ не утратившей своего значенія.

„Опредѣлить значитъ отчасти открыть... Для того, чтобы опредѣлить такъ, чтобы наше опредѣленіе имѣло научную цѣну, требуется не мало той проницательности, при помощи которой открывается истина... Чтобы вполнѣ выяснилось, каково должно быть наше опредѣленіе, намъ слѣдуетъ хорошо знать, какую именно истину надо намъ установить. Опредѣленіе, какъ и научное открытіе, предполагаетъ уже сдѣланнымъ нѣкоторый рѣшительный шагъ въ нашемъ знаніи. Средневѣковые логики считали *опредѣленіе послѣднею ступенью въ прогрессѣ знанія*,—и по крайней мѣрѣ, что касается такого именно мѣста опредѣленія, то какъ исторія знанія, такъ и опирающаяся на нее философія науки подтверждаютъ ихъ теоретическія соображенія".

Такова роль опредѣленій въ наукѣ. Что же можно сказать объ учебникахъ, начинающихъ всякое изложеніе отдѣльнаго вопроса опредѣленіями?

Роль учителя въ классѣ.

14. Чисто словесное обученіе древнихъ школъ смѣнилось въ Средніе Вѣка книжнымъ. Съ тѣхъ поръ и до настоящаго времени встрѣчаются многочисленные типы разсказывающихъ, пересказывающихъ и задающихъ по книгѣ преподавателей.

---

[1]) *Whewel*, Novum organum Renovatum, pp. 35—37.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ трехъ типовъ преподавателей—математиковъ.

А. Теорія, затѣмъ иллюстрація. Громадное большинство русскихъ преподавателей принадлежитъ къ этому типу. Если времени хватитъ, въ классѣ продѣлывается 2—3 примѣра; если нѣтъ—примѣры задаются на домъ. Теорія доказывается по излюбленному учебнику, примѣры берутся изъ числа передѣланныхъ по 10 разъ въ теченіе многихъ лѣтъ. Эти ходячія „печальныя необходимости“ нашихъ школъ иногда пополняютъ свои ряды какимъ-либо молодымъ сторонникомъ теоріи; онъ вкладываетъ тогда въ изложеніе частицу своего „я“ и, самъ паря въ небесахъ, старается увлечь за собою учениковъ... Напрасная попытка, происходящая отъ незнанія психологіи и логики.

В. Экспериментъ, а затѣмъ теорія. Болѣе здравые практики-преподаватели обыкновенно начинаютъ съ примѣровъ и упражненій; затѣмъ оставляютъ ихъ и переходятъ къ теоретическимъ выводамъ. Это—стояніе на землѣ и постоянныя попытки „à la Dedalos et Ikaros“ взлетать на облака. Попытки неудачны, такъ какъ ихъ неудача предопредѣлена въ корнѣ: „Вотъ, дѣти мои, мы занимались примѣромъ да задачами, а теперь надо немного поработать надъ другимъ—надо изучить способы рѣшенія вообще задачъ“. Всѣ разглагольствованія о пользѣ теоріи похожи на увѣщеванія хирурга, собирающагося рѣзать ногу, о великомъ значеніи анатоміи при операціи.

С. Непрерывная индукція отъ фактовъ къ теоріи и дедукція отъ теоріи къ фактамъ. Это—стоять на землѣ со взоромъ, постоянно устремленнымъ въ высь; это—смиренное признаніе, что человѣкъ только человѣкъ, но въ то же время радостное и гордое сознаніе, что онъ можетъ шагать свободно, легко, видя голубое, безоблачное небо. Тогда ученикъ не почувствуетъ, гдѣ кончается практика и начинается теорія, онъ не уловитъ даже этого перехода — будетъ вовлеченъ незамѣтно для самого себя въ психологическій процессъ отвлеченія и привыкнетъ къ выработкѣ математическихъ взглядовъ, сужденій и опредѣленій. Только при такихъ условіяхъ у него появится *желаніе разсуждать*,

наличность коего необходима для логическаго построенія доказательствъ.

Популярное и элементарное изложеніе.

15. Учитель, много говорящій, никогда не добьется большихъ успѣховъ; чѣмъ болтливѣе учитель, тѣмъ молчаливѣе классъ и тѣмъ меньше самостоятельная работа отдѣльныхъ учениковъ. Кромѣ того, излагательная форма обученія предполагаетъ *наличность интереса* у слушателей и *возможность самостоятельной обработки* преподносимаго матеріала. И то, и другое не всегда бываетъ даже у взрослыхъ.

Въ эту педагогическую ошибку особенно часто впадаютъ люди, не различающіе популярнаго изложенія отъ элементарнаго. *Популярное* — предназначено для взрослыхъ, утилитарно по цѣли, связно по построенію. Въ популярномъ изложеніи сообщаются данныя наукъ и выводовъ изъ нихъ, оставляя въ сторонѣ научные методы и ходъ научной работы.

Элементарное—предназначено для дѣтей или для лицъ, которыхъ надо развить умственно. Связное изложеніе здѣсь невозможно, такъ какъ приходится пользоваться индуктивно-эвристической, генетической, наглядной, лабораторной и др. методами. Та практичность, которую должно развить и укрѣпить элементарное изложеніе, не одно и то же, что и утилитарность популярнаго изложенія. Можно сказать, что въ первомъ случаѣ сообщаются результаты наукъ, а во второмъ—элементы наукъ.

Роль книги въ обученіи.

16. Между учителемъ, ученикомъ и книгою существуетъ тѣсная связь. Она бываетъ двухъ родовъ. *Во I-хъ*, книга является цѣлью обученія: ученикъ долженъ выучить книгу, и ея содержаніе достаточно для выполненія задачи школы. Этотъ средневѣковый взглядъ на образованіе и обученіе живъ и понынѣ. Онъ породилъ систему „отъ сихъ до сихъ“ и диктуемыя записки. Авторы настоящей книги учились—одинъ въ Сербской, другой въ Русской гимназіи, но оба прошли черезъ ту и другую систему обученія; и теперь даже въ Петербургѣ существуютъ представители этихъ системъ. Къ сожалѣнью, законъ не разрѣшаетъ заклеймить ихъ публично.

Во II-хъ, книга является пособіемъ при обученіи; она болѣе нужна учителю, чѣмъ ученику. Задача учителя—поставить ученика въ такія условія, чтобы онъ могъ ознакомиться съ учебнымъ предметомъ „per inventionem et inductionem“ (посредствомъ открытія и индукціи). Ученика надо ознакомить съ великой книгой—природой, научить „вопрошать природу“ и получать отвѣты. Все, что можно и слѣдуетъ дать въ руки ученику—это хорошій методическій задачникъ. Когда ученикъ будетъ введенъ въ изученіе предмета и въ немъ разовьется стремленіе къ чтенію и обдумыванію прочитаннаго, тогда наступитъ благопріятный моментъ для появленія книги, но не учебника, а популярной книжки. *Учебникъ никогда не научитъ читать.*

Педагогическое значеніе исторіи математики.

17. Однимъ изъ основныхъ законовъ живыхъ организмовъ является такъ наз. *біогенетическій законъ*, формулированный Геккелемъ: „онтогенезисъ есть краткое повтореніе филогенезиса“. Въ переводѣ на языкъ простыхъ смертныхъ это означаетъ, что исторія развитія какого-либо животнаго индивидуума есть сокращенное воспроизведеніе исторіи развитія того рода, къ какому принадлежитъ данный индивидуумъ.

Этотъ законъ въ послѣдніе годы распространенъ и на умственное развитіе. Можно было бы его назвать *закономъ психофизической эволюціи* и формулировать такъ: *умственное развитіе личности есть краткое повтореніе умственнаго развитія человѣческаго рода.*

Это будетъ законъ, такъ какъ онъ даетъ „причинную [1]) связь самостоятельныхъ фактовъ и имѣетъ, такимъ образомъ, эвристическое значеніе“: онъ открываетъ виды на будущее.

Законъ психофизической эволюціи по существу принятъ, какъ основной, новѣйшей педагогикой. На немъ основаны генетическая и эвристическая методы; его предчувствовалъ еще до Дарвина извѣстный лингвистъ Шлейхеръ: „Если мы о чемъ-нибудь не знаемъ, какъ оно образовалось, то и не понимаемъ его“. Въ частности для математики его значеніе начинаетъ вы-

---

[1]) *Wundt*, Logik, стр. 133.

двигаться сравнительно недавно. „Воспитатель [1]) долженъ заставить ребенка пройти черезъ тѣ же этапы, что и его предки; быстрѣе, но не разрушая этапа. Вотъ почему исторія науки должна быть нашимъ главнымъ проводникомъ“.

„*Исторія математики*, въ особенности элементарной, если она изложена съ точки зрѣнія исторіи культуры, является по крайней мѣрѣ столь же важной въ образованіи преподавателя, какъ и *эллиптическія и абелевы функціи, и уже давно пора включить ее въ экзаменныя требованія*“.

Эти слова Симона нашли себѣ подтвержденіе въ практикѣ школъ Америки, отчасти Швейцаріи и Италіи; они начинаютъ находить откликъ и въ Германіи. Но Франція и въ этомъ отношеніи опередила школьныя программы другихъ странъ. Вотъ что написано въ методическихъ совѣтахъ по математикѣ и физикѣ (оффиціальныя программы 1905 г.): „Совѣтъ не заниматься слишкомъ историческимъ порядкомъ развитія какого-либо отдѣльнаго вопроса, данный нами раньше, вовсе не долженъ привести къ забвенію великихъ именъ, освѣтившихъ науку. При случаѣ и подъ видомъ вводнаго разсказа надо познакомить учащихся съ жизнью нѣсколькихъ великихъ людей (Галилей, Декартъ, Паскаль, Ньютонъ, Лявуазье, Амперъ, Френель и др.), подчеркивая не только важное значеніе ихъ работъ, но въ особенности нравственное величіе ихъ научнаго призванія; рекомендуется давать ученикамъ для чтенія нѣсколько характерныхъ отрывковъ изъ трудовъ этихъ ученыхъ“.

Наконецъ на IV-мъ Международномъ Математическомъ Конгрессѣ въ Римѣ (6—11 апр. н. ст. 1908 г.) въ IV Секціи (Философія, исторія и преподаваніе математики) было указано на чрезвычайно важное значеніе исторіи математики для ея преподаванія; рекомендовано также украшать школы портретами великихъ математиковъ и физиковъ.

Будемъ надѣяться, что русскіе преподаватели вскорѣ ознакомятся съ исторіей развитія математическихъ

---

[1]) *Poincaré*, Les définitions générales en mathématiques, 1904.

наукъ, и тогда прекратится наконецъ безобразное положеніе русской школьной математики.

Будущее математики.

18. Выиграетъ ли человѣчество отъ школьной революціи въ области математики? Безусловно—да! До сихъ поръ математика совершенно обособлена въ ряду другихъ наукъ: ей отводятъ первое мѣсто, ее ставятъ на пьедесталъ, признаютъ ея неоспоримыя заслуги—но работаютъ въ ея области единичные изслѣдователи. Такъ называемые „интеллигенты"—круглые невѣжи по части математики. Пора низвергнуть подобный строй образованія; пора ознакомить всѣхъ съ методомъ математическаго изслѣдованія, научить рѣшать вопросы практическаго жизненнаго характера; пора раскрыть глаза на истинное значеніе математики для жизни и будущаго прогресса. Тогда число работниковъ увеличится въ сотни и тысячи разъ, тогда математика расширится и углубится настолько, что ея свѣтъ прорѣжетъ тьму другихъ наукъ и освѣтитъ всѣ пока неизвѣстные намъ уголки таинственной природы. И тогда быть можетъ осуществится мечта Ляпляса объ одной всеобъемлющей формулѣ движенія—и міровъ, и легчайшихъ атомовъ. Духъ, который обладалъ бы такой формулой, обладалъ бы совершеннымъ знаніемъ. „На[1]) самомъ дѣлѣ—какъ астроному достаточно дать отрицательное значеніе нѣкоторой величинѣ въ уравненіи, чтобы узнать, затмилось ли солнце надъ Пиреемъ, когда Периклъ отправлялся на кораблѣ въ Эпидавръ, такъ и духъ, о которомъ мечталъ Ляплясъ, могъ бы черезъ соотвѣтственное обсужденіе своей формулы сказать намъ, кто былъ Желѣзная Маска или какъ погибъ Президентъ. Какъ астрономъ предсказываетъ день, когда изъ міровыхъ безднъ вновь является на небосклонѣ комета, такъ и тотъ духъ указалъ бы день, когда заблещетъ греческій крестъ на Св. Софіи, или Англія сожжетъ свой послѣдній каменный уголь. Если бы въ міровой формулѣ онъ поставилъ $t = -\infty$, ему раскрывалось бы загадочное первоначальное состояніе вещей. Въ безпредѣльномъ пространствѣ онъ увидалъ бы матерію или

---

[1]) *Du-Bois-Reymond*, Ueber die Grenzen der Naturerkennens.

уже въ движеніи, или спокойной, но неравномѣрно распредѣленной, потому что при равномѣрномъ распредѣленіи никогда не было бы нарушено равновѣсіе. Если бы онъ заставилъ въ своей формулѣ t увеличиваться безгранично въ положительномъ смыслѣ, то узналъ бы, черезъ сколько времени по теоремѣ Карно міру надлежитъ замерзнуть".

Литературный указатель къ I-ой части.

Указатель составленъ въ порядкѣ возрастающей сложности; общимъ точкамъ зрѣнія отдано предпочтеніе передъ спеціальными. При выборѣ книгъ были приняты во вниманіе интересы русскихъ читателей— въ общемъ, и математиковъ — въ особенности.

I. Логика.

В. Минто, Дедуктивная и индуктивная логика, пер. съ англ., 1905. — Чисто логическія проблемы, разсматриваемыя внѣ связи съ теоріей познанія. Эта связь проведена въ книгѣ:

Введенскій, Логика. СПб., 1909. — Особенно хорошо разобраны вопросы о дедукціи и индукціи; о методахъ раціоналистическихъ и эмпирическихъ наукъ.

Милль, Система логики, пер. съ анг., 1899. — Лучшая настольная книга.

St. Jevons, Основы науки, пер. съ англ., 1882.

Зигвартъ, Логика, 3 тома, пер. съ нѣм., 1908—9.

Wundt, Logik, 3 B-de, 1906—8.

II. Гносеологія.

Мессеръ, Введеніе въ теорію познанія, пер. съ нѣм., 1910. — Исторія возникновенія и разработки проблемъ, отъ Канта до нашихъ дней.

Heymans, Die Gesetze und Elemente des Wissenschaftlichen Denkens, 1905. — Лучшая книга для лицъ, знакомыхъ съ постановкой вопроса.

И. Лапшинъ, Формы мышленія и законы познанія, СПб., 1906.

Н. Лосскій, Обоснованіе интуитивизма, СПб., 1908.

Riehl, Der philosophische Kritizismus und seine Bedeutung für die positiven Wissenschaften, 2 B-de, 1908. Часть II-го тома переведена на русскій.

I. Dietzgen, Das Wesen der menschlichen Kopfarbeit, 1903.

„ Streifzüge eines Sozialisten in das Gebiet der Erkentnisstheorie, 1887.

v. Schubert-Soldern, Основы гносеологіи, пер. съ нѣм., 1910.

Махъ, Познаніе и заблужденіе, пер. съ нѣм., 1909.

„ Анализъ ощущеній, пер. съ нѣм., 1908.

Авенаріусъ, Человѣческое понятіе о мірѣ, пер. съ нѣм., 1908.

III. Философія математики.

См. соотвѣтствующіе отдѣлы въ логикѣ и гносеологіи, а затѣмъ:

Ляляндъ, Этюды по философіи наукъ, пер. съ фр., 1897. — Написана просто и популярно; гораздо лучше, чѣмъ *Фрейсинэ*, Очерки по философіи математики.

Пуанкаре, Наука и гипотеза, пер. съ фр., 1904.

„ Цѣнность науки, пер. съ фр., 1908.

Laisant, La mathématique. — Philosophie. Enseignement, 1907.

Picard, La science moderne et son état actuel, 1908.

Couturat, Les principes des mathématiques, 1905.

IV. Психологія.

Нечаевъ, Очеркъ психологіи, 1909.

Эббингаузъ, Очеркъ психологіи, пер. съ нѣм., 1910.

Джемсъ, Психологія, пер. съ англ., 1905.

Ebbinghaus, Grundzüge der Psychologie, 1905.

Цiэнъ, Физіологическая психологія, пер. съ нѣм., 1908.

Вундтъ, Основы физіологической психологіи, пер. съ нѣм., 1909.

V. Экспериментальная психологія и педагогика.

Румянцевъ, Педологія (наука о дѣтяхъ), 1910.

Экспериментальныя изслѣдованія личности, подъ ред. Румянцева, 1908.

Лай, Экспериментальная педагогика, пер. съ нѣм., 1909.

R. Schultze, Aus der Werkstat der experimentellen Psychologie und Pädagogik, 1909 (русск. пер. гот. къ печати).

Нечаевъ, Современная экспериментальная психологія, 1909.

Лай, Экспериментальная дидактика, пер. съ нѣм., 1906.

Claparéde, Психологія ребенка и экспериментальная педагогика, пер. съ фр., 1910.

Бартъ, Элементы воспитанія и обученія, пер. съ нѣм., 1910.

Meumann, Лекціи по экспериментальной педагогикѣ, пер. съ нѣм., 1909.

St. Hall, Adolescence, its Psychologie and its relations to Physiology, Antropology, Sociology, Sex, Crime, Religion and Education, 2 vol., 1905.

Оригинальное обоснованіе педагогики на началахъ общественности даетъ:

Натортъ, Соціальная педагогика, пер. съ нѣм., 1910.

VI. Исторія педагогики.

Квикъ, Реформаторы воспитанія, пер. съ англ., 1893.

Лапшинъ, Исторія педагогическихъ теорій, литогр. лекціи, 1906.

Паульсенъ, Историческій очеркъ развитія образованія въ Германіи, пер. съ нѣм., 1908.

Сперанскій, Очеркъ исторіи средней школы въ Германіи, 1898.

„ Очерки по исторіи народной школы въ Западной Европѣ, 1896.

Шмидтъ, Исторія средней школы въ Россіи, 1878.

Raumer, Geschichte der Pädagogik, 4 B-de (русскій переводъ въ Педагог. Сбор. за 1875—1878 гг.).

Каптеревъ, Исторія русской педагогики, 1910.

VII. Исторія математики.

Шереметевскій, Историческій очеркъ развитія анализа и его приложеній къ геометріи (*Лоренцъ*, Элементы высшей математики, т. I, стр. 88—362, Москва, 1903 г.). Популярное изложеніе, на фонѣ общей куль-

туры духа, и полнота свѣдѣній (доведено до нашихъ дней) дѣлаютъ эту книгу незамѣнимой для первоначальнаго ознакомленія съ предметомъ.

Адамантовъ, Краткая исторія развитія математическихъ наукъ съ древнѣйшихъ временъ и исторія ихъ первоначальнаго развитія въ Россіи. Кіевъ, 1904.— Изложеніе болѣе подробное, но доведено лишь до XVI в. въ Европѣ и до XVIII в. въ Россіи. Хорошее дополненіе къ нему составляетъ:

З. Гюнтеръ, Исторія естествознанія въ древности и средніе вѣка, 120 стр., пер. съ нѣм., 1909.—Приняты во вниманіе почти всѣ новѣйшія открытія въ области исторіи наукъ; доведена до XVII в.

Кэджори, Исторія элементарной математики, 368 стр., пер. съ англ., 1910.—Этотъ объемистый трудъ историко-методическаго характера долженъ стать настольной книгой всякаго преподающаго математику лица.

Tropfke, Geschichte der elementar-mathematik, 1902—1903, 2 B-de.—Это—историческая энциклопедія элементарной математики, лучшая въ международной литературѣ по количеству и качеству матеріала.

Rouse Ball, A Short Account of the History of Mathematics, 527 стр., 1901 (есть пер. на франц. и на итал. яз.).— Единственная полная исторія всей математики отъ древности до конца XIX вѣка.

VIII. Педагогика математики.

Laisant, L'education, fondée sur la Science, 1904.

„ La mathématique.—Philosophie. Enseignement, 1907.

Simon, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik, 1908.—Блестящее, но поверхностное изложеніе; очень много свѣдѣній по исторіи педагогики математики.

Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht, 1906.—Подробныя методическія указанія по всѣмъ отдѣламъ математики (кромѣ анализа).

Ioung, The Teaching of Mathematics in the Elementary and the secondary School, New-Iork, 1907.—Проведены новыя точки зрѣнія на педагогику математики.

Kalyng

ЧАСТЬ II.

Глава VI.

Обоснованія начальнаго курса ариѳметики [исчисленія].

„Истинная метода обученія ариѳметикѣ состоитъ въ томъ, чтобы поставить умъ ребенка въ условія соотвѣтствующія начальному періоду его развитія, и въ томъ, чтобы ребенокъ присутствовалъ, такъ сказать, при самомъ изобрѣтеніи ариѳметики".

Жанъ Масе.

„Можно утверждать, что—даже при наиболѣе абстрактныхъ сужденіяхъ — убѣжденіе слѣдуетъ за ощущеніемъ. Если этого нѣтъ, то сужденія являются только пустыми утвержденіями".

Риль.

„Отчетливыя числовыя представленія могутъ возникать и существовать *безъ счета*; при изображеніи ихъ счетъ также не играетъ никакой роли".

Лай.

Ариѳметика и исчисленіе.

1. Для начальнаго курса ариѳметики существуютъ термины „Calcul", „Rechenunterricht" и т. п. Въ интересахъ общности математической терминологіи необходимо установить названія „Исчисленіе" и „Ариѳметика". Подъ ариѳметикой принято подразумѣвать основныя понятія изъ теоріи чиселъ и такъ наз. буквенную ариѳметику, извѣстную въ Россіи подъ именемъ „алгебра".

Возникновеніе числа.

2. Исчисленіе имѣетъ дѣло исключительно съ числомъ. „Происхожденіе и сущность числа слѣдуетъ строго разграничивать. Вопросомъ о природѣ электричества или природѣ числа должны заниматься преимущественно физики-теоретики или психологи-теоретики. Методика же преподаванія ариѳметики и электротехника могутъ существовать независимо отъ того, какъ будетъ рѣшенъ вопросъ о сущности числа или сущности электриче-

ства. Подобно тому, какъ электротехникъ долженъ отдавать себѣ отчетъ только въ условіи *возникновенія* электрическаго тока,—и методистъ ариѳметики долженъ знать только условія *возникновенія* числа и всѣ слѣдствія, отсюда вытекающія".

Для рѣшенія поставленнаго такъ вопроса мы обладаемъ въ настоящее время достаточными данными; ихъ мы и разсмотримъ.

Данныя гносеологіи.

3. Въ математикѣ число представляется двояко: подъ видомъ *кардинальнаго* числа, если мы обращаемъ вниманіе на количество, и подъ видомъ *ординарнаго* числа, опредѣляющаго порядокъ или положеніе даннаго предмета.

Опредѣленіе числа посредствомъ счета создаетъ „circulus vitiosus": результатъ счета есть число, а число есть собраніе единицъ, т. е. созданіе числа путемъ синтеза возможно, если опираться на существующее уже понятіе числа, полученное другимъ путемъ. Отсюда слѣдуетъ, что кардинальное число не зависитъ отъ ординарнаго; идея порядка должна быть подчинена идеѣ количества.

Наконецъ, выражаясь словами Гуссерля [1]), нужно сказать, что кардинальныя числа относятся къ *ансамблямъ*, ординарныя—къ *рядамъ*; ряды суть упорядоченные ансамбли, поэтому *кардинальное число необходимо предшествуетъ ординарному*.

Такъ оно и было въ дѣйствительности въ лингвистикѣ [2]); такъ дѣло обстоитъ и сейчасъ, что легко прослѣдить, обращаясь къ характеристикамъ некультурныхъ и малокультурныхъ народовъ.

Данныя этнографіи.

4. Укажемъ сначала нѣсколько примѣровъ того примитивнаго исчисленія, какое обходится безъ помощи языка и немногимъ отличается отъ исчисленія у животныхъ. „Однажды,—говоритъ путешественникъ Гальтонъ объ африканскомъ

---

[1]) *Husserl,* Philosophie der Arithmetik, 1891, стр. 3.

[2]) Абацисты вслѣдъ за Греками и Римлянами называли жетоны абака не порядковыми (одинъ, два, три), а собирательными числительными (двойка, тройка, четверка). Этотъ обычай сохранился донынѣ въ обозначеніи картъ (кстати, тутъ на лицо и числовыя фигуры).

племени Даммаровъ,—наблюдая одного Даммара, который безнадежно бился надъ какимъ-то вычисленіемъ по одну сторону отъ меня, я замѣтилъ по другую Дину, мою испанскую собаку, въ подобномъ же затрудненіи. Она оглядывала съ полдюжины своихъ новорожденныхъ щенковъ, которыхъ уносили у нея два или три раза, и ея безпокойство доходило до высшей степени, когда она старалась рѣшить, всѣ ли они на лицо или все еще нѣкоторыхъ недостаетъ. Ея глаза смущенно перебѣгали по нимъ, но она, всетаки, не могла успокоиться. Очевидно, она имѣла нѣкоторое смутное понятіе о счетѣ, но число было слишкомъ велико для ея мозга. Сравнивая ихъ обоихъ, собаку и Даммара, какъ они стояли около меня, нужно признаться, что результатъ сравненія не дѣлалъ особенной чести человѣку".

„Когда совершается мѣна, за каждую овцу надо платить особо. Такъ, напр., если мѣновая цѣна овцы—двѣ пачки табаку, то любой Даммара, конечно, придетъ въ большое затрудненіе, если взять у него двѣ овцы и дать четыре пачки табаку. Я разъ поступилъ такимъ образомъ и видѣлъ, какъ мой продавецъ отложилъ особо двѣ пачки и глядѣлъ черезъ нихъ на одну изъ овецъ, которыхъ онъ продавалъ. Убѣдившись, что за эту было честно заплочено, и найдя, къ своему удивленію, что въ рукахъ у него осталось именно двѣ пачки въ уплату за другую овцу, онъ начинаетъ мучиться сомнѣніями; для полной правильности дѣлу, казалось, слѣдовало произойти въ два пріема, и вотъ онъ снова обращается къ первой парѣ пачекъ; затѣмъ въ головѣ его становится туманно и смутно, онъ переходитъ мысленно отъ одной овцы къ другой и, наконецъ, отказывается отъ сдѣлки, пока ему не были вложены въ руку двѣ пачки и уведена одна овца, а затѣмъ даны другія двѣ пачки, и уведена другая овца... Если покупается у человѣка телка за десять пачекъ табаку, то его широкія руки надо растопырить на землѣ и на каждый палецъ положить по связкѣ табаку. Онъ собираетъ табакъ; *объемъ* всего количества ему нравится, и сдѣлка заключена. Вы хотите затѣмъ пріобрѣсти вторую телку; прежній процессъ повторяется съ начала до конца".

„Когда человѣкъ племени Кооса (въ Южной Африкѣ),—говоритъ Лихтенштейнъ,—произноситъ число, онъ при этомъ обыкновенно выражаетъ его также и поднятыми пальцами. Впрочемъ, значительно большая часть этихъ людей даже совсѣмъ не называетъ при этомъ числительное имя; вообще числительныя имена у нихъ такъ мало употребляются, что стоитъ значительныхъ усилій ихъ вывѣдать. Такъ г. фонъ-деръ-Кемпъ, не смотря на свое долгое пребываніе между ними, никогда не могъ допытаться названія числа 8".

Такихъ примѣровъ можно привести множество; они давно извѣстны, но лишь въ послѣднее время получили общую оцѣнку. Можно съ увѣренностью сказать, что числовыя воспріятія или, если хотите, счетъ по группамъ, существуютъ на всѣхъ ступеняхъ развитія; но въ обиходномъ языкѣ дикарей очень часто отсутствуютъ слова для выраженія группъ выше 3 элементовъ. Такъ, американское племя Чикитосовъ (Боливія) считаетъ: *etama* (одинъ), *ominana* (мало), *ausiri* (много) и *anuana* (всѣ). Остальныя числа называются *omina hane*; это названіе повторяется при всѣхъ пальцевыхъ группахъ. У Ботокудовъ въ Африкѣ—одинъ (mokenam) и много (uruhù). Пури считаютъ: одинъ (omi), два (cuiri), много (prica); такая же система у Бушменовъ: одинъ (netat) и два (naes). Бороросы въ Бразиліи считаютъ такъ: *couai* (одинъ), *macouai* (два), *ouai* (три)—и это *ouai* повторяется при всѣхъ остальныхъ пальцевыхъ группахъ. У новоголландскаго племени Ватчанди: *coo—te—oo* (одинъ), *u—tar—ra* (два), *bool—tha* (много) и *bool—tha—bat* (очень много). Племена западныхъ Торресовыхъ острововъ имѣютъ числительныя: *urapun* (одинъ) и *okosa* (два). Туземцы Андаманскихъ острововъ считаютъ: одинъ, два, три, а затѣмъ продолжаютъ счетъ при помощи пальцевъ, прикасаясь ими къ носу и говоря *anka* (и это); и т. п.

Если эти примѣры не достаточно убѣдительны, то слѣдующая таблица должна окончательно разсѣять сомнѣнія. Въ ней собраны первоначальныя значенія основныхъ и отчасти производныхъ числительныхъ, причемъ лишь при нѣкоторыхъ сохранены ихъ настоящія названія, а остальныя переведены на русскій яз.

1=я (санскритъ), одинъ (Чикитосы), луна, предметъ, начало, существованіе; *эхадъ* (отъ корня *хадъ*—острый, на еврейскомъ, арамейскомъ и арабскомъ); форма (индусы).

2=глаза (индусы), крылья, руки, ноги, уши (пу—китайцы); другой, повтореніе.

3=нога страуса (индѣйцы—абипоны въ Южной Америкѣ); два—одинъ; средніе пальцы вмѣстѣ (индѣйцы — шейенны); нѣкоторые; бросокъ (Латыши [1]).

4=нога птицы (3 пальца спереди, одинъ палецъ сзади; двѣ двойки; узелъ [2]); арбаахъ (древнееврейскій)—arbaah, лежащее положеніе животныхъ [3]); руку вверхъ! (индѣйцы каматы); страны свѣта (индусы).

5=рука, кисть, кулакъ, 5 вытянутыхъ пальцевъ, группа, половина рукъ, изображеніе руки—*ma—cuilli* (ацтеки), кончить руку—*edesanta* (зулюсы); руку прочь! (индѣйцы каматы).

6=пять—одинъ, одинъ на другой рукѣ, вторая единица, берущій большой палецъ—*tatisitupa* (зулюсы); 2 тройки.

7=пять—два, два на другой рукѣ, вторая пара; указатель—*komba* (зулюсы) [4]); гора (7 миѳическихъ цѣпей горъ, индусы); Kiššatu — полнота, совокупность (вавилоняне).

8=пять—три, три на другой рукѣ; вторая тройка, 2 четверки; десять безъ двухъ; спрячь два пальца—*Kijangalobili* (зулюсы), Вазу (классъ божествъ числомъ 8, индусы).

9=пять—четыре, четыре на другой рукѣ; 3 тройки; десять безъ однаго; спрячь одинъ палецъ—*Ki-*

---

[1]) Бросокъ (methens) употребляется какъ числительное 3 потому, что привыкли бросать по три краба сразу.

[2]) Жители Маркизскихъ острововъ связываютъ въ узелъ по 4 плода хлѣбнаго дерева.

[3]) Названіе повозокъ въ Средней Азіи и Новороссіи—арба, несомнѣнно связано съ представленіемъ о 4.

[4]) Напр. *U kombile*—онъ указалъ своимъ указательнымъ пальцемъ=онъ далъ мнѣ семь; *amahashi akombile*—лошади указали=было семь лошадей.

jangalolunje (зулюсы); фигура (9 первыхъ чиселъ, индусы).

10=группа, 2 пятерки, 2 руки, человѣкъ, пол-человѣка, ручная половина человѣка — *ma-tlactli* (ацтеки).

11=одинъ на ногѣ, нога — одинъ; одинъ сверхъ десяти [1]).

12=два на ногѣ, нога — два; два сверхъ десяти (zwölf, douze etz.); зодіакъ (индусы).

13=три на ногѣ, нога—три; три сверхъ десяти (dreizehn, treize etz.); двѣнадцать — одинъ (апосы въ Бэнуэ).

14=четыре на ногѣ, нога четыре; четыре сверхъ десяти (vierzehn, quatorze etz.); двѣнадцать—два (апосы).

15=цѣлая нога, рука на каждой сторонѣ и половина ногъ; 3 руки, лунные дни (индусы).

16=одинъ на другой ногѣ, 3 руки—одинъ.

17=два на другой ногѣ, 3 руки—два.

18=три на другой ногѣ, 3 руки—три; двадцать безъ двухъ.

19=четыре на другой ногѣ, 3 руки—четыре; двадцать безъ одного.

20=руки—ноги, одинъ человѣкъ, одинъ индѣецъ, одинъ человѣкъ конченъ (Гренландцы), одинъ сочтенъ—*Cempoalli* (ацтеки); 4 руки; два по десять [2]).

21=одинъ на рукѣ другого индѣйца; два по десять—одинъ.

30=половина другого человѣка; три по десять; двадцать—десять; веревка [3]).

32=зубы (индусы).

40=два человѣка (индѣйца); четыре по десять; два по двадцать; веревка [4]).

---

[1]) Русское „один-на-дцать (десять)“, нѣмецкое „elf“ (ein-lif=eins über zehn), французское „onze“ (un-dix) и т. п.

[2]) Нѣмецкое „zwanzig“=zwei—tigus (готское)=δεκάς=decem==tiz (венгерск.)=dix (франц.).

[3]) Латыши надѣваютъ на веревку по 30 рыбъ, поэтому веревка (kahlis) обозначаетъ число 30.

[4]) У Дагомейцевъ и Юраховъ раковины „каури“, служащія монетной единицей, надѣваются по 40 штукъ на веревку; отсюда веревка=сорокъ. То же и на островѣ Цейлонѣ и на побережьѣ Тихаго океана у индѣйскихъ племенъ (раковина *хайква*).

60=три человѣка (индѣйца); шесть по десять; три по двадцать.

80=четыре человѣка (индѣйца); восемь по десять; четыре по двадцать и т. д.

Данныя филологіи.

5.—Изслѣдованія послѣднихъ лѣтъ выяснили происхожденіе числительныхъ у культурныхъ народовъ. Вотъ нѣсколько примѣровъ.

Первыя 9 чиселъ на санскритскомъ языкѣ называются: *эка, два, три, чатуръ, панчанъ, шашъ, саптанъ, аштанъ, наванъ.*

Для чиселъ 1, 2, 3 и 5 постепенныя преобразованія числительныхъ таковы:

1=eka (санскр.), îkata (финско-индоевроп.), ik, ekky, aggik (венгер.), ögy, egid (остяц.); istiin (ассир.), igin (абацисты Европы X—XII вв.), jeden (польскій), одинъ (русскій).

2=dva (санскр.), dva (зендск.), δύο (греч.), duo (лат.), tvo (готс.), two (англ.), tva (шведс.), два (славянс.).

3=karama; kolme (финск.), kolma (мордовс.), kuolma (лаплянд.), qûrum, qôrum (вогульс.), három (венгер.), hormis, ormis (абацисты), kara, kra, tra, tri (индоевроп.).

5=панчанъ (санскрит., досл. рука), пентча, пенджи (персид.), пенте (греч.), пѣньць (польск.), пять (русскій).

Этихъ примѣровъ достаточно. Мы видимъ, что „имена числительныя, имѣющія наиболѣе древнее происхожденіе, обозначали ранѣе, на сколько мы можемъ понять ихъ смыслъ, пространственные предметы, обладающіе опредѣленными качествами [1]), которые соотвѣтствуютъ числу, подобно тому какъ „четыреугольное“, напр. соотвѣтствуетъ числу 4. Отсюда видно, что каждое изъ чиселъ, положенныхъ позднѣе въ основу системы, образовалось первоначально путемъ особаго акта—*синтеза наблюденія,* а не систематическимъ прибавленіемъ единицы къ единицѣ и т. д.; соотношенія чиселъ, возмож-

---

[1]) Въ тяньшаньскомъ нарѣчіи существуютъ различныя числительныя для обозначенія одинаковыхъ группъ предметовъ плоскихъ, круглыхъ, длинныхъ; для людей, для челноковъ, для мѣръ и т. п.

ность сложенія и пр. были познаны только впослѣдствіи".

Итакъ мы приходимъ къ несомнѣнному выводу: *въ основѣ числовыхъ представленій лежатъ числовыя воспріятія, получаемыя при созерцаніи группъ, постоянно встрѣчающихся въ природѣ, въ одномъ и томъ же составѣ элементовъ (группы : 2, 3, 4, 5).*

Два направленія въ методикѣ ариѳметики.

6. Въ вопросахъ о постановкѣ обученія ариѳметикѣ Германія занимаетъ исключительное мѣсто. Начиная съ Коменскаго, цѣлый рядъ методистовъ разрабатываетъ вопросы счета, нумераціи и исчисленія, и эта дѣятельность германской педагогики является законодательной для остальныхъ европейскихъ народовъ. Поэтому не слѣдуетъ удивляться, что исторія методики ариѳметики есть въ сущности исторія методики въ Германіи.

Новая ариѳметика, т. е. основанная на десятичной нумераціи, появилась въ Европейскихъ школахъ лишь въ XVI ст. До того времени европейцы пользовались счетными приборами и римской или же буквенной нумераціей. Съ XVI ст. стали различать Numeratio calcularis и Numeratio figuralis. Первая предназначалась для неграмотныхъ—исчисленіе при помощи жетоновъ на абакѣ; вторая—для лицъ, умѣвшихъ читать и писать; здѣсь сообщались изображенія чиселъ при помощи цифръ, называемыхъ фигурами.

Эти двѣ нумераціи создали два направленія въ методикѣ ариѳметики. Съ тѣхъ поръ, идя вначалѣ ощупью, стали все болѣе и болѣе ясно и опредѣленно выдвигать основной вопросъ: счетъ или наблюденіе? Постулированіе единицей или воспріятіе числовыхъ группъ? Умозрѣніе или зрѣніе?

А. *Сторонники счета* черезъ Рохова (1783), Вильома (1790), Оверберга (1793) пришли къ школѣ Песталоцци. Въ „книгѣ для матерей" послѣдній является рѣшительнымъ защитникомъ и основателемъ продуманнаго постулированія единицей: „при первыхъ разговорахъ съ ребенкомъ мать можетъ указать на то, что ротъ у него *одинъ*; носъ — *одинъ*; глазъ — *одинъ* и еще *одинъ*; ухо—*одно* и еще *одно*". Далѣе: не $2+1=3$, а $2.1+1=3$ и т. п.

Взгляды Песталоцци на природу числа: „число обязано своимъ происхожденіемъ опредѣляющей, а не только чувственной силѣ представленія“ цѣликомъ были усвоены его послѣдователями и продолжателями. Теоретическую сторону вопроса разработали Гербартъ, Дистервегъ, Стой, Циллеръ, Рейнъ; практическую — счетные приборы — Тиллихъ (1806), Гееръ (1836), Герсбахъ, Бильгарцъ (1898) и др. Наряду съ этими приборами распространились въ Германіи *русскіе счеты*, занесенные туда въ 1813—1815 гг. Они пріобрѣли многихъ защитниковъ (Дистервегъ, Пальмеръ, Диттсъ, Шульце и др.)

Сейчасъ одни германскіе педагоги создали болѣе 200 счетныхъ приборовъ для чиселъ отъ 1—100. Наряду съ этимъ различныя видоизмѣненія русскихъ счетовъ вводились и вводятся во Франціи, Испаніи, Швеціи и др. государствахъ.

В. *Сторонники воспріятія* черезъ Траппа (1780) и Буссе (1797), Гразера, Кранке и Штерна подготовили почву для Грубе (1842): „Всѣ дѣйствія должны вытекать сами собой изъ отчетливаго наблюденія каждаго отдѣльнаго числа“.

Монографическое изученіе чиселъ и числовыя фигуры въ качествѣ нагляднаго пособія съ тѣхъ поръ утвердились въ ариѳметикѣ. Цѣлый рядъ педагоговъ видоизмѣняетъ фигуры Буссе . . . . . .
. . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . и вообще оперируетъ съ числовыми фигурами различныхъ типовъ, а именно: Генчель (1842), Собелевскій (1852), Борнъ (1867), Казелицъ (1868), Бёме (1877), Лёзеръ, Шереръ, Бютнеръ (1886), Беетцъ (1889), Вендлингъ (1897), Лай (1898), Трёльти (1901), Грасъ (1901), Вальземаннъ (1901), Гагге (1903), Ритгаллеръ (1904), Зибенборнъ (1905), Людвигъ Пфейферъ (1905) и др.

Второе направленіе осталось совершенно незамѣченнымъ въ Россіи. Этому способствовали два обстоятельства. Во первыхъ, народное начальное образованіе только недавно начинаетъ расширяться, а въ дѣлѣ первона-

чальнаго обученія счету и исчисленію единственнымъ руководителемъ является семья; во вторыхъ, метода Грубе была непонята даже нѣкоторыми изъ его соотечественниковъ [Бютнеръ, Линднеръ (1875), Гёбельбекеръ (1897)], начала же распространяться лишь въ 50-ые годы, послѣ выхода въ свѣтъ 2-то изданія его „Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule". Поэтому нечего удивляться, что съ Грубе познакомились въ Россіи лишь въ концѣ 60-хъ годовъ и что Евтушевскій такъ же не понялъ основной мысли Грубе, какъ это случилось и съ указанными выше нѣмецкими педагогами. Ошибка Евтушевскаго оказалась роковой для русской методики: вмѣсто того, чтобы двигаться впередъ, Гольденбергъ, Арженниковъ, Егоровъ и Шохоръ-Троцкій должны были разрушать безобразную, безсмысленную систему Евтушевскаго и такимъ образомъ не смогли дать того, что въ Германіи давно уже нашло себѣ мѣсто въ школѣ.

Вопросъ о счетѣ и наблюденіи перешелъ недавно въ новую стадію — экспериментальную; только хорошо поставленные опыты въ состояніи рѣшить, которому изъ двухъ направленій принадлежитъ будущее.

Дидактическіе опыты.

7. Книга Beetz'a „Das Typenrechnen auf psychophysischer Grundlage" появилась въ 1889 г. Рѣшительно порывая со счетомъ и требуя, „чтобы созерцаніе основныхъ чиселъ было первымъ, а усвоеніе порядка чиселъ—вторымъ результатомъ исчисленія", Беетцъ является основателемъ новой методики, основанной на экспериментѣ.

Одновременно съ этимъ стали работать французская и американская психологическія школы, производившія многочисленныя наблюденія надъ дѣтьми дошкольнаго возраста. Оказалось, что полутора-годовой ребенокъ различаетъ одинъ отъ двухъ и два отъ множества. Въ три года онъ различаетъ 1, 2 и 4 (послѣднее въ формѣ 2+2), но не знаетъ 3. Это удивительное на первый взглядъ явленіе объясняется просто, если принять во вниманіе вышеизложенное. Группы „2" и „4" встрѣчаются на каждомъ шагу; таковы природныя пары (руки, ноги, уши, глаза), предметы домашняго обихода (ножки у столовъ, стульевъ и т. п.), домашнія животныя. Но

группа „3“ встрѣчается рѣдко или же въ искусственномъ сочетаніи.

Далѣе оказалось, что до 5-лѣтняго возраста нужно учить числамъ лишь въ предѣлѣ 1—4. Это совпадаетъ вполнѣ съ практикой браминовъ въ теченіе многихъ тысячелѣтій.

Наконецъ необходимъ 6—7 лѣтній возрастъ, чтобы дойти до 10, и почти 10-лѣтній, чтобы дойти до сотни.

Всѣ эти данныя, по словамъ Houseau, относятся къ европейскимъ дѣтямъ средняго ума, получающимъ элементарное образованіе.

Конечно, выучить ребенка *говорить: одинъ, два, три, четыре, ..., девять, десять* и т. д. можно гораздо раньше. Но не въ этомъ состоитъ знаніе чиселъ, а въ выдѣленіи опредѣленныхъ группъ: вотъ это *три*, а это *семь* и т. п. Тотъ счетъ, которому учатъ до сихъ поръ въ Россіи, вполнѣ заслуживаетъ термина „попугайскій“.

Въ настоящее время самые убѣжденные сторонники счета признали, что представленія чиселъ 1, 2, 3 возникаютъ безъ счета. Это—первая сдача позицій, за которой послѣдуютъ дальнѣйшія.

Изученіе чиселъ въ промежуткѣ отъ 1 до 20 можетъ быть достигнуто путемъ воспріятія соотвѣтствующихъ числовыхъ фигуръ. Счетъ—въ смыслѣ подбора числительныхъ—здѣсь ровно ни при чемъ. Многочисленные опыты показали, что *одновременныя воспріятія и представленія*[1]) основныхъ чиселъ могутъ быть ясными и отчетливыми безъ всякаго участія счета; что такія числовыя группы могутъ превышать число 10, т. е. онѣ не связаны съ десятиричной нумераціей; наконецъ, что надъ такими группами можно выполнять дѣйствія задолго до того, какъ сообщается опредѣленіе числа и дѣйствія.

---

[1]) Числовое воспріятіе 4—это схватываніе совокупности ⁝⁝; числовое представленіе 4—это разложеніе совокупности на составляющіе ее элементы (но безъ счета) и построеніе ея изъ этихъ элементовъ. Это—первичная абстракція, анализъ, синтезъ. Если эти процессы всѣ три вмѣстѣ требуютъ *менѣе одной секунды*, то воспріятіе и представленіе числа мы называемъ мгновенными и *одновременными*.

Замѣчательно, что противники числовыхъ фигуръ сами опытовъ не производятъ и ограничиваются голословнымъ отрицаніемъ. Единственный Книллингъ въ Германіи поставилъ 3 опыта съ цѣлью опровергнуть выводы Лая; но постановка и выполненіе опытовъ—неуспѣшны, и выводы Книллинга ничего не могли опровергнуть. Въ Россіи о числовыхъ фигурахъ не заикаются; только Шохоръ-Троцкій[1]) упоминаетъ о томъ, что „числовыя фигуры наиболѣе употребительны изъ чисто-наглядныхъ учебныхъ пособій“, но далѣе сейчасъ же безапеляціонно рѣшаетъ: „Числовыя фигуры могутъ служить пособіемъ при обученіи *счету* и при обозначеніи цифрами даннаго числа значковъ данной фигуры. Но ими отнюдь не слѣдуетъ пользоваться при прохожденіи *дѣйствій* надъ числами... Обозначенія, въ которыхъ знакъ дѣйствія поставленъ между фигурами, безсмысленны (sic!)... Числовыя фигуры, въ которыхъ болѣе десяти значковъ, не цѣлесообразны въ виду того, что онѣ перестаютъ быть наглядными (?!) и, такимъ образомъ, лишаются своего значенія“. Затѣмъ идутъ обычныя разсужденія о пользѣ черточекъ, прямой линіи и ариѳметическаго ящика, а главное—счетовъ.

Печальное положеніе русской методики ариѳметики вытекаетъ изъ незнакомства нашихъ методистовъ съ иностранной литературой по педагогикѣ и методикѣ.

Нѣтъ возможности подробнѣе остановиться на тѣхъ опытахъ, какіе произведены за послѣдніе 10—12 лѣтъ въ Западной Европѣ. Достаточно указать, что въ одной Германіи ихъ ставили: Лай, Шнейдеръ, Грюневальдъ, Юнкеръ, Вальземаннъ, Гольдшейдеръ и Мюллеръ, Кюльпе, Эрдманнъ и Додге, Каттель, Эббингаузъ, Дитце, Нану, Шуманъ, Трёльтшъ, Пфейферъ, Ціэнъ (Ziehen) и др.; въ Швеціи—Шееле, въ Англіи—Уореннъ (Warren) и Мессенджеръ, и т. д.

Прежде всего необходимо было рѣшить вопросъ о типѣ наглядныхъ пособій. Одни изъ нихъ могутъ быть связаны съ воспріятіями пространственной смежности (оптическій и оптико-моторный счетъ), другія — съ воспріятіями послѣдовательности во времени (слуховой

---

[1]) *Шохоръ-Троцкій*, Методика ариѳметики, 1903.—ч. I, стр. 19—20.

счетъ). Опыты показали, что теоретическія разсужденія по этому вопросу вѣрны: только перваго вида наглядныя пособія могутъ и должны имѣть мѣсто въ обученіи. Попытки сторонниковъ слухового счета, напр. Фэрмана, показали, напротивъ, необходимость ритмической группировки элементовъ, т. е. привели къ созданію слуховыхъ числовыхъ фигуръ.

Съузивъ такимъ образомъ предѣлы изслѣдованій, занялись установленіемъ самаго принципа наглядности. Намъ теперь извѣстно, что „средства изображенія числа примѣняются какъ *репрезентативныя числовыя представленія*". Эти средства изображенія числа должны вызывать ясныя и отчетливыя *представленія чиселъ*, въ смыслѣ, указанномъ выше. Сообразно съ этимъ условились называть *нагляднымъ* такое пособіе, которое удовлетворяетъ этимъ требованіямъ. Напр. для числа „восемь" пособіе ●● ●● ●● ●● наглядно, а пособія . . . . . или  — ненаглядны; ихъ можно назвать символическими.

Отсюда слѣдуетъ, что *наглядность* пособія зависитъ отъ *формы, величины, разстоянія, группировки*; затѣмъ опыты выяснили значеніе *направленія* (вертикальные или горизонтальные столбцы и ряды), и, наконецъ, *сочетанія и интенсивности цвѣтовъ*.

Изъ числа различныхъ наглядныхъ пособій наибольшею извѣстностью пользуются: 1) русскіе счеты, 2) ряды (штрихи, кубики, пальцы), 3) числовыя фигуры (Борна, Беетца, Лая). Многочисленные опыты вышепоименованныхъ лицъ дали слѣдующіе результаты:

„Квадр." фиг. (Лая)	— наим. проц. ошибокъ.			
Числовыя фигуры Борна	— хуже предыдущихъ.			
„ „ Беетца	—	„	„	
Пальцы	—	„	„квадр."	въ 4 раза
Счеты	—	„	„	въ 5 разъ
Ряды (штрихи, ящикъ)	—	„	„	въ 7-8 разъ

Итоги. 8. — Изложеннаго достаточно, чтобы построить схему обученія дѣтей. Необходимо начать не со счета, а съ числовыхъ воспріятій— и для этого лучшимъ современнымъ пособіемъ слѣдуетъ признать приборъ Лая.

Пользуясь филологической таблицей можно удовлетворительно объяснить происхожденіе основныхъ числительныхъ.

Простѣйшія дѣйствія слѣдуетъ производить надъ группами путемъ непосредственнаго „чтенія“ числа, которое дается (согласно опытамъ) разъ въ 10 легче, чѣмъ утомительный счетъ или механическое заучиваніе. Пособіемъ могутъ служить: приборъ Лая, его книга „Руководство къ первоначальному обученію ариѳметикѣ“, пер. 1910 г. и книжка Михеева „Наглядный ариѳметическій задачникъ для начальныхъ школъ“, изд. 3, Казань, 1909 г. Имя Лая говоритъ само за себя; его книга должна быть настольной у всѣхъ лицъ, такъ или иначе причастныхъ къ обученію дѣтей. Для иллюстраціи прекраснаго задачника Михеева приводимъ примѣры на вычитаніе и дѣленіе (см. рис. 4).

Конечно—это лишь первый этапъ обученія. Необходимо въ дальнѣйшемъ переходить отъ нагляднаго представленія чиселъ къ символическому, сначала цифровому, а затѣмъ буквенному. Такой переходъ—настоящая задача обученія. Но спѣшить съ нимъ нельзя, помня, что наглядность проходитъ черезъ всякое представленіе и должна служить исходной точкой для всѣхъ новыхъ понятій математики.

Нумерація устная.

9. Подготовленный ребенокъ самъ прійдетъ къ необходимости установленія нумераціи, какъ къ ней пришло естественнымъ путемъ и человѣчество. Запросы пытливаго ума о числѣ звѣздъ, деревьевъ, домашнихъ животныхъ (стада) и т. п. вызовутъ необходимость „большого счета“; но и здѣсь „пониманіе большихъ чиселъ предполагаетъ не счисленіе, а воспріятіе группъ числовой системы“. Степень воспріятія различна у различныхъ народовъ — и благодаря этому создались различныя нумераціи, благополучно существующія и понынѣ.

Двоичная—не менѣе 42 системъ у австралійскихъ и южно-американскихъ племенъ. Она осталась до сихъ поръ въ монетной системѣ культурныхъ народовъ (полъ и четверть доллара; два, полъ и четверть франка; полтинникъ, четвертакъ, двѣ коп., и т. п.), въ мѣрахъ длины ($^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$), вѣса, емкости, жидкостей и т. д.

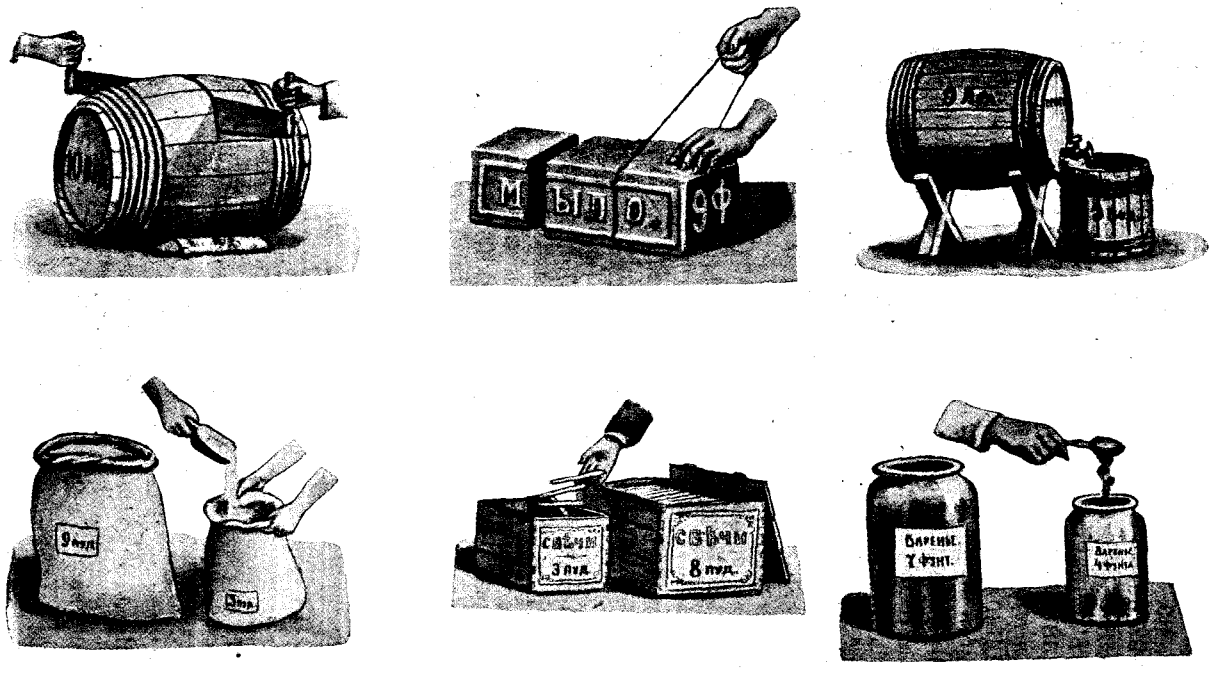


Рис. 4.

Троичная—Бетойцы (Юж. Амер.), Короадосы (Бразилія), Камиларои (Австралія) и др. Въ основу положенъ счетъ по суставамъ пальцевъ; отсюда произошелъ обычай называть числа единицъ „digiti“ (пальцы) и числа десятковъ—„articuli“ (суставы). Счетъ „по артикуламъ“ практиковался оффиціально и въ Россіи, а неоффиціально сохранился до сихъ поръ.

Четверичная—Кулисы (Парагвай), Макобы (Парана), Бенгальцы (Индостанъ), индѣйскія племена Британской Колумбіи и др. Если вѣрить Аристотелю, то четверичная нумерація была у одного изъ племенъ Ѳракіи. Эта система тоже пальцеваго происхожденія (большой палецъ не принимается въ счетъ); въ ходу до сихъ поръ у купцовъ.

Пятиричная — раньше у Грековъ и Римлянъ [1]), а теперь у 26 племенъ Африки, 8—Полинезіи, 13—Азіи, и 30—Америки.

Шестиричная—у Москитосовъ (Центр. Амер.) и др. Произошла изъ троичной; разсѣяна тутъ и тамъ по старому континенту до сихъ поръ.

Семиричная—у Боляновъ (Западная Африка).

Восьмиричная и шестнадцатиричная—изъ двоичной и четверичной. Слѣды ихъ сохранились въ мѣрахъ: *длины*—8 ячменныхъ зеренъ, положенныхъ рядомъ, составляютъ единицу длины (Азія, Африка, Европа до XVII в.); вершокъ=$^1/_{16}$ аршина; *земельныхъ*—акры и ихъ подраздѣленія; *вѣса*—греческій фунтъ дѣлился на 16 минъ (кромѣ дѣленія на 12 унцій); *сыпучихъ тѣлъ*—оковъ (окованная бочка) = 4 четверти, четверть=8 четвериковъ, четверикъ=8 гарнцевъ; *времени*—сутки дѣлятся на 8 частей (древніе евреи, греки, римляне и сейчасъ арабы) и т. д.

Десятиричная — независимо отъ Европейцевъ въ чистомъ видѣ у 19 племенъ Африки (наша десятиричная система—смѣшанная).

Одиннадцатиричная — у племенъ Новой Зеландіи (спец. назв. для 11, 121, 1331).

---

[1]) Напр. IV пѣснь Одиссеи, стихи 411—413: „Πεμπάσσεται“—сосчиталъ пятками. Что касается письменной нумераціи, то она чисто-пятиричная у обоихъ народовъ.

Двѣнадцатиричная — у Апосовъ (Бенуэ), древнихъ Халдеевъ (превратилась въ шестидесятичную у ассировавилонянъ); мѣры вѣса у китайцевъ. Счетъ по дюжинамъ и гроссамъ до сихъ поръ въ ходу у культурныхъ народовъ Европы (яйца, перья); фунтъ аптекарскій дѣлится на 12 унцій, какъ и футъ на 12 дюймовъ [1]). Мѣры времени позаимствованы у Халдеевъ: сутки = 24 часа [2]), часъ = 60 минутъ, минута = 60 секундъ; годъ = 12 мѣсяцевъ. Наконецъ въ Англіи монетная система (пенсъ = 1/12 шиллинга) заставляетъ дѣтей изучать *двѣ* таблицы умноженія—десятиричную и двѣнадцатиричную.

Русская десятина тѣсно связана съ числомъ 12. Именно, каждый палецъ принимается за 3 (по числу суставовъ) десятка десятковъ, каждая рука (безъ большого пальца)—за полъ—десятины; такимъ образомъ десятина=2400 кв. саж. [3]).

Двадцатиричная—у 4 племенъ Африки, 3—Полинезіи, 18—Азіи, 8—Америки и 6—Европы (Албанцы, Англичане, Баски, Датчане, Французы и Кельты—въ нарѣчіяхъ Бретонскомъ, Валлійскомъ, Ирландскомъ, Мэнскомъ, Гэльскомъ). Прежде ею пользовались и Ацтеки.

Попытки перечисленныхъ выше европейскихъ народовъ перейти къ десятичной системѣ пока не особенно удачны. Правда, во Франціи теперь почти не употребляютъ выраженій trois-vingts (XII в.), sept-vingts (XI в.), huit-vingts (XV в.), douze-vingts, quatorze-vingts (XIV в.), равно какъ и не пишутъ: вмѣсто 81—IIII^{xx}1 или 121—VI^{xx} et 1 (XIII в.), но за то до сихъ поръ

---

1) Англійское „pound“ (фунтъ) происходитъ отъ латинскаго „pondus“ (вѣсъ). Слово „ounce“ (унція) и „inch“ (дюймъ)—одного происхожденія: uncia librae (унція фунта) и uncia pedis (унція фута). Русское слово „дюймъ“ вывезено изъ Голландіи.

2) Въ Турціи (и вообще магометане) считаютъ 12 подраздѣленій сутокъ; сутки начинаются съ заката и поэтому мѣняются въ зависимости отъ временъ года. У насъ циферблатъ часовъ раздѣленъ на 12 частей и только въ Италіи—на 24.

3) В. С. Козловъ любезно сообщившій намъ эти свѣдѣнія, лично наблюдалъ земельные разсчеты крестьянъ, производимые ими на пальцахъ (возможность наглядно представить 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/8, 1/10, 1/12, 1/15, 1/16, 1/20, 1/24 и т. д. часть десятины).

сохранилось названіе госпиталя „Les Quinzevingts“, основаннаго Людовикомъ IX и разсчитаннаго на комплектъ больныхъ въ 300 человѣкъ; сохранились числительныя: soixante-dix (70), soixante-quatorze (74), quatre-vingts (80), quatre-vingts-treize (93) и т. п. Попытка ввести десятиричныя числительныя septante, huitante, nonante оказалась неудачной, и эти названія встрѣчаются только въ Бельгіи, Швейцаріи и кой-гдѣ на югѣ Франціи.

Въ Англіи до сихъ поръ существуетъ счетъ по score'амъ [1]) (двудесяткамъ), какъ напр. theescore and ten (70), fourscore and thirteen (93) и т. п.

Въ Даніи: 60 = tresindstyve, 50 = halvtresindstyve, 80 = firsindstive и т. п.

10. Переходя къ вопросу объ образованіи ряда числительныхъ, мы встрѣчаемъ два принципа: *аддитивный* и *мультипликативный*. Оба они перемѣшаны въ нашихъ числительныхъ образованіяхъ. Напр. 13 и 30: три-на-дцать (рус.), treize (фр.), dreizehn (нѣм.), dókkimèh kar mattà (багирмс., Африка), samfur sisser kior (папуас.)—составлены по аддитивному принципу; напротивъ, три-дцать (рус.), trente (фр.), dreissig (нѣм.), dock-mattà (багирмс.), samfur di kior (папуас.) - составлены по мультипликативному принципу. Это смѣшеніе въ различныхъ нумераціяхъ простирается лишь до числительнаго N. N + N (если черезъ N назовемъ основаніе нумераціи). Дальше представляются два пути: либо аддитивная форма N.N + N, либо мультипликативная (N + 1). N. Человѣчество выбрало первый путь, такъ какъ онъ вытекаетъ непосредственно изъ процесса пальцеваго счета. Такимъ образомъ числа N, N^2, N^3, ... явились естественными единицами разрядовъ каждой нумераціи.

Напр. при N = 10 число 110 можно было бы образовать двояко: или 100 + 10, или 11. 10; числительное *сто десять* показываетъ, что выбранъ первый путь.

11. Количество различныхъ словъ, необходимыхъ для устной нумераціи, различно у различныхъ народовъ. Кромѣ первыхъ десяти, затѣмъ *сто*, *тысяча*, *милліонъ*, *билліонъ* и т. д. существуетъ *сорокъ* въ Россіи,

---

[1]) Напр. при счетѣ овецъ.

еще 14 названій въ Японіи и 17 въ санскритѣ (напр. ayuta—10.000, lakcha—100.000, talakchana—единица съ 53 нулями и т. д.) [1]).

Во всякомъ случаѣ арійцы до раздѣленія считали не далѣе 1000, и только позже создались высшія числительныя, не обнаруживающія никакого сходства даже въ различныхъ индо-германскихъ языкахъ. Греки предѣломъ счета полагали 10000 (μύριοι); то же слово, но съ другимъ удареніемъ—μυρίοι, означало безчисленное множество. Подобное явленіе мы находимъ въ древне-славянскомъ языкѣ: *тьма, легіонъ, леодръ* въ „маломъ счетѣ" означали десять тысячъ, сто тысячъ, милліонъ, а въ „великомъ счетѣ"—милліонъ, милліонъ милліоновъ, билліонъ билліоновъ.

Необходимо также имѣть въ виду и то обстоятельство, что новыя названія числовыхъ группъ, не связанныя съ ихъ происхожденіемъ, прививались крайне медленно. Хорошимъ примѣромъ служитъ слово „милліонъ". Оно создано итальянцами изъ „mille" (тысяча) и „one"—приставки для увеличительныхъ именъ; первоначальное значеніе—*большая тысяча*. Изъ Италіи еще въ XV в. милліонъ перешелъ во Францію и въ Германію и получилъ право гражданства въ математическихъ сочиненіяхъ. Такъ французскій математикъ Nicolas Chuquet въ своемъ „Le Triparty en la science des nombres" (1484) вводитъ million (10^6), byllion (10^{12}), tryllion (10^{18}) и т. д. Лишь сто лѣтъ спустя новое слово примѣняется въ Германіи. Но только въ самомъ концѣ XVIII в., лѣтъ 400 спустя послѣ своего рожденія, милліонъ проникъ въ ариѳметическіе учебники. Еще въ 1774 извѣстная ариѳметика Hederichs'a рекомендуетъ читать число 4.634.276.598.542.754 такъ: „Четыре Тысячи / Тысячъ / Тысячъ / Тысячъ / Тысячей, 634 Тысячи / Тысячъ / Тысячъ / Тысячей, 276 Тысячи / Тысячъ / Тысячей, 598 Тысячи Тысячей, 542 Тысячи, 754". Въ „Руководствѣ къ Ариѳметикѣ" неизвѣстнаго автора, изданномъ „Четвертымъ тисненіемъ" въ 1792 г., въ СПб-гѣ, уже пишутъ такъ (стр. 14):

54,321″, 654,321′, 654,217
билліоны, милліоны,

---

[1]) Въ языкѣ племени Борну даже кратныя 10-ти имѣютъ особыя названія, не связанныя съ первыми десятью числительными.

Методическіе выводы.

12. Оливеръ Лоджъ въ своей „Легкой математикѣ“ былъ неправъ, предвидя возраженія: „къ чему упоминать объ этихъ вещахъ въ книгѣ такого характера?“ Тотъ, кто внимательно прочтетъ изложенное въ настоящей главѣ, невольно призадумается надъ вопросомъ: когда и въ какой формѣ познакомить дѣтей съ нумераціей? Историческій опытъ всего человѣчества не долженъ, да и не можетъ пройти даромъ: чѣмъ позже дѣти будутъ ознакомлены съ нумераціей, тѣмъ осмысленнѣе и практичнѣе они къ ней отнесутся.

Это—первое положеніе современной методики. Второе заключается въ томъ, что нельзя скрывать отъ нашего взора то сплетеніе различныхъ системъ, какое до сихъ поръ благополучно царствуетъ въ нашемъ исчисленіи. Не одна единственная десятичная система, какъ увѣряли и продолжаютъ увѣрять дѣтей, а цѣлый рядъ системъ переплелись другъ съ другомъ. Никакое заучиваніе единичныхъ отношеній въ нашихъ мѣрахъ не поможетъ уяснить, почему сажень раздѣлена на 3 части, а аршинъ—на 16? Почему десятина состоитъ изъ 2400 кв. саж.? Почему фунтъ = 32 лотамъ въ мелочной лавкѣ, а не 28 лотамъ, или 12 унціямъ, какъ рядомъ въ аптекѣ? Всѣ эти запросы неизбѣжны и не отвѣтить на нихъ или же говорить „это такъ“—величайшее педагогическое преступленіе и подрывъ престижа ариѳметики.

Въ третьихъ, такое несовершенство не только въ мѣрахъ. Если даже допустить, что лѣтъ черезъ 100 метрическая система мѣръ вытѣснитъ всѣ національныя системы, то можно быть увѣреннымъ, что 12-чная система сохранится въ счетѣ времени; она слишкомъ тѣсно связана съ астрономическими явленіями. Къ тому же десятиричная нумерація не такъ удобна вообще, какъ 12-ная, такъ какъ число 10 имѣетъ всего два множителя—2 и 5, а 12—цѣлыхъ четыре—2,3,4,6. Попытки Стевина, Карла XII, Бюффона и Гумбольдта ввести 12-ную нумерацію не удались [1]); но и результаты

---

[1]) Цѣлый рядъ математиковъ, начиная съ Паскаля, продолжаетъ высказываться за освобожденіе математики отъ той или иной нумераціи. Напр. $\alpha\beta\gamma\delta = \alpha.\,4! + \beta.\,3! + \gamma.\,2! + \delta.\,1! = 24\,\alpha + 6\,\beta + 2\gamma + \delta$ (факторіальная нумерація).

болѣе успѣшные французской метрической попытки не вызываютъ особеннаго восторга. Предложенія перейти къ другой нумераціи не прекратились и теперь.

За нумераціей, какъ за китайской стѣной, скрываются всѣ свойства чиселъ. Если ввести хотя бы двѣ нумераціи, то легко отличить основныя свойства чиселъ отъ случайныхъ. Такъ признакъ дѣлимости: „Всякое число раздѣлится, если сумма цифръ раздѣлится“ принадлежитъ девяткѣ въ 10-чной нумераціи, четверкѣ—въ 5-ной, одиннадцатеркѣ—въ 12-ной и т. п. Первоначальныя числа существуютъ при всякой нумераціи. Число дѣлителей всякаго числа тоже не зависитъ отъ способа изображенія числа. Независимы отъ нумерацій теоремы Фермата, Вильсона, Плято и др. Замѣчательныя свойства чиселъ 19,43,67,163 присущи только этимъ числамъ, и т. п.

Общее правило для прохожденія съ дѣтьми устной нумераціи можно формулировать словами Паскаля: „не употреблять ни одного термина, смыслъ котораго не былъ бы предварительно вполнѣ точно объясненъ“.

Нумерація письменная.

13. Послѣ всего сказаннаго нетрудно установить слѣдующій порядокъ развитія счета и нумераціи

рядъ предметовъ,
рядъ группъ,
рядъ именъ,
рядъ знаковъ.

Послѣдняя ступень—самая трудная. Народы, обладающіе устной нумераціей, часто не имѣютъ понятія о письменной; еще чаще прибѣгаютъ къ наивному символизму—ряду штриховъ. Даже современные культурные народы еще сохраняютъ наивный символизмъ въ обозначеніи чиселъ на картахъ, домино, игральныхъ кубикахъ; часы опредѣляютъ время, отбивая послѣдовательные удары; на ихъ циферблатахъ минуты обозначены штрихами. Среди русскихъ крестьянъ до сихъ поръ въ ходу „бирки“—палки, на которыхъ нанесены зарубки; такъ число 112 обозначаетъ „11 бирокъ и 2 зарубки“. Въ Малороссіи встрѣчается даже опредѣленіе числа по вѣсу группы бирокъ, считая ихъ опредѣленное количество на фунтъ.

Если принять во вниманіе и тотъ фактъ, что письменная нумерація при помощи десяти знаковъ утвердилась въ Европѣ окончательно лишь въ концѣ XVIII в., вытѣснивъ римскую и жетоны [1]), то нельзя не признать важнаго значенія этихъ фактовъ для методики исчисленія.

Наивный символизмъ развился въ глубокой древности въ связи съ идеографическимъ письмомъ. Бирки русскихъ крестьянъ находятся въ прямой связи съ живописнымъ письмомъ ацтековъ и индѣйцевъ, съ „квиппусомъ" перуанцевъ, съ іератическими и іероглифическими письменами египтянъ, съ клинообразнымъ письмомъ халдеевъ, и т. п.

На первый планъ въ вопросѣ о письменной нумераціи необходимо выдвинуть *принципъ положенія*. Каждый знакъ означаетъ группу, но размѣръ группы зависитъ отъ положенія знака среди другихъ. Этотъ принципъ является гордостью нумераціи. Безъ него наши вычисленія стояли бы на той же жалкой ступени, на какой они находились во времена пальцевой и инструментальной ариѳметики.

Гдѣ и когда былъ примѣненъ впервые принципъ положенія? На этотъ вопросъ давали до сихъ поръ единодушный отвѣтъ: у индусовъ, отъ которыхъ его переняли арабы, а затѣмъ европейцы. Въ нашихъ учебникахъ и даже научныхъ книгахъ говорится объ арабскихъ цыфрахъ, и только недавно даже крупные ученые стали указывать, что это не арабы, а индусы являются творцами десятиричной письменной нумераціи.

Вопросъ этотъ, не смотря на кажущуюся особенность, имѣетъ важное значеніе именно для методики исчисленія. „Счетное искусство" (λογιστική) Грековъ не имѣетъ ничего общаго съ теоріей чиселъ, но оно является краеугольнымъ камнемъ основныхъ вычисленій. Послѣ того какъ пальцы были замѣнены счетными приборами (суанпанъ у Китайцевъ, абакъ у Грековъ,

---

[1]) Въ началѣ XVIII в. книги, издаваемыя въ Россіи, печатали то „числа русскія" (т. е. славянскія обозначенія), то „цифирныя". Православная церковь до сихъ поръ не нуждается въ нулѣ и остальныхъ знакахъ, пользуясь въ своихъ книгахъ греческимъ цыфровымъ алфавитомъ, кстати, вполнѣ удобнымъ для чтенія.

Римлянъ и европейцевъ, счеты у Русскихъ), а послѣдніе—въ свою очередь—цыфрами,—явилась возможность быстраго прогресса исчисленія. Инструментальный періодъ существовалъ у всѣхъ народовъ до замѣны его цыфровымъ, а въ народныхъ и малопросвѣщенныхъ кругахъ существуетъ и понынѣ. Если считать правильнымъ утвержденіе, что цыфры занесены съ востока, т. е. иноземная искусственная метода вытѣснила національную, то придется установить фактъ колоссальной важности: *развитіе исчисленія произошло скачкомъ, оно—насильно, оно не подчиняется закону исторической эволюціи.* Отсюда слѣдствія: 1) цыфры не могутъ замѣнить счетовъ, такъ какъ цыфры ничѣмъ не связаны съ естественнымъ историческимъ приборомъ; 2) обученіе цыфровому искусству необходимо будетъ искусственнымъ, слѣдовательно, оно не можетъ распространиться въ широкихъ слояхъ населенія; 3) счисленіе на счетахъ ведется по наглядной методѣ, счисленіе на цыфрахъ—по символической; поэтому необходимо отдать предпочтеніе счетамъ.

Къ счастью, все это намъ не угрожаетъ. Распространенныя попытки объяснить введеніе цыфръ при помощи арабовъ и индусовъ оказались совершенно вздорными—и это заслуга русскаго ученаго *Бубнова.* Его труды, особенно послѣдніе (1908—10), установили, что „происхожденіе нашей ариѳметики слѣдуетъ искать въ древнемъ культурномъ кругу Средиземнаго моря и тѣсно съ нимъ связанныхъ государствахъ Месопотаміи, а не на берегахъ далекаго Индійскаго океана въ Индіи“. Вопреки утвержденію всѣхъ историковъ культуры, Гербертъ и не думалъ усвоивать ариѳметическія знанія въ Кордовѣ или Севильѣ—у арабовъ, а постигъ эту премудрость ребенкомъ въ школѣ—въ Орильякѣ въ Оверни. Остается показать, что наши современныя цыфры возникли естественнымъ, автоматическимъ путемъ и что онѣ вырабатывались столѣтіями. Это вытекаетъ изъ слѣдующихъ положеній.

I., Древнѣйшая форма нашихъ цыфръ встрѣчается у абацистовъ X—XII вв.; ихъ названія оказываются смѣсью ассирійскаго языка съ другимъ, иного корня (тюрко-татарскаго). Индусы не только не придумали

современной письменной нумераціи, но и учились то ей въ Средней Азіи—Бухарѣ и Хивѣ; знаменитый „творецъ“ алгебры, Могамедъ ибнъ-Муза Альхваризми родомъ не изъ Индіи, а изъ провинціи Хваризмъ (Хива и Бухара). Патріотизмъ Индусовъ на религіозной подкладкѣ заставилъ ихъ приписать созданіе нумераціи Буддѣ, подобно тому какъ греческій Птоломей превратился въ индусскаго демона Асура-Майя.

II., Абакъ съ колоннами (его видоизмѣненія—китайскій суанпанъ и русскіе счеты) извѣстенъ глубокой древности; такова „Саламинская доска“, изслѣдованная и описанная Nagl'емъ въ 1899 г. или абакъ на рисункѣ одной вазы въ Неаполѣ. Но и абакъ, и знаки на его жетонахъ гораздо болѣе древни. Само слово „абакъ“ греческаго происхожденія и означало „доска“, „столъ“. Кромѣ указаній на VI-ой и V-ый вв. до Р. Х., могущихъ быть оспариваемыми, существуетъ опредѣленное сообщеніе Аристотеля, что въ IV в. подача голосовъ судьями производилась при помощи пробуравленныхъ и цѣльныхъ жетоновъ, а счетъ ихъ происходилъ на абакѣ; постановленія народныхъ собраній назывались псефизмами.

III., Греки называли жетоны „ψῆφος (псипхосъ, а не псефосъ, какъ произносимъ мы теперь). Отсюда—голосованіе (ψηφοφορία), впослѣдствіи перешедшее у византійцевъ въ „ариѳметику“; таково напр. заглавіе книги Максима Плянуда: „Раскладка жетоновъ по индусскому—Ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς“, XIV вѣкъ. Свидѣтельство историка Ѳеофана (751—818), относящееся къ 759 г., подтверждаетъ, что искусство писать „псефы“ (γράφειν τοὺς ψήφους) было неизвѣстно арабамъ, „почему и поднесь у нихъ бухгалтеры христіане“ (т. е. греки). Этотъ „псипхосъ“ грековъ перешелъ въ „сипосъ“ абацистовъ. Жетонами могли быть вначалѣ любые камешки, какъ это и показываетъ греческое „ψῆφος“ и латинское „calculus“. Со временемъ камешекъ передѣлался въ кружокъ въ родѣ нашихъ шашекъ, съ дыркой посерединѣ для нанизыванія на шнурокъ или на проволоку [1]). На

---

[1]) Католическія „четки“ произошли именно отъ этихъ вереночныхъ счетовъ.

сипосахъ ставились цифры отъ 1 до 9; кромѣ того существовалъ гладкій немѣченный жетонъ, который абацисты и называли „сипосъ“ или „рота“ [1]). Остальные девять жетоновъ носили мудреныя нелатинскія и негреческія названія. На абакѣ существовало *десять* колоннъ; если какого-либо разряда не хватало, то одна колонна пустовала, и число называлось „прерваннымъ“ или „съ пропускомъ“.

IV., На проволоки абака накладывались жетоны по числу единицъ разряда; послѣдній жетонъ съ помѣткой, сколько именно единицъ въ колоннѣ. Впослѣдствіи стали отъ инструментальной нумераціи переходить къ письменной, т. е. сначала класть рядомъ верхніе жетоны всѣхъ колоннъ, а затѣмъ записывать ихъ знаки. Напр. число 24 изображалось на двухъ жетонахъ. При обозначеніи числа съ недостающимъ разрядомъ вмѣсто пустой колонны приходилось класть гладкій жетонъ, что́ при записи давало

7 О 3

Такимъ образомъ происхожденіе нуля вполнѣ естественно и тѣсно связано съ инструментальной нумераціей.

V., Письменная нумерація развилась раньше, вѣроятно у Индусовъ, вслѣдствіе обилія писчаго матеріала (IV в. п. Р. Х.), но несомнѣнно она—греческаго происхожденія; отъ арабовъ—европейцы въ XII в. Популярный писатель Альхваризми передѣланъ европейцами въ Альгоритми, а затѣмъ его фамилія стала нарицательнымъ именемъ искусства—*альгоритмъ счета*. Появились наряду съ абацистами и альгоритмики; ихъ совмѣстное существованіе продолжалось до XIX в. Тѣ и другіе пользовались письменной нумераціей; но у абацистовъ она—псефическая, у альгоритмиковъ—графическая. Различіе въ начертаніяхъ знаковъ на этомъ и основано: для абациста положеніе жетона не имѣло значенія—онъ могъ лежать въ 4 положеніяхъ; для альгоритмика существовало одно опредѣленное начертаніе. Придавая знакамъ абацистовъ опредѣленное положеніе, мы получаемъ тѣ 9 знаковъ, которые будто бы

[1]) Латинское rota, rotula—кружокъ. Введено въ средніе вѣка.

были изобрѣтены индусами и импортированы въ Европу арабами [1]). А между тѣмъ какъ разъ арабы взяли у абацистовъ VII и VIII вв. ихъ знаки и сохранили для своей новой письменной нумераціи.

VI., Единственный слѣдъ арабскаго вліянія остался въ названіи нуля. Греческій чистый жетонъ индусы назвали „sunya“ (чистый, пустой); арабы перевели его словами „as-sifr“ (ацъ-цыфръ, пустой), откуда zefirum, zefiro, zero (XII—XV вв.). Первые альгоритмики называли нуль такъ: ciffra, ciffre, cyfra, teca, nihil, nil, figura nihili, nullus circulus, circulus. Знаки чиселъ 1—9 назывались фигуры, дифференціи. Это продолжалось до конца XVIII в. Такъ Эйлеръ (1783) для нуля употребляетъ терминъ „cyphra“; въ Ариѳметикѣ Магницкаго: „Всѣ числа въ десяти знаменованіяхъ или изображеніяхъ содержатся, изъ нихъ же девять назнаменовательны суть, послѣднее же О (еже цифрою или ничемъ именуется) и т. д.“. То же у Румовскаго въ 1760 г. Только въ „Руководствѣ“ 1792 г. (§ III, стр. 5) сказано: „.... Всѣ сіи знаки *цыфрами* именуются“.

Въ Португаліи „cifra“ и сейчасъ еще употребляется въ двухъ значеніяхъ. Въ Англіи нуль называется „cypher“.

VII., Выводы изъ этого напрашиваются сами собой; они такъ формулированы Бубновымъ.

„Голый и съ сумеречной душой появился человѣкъ на землѣ. Одѣлся и просвѣтилъ свою душу онъ самъ послѣ долгой борьбы и страданій. По части ариѳметики лишь слабый проблескъ мысли да пятерня были ему даны. Долгими вѣками, постепенно, безъ вмѣшательства патентованныхъ мудрецовъ, развилась отсюда инструментальная ариѳметика вплоть до десяти родовъ жетоновъ, а изъ послѣдней опять безъ мудреца письменная, по типу и со знаками инструментальной. Родись человѣкъ шестипалый, ариѳметика была бы двѣнадцатичная, съ двѣнадцатичными разрядами, одиннадцатью вмѣсто девяти цыфрами и двѣнадцатымъ ну-

---

[1]) Согласно изслѣдованіямъ Поля Таннери, въ византійскомъ трактатѣ 1254 г. индусскіе знаки совпадаютъ съ итальянскими знаками абацистовъ того же вѣка.

лемъ, счетчикомъ разрядовъ. Такъ автоматично и послѣдовательно шло здѣсь развитіе, въ которомъ выдающаяся роль выпала на долю грековъ".

„Удобно, просто, геніально, а памятника ставить некому!"

„Не только вѣка, — тысячелѣтія прошли прежде, чѣмъ выработавшееся изъ анатомическихъ особенностей человѣка, изъ его примитивнаго счетнаго инструмента, — пятерни, десятичное основаніе счета и ариѳетики получило себѣ соотвѣтствующее выраженіе на словахъ, въ языкахъ культурныхъ народовъ, въ ихъ числительныхъ. Не меньшее время понадобилось и для того, чтобы дать этому въ словахъ воплотившемуся десятичному основанію вѣрное изображеніе, фотографически точный отпечатокъ въ письмѣ. Если бы это было возможно и если бы это было сдѣлано прямо, со словъ на бумагу, безъ посредства инструментальнаго счета, то это могъ бы сдѣлать только невѣроятный титанъ творческой силы и полубогъ ума, такъ какъ въ этомъ случаѣ это было бы дѣломъ личнаго творчества..... Но наша ариѳметика — дитя инструментальной ариѳметики, упавшее, какъ яблоко, недалеко отъ яблони. Инструментальная же ариѳметика — дѣло *народнаго* творчества, какъ миѳологія и эпосъ".

Удобна-ли десятичная нумерація?

14. — Естественность такого вопроса несомнѣнна, разъ мы согласились съ предыдущими выводами. И отвѣтъ тоже простъ: удобна, но до извѣстныхъ предѣловъ. Такъ, мы не въ состояніи осмысленно читать числа, написанныя при помощи болѣе, чѣмъ 10 знаковъ; производство же дѣйствій умноженія и дѣленія надъ подобными числами сопряжено съ громадными затрудненіями. Съ другой стороны ариѳметическія дѣйствія значительно бы упростились, если бы число знаковъ уменьшить на половину, какъ это показалъ въ 1840 г. Коши; тогда можно писать:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \overline{14},\ \overline{13},\ \overline{12},\ \overline{11},\ 10,\ 11,\ 12.....$$

Та же система принята Лялянномъ и Колиньономъ для троичной нумераціи. Еще совершеннѣе двоичная, а именно:

$$0,\ 1,\ 10,\ 11,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111,\ 1000,\ldots,$$

она нуждается лишь въ двухъ знакахъ — 0 и 1 —, таблица умноженія сводится къ „однажды одинъ—одинъ“, дѣленіе выполняется безъ сучка и задоринки, между тѣмъ какъ у насъ частное находятъ по догадкѣ. Даже способъ писать большія числа по этой системѣ былъ указанъ Лежандромъ въ его „Théorie des Nombres“, а способъ чтенія 8 цифръ заразъ — Пеано; приложенія бинарной (двоичной) системы использованы въ вопросахъ вѣса и теоріи механизмовъ.

Изъ этого видно, что и десятичная нумерація имѣетъ свои недостатки.

Заключеніе. 15. — Какъ же использовать всѣ факты и открытія въ этой области? Какіе методическіе выводы могутъ и должны быть признаны возможными и вѣрными? Въ какой мѣрѣ при изученіи нумераціи и дѣйствій современный механическій, отвлеченный пріемъ можетъ уступить мѣсто пріемамъ нагляднымъ и лабораторнымъ?

На эти вопросы отвѣты готовы — и они будутъ даны въ особыхъ главахъ, посвященныхъ методическому прохожденію исчисленія. Мы увидимъ, что могущественнымъ средствомъ прогресса въ области методики исчисленія явится основательно забытый, первый нашъ учитель — *абакъ*.

ГЛАВА VII.

Обоснованія начальнаго курса геометріи.

„Въ наше время всякій новый кирпичъ долженъ быть положенъ поверхъ многихъ другихъ, изъ коихъ воздвигается зданіе, и если кто хочетъ принять участіе въ работѣ своего вѣка, то онъ долженъ взойти на верхъ черезъ все уже воздвигнутое зданіе и вмѣстѣ съ тѣмъ запастись матеріаломъ".

Миллъ.

„Только розгами можно вогнать ученикамъ четыре первыхъ теоремы эвклидовыхъ „элементовъ", а пятая уже называется elefuga—бѣгство несчастнаго!"

Роджеръ Бэконъ.

Къ постановкѣ вопроса. 1. Въ настоящее время педагогическій міръ Европы и Америки имѣетъ одно мнѣніе относительно преподаванія геометріи: *нельзя начинать съ Эвклида.* Цѣлый рядъ государствъ (С. Штаты, Франція, Германія, Австрія, Италія, Испанія, Голландія, Сербія) давно или же за послѣдніе годы ввели начальные курсы геометріи въ свои школы; въ другихъ государствахъ (напр., въ Англіи) такіе курсы существуютъ неоффиціально—за отсутствіемъ вообще министерскихъ программъ; наконецъ въ Россіи царствуетъ полный хаосъ. Городскія училища и женскія гимназіи [1]) пользуются благами начальныхъ курсовъ; гимназіи и реальныя училища лишены ихъ, и только цѣлый рядъ

[1]) Насколько курьезно поставлено преподаваніе въ Россіи, свидѣтельствуетъ слѣдующій фактъ. Еще по программамъ 1858—80 годовъ въ 1 кл. женскихъ гимназій Мин. Н. Пр. проходится лонгиметрія (построеніе и измѣреніе прямыхъ линій, дугъ и угловъ), во II кл.—планиметрія, въ III кл. стереометрія, съ характернымъ указаніемъ вездѣ: *наглядное знакомство*, и притомъ совмѣстно съ ариѳметикой. Эти программы не отмѣнены, но никто ихъ не знаетъ и ихъ не выполняетъ.

частныхъ учебныхъ заведеній составляетъ пріятное исключеніе.

2. Вопросъ о начальномъ курсѣ геометріи—вопросъ не новый. Начиная съ мелкихъ учебниковъ средневѣковья черезъ Клеро, Песталоцци, Руссо и др. идетъ неумолимое требованіе оздоровленія этого учебнаго предмета, и цѣлый рядъ учебниковъ и системъ изложенія ярко свидѣтельствуетъ о жизненности движенія. Мы думаемъ, что лучшее обоснованіе начальнаго курса заключается именно въ этомъ стихійномъ процессѣ; что же касается детальныхъ обоснованій, то они имѣются въ приводимыхъ нами характерныхъ положеніяхъ отдѣльныхъ авторовъ-реформаторовъ. Бѣглый обзоръ исторіи вопроса покажетъ все его значеніе.

I-ая система—ученіе о геометрическихъ формахъ.

3. Ученіе о геометрическихъ формахъ, какъ приготовительный курсъ геометріи, ведетъ свое начало съ XIX в.; подъ вліяніемъ Песталоцци, Дистервега и др. стали заботиться о выработкѣ курса геометріи, доступнаго дѣтскому пониманію. Авторы руководствъ, составленныхъ по этой системѣ, указываютъ, что начинающій ученикъ можетъ упражнять свои духовныя силы на геометрическихъ предметахъ, и что никакъ не слѣдуетъ давать ему зрѣлые плоды геометріи, какъ науки.

Въ русской математической литературѣ 60-хъ годовъ появилось нѣсколько подобнаго типа руководствъ; нѣкоторыя выдержки изъ нихъ выяснятъ достаточно точку зрѣнія сторонниковъ разсматриваемой системы.

Въ предисловіи къ своей книжкѣ Гельманъ говоритъ: „Къ научнымъ выводамъ, отличающимся точностью и строгостью мышленія, слѣдуетъ приступить только тогда, когда ученикъ уже обогащенъ познаніями объ отдѣльныхъ предметахъ, подлежащихъ этимъ выводамъ. Поэтому необходимо, чтобы научному, систематическому изложенію геометріи предшествовалъ такой приготовительный курсъ, какой впервые былъ принятъ Песталоцци и его послѣдователями: при непосредственномъ разсматриваніи простѣйшихъ тѣлъ ученики наглядно ознакомляются съ главнѣйшими геометрическими понятіями, упражняются въ отыскиваніи признаковъ и свойствъ геометрическихъ вели-

чинъ, практикуются въ черченіи фигуръ, измѣряютъ и комбинируютъ... Учитель и учебникъ суть только руководители, указывающіе ученику на то, что онъ долженъ искать; они наводятъ его на слѣдъ, по которому онъ можетъ найти искомое. Я считаю достаточнымъ сообщить ученику только объясненіе терминовъ и знаковъ, встрѣчающихся въ приготовительномъ курсѣ; все остальное можно предоставить ему отыскивать самому и только помогать, гдѣ нужно, наводящими вопросами".

М. Косинскій, который началъ вести преподаваніе въ эпоху 70 годовъ подъ руководствомъ Константина Дмитріевича Ушинскаго, „отца русской педагогики", пишетъ въ предисловіи своей книги „Наглядная геометрія", составленной приблизительно по той-же системѣ приготовительнаго курса: *„Для пользы умственнаго развитія дитяти, надо задержать его вниманіе на предметахъ интересующихъ ребенка, направлять его къ болѣе глубокому ознакомленію съ этими предметами, пріучать его вникать мало по малу въ сущность того, что поражаетъ его внѣшнія чувства и отдавать себѣ посильный отчетъ въ плодахъ своего вниманія.* Это задача нагляднаго обученія, т. е. разумныхъ, доступныхъ дѣтямъ бесѣдъ объ окружающихъ предметахъ. Но настаетъ время, когда становится необходимымъ сдѣлать это наглядное обученіе нѣсколько болѣе серьезнымъ, пріучить дитя замѣчать и сравнивать признаки общіе нѣсколькимъ тѣламъ, дѣлать изъ своихъ наблюденій легкіе выводы, усваивать себѣ общія формы окружающихъ предметовъ и вникать въ детали этихъ общихъ формъ. Такое направленіе вниманія дитяти способствуетъ къ постепенному, разумному переходу его умственной дѣятельности отъ занятій дѣтскихъ, къ занятіямъ элементарнаго образованія. Для этого-то періода дѣтскаго развитія, я и назначаю первый выпускъ моей геометріи. Въ немъ наглядно, элементарно, разсматриваются главнѣйшія формы тѣлъ; вниманіе сосредоточено сперва на предметахъ осязательныхъ, разбираетъ ихъ подробности, пріучаетъ давать себѣ отчетъ о всемъ, что оно наблюдаетъ и переходитъ мало по малу къ предметамъ и представленіямъ отчасти от-

влеченнымъ. Вниманіе становится болѣе прочнымъ, дитя пріучается давать себѣ отчетъ въ томъ, что наблюдаетъ и вмѣстѣ съ тѣмъ становится болѣе понятнымъ, болѣе способнымъ изучать то, что будетъ предложено его уму въ послѣдствіи. Окружающіе предметы, состоящіе изъ сочетаній и видоизмѣненій формъ и фигуръ понятыхъ ребенкомъ, дѣлаются для него яснѣе и такимъ образомъ выполняется, хотя отчасти, одна изъ задачъ общаго образованія — уясненіе предметовъ окружающихъ учащагося...".

„Конечно, очень полезно пріучать умъ къ размышленію, не только о наглядныхъ предметахъ, но также и о понятіяхъ и представленіяхъ отвлеченныхъ, но едва ли кто нибудь станетъ утверждать, въ настоящее и будущее время, что слѣдуетъ давать ихъ въ пищу для ума еще совершенно неподготовленнаго къ размышленію. Въ высшей степени важно, сгладить переходъ отъ нагляднаго къ отвлеченному, сдѣлать его постепеннымъ, начать съ разсужденій, основанныхъ на внѣшнихъ чувствахъ и только мало по малу присоединять къ нимъ разсужденія, заставляющія работать способности внутреннія. Имѣя въ виду это правило, я слѣдовалъ въ своемъ преподаваніи не тому пути, который принятъ въ научномъ курсѣ, т. е. не начиналъ съ протяженій объ одномъ измѣреніи или линій, но напротивъ — съ протяженій о трехъ измѣреніяхъ, или тѣлъ, представляющихъ больше наглядности".

Для болѣе яснаго представленія дадимъ въ общихъ чертахъ оглавленіе учебниковъ, разработанныхъ по плану этой системы.

А. Разсматриваніе признаковъ геометрическихъ тѣлъ.

Кубъ. Параллелепипедъ. Призма. Пирамида. Цилиндръ. Конусъ. Шаръ.

В. Существенныя свойства и измѣреніе геометрическихъ величинъ.

Тѣло. Поверхность. Линія. Точка. Уголъ. Параллельныя линіи. Поверхность, плоскость. Треугольникъ. Примѣненіе свойствъ подобныхъ треугольниковъ. Четыреугольникъ. Многоугольникъ. Кругъ. Эллипсъ. Из-

мѣреніе площадей и поверхностей. Тѣло. Измѣреніе объемовъ. Задачи на вычисленіе площадей и объемовъ.

Критика I-ой системы.

4. Общая характеристика курсовъ этой системы можетъ быть сдѣлана въ двухъ словахъ: „учите наглядно". Легко замѣтить, что всѣ составители такихъ курсовъ слишкомъ односторонне обратили вниманіе лишь на одинъ педагогическій принципъ — „наглядность". И такъ какъ тутъ только одно созерцаніе, то прочія чувства учениковъ оставляются почти безъ упражненія. Хотя составители руководствъ въ своихъ предисловіяхъ и говорятъ, что ученики практикуются въ черченіи фигуръ, измѣряютъ, комбинируютъ, самостоятельно работаютъ.... но все таки здѣсь преобладали отвлеченныя опредѣленія, и притомъ преподаваніе въ „катехизической" формѣ не могло привлечь вниманія учениковъ. Также и наводящіе вопросы, отыскиваніе самими учениками истинъ геометріи, „эвристическая метода"—въ большинствѣ случаевъ являются не только длинными, но и искусственно поддѣланными; примѣнимыми они становятся лишь въ простѣйшихъ случаяхъ. Конечно, этотъ приготовительный курсъ геометріи для 60-хъ годовъ прошлаго вѣка явился крупнымъ шагомъ впередъ въ области методики математики, и этимъ была сдѣлана большая брешь въ крѣпости царства Эвклида, но съ современной точки зрѣнія *такую систему мы считаемъ устарѣлой.* Никакихъ слѣдовъ лабораторной методы почти тамъ нѣтъ. Элементы движенія — кинематика и ученіе о функціяхъ—не вошли въ программу курса.

Характерными представителями I-ой системы являются:

Ламе-Флери, Краткая геометрія для дѣтей, изложенная, по вопросамъ и отвѣтамъ, въ 22 урокахъ. Пер. съ франц., 1847.

Zirmann—Geometrische Formenlehre, als Vorbereitung zur gesamten Geometrie.

Lorey—Der geometrische Anschauungsunterricht.

C. Fresenius—Die Raumlehre, eine Grammatik der Natur.

М. Косинскій—Наглядная геометрія, 1871.

Гельманъ—Приготовительный курсъ геометріи, и др.

II-ая система—генетическая.

5. *Генетическая* система вырабатываетъ геометрическія понятія и истины въ наглядной формѣ, при помощи рѣшенія практическихъ задачъ—измѣренія земли. Яркими представителями этой системы являются Клеро (во Франціи)—и его послѣдователи: Я. Фальке (въ Германіи) и Фанъ-деръ-Флитъ (въ Россіи). Родоначальникъ генетической системы Клеро высказывается о мотивахъ введенія подобнаго курса такъ: „Нѣкоторыя размышленія о происхожденіи геометріи подали намъ надежду избѣгнуть этихъ недостатковъ, стараясь одновременно заимствовать и просвѣтить учащихся. Мы полагаемъ, что наука эта, какъ и всѣ науки, должна была образоваться постепенно; что вѣроятно были потребности, которыя родили первые шаги науки, и что эти шаги не могли не быть доступными начинающимъ, потому что они были сдѣланы начинающими“.

„Придерживаясь этой идеи, мы возъимѣли намѣреніе отыскать тѣ потребности, которыя могли родить геометрію, и изъ нихъ развить начальныя правила, способомъ самымъ простымъ, которому должны были слѣдовать первые изобрѣтатели, стараясь только при этомъ избѣгнуть всѣхъ тѣхъ фальшивыхъ попытокъ, которыя они должны были непремѣнно дѣлать“.

„Намъ казалось, что потребность измѣрять земли была причиною происхожденія первыхъ предложеній геометріи, въ доказательство чему служитъ самое слово геометрія, которое по гречески означаетъ—измѣреніе земли... Съ самыхъ древнихъ временъ изъискивались способы для измѣренія и подраздѣленія своихъ земель. Желая впослѣдствіи усовершенствовать эти способы, перешли мало по малу отъ частныхъ изслѣдованій къ общимъ, и вознамѣрившись, наконецъ, знать точное отношеніе между величинами различныхъ родовъ, образовали науку гораздо обширнѣе по предмету, сохранивъ ей то же названіе, которое дали при основаніи“.

„Желая слѣдовать по пути основателей геометріи, мы прежде всего старались, чтобы начинающіе познакомились съ правилами, отъ которыхъ можетъ зависѣть измѣреніе земель и разстояній доступныхъ и недоступныхъ. Отсюда мы переходимъ къ другимъ из-

слѣдованіямъ, имѣющимъ такое сходство съ первыми, что одно ужъ любопытство, свойственное каждому человѣку, заставляетъ его обратить на нихъ вниманіе; наконецъ даемъ къ этимъ изслѣдованіямъ нѣсколько полезныхъ приложеній. Такимъ путемъ мы достигаемъ возможности изложить все, что̀ можетъ быть полезнаго и интереснаго въ элементарной геометріи".

„Нельзя, кажется, не согласиться съ тѣмъ, что эта метода изложенія способна поощрять тѣхъ учащихся, которые могли бы быть отвращены отъ предмета сухостью геометрическихъ истинъ безъ всякихъ приложеній;.... наконецъ, такъ какъ мы выбрали исходной точкой для возбужденія интереса у начинающихъ измѣреніе земельныхъ участковъ, то не должны ли мы при этомъ опасаться, что смѣшаютъ эти „элементы геометріи" съ обыкновенными курсами землемѣрія? Эта мысль можетъ явиться лишь у тѣхъ, которые упускаютъ изъ виду, что измѣреніе земельныхъ участковъ вовсе не составляетъ сущности этого курса, но что оно служитъ намъ лишь поводомъ для открытія главныхъ геометрическихъ истинъ. Мы могли бы точно такъ же прійти къ этимъ истинамъ излагая исторію физики, астрономіи или всякаго другого отдѣла математики, какой бы мы ни пожелали выбрать; но тогда множество чуждыхъ идей, которыми пришлось бы заняться, какъ бы скрыло геометрическія идеи,—а лишь къ нимъ однимъ мы должны прикрѣпить мысль читателя".

Послѣдователь Клеро въ Германіи, Я. Фальке, въ введеніи въ своей книгѣ также критикуетъ систему геометріи Эвклида. „Система этого грека, безспорно, одно изъ грандіознѣйшихъ явленій въ исторіи науки. Но преподаватель, который бы захотѣлъ строго слѣдовать Эвклиду, повелъ бы ученика по неизвѣстному ему пути съ завязанными глазами. Въ самомъ благопріятномъ случаѣ ученикъ придетъ къ цѣли неожиданно и вскорѣ почувствуетъ, что его привлекли къ ней насильственно, что онъ очутился у цѣли какъ бы по мановенію чародѣя..... Если—какъ это часто бываетъ—учебникъ точно и кратко, или преподаватель съ нѣкоторою многорѣчивостью, поучаетъ учениковъ, что: „Геометрія есть наука о пространствѣ", „Величина

есть...“ и т. д., то это напоминаетъ родителя, предлагающаго своему дитяти пищу въ самомъ неудобоваримомъ видѣ. Какъ процессу нормальнаго претворенія пищи долженъ предшествовать голодъ или апетитъ, такъ и духовное усвоеніе обусловливается духовнымъ голодомъ. Но кто же серьезно станетъ думать, что въ ребенкѣ, еще не привыкшемъ къ умственной дѣятельности, проявляется уже духовный апетитъ къ такимъ отвлеченностямъ, — что оно жаждетъ узнать, что такое „пространство“, что такое „число“ и т. д? Забрасывая ученика опредѣленіями безъ предварительной подготовки къ нимъ, преподаватель обращается съ нимъ, какъ съ бездушнымъ сосудомъ, который безпрекословно долженъ принимать въ себя все, чѣмъ мудрому наставнику заблагоразсудится его наполнить“.

Фанъ-деръ-Флитъ въ предисловіи къ своему курсу указываетъ, что „реальныя науки важны не одними практическими приложеніями. Эти приложенія получаются уже какъ побочный, хотя, конечно, цѣнный продуктъ. Главное же значеніе этихъ наукъ въ общемъ образованіи состоитъ въ томъ, что они то именно, преимущественно предъ всѣми другими науками, способствуютъ развитію умственныхъ способностей, пониманію окружающихъ явленій и отношеній между человѣкомъ и природой“..... „Ученикъ переходитъ отъ простого къ сложному; отъ нагляднаго къ отвлеченному; отъ частнаго къ общему“.

Задачи рѣшаются со всѣми практическими пріемами, съ употребленіемъ соотвѣтствующихъ приборовъ: цѣпи, буссоли, мензулы и т. п. Дальше, надо „принять во вниманіе, что древніе египтяне, открывшіе при геодезическихъ работахъ своихъ первыя основанія геометріи, не знали вовсе тѣхъ искусно устроенныхъ и дорогихъ теодолитовъ, которыми землемѣры пользуются въ настоящее время. Первообразомъ нашихъ угломѣрныхъ инструментовъ, по всей вѣроятности, была простая доска съ линейкой для визированія. Лишь неудобства, обнаружившіяся при употребленіи этого первобытнаго снаряда, могли мало по малу привести къ большому его усовершенствованію. Понятно, что и нашихъ уче-

никовъ не къ чему затруднять инструментами, многосложность которыхъ тотчасъ же оттолкнула бы ихъ отъ новаго для нихъ предмета".—„Ученикъ долженъ при рѣшеніи задачъ трудиться изготовить изъ картона, дерева и т. п. модели приборовъ по указаніямъ преподавателя внѣ класса. При такихъ, повидимому механическихъ работахъ пріобрѣтается не одна только ловкость и снаровка къ ручнымъ занятіямъ, но и ясное понятіе объ устройствѣ прибора, а при этомъ, конечно, и тѣ теоретическія свѣдѣнія, на которыхъ основано рѣшеніе. Само оно производится самими учениками, по наводящимъ вопросамъ преподавателя".—Рѣшеніе задачъ сопровождается очень частыми экскурсіями.

Такимъ образомъ, „чѣмъ нагляднѣе и отчетливѣе будутъ усвоены дѣтьми первыя геометрическія представленія, тѣмъ правильнѣе и строже можно ввести мышленіе учениковъ въ послѣдующихъ отдѣлахъ курса. Въ этихъ отдѣлахъ придется обращать преимущественное вниманіе на пріученіе дѣтей къ отвлеченію, какъ въ составленіи представленій, такъ и въ выводахъ. Значеніе геометріи въ общеобразовательномъ курсѣ состоитъ, конечно, въ развитіи привычки къ отвлеченному мышленію. Но во всякомъ случаѣ это отвлеченное мышленіе должно опираться на усвоенныя раньше совершенно отчетливыя представленія, а они получаются не иначе, какъ путемъ нагляднаго созерцанія и рѣшенія практическихъ вопросовъ".

Мы здѣсь дадимъ въ общихъ чертахъ программу курса геометріи по генетической системѣ.

Прямая линія. Измѣреніе прямой линіи на бумагѣ и на землѣ. Перпендикуляръ. Прямоугольникъ. Квадратъ. *Окружность. Способъ возставить перпендикуляръ* къ прямой линіи. Проведеніе перпендикуляра на землѣ съ помощью эккера. Параллельныя линіи, начертаніе на бумагѣ и на землѣ. Отвѣсныя и горизонтальныя линіи и ихъ свойства. Нивеллированіе.

Взаимное положеніе линій. Уголъ, какъ мѣра отклоненія. Измѣреніе угловъ дугами. Угломѣрные инструменты и ихъ употребленіе.

Площадь квадрата и прямоугольника. Треугольникъ. Площадь треугольника. Параллелограммъ и его площадь.

Правильные многоугольники, ихъ площади и построеніе. Построеніе треугольниковъ. Измѣреніе участковъ земли. Неудобство непосредственнаго измѣренія земли. Подобіе двухъ фигуръ. Построеніе фигуры подобно другой. Площади подобныхъ фигуръ. Составленіе пропорціональныхъ масштабовъ. Съемка плановъ.

Геометрическій способъ сравненія прямолинейныхъ фигуръ.

Объ измѣреніи круговыхъ фигуръ и ихъ свойствахъ.

Измѣреніе объемовъ тѣлъ и ихъ поверхностей.

Критика II-ой системы.

6. И эта система приготовительнаго курса пережила свой вѣкъ. *Во первыхъ*, т. к. современная жизнь предъявляетъ усиленный спросъ на знаніе, то въ младшихъ классахъ вводятся новые учебные предметы, и является необходимость строго согласовать приготовительный курсъ геометріи съ другими курсами; между тѣмъ, какъ видно изъ программы, здѣсь этой согласованности нѣтъ; *во вторыхъ*, имѣя дѣло почти все время съ рѣшеніемъ геодезическихъ задачъ, подобный курсъ не даетъ хорошаго развитія пространственныхъ представленій; *въ третьихъ*, т. к. такой курсъ впервые былъ написанъ французскимъ математикомъ Клеро еще въ 1741 году, а курсъ нѣмецкаго педагога Я. Фальке приблизительно 50 лѣтъ тому назадъ, то идея функціональной зависимости и принципъ движенія не отразились на характерѣ курса; и *въ четвертыхъ*, введеніе этого способа преподаванія геометріи сопряжено не только съ измѣненіемъ учебнаго плана, но и школьной организаціи, т. к. для геометріи придется отдѣлить кромѣ обыкновенныхъ урочныхъ часовъ еще и особое время на очень частыя экскурсіи. Мы, конечно, этимъ не хотимъ сказать, что при преподаваніи геометріи можно обойтись безъ экскурсій, въ особенности при прохожденіи отдѣла о пособіи фигуръ, но исключительно экскурсіонная система связана съ большими неудобствами и не оправдываетъ затраченнаго труда [1]).

---

[1]) Прохожденіе генетическаго курса на спеціально приспособленномъ классномъ столѣ, какъ это указываетъ Фальке, конечно, явилось бы только пародіей.

Понятно, что любой курсъ этого рода по идеѣ превосходитъ всѣ курсы системы „ученія о геометрическихъ формахъ“, и изъ него можно извлечь очень цѣнный матеріалъ, но только съ современной точки зрѣнія въ цѣломъ этотъ курсъ можно считать устарѣлымъ; да и вообще всякая программа по любому предмету не выдерживаетъ больше 25 лѣтъ.

Указатель характерныхъ курсовъ по генетической системѣ:

Elemens de Geometrie. Par *M. Clairaut*, de l'Académie Royale des Sciences, et de la Société de Londres.—A Paris—MDCCXLI.

Falke's—Propädeutik der Geometrie (есть русскій переводъ).

Фанъ-деръ-Флитъ — Курсъ элементарной геометріи, СПб., 1867 г.

Bert, A first notion of experimental geometry.—Melburn. 1886, и др.

III-я система—геометрическое черченіе.

7. *Третья система* преподаванія геометріи — 1-аго концентра—начинаетъ съ *черченія линій*; разсматриваютъ свойства нарисованныхъ и начерченныхъ фигуръ и затѣмъ переходятъ къ геометрическимъ отвлеченіямъ.

Авторы курсовъ этой системы въ предисловіяхъ высказываются за то, чтобы обученіе геометріи начиналось съ элементарнаго курса самаго первоначальнаго черченія. Во французской литературѣ еще Ж. Ж. Руссо, а за нимъ и извѣстный математикъ Hoüel также считаютъ необходимымъ введеніе приготовительнаго курса по этой системѣ. Ж. Ж. Руссо говоритъ въ своемъ „Эмилѣ“: „Вмѣсто того, чтобы заставить насъ найти доказательство, намъ его диктуютъ; вмѣсто того, чтобы насъ научить умозрѣнію, учитель самъ за насъ разсуждаетъ и упражняетъ только нашу память. — Сдѣлайте точныя фигуры, комбинируйте ихъ, наложите одну на другую, изслѣдуйте ихъ соотношенія; и вы изобрѣтете всю элементарную геометрію, переходя отъ наблюденія къ наблюденію, и при этомъ не будетъ вопроса ни объ опредѣленіяхъ, ни о задачахъ, ни о какихъ иныхъ формахъ доказательства, кромѣ простого наложенія.... Обыкновенно пренебрегаютъ вѣрностью

фигуръ, ее предполагаютъ, подразумѣваютъ, и устремляются поскорѣе къ доказательству. У насъ же, напротивъ, никогда не будетъ вопроса о доказательствѣ; нашимъ наиболѣе значительнымъ дѣломъ будетъ проведеніе линій по возможности прямыхъ, по возможности вѣрныхъ, по возможности равныхъ, нахожденія квадрата по возможности совершеннаго, круга по возможности круглаго. Для того, чтобы убѣдиться въ вѣрности фигуры, мы ее изслѣдуемъ во всѣхъ ея, доступныхъ зрѣнію, свойствахъ; и это даетъ намъ возможность ежедневно открывать что нибудь новое... Геометрія для моего ученика будетъ только искусствомъ умѣло пользоваться линейкою и циркулемъ".

„При преподаваніи элементарной геометріи—говоритъ Борышкевичъ—необходимо удовлетворять тремъ главнымъ педагогическимъ принципамъ: а) наглядности, б) самодѣятельности и в) интересу. Польза нагляднаго преподаванія геометріи вытекаетъ изъ того, что извѣстныя геометрическія истины постигаются учащимися посредствомъ внѣшнихъ чувствъ и этимъ путемъ легче усваиваются. Наглядное преподаваніе геометріи слѣдуетъ вести такъ, чтобы учащіеся, дѣлая извѣстныя геометрическія построенія, производили ихъ съ полнымъ сознаніемъ того, почему они дѣлаютъ такъ, а не иначе. Само собою разумѣется, что наглядныя средства должны быть по возможности вещественныя. При такомъ преподаваніи учащіеся будутъ въ состояніи развивать пріобрѣтенныя познанія, — у нихъ явится самодѣятельность. Этому въ особенности должно способствовать индуктивно-катехизическое преподаваніе".

Изъ числа появившихся за послѣднее время книгъ обращаетъ на себя вниманіе „Геометрія на задачахъ" С. И. Шохоръ-Троцкаго. Въ ней курсъ тоже основанъ на методическихъ упражненіяхъ въ геометрическомъ черченіи. Доказательства теоремъ вводятся по мѣрѣ возникновенія потребности въ нихъ у учащихся. Авторъ въ предисловіи своей книги „Геометрія на задачахъ—книга для учителей" говоритъ: „Геометрія на задачахъ можетъ, при извѣстныхъ условіяхъ, оказаться *полезной также при современномъ строѣ программъ*. Учитель можетъ въ ней найти планомѣрно расположенный рядъ

такихъ упражненій, которыя могутъ оказаться полезными въ качествѣ предварительныхъ или попутныхъ при прохожденіи обычнаго курса геометріи. Опытъ показываетъ, что подобныя предварительныя или попутныя упражненія являются могущественнымъ методическимъ подспорьемъ при прохожденіи курса геометріи по учебнику. Въ низшихъ же учебныхъ заведеніяхъ, въ профессіональныхъ школахъ, на курсахъ для взрослыхъ основной (предварительный) курсъ геометріи можетъ иногда играть роль курса, единственно доступнаго или единственно нужнаго учащимся".

„Въ Геометріи на задачахъ" опредѣленія геометрическихъ понятій строятся на самомъ способѣ возникновенія каждаго изъ этихъ понятій въ умѣ учениковъ, т. е. строятся генетически. Поэтому каждому опредѣленію предшествуетъ задача или рядъ ихъ, изъ которыхъ учащійся убѣждается въ существованіи требующагося геометрическаго образа".

Чтобъ яснѣе себѣ представить содержаніе и методическую распланировку геометрическаго матеріала въ курсѣ С. И. Шохоръ-Троцкаго, приведемъ оглавленіе его книги.

Глава I. Прямая линія. Линейный уголъ. Окружность круга и измѣреніе угловъ.

Глава II. Треугольники, ихъ элементы, равенство и подобіе. Параллельныя и непараллельныя прямыя. Четыреугольники и многоугольники, ихъ равенство, подобіе, суммы ихъ угловъ и длина ихъ периметровъ. Вычисленіе длины окружности. Рѣшеніе нѣк. задачъ на построеніе.

Глава III. Площади прямолинейныхъ фигуръ и поверхности многогранниковъ. Площадь круга.

Глава IV. Боковыя поверхности прямыхъ цилиндровъ и конусовъ. Поверхность шара.

Глава V. Прямая линія и плоскость. Двугранные и многогранные углы. Проэкціи фигуръ и тѣлъ на плоскость (азбука проэкціоннаго черченія).

Глава VI. Вычисленіе объемовъ нѣк. тѣлъ: объемы призмъ и прямыхъ цилиндровъ. Объемы пирамидъ и прямыхъ конусовъ. Объемъ шара.

Содержаніе курса въ общемъ соотвѣтствуетъ требованіямъ современной школы, но кромѣ обычнаго матеріала добавлены: 1) симметрія относительно точки, пря-

мой линіи и плоскости, 2) начала проэкціоннаго черченія, и нѣкоторыя задачи изъ синтетической геометріи, 3) рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ съ помощью таблицы синусовъ. Если бы эти добавленія были использованы надлежащимъ образомъ, то книга могла бы значительно выиграть въ жизненности. Но въ настоящемъ своемъ видѣ, при массѣ матеріала, разсчитаннаго на 5 лѣтъ, и при отсутствіи надлежащей распланировки она можетъ лишь оказаться полезной для учителей, какъ это и имѣлъ въ виду авторъ, и притомъ для учителей, обучающихъ геометріи по старой дедуктивной системѣ. Что же касается ея пригодности для учащихся, то мы находимъ, что она должна быть подвергнута радикальной переработкѣ, если она хочетъ отвѣчать новымъ запросамъ школы и жизни.

Краткая программа курсовъ 3-ей системы:

I. Линіи и углы. Треугольники. Многоугольники. Пропорціональность линій и подобіе фигуръ. Измѣреніе площадей.

II. Наглядное ознакомленіе съ кубомъ, призмою, пирамидою, цилиндромъ, конусомъ и шаромъ. Измѣреніе поверхностей и объемовъ геометрическихъ тѣлъ. Рѣшеніе геометрическихъ задачъ въ полѣ. —

Критика III-ей системы.

8. Недостатки этой системы очевидны и заключаются въ слѣдующемъ. *Во первыхъ*, курсъ начинается съ черченія линій. Ученики знакомятся съ отвлеченностями и техническими трудностями; ни то, ни другое не въ состояніи вызвать интересъ къ предмету. *Во вторыхъ*, благодаря такому началу мышленіе учениковъ задерживается надолго въ одной плоскости—пространственныя впечатлѣнія и представленія отсутствуютъ; линіи и фигуры не даютъ образовъ тѣлъ. *Въ третьихъ*, планиметрія отдѣлена отъ стереометріи и послѣдняя проходится въ концѣ, въ силу неудачно выбранной системы; такимъ образомъ нѣтъ переплетанія курса геометріи въ младшихъ классахъ съ курсами природовѣдѣнія (вѣсъ, плотность) и географіи (ученіе о картахъ и земной сферѣ). *Въ четвертыхъ*, „чертежная“ система не вводитъ функціональной зависимости геометрическихъ величинъ, и, *въ пятыхъ*, занятіе вычерчиваніемъ линій

и фигуръ не есть еще лабораторная метода; черчені нисколько не развиваетъ самодѣятельности ученика и упражняетъ лишь опредѣленную группу мышцъ. Въ виду всего этого мы считаемъ „чертежную“ систему изложенія геометріи неудачной, хотя авторы—и особенне Шохоръ-Троцкій—правильно поставили вопросъ о необходимости основного курса геометріи.

Характерные курсы III-ей системы:

Schram, Die geometrische Formenlehre, 1865.

Krohn, Lehrstoff und Lehrform der Formenlehre für Schulen.

Волковъ, Наглядная геометрія.

Борышкевичъ, Курсъ элементарной геометріи съ практическими задачами, 1876.

Hornbrook, Concrete Geometry, Chicago, 1894.

Kamiński, Cyrkiel i ekierka, Warszawa, 1896.

Fajfofer, Trattato di Geometria intuitiva, 28 изд., 1896.

Hamilton and Kettle, A first Geometry Book, London, 1903.

Hall and Stevens, Lessons in Experimental and Practical Geometry, London, 1907.

S. Dickstein, Początkowa nauka geometryi w zadaniach, Warszawa, 1906.

Шохоръ-Троцкій, Геометрія на задачахъ, 3 части, 1908—1909, и др.

IV-ая система—наглядная геометрія.

9. За послѣдніе годы положеніе геометріи въ школѣ подверглось радикальнымъ перемѣнамъ. Вмѣсто одного логическаго курса, который начинался въ среднихъ классахъ, стали вводить два, въ младшихъ и среднихъ классахъ; далѣе, и характеръ перваго курса сталъ рѣзко отличаться отъ прежняго подготовительнаго. Вотъ почему мы и упоминали только что объ *основномъ* курсѣ геометріи. Именно основнымъ должно быть изученіе этого предмета въ младшихъ классахъ; дальше онъ является уже только дополнительнымъ, извѣстной роскошью образованія, не всѣмъ доступною и не всѣми признаваемою.

Большинство сторонниковъ такого взгляда обучаетъ ариѳметикѣ (исчисленію) и начальной геометріи совмѣстно (напр. во Франціи); но существуютъ и отдѣль-

ные учебники, среди которыхъ наибольшей извѣстностью пользуется книга американца Кемпбелля. Предисловіе къ его книгѣ, написанное проф. Филлипсомъ, прекрасно иллюстрируетъ не только данный учебникъ, но и всю систему. Вотъ характерныя выдержки. „Пріученіе дѣтей къ наблюденію простыхъ геометрическихъ формъ и соотношеній между предметами, которые ежедневно попадаются имъ на глаза, обученіе ихъ употребленію простыхъ инструментовъ для геометрическихъ построеній и ознакомленіе ихъ съ разнообразными способами опредѣленія длины, площади и объемовъ предметовъ,—все это самое естественное и самое могущественное средство какъ для пріученія ихъ къ наблюдательности, такъ и для выработки привычки къ сосредоточенному и продолжительному вниманію... Наглядная геометрія соединяетъ въ себѣ одновременно и выгоды предметнаго обученія, насколько оно пріучаетъ глазъ къ быстрому и сознательному пониманію, съ обиліемъ упражненій, которыя доставляли очень цѣнныя задачи старыхъ ариѳметикъ, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, наглядная геометрія даетъ такую умственную дисциплину, которая въ одно и то же время и строга, и совершенно свободна отъ той односторонности, къ которой могутъ привести и та и другая система, если брать ихъ отдѣльно. Она вырабатываетъ ловкость и быстроту рукъ при составленіи чертежей и моделей геометрическихъ тѣлъ. Она пріучаетъ глазъ къ вѣрному и точному опредѣленію формъ и разстояній. Она научаетъ оцѣнкѣ красоты и правильности формъ. Она отыскиваетъ, извлекаетъ и усваиваетъ методы совершенныхъ геометрическихъ выводовъ изъ всякаго источника въ природѣ и изъ всякаго примѣненія его въ жизни. Она является наилучшимъ побудителемъ изобрѣтательности. Она знакомитъ ученика со многими положеніями и идеями физическихъ наукъ и является открытой дверью къ дальнѣйшему изученію настоящей геометріи и ея высшихъ отраслей“.

Даже бѣглый обзоръ курсовъ, составленныхъ по этой системѣ, выгодно оттѣняетъ ихъ характерныя особенности. За рисункомъ, изображающимъ какое-либо геометрическое тѣло, слѣдуетъ картина зданія, пейзажъ

и т. п.; на нихъ вы найдете формы, о которыхъ идетъ рѣчь. Развертки поверхностей тѣлъ сопровождаются вычисленіями и указаніями для ихъ изготовленія. Основныя плоскія образованія разсматриваются попутно, переплетаясь съ измѣреніями длинъ, поверхностей, съ вычисленіями площадей и объемовъ. Нѣтъ планиметріи и стереометріи, но за то есть геометрія; нѣтъ только черченія съ согнутой спиной, но есть и черченіе, и рисованіе, и склеиваніе, и вырѣзываніе, и работы изъ дерева и папки. Наконецъ, есть занятія на свѣжемъ воздухѣ въ видѣ простыхъ землемѣрныхъ задачъ, измѣреній различныхъ строеній, деревьевъ и т. п. Даже „сухія“ задачи измѣнили свой видъ и содержаніе. Таковы: „разрѣзать кусокъ дерева или распилить его на прямоугольные брусы даннаго размѣра“, „вычислить окраску большихъ желѣзныхъ цилиндровъ“, „уложить статуэтки въ ящикъ и засыпать ихъ опилками въ данной пропорціи,—каковы должны быть размѣры ящика“, „найти объемъ ведра, погружающагося въ колодезь“, и т. п.

Различіе между IV-ой и I-ой системой очевидно. Тамъ съ основными геометрическими понятіями знакомились, созерцая тѣла и заучивая опредѣленія; здѣсь лабораторная метода вырабатываетъ соотвѣтствующія понятія и одновременно даетъ средства для ихъ воспроизведенія.

Критика IV-ой системы.

10. „Наглядная геометрія“—терминъ не совсѣмъ удачный, какъ видно изъ содержанія книгъ. Введеніе его связано отчасти съ переходнымъ состояніемъ математики и математической педагогики, отчасти зависѣло отъ неустановившагося взгляда на значеніе основного курса. Лабораторная метода, использованіе началъ симметріи, движенія и функціональной зависимости, попытки связать уединенную геометрію съ остальной математикой и родственными учебными предметами, словомъ, все то, что составляетъ отличительную черту IV-ой системы, вмѣстѣ съ тѣмъ и обезпечиваетъ ей близкую побѣду. Неровности и неумѣлыя попытки имѣются вездѣ—встрѣчаются и тутъ; дѣло практики—устранить ихъ или сгладить.

Помимо отдѣльныхъ главъ въ различныхъ современныхъ учебникахъ исчисленія можно указать на три книжки:

Holzmüller, Einführung in die Raumlehre, 1904.

В. Кемпбель, Наглядная геометрія, пер. съ англ., 1908.

А. М. Астрябъ, Наглядная геометрія, Кіевъ, 1909.

Заключеніе. 11. Изъ всѣхъ разсмотрѣнныхъ системъ послѣдняя наиболѣе удовлетворяетъ требованіямъ современной педагогики и психологіи. Но, раздѣляя взгляды на общую методическую распланировку курса, мы не со всѣми деталями и не со всѣмъ матеріаломъ можемъ согласиться вполнѣ. Наша точка зрѣнія на оба послѣднихъ вопроса детально выясняется въ слѣдующей главѣ.

ГЛАВА VIII.

Наглядная геометрія.

„Естествоиспытатель, который станетъ изучать слона лишь подъ микроскопомъ, думаетъ-ли, что достаточно ознакомится съ этимъ животнымъ?“

„То же самое мы встрѣчаемъ и въ математикѣ. Когда логикъ разложитъ всякое доказательство на массу элементарныхъ операцій, вполнѣ строгихъ въ отдѣльности, то онъ еще не будетъ обладать реальностью въ цѣломъ; то что-то, что составляетъ единство доказательства, совершенно ускользнетъ отъ него“.

„Въ зданіяхъ, воздвигаемыхъ нашими учителями, съ какой стати восхищаться работой каменьщика, если мы не въ состояніи понять планъ архитектора? Что касается общей точки зрѣнія, чистая логика дать намъ ее не въ силахъ; за этимъ надо обратиться къ интуиціи“.

Пуанкаре.

Характеръ курса. 1. Какъ общія точки зрѣнія, указанныя нами въ I-ой части, такъ и приведенная только что историческая справка по вопросу о методикѣ начальнаго курса геометріи даютъ намъ основаніе заявить: *старый порядокъ преподаванія геометріи долженъ быть радикально измѣненъ.*

Общій планъ реформы сейчасъ уже готовъ. Курсъ геометріи начинается съ младшихъ классовъ: онъ долженъ „прежде [1]) всего собрать сырой матеріалъ геометріи въ фактахъ и представленіяхъ методами естествознанія“, затѣмъ „классифицировать [2]) и сдѣлать точными свѣдѣнія, пріобрѣтаемыя ежедневнымъ опытомъ,

---

[1]) *Веберъ и Вельштейнъ*, Энциклопедія элементарной математики, пер. съ нѣм., 1909, т. II, кн. 1, стр. 25.

[2]) *Plan d'études* et programmes d'enseignement dans les lycées et colléges de garçons. Paris, 1907—1908, p. 199.

вывести изъ нихъ другія, болѣе скрытыя, и показать ихъ приложенія къ задачамъ, представляющимся на практикѣ".

Ясно, что пути и пріемы тоже радикально мѣняются. Въ основу кладется не разсужденіе „съ закрытыми окнами чувствъ", а наблюденіе; не отвлеченіе, а конкретизація; не карикатурное рисованіе мѣломъ или карандашемъ, а правильное (по идеѣ) черченіе; не заучиваніе по книгѣ, а изготовленіе моделей и дѣйствительныя измѣренія. Объектомъ тогда явится все окружающее, вся природа, и каждый геометрическій образъ запечатлѣется въ своемъ генетическомъ видѣ. Такъ, зеркальная поверхность спокойной жидкости можетъ послужить прототипомъ плоскости; натянутая нить можетъ дать представленіе о прямой. Геометрическія тѣла, положенныя въ основу курса эмпирической геометріи, будутъ придавать конкретное единство получающемуся геометрическому матеріалу. Плоскія фигуры сначала разсматриваются, какъ часть границы — поверхности тѣла, а затѣмъ уже какъ самостоятельные геометрическіе образы, на которыхъ выясняются понятія направленія, угла, параллелизма, симметріи. Словомъ, путь опыта, самодѣятельности и саморазвитія есть лучшій путь ко всякому знанію; онъ такимъ является и въ геометріи.

Задачи курса. 2. Изъ всего сказаннаго вытекаетъ, что цѣлесообразность учебной дѣятельности требуетъ установленія начальнаго (основного) курса геометріи для младшихъ классовъ—средней, и старшихъ—народной школы. Это будетъ первый циклъ (концентръ) преподаванія геометріи. Относительно второго цикла будетъ рѣчь въ главѣ „Статика и Динамика въ геометріи". По нашему мнѣнію первоначальный (наглядный, основной,....) курсъ геометріи, какой бы системы онъ ни держался, долженъ отвѣчать слѣдующимъ требованіямъ:

Во 1-хъ, чтобъ онъ былъ построенъ на основаніи психологіи дѣтскаго возраста, а не взрослаго человѣка. Такимъ образомъ онъ будетъ отвѣчать физіологическимъ потребностямъ дѣтей. Наглядная геометрія должна быть какъ бы переплетена съ ручнымъ трудомъ, гдѣ ученики будутъ изготовлять модели геометрическихъ

тѣлъ, обучаться употребленію инструментовъ для составленія различныхъ геометрическихъ чертежей, пользоваться лѣпкой и т. п. Тутъ будетъ предоставленъ широкій просторъ лабораторной методѣ.

Во 2-хъ, развивать пространственныя представленія. Всѣмъ намъ извѣстно, какъ у большинства учащихся въ среднихъ и высшихъ учебныхъ заведеніяхъ очень плохо развита интуиція трехмѣрнаго пространства; имъ даже очень трудно представить себѣ довольно простыя отношенія въ пространствѣ. А между тѣмъ этотъ фактъ является крупнымъ пробѣломъ не только для техниковъ и инженеровъ, но и для естественниковъ, физиковъ и др. Не смотря на то, что мы живемъ въ мірѣ трехъ измѣреній, до сихъ поръ всѣ учебники геометріи начинаютъ съ планиметріи и задерживаютъ мышленіе нашихъ учениковъ въ одной плоскости почти $2^1/_2$ года, и только подъ конецъ курса усиленнымъ темпомъ проходятъ стереометрію. Такимъ образомъ центръ тяжести падаетъ на планиметрію, и отсюда вытекаютъ всѣ тѣ плачевныя слѣдствія, которыя потомъ отражаются такъ печально на бѣднотѣ пространственныхъ представленій. Въ виду всего этого геометрія должна проходиться при соединенномъ изложеніи стереометріи и планиметріи съ начала до конца.

Въ 3-хъ, развивать идею функціональной зависимости (закономѣрности). Ученіе о функціяхъ есть центральное ученіе всей математики, потому что функціональная зависимость есть математическое выраженіе великаго закона измѣняемости отношенія всѣхъ явленій; установленіе ея есть сущность и конечная цѣль всей науки. Поэтому мы считаемъ, что обстоятельное понятіе о функціяхъ должно составлять неотъемлемую принадлежность всякаго математическаго преподаванія; понятіе о функціяхъ должно проходить красной нитью черезъ учебный матеріалъ не только старшихъ классовъ, но и среднихъ и младшихъ. Ни одинъ отдѣлъ математики не представляетъ такого благодарнаго матеріала для яснаго изложенія и усвоенія идеи функціональной зависимости, какъ геометрія. Благодаря наглядности пространственныхъ величинъ, ихъ непрерывнымъ измѣненіямъ и легкости изображенія этихъ про-

цессовъ предоставляется наилучшая возможность, чтобъ ученики скорѣе всего и вѣрнѣе всего усвоили понятіе о функціональной зависимости величинъ.

Въ 4-хъ, давать матеріалъ для отвлеченнаго (дедуктивнаго) курса геометріи и математики вообще и подготовлять учениковъ къ необходимости доказательства геометрическихъ истинъ. Крайне важнымъ является внушеніе учащимся сознанія пользы и потребности логическаго разсужденія, чтобъ свести до minimum'а число опытовъ. Напримѣръ: измѣряя много разъ внутренніе углы треугольника, находятъ въ суммѣ числа близкія къ 180°, но только при помощи обычнаго доказательства можно установить точное число 180°.

Этотъ примѣръ показываетъ, что опытъ даетъ предчувствіе истины, но недостаточенъ, чтобы ее узнать въ точномъ видѣ. Слѣдовательно, если возможно при помощи логическаго разсужденія проявить эту истину, или укрѣпить то, что повидимому давалъ опытъ, то слѣдуетъ это сдѣлать. Равнымъ образомъ легко показать практическое значеніе чисто логическаго метода, подчеркивая то обстоятельство, что онъ разсѣиваетъ всякое сомнѣніе въ результатахъ. Итакъ и въ наглядной геометріи, кромѣ наблюденія и опыта, мы считаемъ цѣлесообразнымъ давать простыя доказательства не очевидныхъ (ученикамъ) истинъ. Такимъ образомъ наглядная геометрія постепенно переходитъ въ умозрительную, такъ что мы не можемъ поставить рѣзкую грань между наглядной и умозрительной геометріей— т. е. сказать, гдѣ кончается первая и гдѣ начинается вторая.

Въ 5-хъ, дать извѣстный запасъ геометрическихъ свѣдѣній для практическихъ приложеній въ жизни. Именно эти небольшія практическія приложенія даютъ намъ въ руки отличное средство еще болѣе усилить воспитательное значеніе математики.

Содержаніе курса.

3. Укажемъ теперь краткое содержаніе курса. Необходимо еще разъ подчеркнуть, что руководитель долженъ пользоваться различными методами, вводить постепенно техническіе пріемы черченія и практику обращенія съ приборами.

Кубъ. Квадраты, прямые углы, ребра и вершины. Построеніе развертки поверхности куба. Горизонтальныя поверхности. Параллельныя грани. Вертикальныя плоскости. Идея геометрическаго равенства. Три геометрическихъ измѣренія. Площадь квадрата. Объемъ куба. Квадратныя и кубичныя мѣры, метрическія и русскія.

Прямоугольный брусъ (параллелепипедъ). Построеніе развертки поверхности и описаніе прямоугольнаго бруса. Четыреугольники. Площадь прямоугольника.

Объемъ прямоугольнаго бруса. Соотношеніе между объемомъ и вѣсомъ.

Углы. Понятіе объ углѣ. Вершина и стороны угла. Названіе угла. Транспортиръ. Построеніе и измѣреніе угловъ съ помощью транспортира.

Треугольная призма. Построеніе развертки поверхности и описаніе треугольной призмы. Треугольники. Площадь треугольника. Объемъ треугольной призмы.

Построеніе нѣкоторыхъ плоскихъ фигуръ и ихъ функціональное измѣненіе при измѣняемости ихъ элементовъ, какъ по величинѣ, такъ и по положенію.

Симметрія по отношенію къ линіи, точкѣ и плоскости. Примѣры.

Правильныя пятиугольныя и шестиугольныя *призмы* Разсмотрѣніе правильныхъ многоугольныхъ призмъ. Правильные многоугольники, ихъ построеніе. Развертки поверхностей многоугольныхъ призмъ. Площадь правильнаго многоугольника. Объемъ правильной многоугольной призмы.

Цилиндръ. Разсмотрѣніе цилиндра. Кривыя поверхности и линіи. Окружность, *винтовая линія. Три пріема* черченія окружности. Кругъ. Эллипсъ. Развертка поверхности цилиндра. Длина окружности. Площадь круга. Объемъ цилиндра. Площадь эллипса.

Треугольная пирамида. Разсмотрѣніе треугольной пирамиды. Двугранные и многогранные углы. Развертка поверхности треугольной пирамиды. Объемъ треугольной пирамиды.

Правильныя многоугольныя пирамиды. Построеніе развертокъ поверхностей и описаніе правильныхъ многоугольныхъ пирамидъ. Объемъ правильной многоугольной пирамиды.

Усѣченная пирамида. Описаніе, построеніе. Первоначальныя свѣдѣнія о подобіи фигуръ. Площадь трапеціи. Объемъ усѣченной пирамиды.

Конусъ. Построеніе развертки поверхности и описаніе конуса. Секторъ. Парабола и гипербола. Площадь сектора. Объемъ конуса.

Шаръ. Описаніе шара. О черченіи географическихъ картъ. Поверхность шара. Объемъ шара.

Теорема Пиѳагора, и ея приложенія къ задачамъ на построеніе и вычисленіе. Подобіе фигуръ. Начала землемѣрія.

Площади и объемы.

4. Перейдемъ къ разсмотрѣнію болѣе важныхъ моментовъ курса.

Изученіе площадей и объемовъ должно идти одновременно. Напр., площадь квадрата, а затѣмъ объемъ куба, площадь прямоугольника, а потомъ объемъ бруса (параллелепипеда) и т. д. Само собой разумѣется, что мы не признаемъ никакихъ опредѣленій площади, объема и т. п. на этой ступени обученія. Понятіе о площади и понятіе объ объемѣ должны вырабатываться чисто интуитивнымъ путемъ. Напримѣръ: начертить какую-нибудь прямолинейную фигуру, раздѣлить ее прямою линіей на двѣ неравныя части и потомъ сложить эти двѣ части такъ, чтобы получилась фигура другой формы; при этомъ, конечно, площадь фигуры не измѣнится. — Или вырѣзать изъ бумаги квадратъ, площадь котораго равна квадратному вершку. Этотъ квадратъ можно различными пріемами разрѣзать на нѣсколько частей и потомъ ихъ сложить такъ, чтобы получилась прямолинейная фигура новой формы, похожей, напримѣръ, на птицу. Площадь этой новой фигуры опять будетъ равна квадратному вершку. Ученики наглядно и самостоятельно убѣждаются въ томъ, что площадь фигуры не измѣнилась, хотя форма фигуры совершенно другая. — То же самое и съ объемомъ. Напр., возьмемъ колоду аккуратно сложенныхъ картъ такъ, чтобы она представляла собою прямоугольный брусъ (параллелепипедъ). Покосимъ нашу колоду въ какую-нибудь сторону, тогда вмѣсто прямой колоды получится покошенная, или другими словами, вмѣсто прямоугольнаго бруса получимъ наклонный. Количе-

ство картъ осталось одно и то же, т. е. объемъ бруса не измѣнился, хотя брусъ получилъ другую форму.— Изъ прямого цилиндра можно получить наклонный съ такимъ же объемомъ: нѣсколько одинаковыхъ монетъ, положенныхъ одна на другую, представляютъ прямой цилиндръ, покосивъ же равномѣрно монеты въ одну какую нибудь сторону, получимъ наклонный цилиндръ. Если прямую многоугольную призму разрѣзать на двѣ части плоскостью не параллельно къ основаніямъ, то можно эти двѣ части такъ сложить, чтобы получилась многоугольная призма другой формы; но объемъ остается тотъ же. Такими интуитивными пріемами дѣти уясняютъ себѣ, что̀ такое объемъ, не нуждаясь въ схоластическихъ опредѣленіяхъ; кромѣ того они убѣждаются, что форма двухъ тѣлъ можетъ быть различна, а объемъ при этомъ можетъ быть тотъ же.

Измѣреніе площадей и объемовъ.

5. Что касается измѣренія площадей и объемовъ, то цѣлесообразнѣе всего будетъ начать такъ. Положимъ, что основаніе прямоугольника = 8 верш., а высота = 5 верш. Какъ измѣрить площадь этого прямоугольника, т. е. какъ узнать, сколько квадратныхъ вершковъ умѣстится въ прямоугольникѣ? Разбиваемъ прямоугольникъ на 5 прямоугольниковъ (рядовъ, полосъ, слоевъ), изъ которыхъ у каждаго высота равна 1 вершку. Площадь всего прямоугольника будетъ:

8 кв. вершк. $\times$ 5 = 40 кв. вершк.

Для того, чтобы измѣрить объемъ прямоугольнаго бруса, т. е. узнать, сколько разъ какая нибудь кубическая единица помѣщается въ этомъ брусѣ, мы опять брусъ разбиваемъ на слои. Если длина бруса = 8 вер., ширина = 6 верш., а высота = 3 верш., то брусъ раздѣляемъ на 3 одинаковыхъ слоя,—плоскостями, параллельными основаніямъ. Въ первомъ слоѣ можно помѣстить 8 куб. верш. $\times$ 6 = 48 куб. верш., а во всемъ брусѣ—48 куб. вер. $\times$ 3 = 144 куб. верш.

Этотъ результатъ можно записать еще иначе:

Объемъ бруса = 8 куб. верш. $\times$ 6 $\times$ 3 = 144 куб. верш.

Неудобства такого измѣренія площадей и объемовъ приводятъ насъ ко второму этапу—вычисленію площадей и объемовъ. При этомъ формулировки: площадь

прямоугольника равна произведенію основанія на высоту, объемъ бруса равенъ площади основанія, помноженной на высоту, или объемъ бруса равенъ произведенію всѣхъ трехъ его измѣреній — имѣютъ условное значеніе, и это ученики могутъ понимать вполнѣ ясно.

Наглядные пріемы нахожденія объемовъ и площадей.

6. Въ слѣдующихъ строкахъ мы намѣрены коснуться вопроса о наглядныхъ пріемахъ измѣренія объемовъ простыхъ геометрическихъ тѣлъ: призмы, цилиндра, пирамиды, конуса и шара, такъ какъ ни въ одномъ курсѣ наглядной геометріи мы не нашли общедоступнаго и удовлетворительнаго изложенія этого вопроса.

Зная, что объемъ прямоугольнаго бруса равенъ площади основанія, помноженной на высоту, или—говоря другими словами,—что объемъ бруса зависитъ отъ площади основанія, мы должны подчеркивать въ глазахъ учащихся эту функціональную зависимость между объемомъ тѣла и площадью его основанія. Если эта зависимость будетъ вполнѣ сознательно усвоена учащимися, то для нихъ будетъ очень легко найти объемъ треугольной призмы, т. е. найти, что объемъ треугольной призмы = площади основанія $\times$ высоту. Такимъ же образомъ они найдутъ, что и объемъ многоугольной призмы равняется произведенію площади основанія на высоту. Отсюда вытекаетъ, что объемъ прямого кругового цилиндра также находится въ зависимости отъ площади основанія, и поэтому:

объемъ цилиндра = площади круга $\times$ высоту.

На прилагаемомъ рисункѣ 5-мъ указаны 4 равновысокихъ тѣла съ разными основаніями; ихъ объемы—функціи площади основанія.

Объемъ наклоннаго бруса и наклоннаго цилиндра также измѣряется произведеніемъ площади основанія на высоту. Нагляднымъ объясненіемъ этого могутъ служить—упоминаемые уже нами—колода картъ и столбикъ изъ одинаковыхъ монетъ, положенныхъ одна на другую.

Окружность и кругъ.

7. Что касается измѣренія объема цилиндра, то намъ предварительно нужно знать: какъ измѣряется длина окружности

круга и чему равняется площадь круга. Длину окружности нельзя измѣрять прямолинейной мѣрой; криволинейныя мѣры тоже сюда не подходятъ, такъ какъ на окружности укладывается только дуга самой этой окружности, для другихъ окружностей эта дуга уже не годится. Но если ученики будутъ чертить окружности съ различными діаметрами, то они сами могутъ придти самостоятельно къ выводу, что величина окружности явно зависитъ отъ величины діаметра; стало быть окружность нужно измѣрять ея собственнымъ діаметромъ; другими словами — нужно узнать, сколько разъ діаметръ содержится въ своей окружности. Измѣряя много кружковъ мѣрной лентой (или веревочной) и вырѣзывая много кусковъ картона или жести для круглыхъ коробочекъ различной величины, ученики въ концѣ концовъ намъ скажутъ, что длина окружности больше своего діаметра въ 3 съ лишнимъ раза или точнѣе

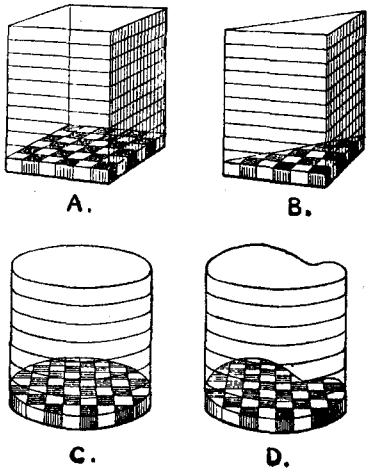


Рис. 5.

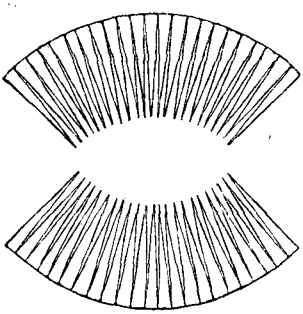
длина окружности $= 3^1/_7$ Діаметра,

$$C = 3^1/_7\ Д.$$

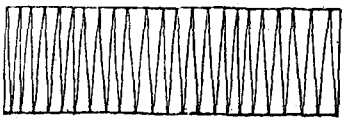
Для нахожденія площади круга можно пользоваться приборомъ „разборный кругъ“ [1]). Но дѣти могутъ и

[1]) Судьба этого прибора интересна и поучительна. Впервые онъ описанъ индусскимъ математикомъ Ганези (3000 л. до Р. Х.), съ обычной припиской „смотри!“ Затѣмъ онъ упоминается въ нѣкоторыхъ русскихъ учебникахъ 60-хъ годовъ, какъ нѣчто общеизвѣстное. На Чикагской выставкѣ 1893 г. этотъ приборъ фигурируетъ, какъ „изобрѣтеніе“ нѣкоего L. W. Parish, а въ Германіи его авторомъ считается Günzel. Въ СПБ. изготовляетъ приборъ фирма „Песталоцци“.

самостоятельно вырѣзать изъ цвѣтной бумаги кругъ, провести въ кругѣ діаметръ и оба получившіеся полукруга раздѣлить на возможно большее число равныхъ секторовъ, которые можно принять за треугольники, если дугу въ виду ея малости принять за хорду. Представимъ себѣ, что оба эти полукруга растянуты (см. черт. 6), тогда получаемъ 2 фигуры, напоминающія пилы. Изъ нихъ легко составить параллелограммъ (или почти прямоугольникъ) вкладывая зубцы верхней фигуры между зубцами нижней, какъ показано на черт. 7.



Чер. 6.



Чер. 7.

Основаніе параллелограмма равняется половинѣ всей окружности, а высота—радіусу ея. Къ этому выводу ученики должны придти вполнѣ самостоятельно. Слѣдовательно, это можно записать такъ:

Площадь круга = площади параллелограмма = основаніе × высота.

Площадь круга = $^1/_2$ окружности × радіусъ.

Площадь круга = $^1/_2 . 3^1/_7 . Д \times r = ^1/_2 . 3^1/_7 . 2r . r = 3^1/_7 . r^2$.

Теперь, когда мы знаемъ чему равняется площадь круга, мы можемъ вычислить и объемъ цилиндра:

объемъ цилиндра = площади основанія × высоту = $= 3^1/_7 . r^2 . H$.

Эллипсъ. 8. Изъ прямого кругового цилиндра можно получить наклонный еще слѣдующимъ способомъ: провести плоскость непараллельно основанію и одну часть наложить на другую такъ, чтобъ ихъ прежнія круговыя основанія совмѣстились. Основаніемъ этого наклоннаго цилиндра будетъ эллипсъ.

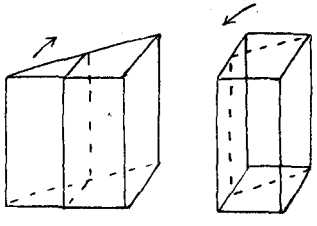
Объемъ наклоннаго цилиндра намъ извѣстенъ,—такъ какъ мы его составили изъ прямого,—высоту наклоннаго цилиндра можемъ найти непосредственнымъ измѣреніемъ, а площадь основанія эллипса можемъ опредѣлить вычисленіемъ:

V об. нак. цил. = площ. эллипса × высота.

Затѣмъ полезно дать ученикамъ задачу: провѣрить эмпирическимъ способомъ формулу [1]) для площади эллипса, т. е. **площадь эллипса** = $3\frac{1}{7}$ **а. в.**, гдѣ **а** обозначаетъ большую полуось, а **в** малую полуось. Зная, что кривая (боковая) поверхность цилиндра = окружности круга × высоту, ибо боковая развертка кругового цилиндра есть прямоугольникъ съ основаніемъ, равнымъ окружности основанія, и высотой, равной высотѣ цилиндра, мы можемъ рѣшить *квадратуру круга*, безъ помощи линейки и циркуля, по способу Леонарда-да-Винчи. Для этого представимъ себѣ цилиндръ, высота *котораго равна его радіусу*; развернутая боковая поверхность цилиндра даетъ прямоугольникъ, площадь котораго равна площади круга. Удивительно, что до сихъ поръ ни въ одномъ курсѣ геометріи не говорится подробнѣе о квадратурѣ круга, вопросѣ, имѣющемъ большое историческое значеніе.

Треугольная призма.

9. Покажемъ еще одинъ способъ измѣренія объема всякой треугольной призмы съ помощью бруса (параллелепипеда), гдѣ примѣняются принципы вращенія и симметріи. Представимъ себѣ прямой брусъ (чер. 8), у котораго одно ребро раздѣлено пополамъ, а чрезъ точку дѣленія А и вершину Р проведена плоскость перпендикулярно



Чер. 8.

[1]) **Сама** формула находится эмпирически, пользуясь пропорціональностью между высотами прямого и наклоннаго цилиндра и осями эллипса (малая ось = діаметру круга).

къ основанію. Если теперь отрѣзанную часть прямого бруса повернуть на полъ-оборота, т. е. на 180^0, то прямая AP займетъ положеніе AB, а прямая NA совпадетъ съ прямой AM; тогда вмѣсто прямого бруса получится треугольная призма PBE. Обратно, всякую треугольную призму можно превратить въ прямой брусъ. Такъ какъ высоты ихъ одинаковы, то и основанія должны быть одинаковы т. е. площадь треугольника BPC = площади параллелограмма MNPQ.

Пирамиды. 10. Есть нѣсколько способовъ измѣренія объема пирамиды. Перечислимъ ихъ по степени трудности.

Первый, чисто эмпирическій способъ, состоитъ въ томъ, что нужно взять полую призму, основаніе и высота которой соотвѣтственно равны основанію и высотѣ полой пирамиды. Пересыпая песокъ или переливая воду находимъ, что объемъ пирамиды составляетъ третью часть объема призмы, т. е.

$$\text{Объемъ пирамиды} = \frac{1}{3} \text{ площади основанія} \times \text{высоту}$$

$$V \text{ пир.} = \frac{1}{3} \cdot B.\ H.$$

Второй—также наглядный—способъ: возьмемъ кубъ, состоящій изъ шести пирамидъ съ вершиною въ центрѣ куба; каждая изъ нихъ основаніемъ имѣетъ одну изъ граней куба. Всѣ полученныя пирамиды равны между собою,—это очевидно. Но мы знаемъ, что объемъ куба измѣряется произведеніемъ площади основанія на высоту, а такъ какъ каждая изъ полученныхъ пирамидъ составляетъ $\frac{1}{6}$ куба, то и объемъ каждой пирамиды будетъ равняться произведенію площади основанія на $\frac{1}{6}$ высоты куба, или, что, что все равно, на $\frac{1}{3}$ высоты пирамиды, потому что высота каждой изъ пирамидъ составляетъ $\frac{1}{2}$ высоты куба. Третій способъ: возьмемъ опять тотъ же кубъ изъ 6 пирамидъ и проведемъ черезъ его центръ плоскость, параллельно основанію; тогда нашъ кубъ раздѣлится на два равные прямоуголь-

ные бруса (параллелепипеда). Въ каждомъ изъ брусовъ будетъ заключаться одна полная пирамида, покоющаяся на основаніи куба, и четыре боковыя, составляющія половины первой. Если получившіяся четыре боковыя пирамиды сложимъ по двѣ, то у насъ будутъ—вмѣстѣ съ оставшеюся цѣльною пирамидою—три совершенно равныя пирамиды, заключенныя въ одномъ брусѣ. Слѣдовательно, объемъ каждой изъ нихъ составляетъ $\frac{1}{3}$ объема бруса. Такъ какъ объемъ бруса = площади основанія $\times$ высоту, то объемъ четыреугольной пирамиды измѣряется произведеніемъ площади ея основанія на $\frac{1}{3}$ высоты, т. е.

$$V \text{ пир.} = \frac{1}{3} \cdot \text{В. Н.}$$

Для четвертаго способа надо имѣть кубъ, который распадается на 3 четыреугольныя пирамиды, съ высотою такой же, какъ у куба. Объемъ каждой четыреугольной пирамиды составляетъ $\frac{1}{3}$ объема куба. Треугольную пирамиду можно получить изъ четыреугольной, разсѣкая ее пополамъ. Такъ какъ объемъ четыреугольной пирамиды = площади основанія $\times \frac{1}{3}$ высоты, то объемъ треугольной пирамиды измѣряется произведеніемъ половины площади основанія четыреугольной пирамиды на $^1/_3$ высоты. Имѣя въ виду, что половина площади основанія четыреугольной равна площади основанія треугольной пирамиды, можно сказать:

объемъ треугольной пирамиды также измѣряется произведеніемъ площади ея основанія на $\frac{1}{3}$ высоты.

Пятый способъ даетъ возможность примѣнить алгебру — составленіе уравненія для вывода формулы объема пирамиды.

Вообразимъ себѣ два одинаковыхъ куба, одинъ изъ **6 пирамидъ** съ вершиною въ центрѣ, а другой — изъ **шести** одинаковыхъ прямоугольныхъ брусовъ (параллелепипедовъ).

Объемъ прямоугольнаго бруса = объему пирамиды, т. к. прямоугольный брусъ, какъ и пирамида, составляетъ $\frac{1}{6}$ часть куба, поэтому, если ребро куба обозначить черезъ a, имѣемъ [1])

$$a^2 \cdot \frac{1}{6} = a^2 x \left(\frac{1}{2}\ a\right)$$

$$\frac{1}{6}\ a^3 = x\ \frac{1}{2}\ a^3;\ \frac{1}{6} = x \cdot \frac{1}{2};\ x = \frac{1}{3}\cdot$$

Значитъ, для того, чтобы получить объемъ пирамиды, надо площадь основанія умножить на $\frac{1}{3}$ высоты.

Конусъ и шаръ. 11. Объемъ конуса получается изъ сравненія съ объемомъ цилиндра, имѣющаго такое же основаніе и высоту.

Объемъ конуса $= \frac{1}{3}$ объема цилиндра,

V кон. $= \frac{1}{3}$ площ. основанія $\times$ высоту.

Теперь, когда мы умѣемъ опредѣлять объемъ цилиндра и конуса, можно путемъ сравненія объемовъ трехъ тѣлъ: цилиндра, шара и конуса найти формулу для опредѣленія объема шара. Для этого возьмемъ цилиндръ съ высотой, равной діаметру основанія, шаръ съ діаметромъ, равнымъ высотѣ цилиндра и конусъ съ высотой, равной высотѣ цилиндра и діаметромъ основанія такого же размѣра (всѣ 3 тѣла полыя).

Троекратное переливаніе воды изъ конуса въ цилиндръ показываетъ намъ, что объемъ цилиндра въ три раза больше конуса или что объемъ конуса составляетъ $\frac{1}{3}$ объема цилиндра. Затѣмъ выливая воду изъ шара въ цилиндръ увидимъ, что объемъ шара равняется $\frac{2}{3}$ объема цилиндра. Слѣдовательно объемъ

---

[1]) Т. к вершина пирамиды въ центрѣ куба, то высота пирамиды будетъ $\frac{1}{2}\ a$, и поэтому мы площадь основанія умножаемъ не на всю высоту, а на часть ея — x. $\frac{1}{2}\ a$, ибо пирамида состоитъ изъ различныхъ слоевъ, постепенно уменьшающихся по направленію къ вершинѣ.

цилиндра заключаетъ въ себѣ объемъ шара плюсъ объемъ конуса [1]). Взаимное отношеніе всѣхъ трехъ тѣлъ: цилиндра, шара и конуса даетъ 3 : 2 : 1. Итакъ:

Объемъ шара $= \frac{2}{3}$ объема цилиндра; $\frac{2}{3}$ площ. основанія $\times$ высоту $= \frac{2}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 2r = \frac{4}{3} \pi r^3$;

$$V_ш = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Дѣлаемъ провѣрку:

$$V_ц = V_ш + V_к; \qquad \pi r^2 \cdot 2r = \frac{4}{3} \pi r^3 + \frac{\pi r^2 \cdot 2r}{3};$$

$$2\pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 + \frac{2\pi r^3}{3}; \quad 2\pi r^3 = \frac{6}{3} \pi r^3$$

или

$$\underline{2\pi r^3 = 2\pi r^3.}$$

На основаніи соотношенія этихъ трехъ тѣлъ вмѣсто указаннаго пріема можно составить уравненіе 1-ой ст. съ одной неизвѣстной ($V_ш$).

Это замѣчательное свойство цилиндра, шара и конуса найдено Архимедомъ и помѣщено на его памятникѣ въ Сиракузахъ.

Объемъ и вѣсъ. 12. При рѣшеніи многихъ вопросовъ встрѣчается надобность въ умѣньи вычислять объемъ тѣла по его вѣсу и плотности. Понятно, какъ долженъ быть важенъ этотъ способъ измѣренія объема, въ особенности, тѣлъ имѣющихъ неправильный видъ. Если обозначимъ черезъ P—вѣсъ тѣла, V—объемъ, и d—плотность, а за единицу вѣса примемъ граммъ (вѣсъ куб. см. чистой воды при 4° С), то соотношеніе между объемомъ тѣла, его вѣсомъ и плотности выразится формулой [2])

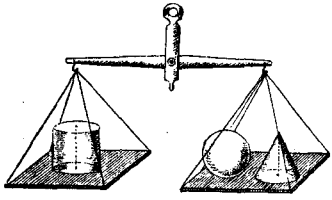
$$P = V \cdot d.$$

---

[1]) Можно также удостовѣриться въ этомъ путемъ взвѣшиванія сплошныхъ тѣлъ (см. черт. 9).

[2]) При чемъ P вычисляется: a) въ граммахъ, если V выражено въ куб. см., b) въ килограммахъ, если V выражено въ литрахъ (куб. деним.), и c) въ тысячахъ килограммовъ, если V выражено въ куб. метрахъ.

Съ плотностью ученики ознакомятся изъ начальнаго курса природовѣдѣнія, а если нѣтъ, то придется имъ пояснить это на наглядныхъ примѣрахъ. Напримѣръ: пусть дѣти подержатъ въ рукахъ два одинаковыхъ кубика, одинъ наполненный водой, а другой — ртутью; число, показывающее, во сколько разъ ртуть тяжелѣе воды, условились называть плотностью ртути.



Чер. 9.

За единицу объема, принятую для исчисленія плотности тѣлъ, взятъ кубическій дециметръ; плотность чистой воды принята за 1. Возьмемъ нѣсколько примѣровъ для приложенія вы-ше сказаннаго.

1. Каковъ объемъ слитка золота, вѣсомъ въ 4,329 килогр.?

Изъ таблицы плотностей нѣкоторыхъ тѣлъ находимъ, что плотность золота равняется 19,3 клгр.

Поэтому:

$$P = V \,.\, d;\ 4{,}329 = V \,.\, 19{,}3;\ V = \frac{4{,}329}{19{,}3} \text{ кб. дцм. или же}$$

$$V = 224{,}3 \text{ кб. см.}$$

2. Сколько вѣситъ свинцовый кубъ, съ ребромъ въ 45 мм., если плотность свинца = 11,4?

3. Латунный кубъ съ длиной ребра въ 30 мм. вѣситъ 231 гр. Чему равняется плотность латуни?

Послѣднія двѣ задачи даютъ намъ возможность: 1) по объему и плотности тѣла вычислить вѣсъ и 2) по вѣсу и объему вычислить плотность тѣла.

Вычислять объемъ неправильныхъ и сложныхъ тѣлъ при размѣрахъ, не слишкомъ большихъ, можно слѣдующимъ образомъ: кладемъ измѣряемое тѣло въ цилиндрическій или четыреугольный сосудъ и наливаемъ въ него воды до тѣхъ поръ, пока тѣло не будетъ совсѣмъ въ водѣ, затѣмъ вынимаемъ тѣло и отмѣчаемъ, на сколько отъ этого уровень воды въ сосудѣ понизился. Наконецъ находимъ объемъ измѣряемаго тѣла, вычисляя объемъ, который содержится между первымъ

и вторымъ уровнями воды въ сосудѣ. Если стеклянный сосудъ имѣетъ цилиндрическую форму, то очень легко опредѣлить объемъ столба жидкости между уровнями или, что то же самое, объемъ положеннаго въ него тѣла; для этого надо вычислить площадь основанія сосуда и измѣрить высоты обоихъ уровней. Если тѣло растворяется въ водѣ, то вмѣсто воды можно употребить мелкій песокъ.

Для измѣренія жидкостей по объему употребляютъ приборъ — мензурку. Это — обыкновенный стеклянный сосудъ, цилиндрической формы, съ дѣленіями на кривой поверхности, соотвѣтствующими количеству кубическихъ дюймовъ, сантиметровъ или др. Числа, записанныя у дѣленій, означаютъ число кубическихъ единицъ объема. При помощи мензурки вычисляютъ объемъ слѣдующимъ образомъ: наливаютъ жидкость въ сосудъ и смотрятъ, на какомъ дѣленіи стоитъ уровень жидкости.

Геометрія и географія.

13. Послѣдними двумя способами измѣренія объемовъ мы связываемъ обученіе геометріи съ первоначальнымъ курсомъ природовѣдѣнія, и такимъ образомъ ученики имѣютъ соприкосновеніе съ реальными явленіями; въ ихъ умѣ не происходитъ тогда полное раздѣленіе между тѣмъ, что проходится въ классѣ и тѣмъ, что они встрѣчаютъ въ жизни; между учебнымъ предметомъ и дѣйствительностью не будетъ никакой перегородки. Съ этой-же цѣлью желательно при ознакомленіи учащихся съ шаромъ давать имъ нѣкоторыя важныя свѣдѣнія изъ математической географіи, и тѣмъ самымъ устанавливать единство учебныхъ предметовъ.

Такъ какъ земля можетъ быть размотрѣна, какъ шаръ, то лучше всего знакомиться съ шаровой поверхностью на глобусѣ. Здѣсь ученикамъ полезно выяснять, что такое ось земли, полюсы, экваторъ, полуденный кругъ, меридіанъ, долгота и широта какого-нибудь мѣста, параллельные круги—параллели, жаркій и умѣренный поясы и т. п. Черченіе географическихъ картъ — въ Меркаторской проэкціи [1]) можно использовать для

[1]) Въ картахъ, начерченныхъ въ Меркаторской проекціи, параллельные круги просто изображены горизонтальными прямыми линіями, а меридіональные — прямыми вертикальными.

измѣренія поверхности шара, такъ какъ поверхность шара равняется площади прямоугольника, у котораго основаніе длина окружности большаго круга, а высота — діаметръ шара. Поверхность шара равняется кривой поверхности описаннаго около него цилиндра. Для поясненія возьмемъ полушаръ и такой цилиндръ, у котораго діаметръ основанія равенъ діаметру полушарія, а высота цилиндра — радіусу полушара. Если обматывать этотъ полушаръ веревкой, начиная отъ полюса до его основанія, и такой же веревкой наматывать кривую поверхность цилиндра, то окажется, что части веревокъ, помѣстившіяся на обоихъ поврехностяхъ, совершенно равны. Отсюда заключаемъ, что поверхность полушара равна кривой поверхности цилиндра или—что то же самое—поверхность всего шара равна кривой поверхности цилиндра, у котораго діаметръ основанія и высота равны діаметру шара [1]).

Если записать это символически, то получимъ:

Поверхность шара = кривой поверх. цилиндра = $= 2\pi R \cdot 2R$, т. е.

$$S_ш = 4\pi R^2.$$

Геометрія и ручной трудъ.

14. Курсъ начальной геометріи нужно связать съ ручнымъ трудомъ (издѣлія изъ бумаги и папки), и тогда почти каждая геометрическая истина можетъ быть запечатлѣна въ умѣ ученика въ самой конкретной формѣ. Затѣмъ легкость организаціи школьнаго преподаванія ручного труда изъ бумаги и папки является существеннымъ удобствомъ для школы, ибо обзаведеніе для работъ изъ картона инструментами и приспособленіями настолько дешево, что это будетъ посильно и для очень небогатыхъ школъ. Наконецъ, никакого отдѣльнаго помѣщенія для этихъ работъ не требуется.

Въ основу программы ручного труда входятъ техническія упражненія по обработкѣ бумаги и картона, расположенныя, во 1-ыхъ, въ порядкѣ трудности исполненія и, во 2-ыхъ, связанныя съ программой начальнаго

---

[1]) Такіе приборы имѣются въ нашей коллекціи геометрическихъ разборныхъ тѣлъ, изд. „Песталоцци“.

курса геометріи. Образцами для тѣлъ и фигуръ могутъ послужить предметы, встрѣчающіеся въ окружающей средѣ. Всякое упражненіе по ручному труду сопровождается чертежемъ, съ обозначеніемъ числовыхъ размѣровъ.

Мы перечислимъ нѣсколько работъ для того, чтобъ показать на примѣрахъ, какъ можно въ связи съ изготовленіемъ моделей геометрическихъ тѣлъ исполнять маленькія вещи, украшенныя по личному вкусу самихъ учащихся.

Разныя коробки: 1) для образчиковъ, съ перегородками; 2) выдвижная и 3) съ крышкой. — Коробки различныхъ магазиновъ даютъ намъ всевозможныя модели и украшенія.—Портфель для бумагъ, имѣющій форму треугольной призмы. Пеналъ для карандашей и перьевъ, призматическій фонарь, имѣющій форму многоугольной призмы. Приклеиваніе разноцвѣтной бумаги и устройство подсвѣчника..

Кольца для салфетокъ. Круглая коробка. Пеналъ цилиндрическій. Способъ пригонки крышки. Баулъ для нотъ или бумагъ.

Вещи, имѣющія видъ усѣченной пирамиды: многоугольныя коробки съ наклонными стѣнками, пепельница, подставка для коллекціи открытыхъ писемъ.

Развертываніе и сборка поверхности усѣченнаго конуса: абажуръ для лампъ и т. п.

Функціи. 15. Въ теченіе всего курса наглядной геометріи слѣдуетъ обращать вниманіе учениковъ на измѣняемость геметрическихъ формъ при измѣненіи элементовъ, какъ по величинѣ, такъ и по положенію. Такъ одинъ изъ смежныхъ угловъ есть функція другого, сумма угловъ многоугольника есть функція числа сторонъ, длина окружности есть функція радіуса, площади двухъ равновысокихъ фигуръ суть функціи ихъ основаній, объемы—функціи основаній и высотъ; площадь основанія и высота какого-либо тѣла — взаимнообратныя функціи, и т. п. Точно также при рѣшеніи задачъ на построеніе слѣдуетъ указывать функціональное измѣненіе фигуръ; таковы вопросы о треугольникахъ и четыреугольникахъ, о взаимномъ положеніи прямой и окружности или окружностей, и т. п.

Ученики самостоятельно могутъ сложить напр. изъ деревянныхъ палочекъ какой-нибудь многоугольникъ и, связавши ихъ концы нитками, которыя будутъ исполнять роль шарнира, провѣрить, что многоугольникъ можетъ имѣть массу разнообразныхъ формъ при той же самой длинѣ его сторонъ. При этомъ, само собою разумѣется, что діагонали и внутренніе углы даннаго многоугольника измѣняются. Такъ, напримѣръ, квадратъ можетъ превратиться въ ромбъ, прямоугольникъ въ параллелограммъ. Но необходимо обратить вниманіе учащихся на то, что треугольники составляютъ исключеніе изъ этого правила. Разъ ученики построили треугольникъ, то они убѣдятся въ томъ, что нельзя измѣнить его форму, не измѣняя длины его сторонъ.

Этимъ важнымъ свойствомъ треугольниковъ пользуются очень часто на практикѣ, въ техникѣ при постройкѣ и т. д.

Примѣръ—ворота. Они должны бы измѣнить свою форму (квадрата, прямоугольника), но превращеніе прямоугольника въ два треугольника посредствомъ поперечной перекладины сохраняетъ имъ форму, покуда не загніетъ дерево или не расшатаются связи. Другой примѣръ—связи при сооруженіи остова построекъ или при постройкѣ около нихъ лѣсовъ. Сюда тѣсно примыкаетъ вопросъ о діагоналяхъ многоугольника: ихъ число есть функція числа сторонъ.

Симметрія. 16. Мы должны теперь подробнѣе остановиться на вопросѣ о симметріи въ геометріи, такъ какъ въ „ходкихъ“ учебникахъ ни единой строки не посвящено такому интересному и поучительному отдѣлу. А между тѣмъ какой богатый и благодарный матеріалъ представляетъ наблюденіе симметріи въ природѣ! Для того, чтобы учащіеся прежде всего составляли себѣ болѣе ясное представленіе о симметріи, мы и въ этомъ случаѣ предпочитаемъ живой образъ какому-бы то ни было опредѣленію. Такъ, напримѣръ, всѣмъ извѣстно, что зеркальное изображеніе какого-нибудь предмета сходно, но не тождественно съ самимъ предметомъ. Хотя форма и величина остаются тѣ-же, все-таки между предметомъ и его зеркальнымъ изображеніемъ существуетъ извѣстное различіе.

Если мы поднесемъ къ зеркалу правую руку, то мы увидимъ въ немъ лѣвую. Перчатка съ правой руки даетъ намъ со своимъ отраженіемъ въ зеркалѣ—пару. Перчатку, которую мы видимъ въ зеркалѣ, мы могли бы надѣть, будь она намъ предложена въ самомъ дѣлѣ, не на правую, а только на лѣвую руку. Также правое ухо, отразившись въ зеркалѣ, представляется лѣвымъ. При гравировкѣ и литографіи изображаютъ предметы сначала на бумагѣ въ ихъ настоящемъ видѣ и положеніи, а затѣмъ переводятъ рисунокъ на мѣдную доску или на камень въ обратномъ порядкѣ, такъ что лѣвая сторона дѣлается правой и наоборотъ. Эти доски (клише, матрицы) оттискиваютъ рисунокъ опять въ настоящемъ видѣ, и т. д.

Дальше, если соединимъ прямою линіею какую-нибудь точку предмета съ соотвѣтствующей точкой его зеркальнаго изображенія, то замѣтимъ, что эта линія перпендикулярна къ зеркалу и будетъ дѣлиться его плоскостью на двѣ равныя части. Это относится ко всѣмъ точкамъ предмета и его отраженія.

Если же какой-нибудь предметъ можетъ быть раздѣленъ плоскостью на двѣ половины такъ, чтобы одна изъ нихъ являлась зеркальнымъ изображеніемъ другой, то этотъ предметъ называютъ симметричнымъ, а упомянутую плоскость дѣленія—плоскостью симметріи.

Если плоскость симметріи вертикальна, то говорятъ, что тѣло обладаетъ вертикальной симметріей. Примѣры: готическій соборъ, окна и двери въ комнатѣ, человѣкъ и животныя и т. д,

Если же плоскость симметріи горизонтальна, то данный предметъ можно назвать горизонтально симметричнымъ. Ландшафтъ на берегу озера и его отраженіе въ озерѣ представляютъ собою систему горизонтальной симметріи.

Здѣсь сейчасъ же обнаруживается замѣчательная разница. Вертикальная симметрія готическаго собора сразу бросается намъ въ глаза, между тѣмъ какъ мы можемъ ѣхать вверхъ или внизъ по рѣкѣ, не замѣчая симметріи между предметами, стоящими на берегу, и ихъ отраженіемъ въ водѣ. Вертикальная симметрія нравится намъ, тогда какъ симметрія горизонтальна

для насъ безразлична и можетъ быть замѣчена только опытнымъ глазомъ. Отчего происходитъ эта разница? Не распространяясь по этому вопросу, можно лишь указать, что нашъ зрительный аппаратъ вертикально-симметриченъ.

Мы можемъ грубо воспроизвести симметрію относительно оси въ плоскости такимъ образомъ: на листѣ бумаги чернымъ мѣломъ нарисуемъ какую-либо фигуру, напр. каштановый листъ, нарцисъ или клематисъ, а затѣмъ, перегнувъ бумагу пополамъ и плотно сложивъ оба полулиста, оттиснемъ фигуру по другую сторону листа. Тогда фигура и ея отпечатокъ на другой половинѣ бумаги будутъ симметричны по отношенію къ складкѣ на бумагѣ, которая представляетъ ось симметріи. Этимъ самымъ мы переходимъ отъ обыкновенной, чисто созерцательной геометріи, къ чертежной. Орнаментика какъ нельзя лучше даетъ намъ примѣры симметріи относительно оси. Вообще за примѣрами ходить недалеко. Такъ, въ латинскомъ алфавитѣ находимъ десять буквъ: A, H, I, M, O, T, V, W, X, Y вертикально-симметричныхъ и пять горизонтально-симметричныхъ: B, C, D, E, K.

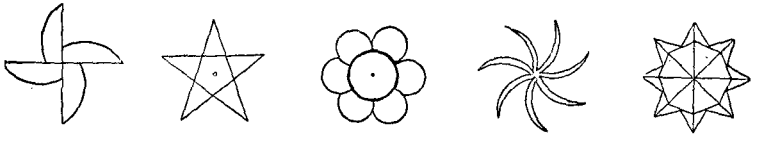
Если фигура имѣетъ двѣ взаимно-перпендикулярныя оси симметріи, то точка ихъ пересѣченія является центромъ симметріи. Это имѣетъ мѣсто для круга, эллипса, гиперболы, правильныхъ многоугольниковъ съ четнымъ числомъ сторонъ и т. д. Вообще фигуру называютъ симметричной по отношенію къ какой-нибудь точкѣ, если она будетъ приведена въ совпаденіе съ самой собой вращеніемъ около этой точки. Эту точку, вокругъ коей вращается фигура, называютъ центромъ симметріи. Здѣсь фигура при вращеніи не выходитъ изъ своей плоскости. Эту симметрію называютъ еще и центральной. Три буквы: N, S, Z изъ латинскаго алфавита представляютъ намъ другой примѣръ центральной симметріи.

Когда мы имѣемъ симметрію относительно оси (прямой линіи), то фигура, вращаясь вокругъ оси, покидаетъ плоскость и возвращается на нее при полномъ опрокидываніи. Эту симметрію называютъ еще и осевой.

Возьмемъ въ квадрантѣ ХОУ какой-нибудь треугольникъ. Если складывать бумагу по оси УУ′ и прокалы-

вать ее въ вершинахъ треугольника, то мы найдемъ, его изображеніе во второмъ квадрантѣ. Нетрудно найти такимъ образомъ изображенія въ третьемъ и четвертомъ квадрантахъ. Ученики легко замѣтятъ что треугольники въ сосѣднихъ квадрантахъ обладаютъ осевой симметріей, а треугольники въ противоположныхъ квадрантахъ обладаютъ центральной симметріей. Еще одинъ примѣръ: правильные многоугольники съ нечетнымъ числомъ сторонъ обладаютъ осевой симметріей, а правильные многоугольники съ четнымъ числомъ сторонъ—центральной.

Когда фигура при вращеніи на полъ-оборота (180^0) занимаетъ то же самое мѣсто, то въ этомъ случаѣ имѣемъ двойную симметрію. Для тройной симметріи примѣромъ можетъ послужить равносторонній треугольникъ. Здѣсь треугольникъ, при поворачиваніи на $^1/_3$ оборота (120^0) около центра симметріи, занимаетъ то же самое мѣсто, какъ и въ началѣ. Послѣ третьяго вращенія онъ приходитъ въ первоначальное положеніе (см. черт. 10).



Чер. 10. Симметрія 4-ная, 5-ная, 6-ная, 7-ная, 8-ная.

Новые французскіе, нѣмецкіе и англійскіе учебники почти на первыхъ страницахъ геометріи даютъ понятіе о симметріи. Теоремами симметріи пользуются для доказательства другихъ теоремъ, и этимъ очень много выигрывается какъ въ экономіи времени, такъ и въ упрощеніи нѣкоторыхъ сложныхъ выводовъ. Можно установить 5 элементарныхъ положеній:

1) Въ симметричныхъ фигурахъ соотвѣтствующіе отрѣзки и углы равны. Симметричныя фигуры—совмѣстимы.

2) Осью симметріи отрѣзка является перпендикуляръ, возставленный изъ середины этого отрѣзка.

Каждая точка оси симметріи одинаково удалена отъ крайнихъ точекъ даннаго отрѣзка.

3) Осью симметріи какого-нибудь угла является его биссектрисса. Каждая точка биссектриссы одинаково удалена отъ сторонъ угла.

4) Для двухъ параллельныхъ прямыхъ осью симметріи является прямая, параллельная имъ и проходящая по серединѣ между ними. Всѣ точки оси симметріи находятся на одинаковомъ разстояніи отъ обѣихъ параллельныхъ.

5) Въ кругѣ ось симметріи—діаметръ.

Возьмемъ теперь какую-нибудь теорему, чтобъ ее доказать съ помощью симметріи. Такъ, напр., средняя линія въ трапеціи равняется полусуммѣ параллельныхъ.

Прибавивъ къ трапеціи ту же самую трапецію въ перевернутомъ видѣ, получимъ параллелограммъ. Осью симметріи будетъ удвоенная средняя линія трапеціи. Не трудно *видѣть*, что средняя линія равняется полусуммѣ параллельныхъ, что́ и т. д.

Теорему Пиѳагора также можно доказать съ помощью симметріи и вращенія (см. черт. 17). Кромѣ того всѣ теоремы, относящіяся къ равнобедренному треугольнику, доказываются съ помощью симметріи и т. д.

Послѣ всего этого построить любую фигуру, симметричную данной, для учащихся будетъ очень легко.

Однако, довольно! И изъ этого краткаго очерка о симметріи видно все значеніе ея въ наукѣ и жизни. Окружающій насъ міръ формъ и созданій является, сверхъ всего, еще и нашимъ учителемъ: „природа вскармливаетъ на своемъ лонѣ неисчерпаемое количество удивительныхъ созданій, которыя по красотѣ и разнообразію далеко превосходятъ всѣ созданныя искусствомъ человѣка формы“ [1]) (см. рис. 11 и 12).

Теорема Пиѳагора.

17. Многія геометрическія теоремы связываютъ вопросы числа съ вопросами формы или, какъ говоритъ Махъ, устанавливаютъ связь между ариѳметическими и геометриче-

---

[1]) *Э. Геккель*, Красота формъ въ природѣ, 1907.—Это собраніе роскошно исполненныхъ 100 таблицъ большого формата, въ краскахъ, съ описательнымъ текстомъ, является шедевромъ, но мало доступно широкой публикѣ изъ за дорогой цѣны.

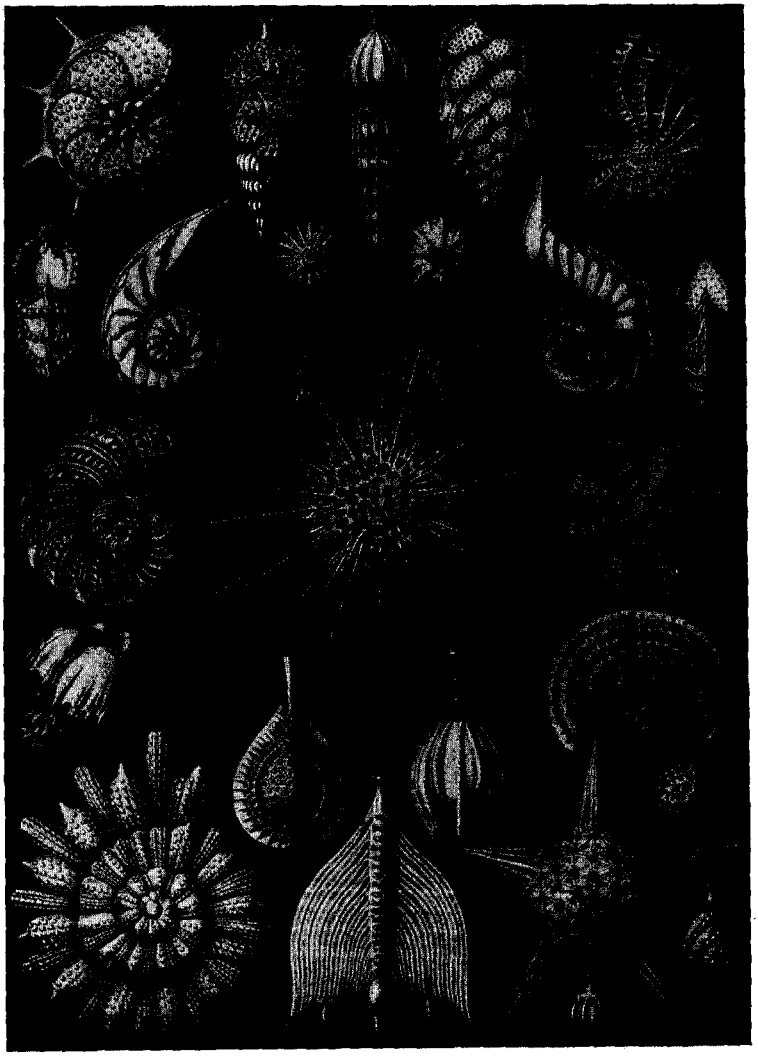


Рис. 11. Известковыя раковины.

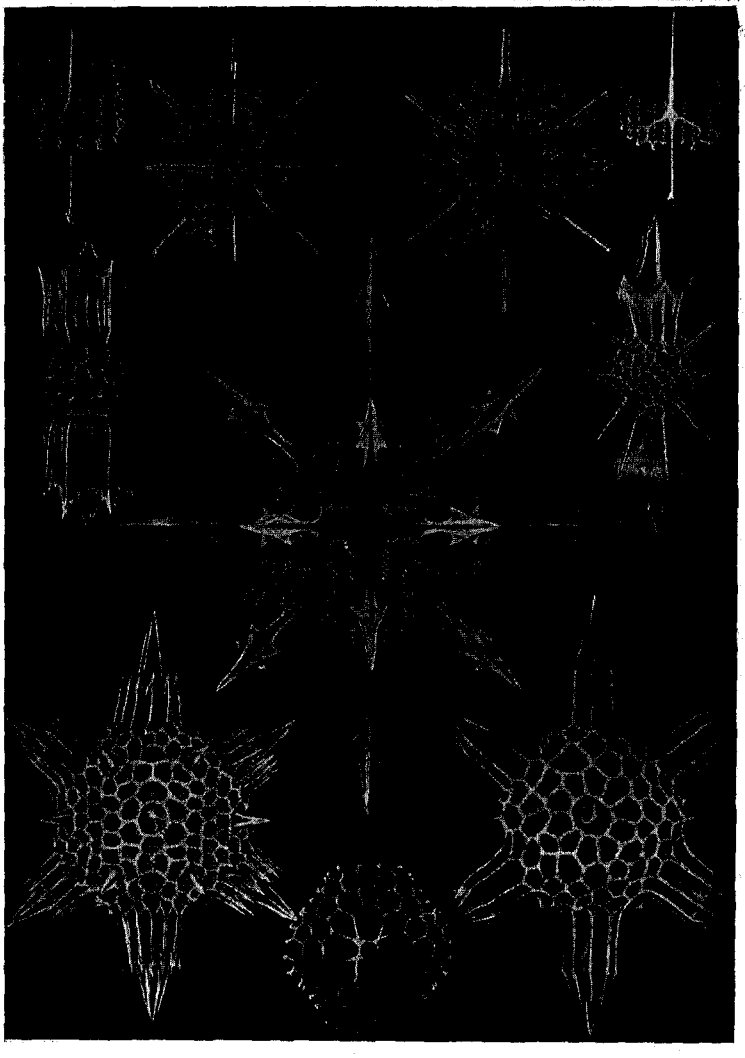


Рис. 12. Подклассъ радіолярій — акантофракты.

скими реакціями. Замѣчательнѣйшей въ этомъ отношеніи является теорема, приписываемая обыкновенно Пиѳагору, хотя она была извѣстна гораздо раньше; сомнительно даже, чтобы Пиѳагоръ первый далъ ея полное доказательство.

Эта теорема пользуется громадною извѣстностью. Во I-хъ, она доводила и доводитъ до отчаянія не одно поколѣніе изъ-за своихъ „классическихъ" доказательствъ; это обстоятельство и послужило поводомъ назвать ее „мостъ ословъ"—„должно быть потому,—замѣчаетъ Лезанъ,—что слабые ученики, остановившись сначала съ испугомъ передъ этой теоремой, какъ оселъ передъ мостомъ, одолѣвали ее затѣмъ не безъ труда". Во-II-хъ, это единственная, пожалуй, теорема, удостоившаяся приложеній въ алгебрѣ, тригонометріи, анализѣ (какъ ихъ понимаютъ въ старой школѣ). Въ III-хъ, принято по традиціи говорить учащимся, что теорема Пиѳагора—очень важна, одна изъ главнѣйшихъ, основная и т. п., хотя громадное большинство авторовъ нашихъ „ходкихъ" учебниковъ совершенно не уяснили себѣ ея значенія.

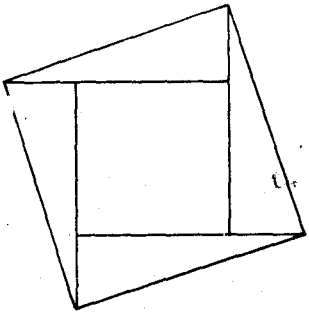
А это значеніе дѣйствительно громадно. Теоретически теорема Пиѳагора — основаніе тригонометріи, исторически—дала начало ученію объ ирраціональномъ числѣ, практически — связана тѣснымъ образомъ съ массой жизненныхъ вопросовъ. Но все это для учащихся за семью замками—и мы рѣшили показать эту теорему въ ея истинномъ видѣ, освѣтивъ нѣкоторыя существенныя детали. Полное же изложеніе вопроса потребовало-бы цѣлой книги.

Доказательства теоремы.

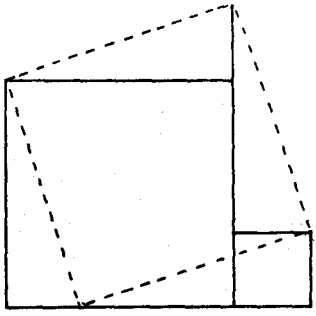
18. На первомъ мѣстѣ стоитъ вопросъ о доказательствахъ теоремы. То, которое помѣщено во всѣхъ почти учебникахъ, принадлежитъ Эвклиду [1]); оно — одно изъ наиболѣе трудныхъ, неинтересно по методу и совершенно ненаглядно.

Первымъ этапомъ для ознакомленія съ теоремой долженъ служить „египетскій треугольникъ". Задавая дѣтямъ прямые отрѣзки въ 3, 4 и 5 единицъ длины

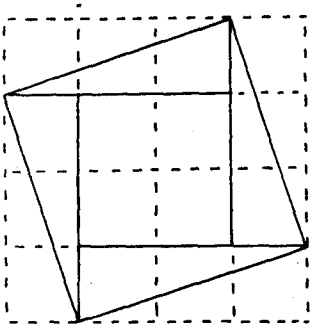
[1]) „Начала", кн. I, предложеніе 47.



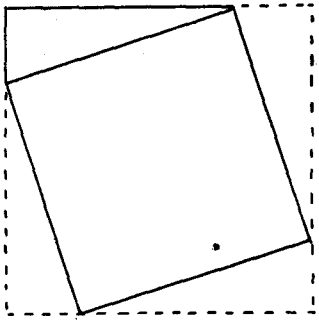
Чер. 13.



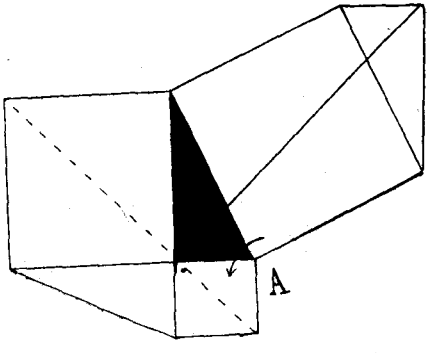
Чер. 14.



Чер. 15.



Чер. 16.



Чер. 17.

для построенія треугольника легко показать, что этотъ треугольникъ прямоугольный; затѣмъ показать, что и треугольники со сторонами 6, 8, 10; 9, 12, 15; 12, 16, 20 и т. п. будутъ тоже прямоугольны; наконецъ, расширивъ эту область типами 5, 12, 13; 8, 15, 17 и т. д., нетрудно навести учащихся на мысль, что вопросъ о прямомъ углѣ связанъ съ этими числами. Переводя ариѳметическій вопросъ на геометрическую почву, легко довести дѣтей до отысканія зависимости между сторонами треугольника, сначала въ видѣ

$$3^2 + 4^2 = 5^2;\ 5^2 + 12^2 = 13^2;\ 8^2 + 15^2 = 17^2,$$

а затѣмъ и въ общемъ видѣ

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Таковъ былъ и историческій порядокъ; сначала были найдены „Пиѳагоровы числа“, затѣмъ наткнулись на $\sqrt{2}$, опредѣляя діагональ квадрата и, наконецъ, пришли къ необходимости доказать эту теорему независимо отъ ариѳметики, т. е. независимо отъ размѣровъ сторонъ; тогда пришлось теоремѣ дать геометрическое истолкованіе: „превратить два квадрата въ равновеликій имъ третій“.

Эта двойственность вопроса замѣтна еще и теперь: въ большинствѣ учебниковъ даютъ два доказательства теоремы Пиѳагора, одно—метрическое, основанное на пропорціональности линій [1]), другое геометрическое, основанное на равновеликости фигуръ [2]).

Геометрическія доказательства чрезвычайно наглядны. Нѣсколько изъ нихъ помѣщены на пред. страницѣ, и мы удовольствуемся для доказательства единственнымъ словомъ *смотри!* Первое (черт. 13) дано индусами, второе (черт. 14) принадлежитъ арабу An-Nairizi (ок. 900 г. по Р. Х.); третье (черт. 15) совмѣщаетъ оба первыхъ и, кромѣ того, позволяетъ убѣдиться въ правильности теоремы простымъ подсчетомъ квадрати-

---

[1]) Это доказательство принадлежитъ индусамъ (*Bhaskara*, Vîgaganita, V, 146; XII в. по Р. Х.) и было вторично установлено Валлисомъ (1616—1703).

[2]) См., напр., *Киселевъ*, Элем. геом., 1906, § 204 и § 286; *Давыдовъ*, Элем. геом., 1904, § 65 и § 147 и т. п.

ковъ; въ такомъ видѣ доказательство воспринимается шестилѣтними дѣтьми [1]). Четвертое представляетъ видоизмѣненіе перваго, но интересно еще и потому, что допускаетъ алгебраическое доказательство [2]):

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\,\frac{ab}{2}, \text{ откуда } a^2 + b^2 = c^2.$$

Пятое тоже интересно. Способъ построенія извѣстенъ давно (напр. *Tempelhoff,* Anfangsgründe der Geometrie, 1769, и др.), но доказательство приводится въ этихъ учебникахъ классическое—длинное, запутанное и ненаглядное. Между тѣмъ недавно Бурле [3]) показалъ, что для доказательства нужны лишь: одна буква на чертежѣ, стрѣлка для обозначенія направленія, въ которомъ слѣдуетъ вращать фигуру, и основныя понятія о симметріи.

Интересующіеся вопросомъ о доказательствахъ могутъ найти собраніе ихъ въ книгѣ „*Юрій Випперъ*, Сорокъ пять доказательствъ пиѳагоровой теоремы, Москва, 1876 г.“. Болѣе полнаго сборника пока не имѣется.

Обобщенія теоремы.

19. Перечисленныя доказательства должны быть сперва выполнены *лабораторно*—путемъ изготовленія квадратовъ, разрѣзыванія ихъ, складыванія и пр.; при этомъ слѣдуетъ широко пользоваться разграфленной и цвѣтной бумагой; потомъ наступитъ очередь черченія. Такимъ же лабораторнымъ путемъ легко провѣрить теорему физически—на вѣсахъ, пользуясь тонкими листами картона, дерева, жести, цинка и т. п. Это *показательство теоремы* даетъ связь между математикой и физикой: тутъ и объемъ, и плотность, и вѣсъ. Показавъ, что другіе факторы не вліяютъ на разсматриваемое соотношеніе, легко пойти дальше и распространить теорему Пиѳагора на круги, треугольники (независимо отъ ихъ формы) и многоугольники; затѣмъ и на пространственныя фигуры—призмы, цилиндры, конусы, пирамиды; наконецъ, пусть сами учащіеся найдутъ, почему теорему нельзя примѣнить къ кубамъ и шарамъ.

---

[1]) *Berdellé,* Propédeutique du calcul, 1904, p. 6.
[2]) Приведено въ „*Huberti* Rudimenta algebrae. Würzeb. 1762“.
[3]) *Bourlet,* Éléments de Géométrie, 1908, p. 271.

Вотъ нѣсколько примѣровъ. Помножая обѣ части равенства на какое-нибудь постоянное число k, получимъ

$$ka^2 + kb^2 = kc^2.$$

Если $k = \frac{\pi}{4}$, то мы получимъ сумму площадей двухъ круговъ; при $k = \frac{\pi}{4} H$ получимъ теорему для цилиндровъ съ высотою H. То же—для равностороннихъ треугольниковъ, если ихъ высоты 2ka, 2kb и 2kc, а стороны = a. Полагая, наконецъ, $k = 2n \cdot H$, найдемъ новую формулу

$$\left(\frac{a}{2} \cdot 2na\right) H + \left(\frac{b}{2} \cdot 2nb\right) H = \left(\frac{c}{2} \cdot 2nc\right) H,$$

дающую зависимость между равновысокими треугольными призмами.

Всѣ эти задачи представляютъ благодарнѣйшій матеріалъ для сліянія планиметріи со стереометріей и вычисленія съ построеніемъ.

Теорема Платона.

20. Указанныя обобщенія теоремы Пиѳагора естественно наталкиваютъ на вопросъ: а нѣтъ-ли подобной зависимости между объемами кубовъ? Небезполезно указать, что у Платона[1]) встрѣчается аналогичная зависимость

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Не вдаваясь въ болѣе подробныя указанія, упомянемъ лишь, что обѣ теоремы имѣютъ важное значеніе для теоріи чиселъ и что онѣ тѣсно связаны съ „Великой теоремой“ Фермата: $x^n + y^n = z^n$.

Приложенія теоремы Пиѳагора въ жизни.

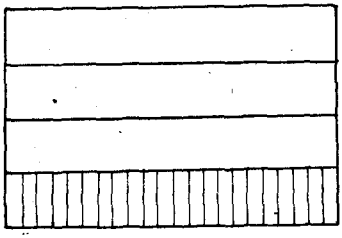
21. Нѣкоторыя приложенія теоремы Пиѳагора даны даже въ обычнаго типа учебникахъ, хотя авторы ихъ умалчиваютъ о связи задачъ съ теоремой. Таковы вопросы о превращаемости фигуръ (треугольника, четыреугольника и вообще многоугольника) въ квадратъ. Съ этимъ тѣсно связана знаменитая „квадратура круга“.

---

[1]) „Республика“, кн. VIII.

Но обратная задача—„циркулятура квадрата"—никогда не встрѣчается въ учебникахъ, хотя ею тоже занимались не мало, особенно Индусы. Между тѣмъ въ жизни приходится часто превращать прямолинейную фигуру въ кругъ. Одинъ изъ такихъ примѣровъ мы разсмотримъ подробнѣе.

Мѣдникъ имѣетъ толстый листъ олова, изъ котораго ему нужно слить 4 кружка такой же толщины для донышекъ въ посудѣ. Требуется узнать, какого размѣра ему лить кружки, чтобы не осталось лишняго олова?

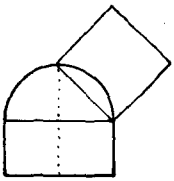


Чер. 18.

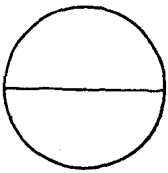
Ариѳметическое рѣшеніе. Называя стороны листа черезъ a и b, искомый радіусъ круга черезъ x, имѣемъ формулу

$$ab = 4\pi x^2,$$

откуда $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab}{\pi}}$.



Чер. 19.



Чер. 20.

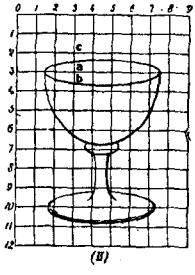
Логариѳмируя это выраженіе, мы найдемъ x съ желаемою степенью точности.

Неудобства рѣшенія очевидны. Надо умѣть обращаться съ буквенными выкладками, знать логариѳмы или же извлеченіе корней; но въ послѣднемъ случаѣ вычисленія очень неудобны.

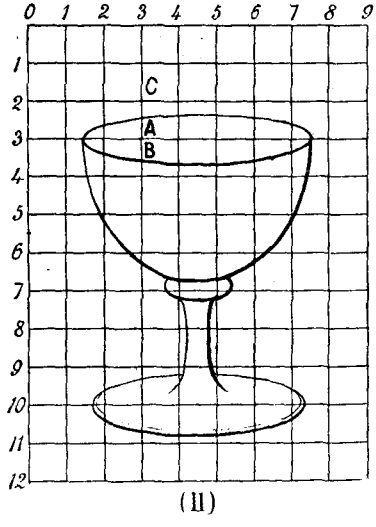
Геометрическое рѣшеніе несомнѣнно проще. Большая точность не требуется—достаточно 10%; лучше знать сразу діаметръ, а не радіусъ. Прилагаемый рядъ чертежей (18—20) даетъ сущность рѣшенія (беремъ $\pi = \frac{22}{7}$).

Въ практикѣ приходится также увеличивать или уменьшать фигуры, не измѣняя ихъ формы. Вопросы

такого рода являются обычными въ картографіи, при съемкѣ плана, копіи съ картины и т. п. При этомъ необходимо различать два случая: 1) увеличеніе или уменьшеніе линейное и 2) увеличеніе или уменьшеніе квадратное. Первое выполняется легко при помощи масштаба, пропорціональнаго циркуля, пантографа и т. п. (см. чертежи 21, 22, 23). Второе—болѣе сложная вычислительная задача, такъ какъ требуется получить подобную данной фигуру, площадь которой больше или меньше площади данной фигуры въ опредѣленное число разъ. Эта задача



Чер. 21.



Чер. 22.

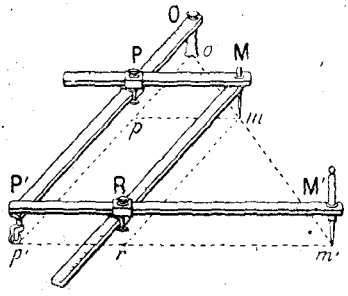
приводится къ первой только въ томъ случаѣ, когда n (число разъ) есть квадратное число: 4, 9, 16, 25, ...

Геометрическое рѣшеніе просто всегда. На прилагаемыхъ чертежахъ 24 и 25 указаны случаи увеличенія втрое трапеціи и уменьшенія вчетверо треугольника.

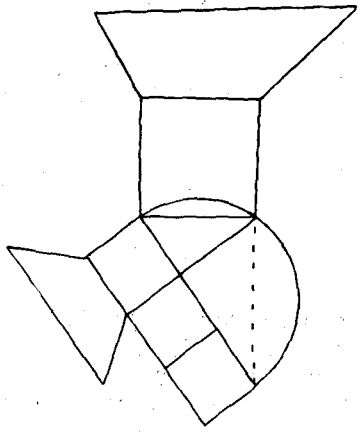
Подобіе фигуръ и геодезія.

22. Послѣдніе примѣры требуютъ знакомства съ подобіемъ и пропорціональностью. Эти важные вопросы не должны составлять особаго отдѣла, напротивъ—они должны быть разсѣяны по всему курсу. Первыя свѣдѣнія нужно сообщить при разсмотрѣніи усѣченной пирамиды, даль-

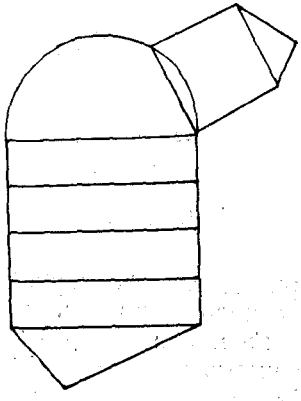
нѣйшія въ связи съ теоремой Пиѳагора; затѣмъ слѣдѣетъ связать подобіе фигуръ съ началами землемѣрія, необходимыми во всякой школѣ и при всякой программѣ. „Бросивъ [1]) бѣглый взглядъ на эту науку, мы съ увѣренностью можемъ утверждать, что ознакомленіе въ школѣ съ геодезіей полезно не только потому, что оно обнаруживаетъ передъ молодежью одно изъ величественнѣйшихъ завоеваній цивилизаціи, но также и потому, что оно вообще наглядно выясняетъ значеніе научной работы. Ученикъ узнаетъ, что тысячи геодезистовъ постоянно примѣняютъ къ дѣйствительнымъ соотношеніямъ математическіе выводы, которые онъ привыкъ считать совер-



Чер. 23.



Чер. 24.



Чер. 25.

[1]) Проф. *Э. Вихертъ*, Введеніе въ геодезію, лекціи для преподавателей, пер. съ нѣм., 1907.

шенно абстрактными; онъ знакомится здѣсь съ ними въ формѣ сразу для него понятной, имѣя въ виду цѣль, важность которой для него вполнѣ очевидна. Каждый изъ такихъ геодезистовъ пользуется одновременно какъ теоріей, такъ и практикой... *Лишь тогда геодезія достигнетъ полностью своей цѣли, когда къ ней будутъ обращаться при преподаваніи математики, физики и географіи, а также при ученическихъ экскурсіяхъ, когда при всякомъ удобномъ случаѣ будутъ приводиться примѣры и задачи изъ геодезіи и, наконецъ, когда нѣсколько часовъ, посвященныхъ теоретическому преподаванію математики въ классѣ, будутъ замѣнены практическими занятіями подъ открытымъ небомъ*".

Наконецъ, о подобіи, пропорціональности и тригонометріи болѣе подробно поговоримъ впослѣдствіи.

Заключеніе. 23. Мы старались разсмотрѣть болѣе важныя мѣста курса „Наглядной Геометріи" съ различныхъ точекъ зрѣнія; не нужно упускать изъ виду, что и воспитательное значеніе многихъ вопросовъ курса неоспоримо, напр.—теоремы Пиѳагора: ученики должны себѣ представить, какъ иногда слѣдствія громадной важности могутъ вытекать изъ простого реальнаго факта.

Можно спорить о сравнительномъ достоинствѣ деталей, но общій планъ имѣетъ одно несомнѣнное преимущество передъ старыми пріемами—ученикъ не будетъ поставленъ въ положеніе пассивно воспринимающаго аппарата. Мы предлагаемъ не „книжную" геометрію, а живую, которая—какъ и всякій учебный предметъ—должна расширять кругозоръ ученика, обязана научить его вдумываться въ явленія природы и жизни, разбираться въ нихъ, развивать самодѣятельность и иниціативу. Пусть такая геометрія не выучитъ ученика „доказательству отъ противнаго", но за то онъ и не будетъ усваивать пассивно ея выводы и положенія. Напротивъ. Въ процессѣ усвоенія геометріи должна принимать активное участіе творческая личность ученика; дайте ему возможность—и геометрія изъ собранія теоремъ превратится въ сокровищницу человѣческаго наблюденія и опыта.

ГЛАВА IX.

Цѣлыя и дробныя числа.

„Я показалъ выше рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ. Ибо при изученіи наукъ примѣры полезнѣе правилъ".

Ньютонъ.

„Доказательства! Нѣкоторымъ людямъ нужны доказательства того, что они сами существуютъ". *Перри.*

„Хорошо пользоваться дѣйствительными измѣреніями, взвѣшиваніями, наблюденіями, лабораторными экспериментами и другими подобными вещами, съ цѣлью доставленія матеріала для ариѳметическихъ упражненій".

Олив. Лоджъ.

Къ критикѣ систематическаго курса ариѳметики.

1. Русскіе учебники ариѳметики, особенно тѣ изъ нихъ, на коихъ написано „Систематическій курсъ", принадлежатъ всѣ безъ исключенія къ никуда негоднымъ. Мы уже указали, что движеніе методики за границей не отразилось на положеніи ариѳметики въ Россіи, и въ то время, какъ всѣ рѣшительно методисты высказываются не за учебники, а лишь и исключительно за задачники, авторы русскихъ руководствъ продолжаютъ свое стряпное дѣло. Въ настоящее время признано, что систематическое изложеніе начальной ариѳметики невозможно съ точекъ зрѣнія:

1) *научной*, такъ какъ каждая изъ предложенныхъ теорій числа оперируетъ надъ понятіями, недоступными дѣтскому разумѣнію;

2) *методической*, такъ какъ распредѣленіе матеріала должно основываться не на логическомъ планѣ, а на потребностяхъ школы, въ зависимости отъ мѣстныхъ условій и общей программы;

3) *психологической*, такъ какъ въ цѣляхъ экономіи мышленія и интереса обученія необходимо широко пользоваться наглядной и лабораторной методами;

4) *практической*, такъ какъ главная *цѣль* ариѳметики—выучить *вѣрно, быстро и изящно вычислять*, а это достижимо лишь при условіи многочисленныхъ и жизненныхъ упражненій, а не правилъ и ихъ quasi-доказательствъ.

Сообразуясь съ этимъ, изложеніе ариѳметики въ школѣ должно быть гибкимъ, приспособляться къ родственнымъ учебнымъ предметамъ, проходимымъ параллельно въ школѣ, и развивать постепенно умѣніе владѣть выкладками. Тогда будутъ обучать дѣйствительно исчисленію и попутно пріучатъ видѣть въ числовомъ символѣ друга, а не врага: понимая удобства вычисленій, учащіеся понемногу привыкнутъ отдавать должное тѣмъ понятіямъ, на коихъ вычисленія основаны.

Содержаніе курса исчисленія.

2. Содержаніе курса исчисленія можетъ быть распланировано такъ:

А. Первыя начала устной и письменной нумераціи.—Упражненія въ счетѣ.—Дѣйствія въ предѣлахъ первой сотни [порядокъ прохожденія: 1—10, 10—100 цѣлыми десятками и 10—20 полностью].—Сажень, рубль, фунтъ [съ ихъ простѣйшими подраздѣленіями].—Небольшія упражненія въ измѣреніи.—Задачи, рѣшаемыя въ классѣ *устно* и содержащія преимущественно одно дѣйствіе.

В. Счетъ до 100.—Изученіе таблицъ сложенія и умноженія.—Приложеніе 4 дѣйствій къ числамъ отъ 1 до 100.—Сутки и ихъ подраздѣленія.—Продолженіе упражненій въ измѣреніи.—Понятіе о половинѣ (одной второй), четверти, восьмушкѣ (одной восьмой) и трети.—Счетъ до 1000.—Мѣры длины (русскія), денегъ и вѣса.—Задачи на сложеніе и вычитаніе.—Мѣры емкости, сыпучихъ тѣлъ и бумаги.—Задачи на всѣ 4 дѣйствія (умноженіе и дѣленіе только на однозначныя числа).

С. Основанія счисленія и нумераціи. Десятичная нумерація (до милліона).—Приложеніе 4 дѣйствій къ многозначнымъ числамъ.—Свойства членовъ сложенія и вычитанія.—Примѣненіе этихъ свойствъ къ упро-

щенію вычисленій (пріемъ закруглимыхъ чиселъ).— Равенство. — Примѣры: $x + 5 = 8$, $x - 3 = 2$, $7 - x = 4$, и т. п.—Счетъ времени; понятіе о происхожденіи единицъ времени и ихъ подраздѣленій (идея повторенія событій).—Понятіе о календарномъ и истинномъ времени.—Понятіе о простомъ и составномъ именованномъ числѣ и о дѣйствіяхъ надъ ними [1]). — Свойства членовъ умноженія. Пріемы сокращеннаго умноженія.— Примѣры: $3 . x = 6$; $2 . x . 7 = 42$, и т. п.

D. Происхожденіе естественныхъ мѣръ длины (футъ, пядь, локоть, вершокъ и др.). Метрическая система мѣръ длины(километръ— милиметръ). Исторія установленія этой системы и ея преимущества. Раздробленіе и превращеніе чиселъ этой системы. Зависимости: 1 метръ= $22^1/_2$ верш., километръ меньше версты на $31^1/_4$ саж. (приблизит. зависимости).—Свойства членовъ дѣленія. Примѣры: $\frac{x}{4} = 6$, $\frac{4}{x} = 3$, и т. п.—Случай дѣленія съ остаткомъ; запись частнаго въ видѣ десятичнаго числа (примѣры на рубли и метры). — Понятіе о конечныхъ десятичныхъ числахъ. — Повтореніе десятичной нумераціи и распространеніе ея *вправо* отъ разряда единицъ (но не дальше тысячныхъ). Чтеніе и запись десятичныхъ чиселъ.—Понятіе о %. Простыя задачи на %-ныя вычисленія (финансовыя, статистическія, геометрическія, физическія и др.). — Понятіе о пробѣ и ея вычисленіи.—Задачи на совмѣстныя дѣйствія надъ цѣлыми и десятичными (конечными) числами, и простѣйшими типами обыкновенныхъ дробей.—Простые пріемы приближенныхъ вычисленій (съ точностью не болѣе 1%).

3. Эта программа построена на принципѣ концентраціи матеріала; она можетъ быть выполнена въ 4 года (приблизительно) и подготовитъ дѣтей къ ученію объ уравненіяхъ. Программа пунктовъ C и D должна идти параллельно съ курсомъ Наглядной Геометріи, взаимно дополняя другъ друга.

Насколько предложенный курсъ исчисленія разнится отъ обычныхъ курсовъ ариѳметики — предоставляемъ

---

[1]) Сохранивъ въ программѣ терминъ „именованное число“ мы дѣлаемъ лишь уступку укоренившейся привычкѣ (въ Россіи); наша точка зрѣнія обоснована дальше.

судить читателямъ. Болѣе важные моменты курса будутъ сейчасъ освѣщены съ научной, исторической и методической точекъ зрѣнія; въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ будутъ оговорены всѣ крупныя исключенія изъ программы (періодическія дроби, курсъ обыкновенныхъ дробей, тройныя правила, отношенія и пропорціи и др.).

Одно общее замѣчаніе необходимо: *все исчисленіе этимъ не исчерпано.* Напротивъ—это лишь введеніе, первоначальныя свѣдѣнія. Дальнѣйшія—должны сообщаться при рѣшеніи уравненій (алгебра), при рѣшеніи треугольниковъ (геометрія, тригонометрія), при физическихъ и механическихъ проблемахъ, основанныхъ на расширенномъ понятіи о числѣ (ирраціональныя и мнимыя числа). Главнѣйшія ступени вычисленій: 1) *точныя* (полныя и упрощенныя), 2) *приближенныя*, 3) *логариѳмическія* и 4) *механическія* (счетные приборы и машины) должны быть пройдены въ теченіе средней школы, постепенно и по мѣрѣ надобности.

Числа и наименованія.

4. Вопросъ о „наименованіяхъ“ принадлежитъ къ числу проклятыхъ вопросовъ русской школы. Между тѣмъ наука установила давно:

1) Дѣйствія производятся лишь надъ числами.

2) Ариѳметическое число есть число абстрактное.

3) Именованныхъ чиселъ не существуетъ.

4) Именованныя количества обозначаются двумя символами.

5) Можно и имѣетъ смыслъ вводить въ вычисленія именованныя количества, при соблюденіи извѣстныхъ условій.

Первое и второе положеніе признаны окончательно [1]).

Что касается третьяго и четвертаго, то дѣло сводится къ слѣдующему.

Такъ называемое „именованное число“ появляется лишь при измѣреніи величины; но мы имѣемъ дѣло

---

[1]) См. напр. Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, éd. franç., 1904, t. I, v. I, гл. 1: „Основные принципы ариѳметики“, стр. 3: „Въ текстѣ будутъ разсматриваться только отвлеченныя числа; введеніе предметныхъ (concret) чиселъ безполезно въ ариѳметикѣ“.

не съ величинами, а лишь съ количествами, т.-е. съ конкретными величинами, подвергшимися измѣренію [1]). Измѣрить же—значитъ, найти зависимость между однородными конкретными величинами и ансамблемъ [2]) реальныхъ чиселъ. Это отображеніе величинъ на числа позволяетъ намъ выражать результаты при помощи сложныхъ символовъ, количественныхъ и качественныхъ. Запись „15 арш." обозначаетъ символически опредѣленное, измѣренное количество величины, называемой линейнымъ протяженіемъ. Здѣсь два символа: „15"—количественный, показывающій *отношеніе* даннаго количества къ выбранной единицѣ; „арш."—качественный, характеризующій *родъ* единицы [3]).

Пятое положеніе вовсе не противорѣчитъ первому. Если мы желаемъ узнать стоимость 6 арш. сукна, цѣною въ 2 р. 40 к. аршинъ, то мы вправѣ оперировать лишь надъ символами „6" и „240" (или 2,4), не обращая вниманія на остальные символы. Запись 6 . 2,4 или 2,4 . 6 безразлична; результатъ 14,4 или 1440 мы вправѣ истолковать какъ угодно. Условились въ данномъ случаѣ этотъ результатъ толковать, какъ количество денегъ, хотя имѣетъ смыслъ назвать его „аршино-рубли" или „аршино-копѣйки".

Вопросъ о сложныхъ наименованіяхъ, конечно, недоступенъ младшему возрасту. На дальнѣйшихъ ступеняхъ обученія, въ физикѣ и механикѣ, сложныя наименованія появляются поминутно и не вызываютъ никакихъ возраженій. Кто не знаетъ нашихъ „лошадь верста"? „Пудо-футъ"? и др. Общеупотребительны и записи въ родѣ:

$$\frac{\text{объемъ}}{\text{площадь}},\quad \frac{\text{объемъ}}{\text{линія}},\quad \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}},\quad \frac{\text{граммъ} \times \text{сантиметръ}}{\text{секунда}^{\,2}};$$

---

[1]) Терминологія этого вопроса на русскомъ языкѣ совершенно не выдержана. Такъ, надо говорить: „протяженіе", если имѣютъ въ виду величину, какъ понятіе, и „длина", если имѣютъ въ виду количество (напр. длина комнаты); „прямая" (величина) и „отрѣзокъ" (напр. AB), и т. п. Къ тому же слово „величина" само употребляется въ двухъ значеніяхъ; напр. „скорость есть величина" и „величина скорости свѣта = 300.000 $\frac{\text{мет.}}{\text{сек.}}$"; въ послѣднемъ случаѣ правильнѣе употреблять слово „размѣръ".

[2]) Совокупность, множество.

[3]) Установлено впервые Фурье (1822) и разработано детально Гельмгольцемъ (1887).

первыя три встрѣчаются уже при рѣшеніи простѣйшихъ задачъ на объемы и движеніе, хотя авторы учебниковъ умалчиваютъ о возможности и правильности такихъ вычисленій и допускаютъ ихъ нехотя.

Извѣстны, законны и употребительны записи и такія:

$$\frac{180\ \pi}{60\ \text{сек.}} = 3\pi\ \frac{1}{\text{сек.}};\quad \frac{60}{600\ \text{саж.}} = \frac{1}{10\ \text{саж.}};\quad \frac{6000}{5\ \text{мин.}} = \frac{20}{\text{сек.}};$$

первая обозначаетъ, что колесо въ минуту дѣлаетъ 90 оборотовъ, и его угловая скорость $=3\ \pi$; вторая, что телеграфные столбы находятся на разстояніи 10 саж. другъ отъ друга; третья, что маховикъ паровой машины обладаетъ *частотой* 20, такъ какъ дѣлаетъ 6000 оборотовъ въ 5 мин.

Указанные случаи принадлежатъ къ числу тѣхъ, относительно которыхъ человѣчество сговорилось, *условилось толковать ихъ такъ*, а не иначе. Область такихъ условныхъ толкованій все разростается въ зависимости отъ роста науки; объ общемъ же случаѣ перемноженія (или дѣленія) двухъ количествъ съ различными наименованіями, и притомъ *не* однородными, *можно*, конечно, говорить, но не въ ариѳметикѣ, а въ *теоріи* векторовъ [1]).

Этими положеніями вопросъ о наименованіяхъ въ общемъ выясненъ. Безполезно только что разобранные случаи сообщать дѣтямъ — они ничего не поймутъ и лишь запутаются. Но одинъ случай доступенъ и младшему возрасту. Именно, можно указать дѣтямъ, что результатъ какого-либо дѣйствія можетъ быть нами истолкованъ различно, въ зависимости отъ тѣхъ значеній, какія мы придадимъ взятымъ числовымъ символамъ. Возьмемъ одинъ примѣръ.

$8 + 7 + 9 = 24$ (если это мальчики),
$= 8$ саж. („ „ аршины),
$= 1^1/_2$ арш. („ „ вершки),
$= 2$ дюж. („ „ перья, яйца),
$= 2$ дес. и 4 штуки (если это груши),
$=$ сутки (если это часы), и т. п.

---

[1]) См., напр., популярное изложеніе этого вопроса у *Перри*, Практическая математика, пер. съ англ., 1909, стр. 174 и далѣе.

Изложенное позволяетъ сдѣлать важные методическіе выводы. *Во-первыхъ*, должны исчезнуть изъ обихода фразы: „множитель не можетъ быть числомъ именованнымъ“, „нельзя дѣлить отвлеченное число на именованное“, такъ какъ всѣ дѣйствія должны производиться надъ отвлеченными числами; *во-вторыхъ*, должны прекратиться выкрики при письменномъ производствѣ дѣйствій: „гдѣ наименованіе?“, „развѣ можно ставить наименованіе?“, выкрики, составляющіе печальную привиллегію экзаменаторовъ и школьныхъ инспекторовъ. Результатъ дѣйствія долженъ быть истолкованъ, сообразуясь со смысломъ вопроса и содержаніемъ задачи, но никакими этикетками снабжать числа при дѣйствіяхъ надъ ними—*нельзя*.

Въ-третьихъ, должно исчезнуть знаменитое двойное дѣленіе. *Дѣленіе существуетъ лишь одно*, какъ въ наукѣ, такъ и въ жизни, а именно—*дѣленіе по содержанію*. Пора положить предѣлъ извращенію математики и коверканію дѣтей. Сколько слезъ было пролито дѣтьми изъ-за неумѣнія разобраться въ вопросѣ о дѣленіи на части и дѣленіи по содержанію...

Опредѣленія. 5. Вопросъ о дѣленіи связанъ съ вопросомъ объ опредѣленіяхъ дѣйствій. Устанавливая понятіе о прямыхъ и обратныхъ дѣйствіяхъ, мы будемъ вторыя опредѣлять при помощи первыхъ. Такъ, вычесть значитъ по данной суммѣ и одному изъ слагаемыхъ найти второе слагаемое; раздѣлить значитъ по данному произведенію и одному изъ множителей найти второй множитель. Кромѣ того, дѣленіе есть упрощенное вычисленіе, поэтому вмѣсто сказать: „узнай, сколько разъ надо вычесть по 5 изъ 28“, говорятъ: „... сколько разъ 5 содержится въ 28“.

Необходимо сговориться еще относительно терминовъ. Для иллюстраціи остановимся подробнѣе на терминологіи сложенія. Что значитъ сложить? Полезно указать дѣтямъ, что слово „сложить“ употребляется въ различныхъ смыслахъ: сложить печку, сложить недоимки, сложить обязанности, сложить два числа. Далѣе, *слагаемое* число—терминъ болѣе легкій; въ немъ заключена идея подчиненія; слагаемое—причастье страдательнаго залога, какъ и любимое, несомое, и т. п. Въ

вычитаніи такая же терминологія: уменьшаемое, вычитаемое, разность. За то въ умноженіи — неправильности. Если умноженіе есть упрощенное сложеніе, то правильнѣе говорить: множимыя (числа), вмѣсто обычно принятаго теперь — множители; совершенно нелѣпо употреблять старые термины — множимое и множитель. Наконецъ, въ дѣленіи, какъ упрощенномъ вычитаніи, правильнѣе говорить: дѣлимое, дѣлящее и отношеніе — вмѣсто дѣлимое, дѣлитель и частное. Но измѣнить укоренившуюся, хотя и неправильную, терминологію — дѣло нелегкое!

Съ точки зрѣнія дальнѣйшаго развитія курса не слѣдуетъ говорить дѣтямъ, что вычесть значитъ уменьшить, а умножить — увеличить. Лучше объ этомъ умолчать. Уже при дѣйствіяхъ надъ дробями умноженіе не является иногда увеличеніемъ, а уменьшеніемъ; вычитаніе отрицательнаго числа даетъ увеличеніе уменьшаемаго; наконецъ, увеличеніе и уменьшеніе теряютъ смыслъ въ примѣненіи къ комплекснымъ числамъ.

Изъ первыхъ 4 дѣйствій одно лишь сложеніе нуждается въ независимомъ опредѣленіи. Дѣйствительно, вычитаніе и дѣленіе опредѣляются при помощи сложенія и умноженія; что же касается умноженія, то его можно и слѣдуетъ опредѣлять при помощи сложенія. Но какъ опредѣлить само сложеніе? „Опредѣлить [1]) сложеніе, говоря, что оно состоитъ въ прибавленіи, значитъ—вовсе его не опредѣлить. Все, что можно сдѣлать, это — начать съ ряда конкретныхъ примѣровъ, а затѣмъ сказать: дѣйствіе, которое мы производимъ, называется сложеніемъ“.

Мы предлагаемъ слѣдующій путь: 1) сначала опредѣлить сумму, какъ число, заключающее въ себѣ всѣ данныя; 2) затѣмъ — сложеніе такъ: сложить, значитъ найти сумму; 3) далѣе—произведеніе есть сумма, най-

---

[1]) *Poincaré*, Les définitions générales en mathématiques, 1904, стр. 14. — Пользуемся случаемъ указать, что основы ариѳметики до сихъ поръ окончательно не установлены; опредѣленіе сложенія, повидимому, весьма затруднительно; единственное возможное и исполнимое въ школѣ требованіе — это, что-бы опредѣленія дѣйствій подчинялись принципу перманентности.

денная упрощеннымъ пріемомъ; 4) наконецъ, умножить значитъ найти произведеніе.

Упрощенныя вычисленія. 6. Никто не станетъ отрицать пользы письменныхъ вычисленій — въ опредѣленныхъ случаяхъ они неизбѣжны. Но пріучать дѣтей поминутно хвататься за карандашъ и бумагу—это обречь ихъ мышленіе на застой. Устныя вычисленія могутъ быть полезны съ педагогической точки зрѣнія; умственныя — полезны съ педагогической, психологической, практической. Мы ограничимся здѣсь нѣсколькими существенными указаніями.

Сложеніе. Пользуясь сочетательнымъ и перемѣстительнымъ законами, имѣемъ: $32 + 19 + 8 + 1 = 32 + 8 + 19 + 1 = (32 + 8) + (19 + 1) = 40 + 20 = 60$; $243 + 628 + 97 = 243 + 627 + 98 = 870 + (100 - 2) = 970 - 2 = 968$. Это такъ называемый пріемъ закруглимыхъ чиселъ.

Лишнее, кажется, добавлять, что подобныя преобразованія дѣти должны выполнять въ умѣ; записаны должны быть только слагаемыя. Примѣрами могутъ послужить, между прочимъ, магическіе квадраты; одинъ изъ нихъ приводимъ. Эти квадраты полезны еще въ двухъ отношеніяхъ. Во 1-хъ, они могутъ заинтересовать дѣтей и побудятъ ихъ составлять подобные квадраты на задуманныя заранѣе суммы, что́ въ то же время явится прекраснымъ упражненіемъ въ счисленіи; во II-хъ, они знакомятъ съ идеей функціональной зависимости. Такъ въ указанномъ случаѣ имѣемъ $175 = \sum_{n=1}^{n=7} a_n$, т.-е. 175 есть функція семи слагаемыхъ (горизонтальные, вертикальные, діагональные ряды въ суммѣ даютъ 175).

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

	7	6	4	5	2	6
		2	9	0	5	2
9	2	9	3	5	7	8
	8	8	2	2	6	3

19
20
12
18
25
17
9
10969419

При сложеніи большихъ чиселъ можно поступать такъ: сначала выписать наискось всѣ суммы отдѣльныхъ разрядовъ, а затѣмъ сложить ихъ (стр. 226, внизу).

Вычитаніе. „Въ [1]) настоящее время, повидимому, не возникаетъ уже сомнѣній насчетъ того, что дополнительная метода вычитанія—самая удобная и быстрая; слѣдовательно, она можетъ быть усвоена почти съ самаго начала". Эти слова знаменитаго физика подтверждаются тысячелѣтнимъ опытомъ человѣчества. Вездѣ, гдѣ можно, люди (сначала безсознательно, а теперь — сознательно) замѣняютъ обратный счетъ прямымъ. Вотъ нѣсколько примѣровъ: $24 - 17 = (17 + 3 + 4) - 17 = 7$; $174 - 98 = 174 - 100 + 2 = 76$; $354 - 149 = 354 + 51 - 200 = 205$, и т. п.

Это позволяетъ сложеніе и вычитаніе производить совмѣстно, вводя ариѳметическое дополненіе, или же попросту располагая вычитаемыя между слагаемыми. Вотъ оба пріема: 1) $8 + 1 = 9$, $9 - 5 = 4$, $4 + 5 = 9$, $9 - 3 = 6$, $6 + 2 = 8$ и т. д. 2). Складываютъ всѣ числа и откидываютъ 2 отъ разряда тысячъ.

578	578	
431	431	
— 275	725	— 1000
925	925	
— 803	197	— 1000
542	542	
1398	1398	

Воспользуемся теперь ариѳметическимъ дополненіемъ для производства повѣрки сложенія. Для этого возьмемъ дополненіе суммы 10969419, найденной нами выше, и прибавимъ къ нему всѣ 4 слагаемыхъ; результатъ (единица съ нулями) показываетъ, что сложеніе было выполнено вѣрно. Этотъ способъ позволяетъ легко открыть ошибку въ сложеніи. Пусть дано $584 + 752 + 915 + 4807$, и мы нашли сумму 6858. Дѣлаемъ повѣрку; результатъ 10200 показываетъ, что сдѣлана ошибка въ третьемъ разрядѣ; настоящая сумма составляетъ 7058.

89030581	3142
764526	584
29052	752
9293578	915
882263	4807
100000000	10200

Умноженіе. Больше всего разнообразныхъ пріемовъ,

[1]) *Оливеръ Лоджъ*, Легкая математика, пер. съ англ., 1909, стр. 21.

имѣющихъ цѣлью упростить или облегчить выкладки, придумано для умноженія. Такъ, всѣмъ извѣстны пріемы умноженія на 5, 25, 75, 9, 11, и т. п. Мы ограничимся здѣсь указаніемъ менѣе извѣстныхъ или же обобщающихъ пріемовъ.

По способу *Гаусса* всякое умноженіе можно привести къ умноженію на 5 и на 2. Напр. $47 . 34 = 34 . 47 = 34 . 20 + 34 . 20 + 34 . 2 + 34 . 5 = 1598$.

По способу *Коллиньона* можно пользоваться лишь умноженіемъ на 2. Тогда $47 . 34 = 34 . 47 = 34 . 20 + 34 . 20 + 34 . 2 + 34 . 2 + 34 . 2 + 34 = 1598$.

По способу *дополненія*: $47 . 34 = 34 . (50-3) = 34 . 50 - 34 . 3 = 1700 - 102 = 1598$. Этотъ способъ особенно удобенъ, если одинъ изъ множителей близокъ къ круглому числу.

При перемноженіи большихъ чиселъ можно поступать такъ. Требуется найти 34 289 764 526 . 425 415 234.

1	34289764526
2	68579529052
3	102869293578
4	137159058104
5	171448822630

```
      137159058104
     102869293578
      68579529052
    171448822630
     34289764526
   137159058104
  171448822630
   68579529052
137159058104
------------------------
14587388199633189084
```

Сначала находимъ частныя произведенія, причемъ умноженіе на 3 замѣняется сложеніемъ двухъ первыхъ строчекъ, умноженіе на 4—умноженіемъ второй строчки на 2, и умноженіе на 5—сложеніемъ второй и третьей. Теперь выписываемъ частныя произведенія въ надлежащемъ порядкѣ и складываемъ ихъ.

Этотъ способъ имѣетъ педагогическое значеніе, но злоупотреблять имъ не слѣдуетъ, такъ какъ на практикѣ произведеніе большихъ чиселъ находится всегда по таблицамъ.

Здѣсь умѣстно обратить вниманіе на общепринятый способъ записей при умноженіи. Можно съ увѣрен-

ностью утверждать, что онъ — наименѣе удобенъ изъ всѣхъ возможныхъ. Вмѣсто одного способа необходимо прибѣгать къ различнымъ; выборъ ихъ зависитъ отъ вида множителей. Вотъ нѣсколько примѣровъ. a) Дано 543 . 8. Пишемъ на доскѣ (или на бумагѣ) 543; затѣмъ вмѣсто многосложнаго „громкаго“ умноженія пишемъ, какъ здѣсь указано, произнося лишь написанное.

```
                24 —    4
32 + 2, 34 —    4
40 + 3, 43 — 4344
```

b) При умноженіи числа на двузначнаго множителя, одна изъ цыфръ коего есть 1, располагаемъ запись, какъ указано

```
  7158 . 31      7158 . 13
21474            21474
------------     ------------
221898           93054
```

c) Если множитель такого вида, что одна его часть составляетъ кратное другой, то умноженіе выполняется очень просто. Такъ, 147 состоитъ изъ 14 и 7, 5829 изъ 58 и 29, 3612 изъ 36 и 12, и т. п. Приводимъ запись умноженія 7642 на 5829

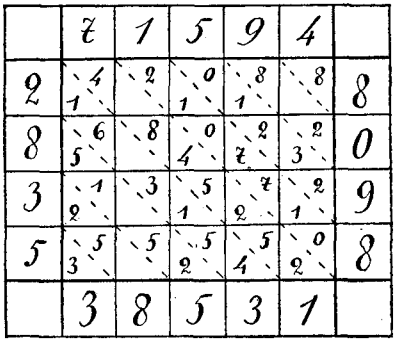
```
   229260
     7642 . 58 29
   ---------------
   221618
  443236
  ----------------
  44545218
```

Имѣемъ: 29 = 30 — 1, поэтому помножаемъ 7642 на 30, пишемъ надъ 7642 и вычитаемъ, затѣмъ полученную разность удваиваемъ и подписываемъ черезъ два разряда влѣво: получается послѣ сложенія искомое произведеніе. d) Если множитель одно изъ чиселъ 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, то можно разсматривать 5 какъ полдесятка. Тогда, напр., имѣемъ:

```
 456 . 65 = 29640;    7143    . 35 = 250005
2736                 21429
 228                 35715
```

e) При умноженіи большихъ чиселъ можно пользоваться квадратной бумагой и расположить вычисленіе по *индусскому способу*. Если даны множители 71594 и

5382, то пишемъ перваго горизонтально, второго вертикально, а частныя произведенія записываемъ, какъ указано. Складывая затѣмъ по діагоналямъ, найдемъ искомое произведеніе (чер. 26). f) Русскіе крестьяне пользуются послѣдовательнымъ удвоеніемъ. Дано 57 . 83=4731. Они пишутъ въ двухъ столбцахъ



Чер. 26.

57	83 +
28	166
14	332
7	664 +
3	1328 +
1	2656 +

Складывая числа праваго столбца со знакомъ +, получимъ 4731. Этотъ пріемъ особенно удобенъ, если оба множителя приблизительно одного типа (двухзначные, трехзначные и т. п.).

Наконецъ укажемъ нѣсколько интересныхъ произведеній, съ которыми полезно познакомить дѣтей; эти примѣры надо давать при случаѣ.

1 . 9 + 2 = 11	9 . 9 + 7 = 88
12 . 9 + 3 = 111	98 . 9 + 6 = 888
123 . 9 + 4 = 1111	987 . 9 + 5 = 8888
1234 . 9 + 5 = 11111	9876 . 9 + 4 = 88888
12345 . 9 + 6 = 111111	98765 . 9 + 3 = 888888
123456 . 9 + 7 = 1111111	987654 . 9 + 2 = 8888888
1234567 . 9 + 8 = 11111111	9876543 . 9 + 1 = 88888888
12345678 . 9 + 9 = 111111111	98765432 . 9 + 0 = 888888888
123456789 . 9 + 10 = 1111111111	987654321 . 9 — 1 = 8888888888

1 . 8 + 1 = 9	12345679 . 9 = 111111111
12 . 8 + 2 = 98	12345679 . 18 = 222222222
123 . 8 + 3 = 987	12345679 . 27 = 333333333
1234 . 8 + 4 = 9876	12345679 . 36 = 444444444.
12345 . 8 + 5 = 98765	12345679 . 45 = 555555555
123456 . 8 + 6 = 987654	12345679 . 54 = 666666666
1234567 . 8 + 7 = 9876543	12345679 . 63 = 777777777
12345678 . 8 + 8 = 98765432	12345679 . 72 = 888888888
123456789 . 8 + 9 = 987654321	12345679 . 81 = 999999999

15873 . 7 = 111111	143 . 7 . 111 = 111111
31776 . 7 = 222222	143 . 7 . 222 = 222222
47619 . 7 = 333333	143 . 7 . 333 = 333333
63492 . 7 = 444444	143 . 7 . 444 = 444444
79365 . 7 = 555555	. . . . .
95238 . 7 = 666666	143 . 7 . 999 = 999969
111111 . 7 = 777777	143 . 7 . 512 = 512512
126984 . 7 = 888888	143 . 7 . 130 = 130130
142857 . 7 = 999999	. . . . .

Въ 5-мъ примѣрѣ первые множители составляютъ ариѳметическую прогрессію, разность которой равна первому члену. Въ 6-мъ примѣрѣ имѣемъ вообще: 143 . 7 . a = 1001 . a = a тысячъ + a; a можетъ имѣть всѣ значенія отъ 1 до 999. Если a двузначно или однозначно, то обѣ половины произведенія будутъ раздѣлены нулями.

Другіе замѣчательные случаи можно найти у Лезана, Фуррея и Мартеля (см. литерат. указ. ко II части).

Дѣленіе. То, что мы говорили о расположеніи вычисленій раньше, относится и къ дѣленію. Разница лишь та, что дѣлить на практикѣ приходится рѣже, чѣмъ умножать или складывать, поэтому для дѣленія придумано меньше пріемовъ. Мы укажемъ лишь два.

Въ прежнее время расположеніе дѣлимаго, дѣлителя и частнаго было иное (оно до сихъ поръ удержалось въ Англіи) и—кстати сказать—болѣе удобное. Пусть дано раздѣлить 853875 на 825.

```
825 | 853875 | 1035
    |  2887  |
    —  2475
       4125
    —  4125
       0
```

Пишемъ слѣва дѣлитель, посрединѣ дѣлимое, справа частное, и говоримъ: 825 содержится въ 853 одинъ разъ, и т. д. Привычка писать въ остаткѣ вмѣсто 0 рядъ черточекъ или запятыхъ, по двѣ на цыфру, очень распространена, но безсмысленна; надо пріучать дѣтей писать и говорить правильно: остатокъ равенъ нулю, въ остаткѣ нуль.

При дѣленіи большихъ чиселъ полезно пользоваться пріемомъ, аналогичнымъ указанному раньше въ умноженіи. Напр. при дѣленіи 4539947812346 на 73809 сначала составляемъ рядъ произведеній дѣлителя на числа отъ 1 до 9, причемъ умножаемъ лишь на 2 (для нахожденія второй, четвертой, шестой и восьмой строки); остальныя строки находятся при помощи сложенія.

```
1 | 73809      73809 |  4539947812346 | 6150406
2 | 147618           |  442854
3 | 221427           |   111407
4 | 295236           |    73809
5 | 369045           |   375988
6 | 442854           |   369045
7 | 516663           |     694312
8 | 590472           |     664281
9 | 664281           |      300313
                       |      295236
                       |        507746
                       |        442854
                       |         64892
```

Выгода указаннаго пріема очевидна: вмѣсто того, чтобы находить частное по догадкѣ, мы справляемся лишь съ первой таблицей и, кромѣ того, имѣемъ готовыя произведенія дѣлителя на соотвѣтствующія „цыфры“ частнаго. И здѣсь мы поступаемъ согласно съ безсознательнымъ стремленіемъ человѣка — примѣнять прямой счетъ вмѣсто обратнаго.

Прогрессіи и ряды.

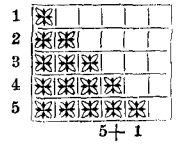
7. Въ настоящее время числовые ряды и прогрессіи отнесены къ ариѳметикѣ [1]); надо признать, что давно пора сдѣлать это. Нахожденіе такихъ суммъ, какъ суммы рядовъ натуральнаго, четнаго, нечетнаго, квадратнаго, кубичнаго, суммы ариѳметической и геометрической прогрессій—

[1]) См., напр., упоминаемую нами *Encyclopédie* etz., гдѣ ариѳметическая прогрессія поставлена послѣ сложенія, геометрическая— послѣ умноженія; *Schwering*, Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer, 1907, стр. 7, гдѣ онѣ отнесены къ умноженію; *Borel*, Arithmétique, 1-er cycle, 1907, и др.

не только доступно начинающимъ, но и связано съ важными педагогическими и практическими выгодами. Широкое примѣненіе графикъ и другихъ лабораторныхъ пріемовъ возможно именно здѣсь; интересныя и разнообразныя примѣненія этихъ суммъ связываютъ ариѳметическіе вопросы съ жизнью и явленіями природы; наконецъ, здѣсь дѣти впервые столкнутся съ расширяющими ихъ горизонтъ понятіями, они ознакомятся практически съ источниками большихъ чиселъ и изучатъ, легко и шутя, *нѣкоторыя основныя ихъ* свойства.

Перейдемъ къ нахожденію нѣкоторыхъ суммъ.

Натуральный рядъ. Найдемъ сумму 5 первыхъ членовъ ряда 1, 2, 3, 4, 5... Для этого на квадратной бумагѣ отмѣчаемъ одинъ квадратъ, подъ нимъ—два, еще ниже—три, четыре и пять. Перевернемъ мысленно полученную фигуру (чер. 27) и приложимъ къ первой; полученный прямоугольникъ содержитъ вдвое больше квадратовъ, чѣмъ ихъ заключается въ искомой суммѣ. Такъ какъ въ прямоугольникѣ всего

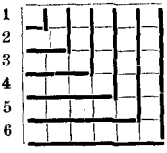


Чер. 27.

$(5+1).5$ квадратовъ, то искомая сумма $= \frac{(5+1)5}{2}$. Число 15 и есть сумма первыхъ пяти членовъ натуральнаго ряда.

Пользуясь методомъ индукціи, можно найти сумму любого числа членовъ этого ряда; если возможно, то лучше прибѣгнуть къ обобщенію и ввести формулу $S_{нат.} = \frac{(n+1).n}{2}$, гдѣ n—число членовъ.

Четный рядъ. Замѣчая, что каждый членъ ряда 2, 4, 6, 8, 10.. вдвое больше соотвѣтствующаго члена натуральнаго ряда, заключаемъ, что сумма четнаго ряда изъ n членовъ вдвое больше суммы n членовъ натуральнаго ряда, т. е. $S_{чет.} = (n+1).n$.

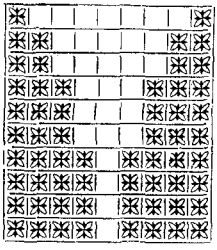


Чер. 28.

Нечетный рядъ. Ограничимся для вывода формулы суммою 6 членовъ. Располагая квадратики, какъ указано (чер. 28), мы получаемъ рядъ квадратовъ и въ

суммѣ тоже квадратъ, сторона котораго равна 6. Поэтому искомая сумма равна 6^2, откуда $S_{нечч.} = n^2$.

Квадратный рядъ. Сумма первыхъ 4 членовъ ряда 1, 4, 9, 16,.... равна 30. Для вывода формулы строимъ фигуру слѣва (чер. 29), затѣмъ симметричную — черезъ квадратикъ справа; получаемъ, замыкая, прямоугольникъ со сторонами $(2 . 4 + 1)$ и $(1 + 2 + 3 + 4)$. Такъ какъ число квадратиковъ въ средней фигурѣ равно числу квадратиковъ въ каждой изъ боковыхъ, то искомая сумма равна $\frac{1}{3}$ прямоугольника. Но $1 + 2 + 3 + 4$ есть не что иное, какъ сумма натуральнаго ряда, т. е. $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{(4+1)4}{2}$; поэтому площадь прямоугольника $= \frac{(2 . 4 + 1)(4+1)4}{2}$, откуда искомая сумма $= \frac{(2 . 4 + 1)(4+1) . 4}{6}$. Итакъ $S_{кв.} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.



Чер. 29.

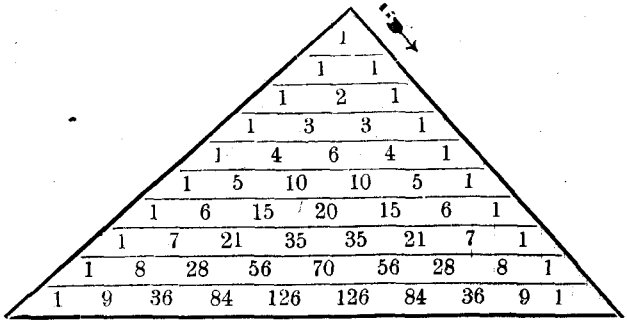
Кубичный рядъ [1]). По образцу чер. 28-го (чер. 30) находимъ, что сумма квадратиковъ $1 + 8 + 27$ составляетъ квадратъ со стороною $(1 + 2 + 3)$, т. е. $\frac{(3+1) . 3}{2}$. Но послѣднее выраженіе есть сумма натуральнаго ряда, слѣдовательно, сумма кубичнаго ряда есть квадратъ суммы того же числа членовъ натуральнаго ряда. Итакъ $S_{куб.} = S^2_{нат.}$.

Чер. 30.

Ариѳметическій треугольникъ. Напишемъ рядъ единицъ, подъ угломъ въ 45° (лучше всего на разграфленной бумагѣ), въ направленіи, указанномъ стрѣлкой (чер. 31). Складывая почленно единицы и записывая получаемыя суммы во второй строкѣ, параллельно первой, получимъ натуральный рядъ чиселъ; подоб-

[1]) Простѣйшіе ряды суммировались еще египтянами, вавилонянами и греками. Выраженіе для суммы квадратнаго ряда извѣстно подъ названіемъ формулы Архимеда; суммированіе кубичнаго ряда извѣстно было Пиѳагору, но общее выраженіе встрѣчается лишь въ *Codex Arcerianus* (II ст. п. Р. Х.).

ное же сложеніе натуральнаго ряда дастъ третью строку (1, 3, 6, 10, 15,...). Изъ третьей тѣмъ же пріемомъ получаемъ четвертую, изъ четвертой — пятую, и т. д. Зная способъ построенія рядовъ, можно теперь придти къ треугольнику болѣе короткимъ путемъ. Для этого



Чер. 31.

въ вершинѣ напишемъ одну единицу, во 2-ой горизонтальной строкѣ—двѣ единицы; въ 3-ей горизонтальной строкѣ мы получимъ рядъ 1, 2, 1, причемъ 2 получилось изъ 1+1, стоящихъ справа и слѣва надъ двойкой. Въ 4-ой строкѣ такимъ образомъ получится рядъ 1, 3, 3, 1; продолжая, мы получимъ сколько угодно горизонтальныхъ строкъ.

Ариѳметическій треугольникъ былъ извѣстенъ народамъ давно. Его примѣненія многочисленны и разнообразны [1]). На младшей ступени обученія можно сообщить слѣдующія подробности.

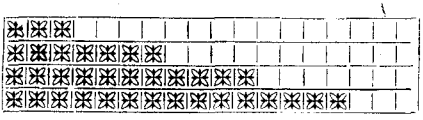
Каждая изъ горизонтальныхъ строкъ есть степень числа 11. Напр. $121 = 11^2$, $15101051 = 11^5$ и т. д. Затѣмъ сумма всѣхъ чиселъ каждой строки есть степень 2.

---

[1]) Ариѳметическій треугольникъ иначе называютъ треугольникомъ Паскаля, квадратомъ Фермата; ему даютъ нѣсколько различныхъ построеній. Самое удобное, по нашему мнѣнію, приведено здѣсь; оно впервые встрѣчается въ трактатѣ „Драгоцѣнное зеркало 4 началъ“ (1303 г. по Р. Х.) китайскаго математика Тшу-Ши-Ки (Tschuh-schi-kih). Приложенія треугольника встрѣчаются въ Комбинаторикѣ и Теоріи чиселъ. Горизонтальныя строчки даютъ коэффиціенты разложенія бинома Ньютона.

Такъ $1+2+1=2^2$, $1+4+6+4+1=2^4$ и т. д. Далѣе, каждая наклонная строка даетъ такъ наз. *фигурный рядъ чиселъ*; эти фигурныя числа различаются порядкомъ. Натуральный рядъ—фигурныя числа I-го порядка; рядъ ихъ суммъ—фигурныя числа II-го порядка и т. д. Между фигурными числами двухъ послѣдовательныхъ порядковъ существуетъ очевидная зависимость, которую легко провѣрить по треугольнику. Такъ, напр., сумма 6 чиселъ IV-го порядка есть 6-ое число V-го порядка ($1+4+10+20+35+56=126$).

Суммированіе фигурныхъ чиселъ различныхъ порядковъ выходитъ за предѣлы курса.



Чер. 32.

Ариѳметическая прогрессія. Общій случай прогрессіи можетъ быть изученъ наглядно слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ примѣръ $\div$ 3, 7, 11, 15, ... Сумма 4 членовъ равна 36. Ту же сумму можно представить графически квадратиками (чер. 32). Прикладывая къ полученной фигурѣ равную ей опрокинутую, мы придемъ къ прямоугольнику, высота коего равна 4 (числу членовъ), а основаніе есть сумма $15+3$ (т.-е. сумма крайнихъ членовъ). Отсюда площадь пр—ка $=(15+3)4$; но она ровно вдвое больше искомой суммы, поэтому $S_A=\frac{(15+3)4}{2}$ и вообще $S_A=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Формулу для S_A можно вывести и иначе. Если дана прогрессія $\div$ a_1, a_2, ... ,a_n, то строимъ прямоугольную трапецію, у которой верхнее основаніе есть a_1, нижнее a_n и высота n. Тогда площадь трапеціи есть

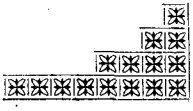
$$S_A=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

Наконецъ, ее можно получить ариѳметически. По чертежу мы видимъ, что сумма крайнихъ равна суммѣ равноотстоящихъ отъ начала и конца членовъ. Слѣдовательно, мы можемъ нашу прогрессію замѣнить рядомъ равныхъ слагаемыхъ, изъ коихъ каждое $=(a_1+a$),

а число ихъ $\frac{n}{2}$, т. е. половина прежняго числа членовъ. Итакъ $S_A = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

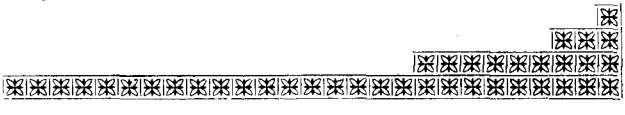
Въ частномъ случаѣ, при разности прогрессіи равной первому члену, имѣемъ $S_A = a + 2a + 3a + \ldots + na = a(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = a\frac{(n+1)n}{2}$; этотъ случай есть обобщеніе натуральнаго ряда.

Геометрическая прогрессія. Ограничимся разсмотрѣніемъ двухъ простѣйшихъ случаевъ.



Чер. 33.

Пусть данъ рядъ 1, 2, 4, 8, 16, ... Построивъ фигуру изъ квадратиковъ для 4 первыхъ членовъ (чер. 33), получимъ въ суммѣ 15, т.-е. на единицу меньше 5-го члена. Замѣчая, что $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, ..., нетрудно видѣть, что



Чер. 34.

$$1 + 2 = 2^2 - 1,$$
$$1 + 2 + 4 = 2^3 - 1,$$
$$1 + 2 + 4 + 8 = 2^4 - 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

откуда $S_{г,2} = 2^n - 1$.

Подобнымъ же образомъ для ряда 1, 3, 9, 27, 81, . . . находимъ

$$1 + 3 = (3^2 - 1) : 2,$$
$$1 + 3 + 9 = (3^3 - 1) : 2,$$
$$1 + 3 + 9 + 27 = (3^4 - 1) : 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

откуда $S_{г,3} = \frac{3^n - 1}{2}$.

Разнообразныя и многочисленныя приложенія геометрической прогрессіи на младшей ступени обученія недоступны; однако и здѣсь можно дать нѣсколько простыхъ и интересныхъ задачъ. Таковы задачи о шахматахъ, о покупкѣ дома и др., извѣстныя всѣмъ. Съ другой стороны, вопросъ о теплопроводности твердыхъ тѣлъ можетъ быть разсмотрѣнъ опытнымъ путемъ (рис. 35). Въ испытуемый брусокъ вставляютъ рядъ

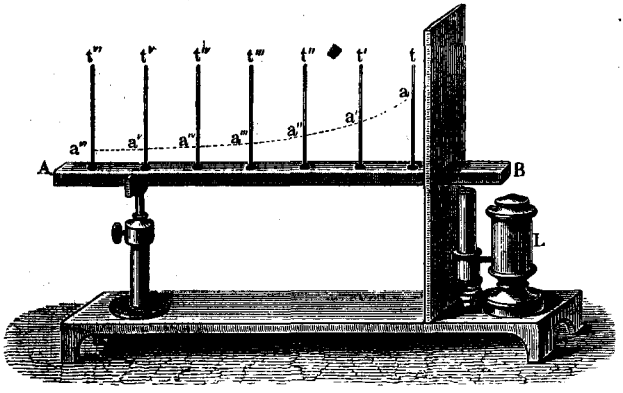


Рис. 35.

термометровъ, затѣмъ нагрѣваютъ конецъ B. Пунктирная кривая совпадаетъ по формѣ съ такой же кривой геометрической прогрессіи со знаменателемъ 3 (если ее провести на чер. 34); это—такъ называемая экспонентика. Другимъ интереснымъ вопросомъ физики является проблема вѣсовъ: требуется найти наименьшее число гирь, при помощи которыхъ можно взвѣсить тяжести отъ 1 ф. до 1 п. Если прибѣгать только къ разновѣскамъ, то могутъ представиться два случая: 1) гири кладутся на одну чашку (сложеніе); это гири въ 1, 2, 4, 8, 16, 32 фунта. Рѣшеніе дано Тарталья въ 1556 г. 2) гири кладутся на обѣ чашки (сложеніе и вычитаніе); это гири въ 1, 3, 9, 27 фунтовъ. Рѣшеніе дано еще Штифелемъ въ 1554 г. Если же пользоваться и одинаковаго вѣса гирями, то возможны

8 комбинацій; рѣшеніе задачи въ этомъ общемъ видѣ дано Макъ-Магономъ въ 1886 г.

Въ связи съ этой задачей находится „Таинственный вѣеръ“; его составленіе очень просто. На табличкѣ изъ картона въ лѣвомъ верхнемъ углу пишутъ 1, на второй—2, на третьей—4, на четвертой—8, и т. д. Затѣмъ, на первой выписываютъ числа по одному черезъ 1 (т.-е. нечетный рядъ), на второй—по два числа черезъ 2 (т.-е. 2, 3, 6, 7, 10, 11, . . .), на третьей—по четыре числа черезъ 4 и т. д. Если продолжить такое выписываніе на 7 табличкахъ до 99, то можно рѣшить задачу: по данному числу табличекъ угадать задуманное число. Для этого нужно лишь сложить начальныя числа выбранныхъ табличекъ. Напр., число 63 находится на табличкахъ 1-ой, 2-ой, 3-ей, 4-ой, 5-ой и 6-ой; складывая $1+2+4+8+16+32$, получаемъ 63. Число 27—на табличкахъ 1-ой, 2-ой, 4-ой и 5-ой, поэтому $1+2+8+16=27$, и т. п.

Эти развлеченія не только оживляютъ преподаваніе; они служатъ прекраснымъ введеніемъ въ таинственный міръ чиселъ.

Зависимости между рядами. Если составить рядъ разностей членовъ квадратнаго ряда, то получимъ нечетный рядъ. Изъ кубическаго ряда получаются ряды его разностей: 7, 19, 37, ...; 6, 12, 18, ...; 6, 6, 6, ...; 0, 0, 0, ... Изъ ариѳметической прогрессіи 1, 4, 7, 10, 13, ... посредствомъ суммированія находимъ рядъ 1, 5, 12, 22, 35, ..., который называется *пятиугольнымъ* рядомъ. Его общій членъ $=\frac{(3n-1)n}{2}$. Подобные же *многоугольные* ряды легко получаются изъ другихъ рядовъ.

Интересно отмѣтить еще одну зависимость. Именно, кубическій рядъ получается суммированіемъ группъ членовъ нечетнаго ряда:

$$\frac{1,}{1^3}\ \frac{3,\ 5,}{2^3}\ \frac{7,\ 9,\ 11,}{3^3}\ \frac{13,\ 15,\ 17,\ 19,}{4^3}\ \frac{21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,}{5^3}\ \ldots$$

Задачи на суммированіе рядовъ.

8. Если указанные ряды вводить въ курсъ исчисленія безъ всякой связи съ жизнью, то новый отдѣлъ станетъ такимъ же орудіемъ отупѣнія, какимъ является большин-

ство прежнихъ. Къ счастью, почти всѣ указанные примѣры могутъ быть даны подъ видомъ конкретныхъ задачъ. Такъ какъ, насколько намъ извѣстно, подобныя задачи не подобраны ни въ одномъ руководствѣ, то мы считали не лишнимъ дать здѣсь нѣсколько изъ нихъ.

1) Журавли летаютъ клиномъ: впереди одинъ журавль, за нимъ—два, дальше—три, и т. д. Сколько журавлей въ стадѣ, если всѣхъ рядовъ насчитали 8? (Отвѣтъ: 36).

2) Сколько кирпичей пойдетъ на постройку лѣстницы (въ видѣ прямоуг. тр—ка), если извѣстно, что въ длину ступенька содержитъ 10 кирпичей, а въ ширину—2, во всей же лѣстницѣ 100 ступенекъ? (Отвѣтъ: 101 тысяча).

3) Садовникъ каждый день занятъ поливкой 18 деревьевъ, разсаженныхъ вдоль аллеи на разстояніи 5 футовъ другъ отъ друга. На концѣ аллеи, на разстояніи 12 футовъ отъ крайняго дерева, находится колодезь. Сколько всего долженъ пройти ежедневно садовникъ, если онъ каждое дерево поливаетъ отдѣльно, т. е. долженъ 18 разъ брать воду изъ колодца? (Отвѣтъ: 280 саж. 2 ф.).

4) Рабочій по металлу ежегодно сберегаетъ 100 рублей, которые онъ отдаетъ въ банкъ по 4% (простыхъ). Какая сумма сбереженій образуется у него къ концу 20-го года? (Отвѣтъ: 2760 р.).

5) Ядра въ арсеналѣ складываютъ въ кучи; если ядра сферическія, то изъ нихъ складываютъ треугольную или квадратную кучу. Въ первомъ случаѣ сумма ядеръ равна суммѣ чиселъ фигурнаго ряда V-го порядка, во второмъ—суммѣ квадратнаго ряда.

6) Богачъ передъ смертью рѣшилъ раздать часть своего состоянія нищимъ, причемъ ежедневно раздавалъ 10 рублями больше, чѣмъ наканунѣ. Сколько онъ всего роздалъ, если въ первый день онъ далъ 5 рублей и вся раздача длилась 3 мѣсяца, съ марта по май? (Отвѣтъ: $5n^2=42320$ р.).

7) Сколько ударовъ въ сутки дѣлаютъ часы съ часовымъ боемъ? Съ получасовымъ? (Отвѣтъ: 152, 176).

8) Сосчитать очки въ колодѣ картъ, отбросивъ валеты, дамы и короли; на сколько увеличится прежнее число, если принять валета, даму и короля за 11, 12, 13? (Отвѣтъ: 220; 144).

9) Камень упалъ въ колодезь глубиною въ 17,64 метра. Черезъ сколько времени онъ достигнетъ дна, если въ первую секунду имъ пройдено 490 см., во вторую—въ 3 раза больше, въ третью—въ 5 разъ больше и т. д. (Отвѣтъ: 6 секундъ).

10) Бѣднякъ предложилъ богачу жить у него на слѣдующихъ условіяхъ. Бѣднякъ будетъ платить своему квартиранту ежедневно на 1 р. больше, чѣмъ наканунѣ, въ первый же день уплатитъ ему 1 р. Богачъ, напротивъ, долженъ платить такъ: въ первый день—копѣйку, во второй—двѣ, въ третій—четыре, въ четвертый—восемь и т. д. Въ видѣ опыта они заключили двухнедѣльное условіе. Кто изъ нихъ отказался отъ продолженія условія? (Отвѣтъ: богачъ, т. к. ему пришлось доплатить бѣдняку 58 р. 63 к.).

11) Игра въ „пикетъ“ состоитъ въ слѣдующемъ: одинъ изъ игроковъ называетъ число, меньшее 11, другой прибавляетъ къ нему новое, тоже меньшее 11, и т. д.; выигрываетъ тотъ, кто первый дойдетъ до 100. Извѣстно, что одинъ изъ игроковъ всегда можетъ выиграть; которымъ онъ долженъ играть? (Вторымъ, т. к. тогда онъ можетъ получить рядъ 12, 23, 34, . . ., 89, 100).

12) Что выгоднѣе: откладывать ежемѣсячно сбереженія копѣйками по 1, 3, 9, 27, . . ., полтинниками—по 1, 2, 4, 8, . . ., или рублями—по 1, 3, 5, 7, . . .? (На 6 мѣс.—рублями, на 7 мѣс.—полтинниками, на годъ—копѣйками).

Закончимъ этотъ отдѣлъ словами Лоджа: „отношеніе ученика къ примѣрамъ, придуманнымъ имъ самимъ, будетъ, навѣрно, гораздо болѣе вдумчивымъ, чѣмъ къ примѣрамъ, внушеннымъ ему со стороны. Весьма желательно, чтобы наряду съ рѣшеніемъ задачъ дѣти часто ихъ сами составляли. Я бы даже иногда предлагалъ имъ придумывать задачи для испытанія. Это хорошій способъ руководить ихъ работой, стоя какъ будто за кулисами“.

Измѣреніе времени.

9. Вопросы о системахъ мѣръ, способахъ измѣренія, происхожденіи тѣхъ или иныхъ единицъ мѣръ и т. п. принадлежатъ къ наиболѣе живымъ, выигрышнымъ мѣстамъ курса. Во что они превратились въ русской школѣ? Въ заучиваніе этикетокъ, единичныхъ отношеній, въ рѣшеніе задачъ искусственныхъ, а часто и безсмысленныхъ, какъ напр. пресловутыя „задачи на время". Чтó же удивительнаго тогда въ заявленіяхъ преподавателей и учащихся, что курсъ цѣлыхъ чиселъ—самый скучный отдѣлъ элементарной математики?

Не вдаваясь въ разсмотрѣніе всѣхъ вопросовъ измѣренія, ограничимся однимъ, наиболѣе важнымъ и наиболѣе страдательнымъ.

Къ счастью, авторы руководствъ еще не додумались до опредѣленія времени; за то они и не даютъ никакихъ поясненій объ образованіи понятій о суткахъ и годѣ. Первое понятіе—„сутки"—возникло гораздо раньше второго; оно—луннаго происхожденія. Равнина Месопотаміи и сосѣдней Персіи была ареной первыхъ астрономическихъ открытій; прозрачность атмосферы до сихъ поръ тамъ удивительна: сіяніе звѣздъ настолько интенсивно, что даже безъ луны можно читать мелкое письмо; многія свѣтила, невидимыя въ другихъ мѣстахъ, можно здѣсь наблюдать невооруженнымъ глазомъ. Наблюдая движеніе луны, нетрудно было замѣтить, что отъ одного полнолунія до другого солнце восходитъ и заходитъ 29 разъ, а полнолуніе повторяется 12 разъ въ году. Такъ возникъ первоначальный лунный годъ. Но затѣмъ оказалось, что число 29 не точно, и лунный мѣсяцъ содержитъ приблизительно $29^1/_2$ сутокъ. Тогда стали считать мѣсяцы въ 29 и 30 сутокъ, чтò для луннаго года дало 355 сутокъ.

Дальнѣйшія наблюденія производились надъ солнцемъ. Болѣе продолжительный солнечный циклъ даетъ тоже рядъ повторяющихся событій: смѣну временъ года, прилетъ и отлетъ птицъ и др. явленія можно было поставить въ связь съ движеніемъ солнца на небесной сферѣ. Въ созвѣздіи Большого Пса находится яркая звѣзда Сиріусъ. Древніе египтяне замѣтили, что при восходѣ солнца она становится видимой лишь въ пе-

ріодъ наступленія разлитія Нила, почему и окрестили ее именемъ „Песья звѣзда“ (по аналогіи съ чуткой собакой); въ другое время года Сиріусъ и солнце одновременно не были видны [1]). Установивъ одинъ фактъ, свидѣтельствующій о движеніи солнца, легко было дальше замѣтить, что солнце, передвигаясь среди неподвижныхъ звѣздъ, пересѣкаетъ 12 большихъ созвѣздій и опять возвращается въ первоначальное положеніе. Эти 12 созвѣздій (ихъ названія можно найти въ календарѣ) расположены приблизительно на равныхъ разстояніяхъ, такъ что въ каждомъ солнце находится приблизительно 30 съ лишнимъ сутокъ и такимъ образомъ путь свой совершаетъ въ 365 сутокъ.

Этотъ двойной счетъ времени постарались согласовать и изъ двухъ чиселъ 355 и 365 выбрали среднее— 360. Начертивъ окружность (видимый путь солнца), раздѣлили ее на 12 частей, а каждую часть на 30 болѣе мелкихъ дѣленій. Впослѣдствіи каждое дѣленіе уменьшили еще въ 60 разъ и назвали „pars minuta prima“ (часть уменьшенная первая); затѣмъ при дальнѣйшемъ дѣленіи получилась „pars minuta secunda“ (часть уменьшенная вторая). Съ теченіемъ времени изъ перваго названія были выброшены слова „pars“ и „prima“, а изъ второго — „pars“ и „minuta“; такъ образовались наши названія *минута* и *секунда*.

Однако, солнце не пожелало считаться съ человѣческими удобствами, и годъ на самомъ дѣлѣ состоитъ изъ 365 сутокъ, 5 часовъ 48 минутъ 47,8... секундъ. Пришлось устроить сначала 5 добавочныхъ дней, которые были посвящены извѣстнымъ въ то время планетамъ: Меркурію, Венерѣ, Марсу, Юпитеру и Сатурну [2]). Дальнѣйшія поправки были введены греческимъ астрономомъ Метономъ (золотое число 19, въ 432 г. до Р. Х.) и Юліемъ Цезаремъ (въ 46 г. до Р. Х.), рѣшившимъ считать излишекъ въ 5 часовъ 48 минутъ съ секундами за $^1/_4$ сутокъ. При этомъ получалась ошибка въ 1 сутки

---

[1]) Соотвѣтственно съ этимъ египтяне высчитали, что полное совпаденіе восхода солнца и Сиріуса происходитъ лишь черезъ полторы тысячи лѣтъ; это послужило поводомъ для созданія красивой легенды о птицѣ—фениксѣ, возрождающейся изъ пепла.

[2]) Ср. названія дней недѣли на франц. и нѣмец. яз.

на каждые 129 лѣтъ, что̀ было указано Роджеромъ Бэкономъ. Но только въ 1583 г. папа Григорій XIII повелѣлъ считать по „григоріанскому“. Однако, и здѣсь ошибки избѣжать не удалось; поэтому года 4840, 8440 и т. д. будутъ не високосные, а простые.

Вернемся къ названіямъ. У всѣхъ народовъ названіе „годъ“ связано съ замкнутымъ цикломъ. Такъ, римское „annus“ означаетъ *кольцо*, греческое „ἐνιαυτός“— въ себя самого возвращающійся; англійское „year“, нѣмецкое „yahr“ происходятъ отъ шведскаго „yra“, означающаго *кольцо*; въ свою очередь несомнѣнна связь между „yra“ и римскимъ „gyrus“, сохранившемся въ названіи *гироскопъ*. Русское „годъ“, вѣроятно, греческаго происхожденія, отъ „ὁδός“—путь.

Названія мѣсяцевъ римскаго происхожденія, что же касается дней недѣли, то каждый изъ нихъ посвященъ одной изъ планетъ, считая солнце и луну. Луна имѣетъ 4 фазы, поэтому въ мѣсяцѣ 4 недѣли. Дѣленіе на мѣсяцы—пережитокъ и сейчасъ уже ничѣмъ не связано съ фазами луны.

Арійцы считали не дни, а ночи, т. к. луна и ея фазы видимы именно ночью, и слѣды этого остались до сихъ поръ. Такъ въ англійскомъ языкѣ: 2 недѣли = fortnight (14 ночей), недѣля = sevenight (7 ночей); годъ = twelvemonth (12 лунъ = 12 мѣсяцевъ), наряду съ „year“ (лѣто).

Для запоминанія нашихъ причудливыхъ календарныхъ чиселъ слѣдуетъ пользоваться косточками руки (лучше лѣвой). Мѣсяцы, приходящіеся на косточки, имѣютъ 31 день, на впадины—30 (въ томъ числѣ и февраль).

Что такое часъ? Это новая единица времени, связанная съ движеніемъ земли, а именно $^1/_{24}$ продолжительности суточнаго вращенія земли около оси. Такъ какъ земля вращается чрезвычайно быстро по сравненію съ ея поступательнымъ движеніемъ, то поочередно каждая часть ея поверхности бываетъ освѣщена солнцемъ, т. е. въ различныхъ странахъ полдень приходится въ различное время. Такъ напр., когда полдень въ Парижѣ, то полдень и во всѣхъ мѣстностяхъ, лежащихъ на Парижскомъ меридіанѣ; но въ Египтѣ—уже 2 часа, въ Калькуттѣ—

6 часовъ вечера, въ Пекинѣ—8 часовъ, въ Токіо всѣ спятъ, а въ Нью-Іоркѣ встаютъ, такъ какъ безъ 5 минутъ 7 ч. утра. На кораблѣ въ Атлантическомъ океанѣ 9—10 ч., а на берегахъ Португаліи—11 ч. утра.

Международная конференція во избѣжаніе путаницы въ житейскихъ отношеніяхъ установила *легальное гражданское* время [1]). Вся земля раздѣлена на 24 пояса, считая отъ Гринвичскаго меридіана; въ каждомъ поясѣ прибавляется часъ, если ѣхать съ востока на западъ, и отнимается—съ запада на востокъ. Кромѣ того, установлена граница черезъ Тихій Океанъ (Гаити, Гаваи, Беринговъ проливъ); при переѣздѣ черезъ нее прибавляютъ или отнимаютъ сутки.

Понятно, что эта „путаница" въ счетѣ дней и часовъ создавала массу недоразумѣній, подчасъ забавныхъ. Нѣсколько лѣтъ тому назадъ громкій процессъ о двоеженствѣ разрѣшился благополучно только благодаря тому, что точно была установлена разница въ нѣсколько минутъ (между римскимъ и лондонскимъ временемъ) въ пользу обвиняемаго [2]).

Вотъ чему необходимо обучать дѣтей, проходя съ ними измѣреніе времени. Пусть имъ станетъ ясно, что безъ астрономіи у нихъ не было бы часовъ; что счетъ времени тѣсно связанъ съ движеніемъ всѣхъ трехъ тѣлъ нашей системы—солнца, луны и земли; пусть, наконецъ, правильно посмотрятъ на значеніе вращенія и поступательнаго движенія земли, такъ какъ благодаря этому день и ночь, времена года—бываютъ во всѣхъ странахъ на земной поверхности.

Такъ называемыя „задачи на время" должны при этомъ радикально измѣниться. Безсмысленныя вычисленія на тему, кто когда родился или кто сколько прожилъ (развѣ считаютъ сутки, часы и минуты жизни?) должны отойти въ архивъ педагогики.

Запись времени должна быть общепринятой, а таковой является коммерческая. Такъ, чтобы вычислить время съ 27 Ноября 1901 года по 13 Марта 1902 года

---

[1]) Въ соглашеніи не участвуетъ одна Россія.

[2]) См. также прекрасныя страницы у *Флммаріона*, Начатки астрономіи, пер. съ франц., 1909, стр. 30—40.

включительно, пишутъ: $\frac{13}{3}$ 1902 — $\frac{27}{11}$ 1901 или $\frac{13}{15} - \frac{27}{11} =$ $= \frac{-14}{4} = 4 . 30 - 14 = 106$; такъ какъ прибавлено слово „включительно“, то необходимо къ полученному числу 106 прибавить еще 1 ; отвѣтъ — 107 дней. Выгоды такой записи очевидны.

Къ вопросу о дробяхъ.

10. Однимъ изъ крупныхъ вопросовъ исчисленія является вопросъ о дробяхъ. Его можно расчленить на слѣдующіе: 1) что̀ называть дробью, 2) въ какомъ порядкѣ изучать дроби, 3) какъ строить курсъ дробей. Эти вопросы мы разсмотримъ отдѣльно.

Во I-хъ, въ настоящее время установлены термины: *десятичное число* и *обыкновенная дробь*. Они приняты даже Ученымъ Комитетомъ нашего Министерства Народнаго Просвѣщенія [1]). Этимъ въ сущности предрѣшаются дальнѣйшіе вопросы, такъ какъ для методики исчисленія важно лишь связать понятія о десятой, сотой, тысячной съ понятіями о десяткѣ, сотнѣ, тысячѣ, и связать возможно тѣснѣе.

Во II-хъ, десятичныя числа необходимо изучать раньше обыкновенныхъ дробей. Этого требуютъ соображенія:

a) *историческія* — шестидесятичныя дроби существовали раньше обыкновенныхъ, записывались безъ знаменателя и были замѣнены въ 1585 г. десятичными, такъ какъ и система нумераціи стала десятичной; между тѣмъ теорія обыкновенныхъ дробей развивалась очень медленно;

b) *психологическія* — прямая связь съ метрической системой, съ распространеніемъ нумераціи *вправо* отъ разряда единицъ, непосредственный переходъ отъ цѣлыхъ чиселъ къ десятичнымъ при дѣленіи — все это вмѣстѣ взятое заставляетъ учащихся смотрѣть на десятичныя числа какъ на числа, а не дроби, т. е. не требуетъ усвоенія новыхъ понятій;

---

[1]) См. программу математики для реальныхъ училищъ, утвержденную 26-го Іюня 1906 г.

c) *методическія* — несравненно легче производить дѣйствія надъ десятичными числами, чѣмъ надъ обыкновенными дробями; если же разсматривать затѣмъ десятичную дробь, какъ первый этапъ и простой переходъ къ обыкновенной дроби, то этимъ соблюдается индукція въ обученіи;

d) *логическія* — понятіе „дробь“ есть понятіе двузначное. Если мы имѣемъ дѣло съ четвертью аршина или половиною яблока, то такія конкретныя дроби суть только части цѣлаго, въ свою очередь тоже цѣлыя: въ тѣхъ предѣлахъ, въ какихъ мы можемъ конкретно „дробить“ индивидуумы, мы всегда получаемъ лишь относительныя дроби; это — лишь способъ выраженія. Совершенно иное понятіе связано съ представленіемъ объ отвлеченной дроби. Такъ $\frac{3}{4}$ не есть число, это—пара чиселъ цѣлыхъ, 3 и 4, надъ которыми мы должны произвести дѣйствіе дѣленія, но на самомъ дѣлѣ его не выполняемъ; желая однако ввести *результатъ* требуемаго дѣленія въ дальнѣйшія выкладки, мы *условно* обозначаемъ этотъ результатъ символомъ $\frac{3}{4}$, сохраняя за собой право выполнить дѣленіе потомъ, если это окажется нужнымъ. Таково положеніе этого вопроса въ наукѣ [1]). Ясно, что излагать теорію дробей дѣтямъ по меньшей мѣрѣ нацрасный трудъ.

Въ III-хъ, изъ изложеннаго видно, что курсъ „дробей“ долженъ распадаться на три цикла. Въ первомъ надо познакомить дѣтей съ простѣйшими случаями *дробленія* конкретныхъ „единицъ“ (см. программу курса);

---

[1]) Мерэ (1889), Рикье (1893) и Пеано (1889, 1901) пошли дальше по намѣченному пути. По ихъ мнѣнію символъ $\frac{a}{b}$ обозначаетъ необходимость производства двухъ дѣйствій: умноженія на a и дѣленія на b; поэтому они предложили назвать этотъ символъ *операторомъ*. Пеано указалъ, что уже египтяне пришли къ такому взгляду на дробь; примѣры „оперативныхъ“ вычисленій встрѣчаются въ знаменитомъ Папирусѣ Ринда, переписанномъ между 2000 и 1600 гг. до Р. Х. писцомъ Амэсомъ (Ahmès) съ болѣе древняго оригинала.

эти четвертушки, половинки, восьмушки свободно усваиваются дѣтьми, также какъ и простыя выкладки надъ ними. Во второмъ—научить производить дѣйствія надъ десятичными конечными числами [1]). Въ третьемъ—изложить не теорію обыкновенныхъ дробей, а лишь условныя опредѣленія оперированія съ символами $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$, на числовыхъ, а затѣмъ и буквенныхъ примѣрахъ, по скольку эти операціи необходимы въ курсѣ уравненій. Само собой разумѣется, что теорія дѣлимости чиселъ должна быть исключена изъ курса.

Десятичныя числа.

11. Переходъ отъ цѣлыхъ чиселъ къ десятичнымъ можно выполнить при помощи ряда цѣлесообразно подобранныхъ задачъ, въ родѣ нижеслѣдующей.

Куплено 12 аршинъ сукна за 54 рубля; по чемъ платили за аршинъ?

Эту задачу полезно рѣшить тремя способами.

Первый способъ. Раздѣлимъ 54 на 12, тогда получимъ въ частномъ 4 и въ остаткѣ 6: $-\begin{array}{r|l} 54 & 12 \\ \underline{48} & \overline{4} \\ 6 & \end{array}$. Остатокъ 6—это 6 рублей; обращая рубли въ полтинники, получаемъ 12 полтинниковъ и продолжая дѣленіе, находимъ 1 полтинникъ, т. е. частное = 4 р. 1 полт.

Второй способъ. Остатокъ 6 рублей обращаемъ въ гривенники, получаемъ 60 гривенниковъ и дѣлимъ на 12, отвѣтъ — 4 р. 5 грив.

Третій способъ. Сперва обращаемъ 54 рубля въ копѣйки, а затѣмъ дѣлимъ: 5400 : 12 = 450. Отвѣтъ — 450 коп.

Теперь запишемъ всѣ три отвѣта отдѣльно:

4 р. 1 полт.
4 р. 5 грив.
450 коп.

мы видимъ, что несмотря на различную запись они равны между собою, такъ какъ ихъ можно замѣнить одной записью: 4 р. 50 к.

---

[1]) По программамъ 1906 г. періодическія десятичныя числа отнесены къ курсу 5-го класса, въ главу о безконечно—убывающей геометрической прогрессіи.

Освоивъ дѣтей съ этими внѣшними различіями, нетрудно идти дальше. Если въ задачѣ будетъ поставлено условіе: выразить отвѣтъ въ рубляхъ, то отъ выраженія 4 р. 5 грив. мы сразу переходимъ къ выраженію 4,5 р., если условимся, что послѣ запятой будетъ стоять гривенникъ (десятая часть рубля) [1]).

Въ дальнѣйшемъ—распространеніе нумераціи вправо явится вполнѣ доступнымъ, какъ естественное развитіе *условія*.

Сложеніе и вычитаніе десятичныхъ чиселъ не представляетъ затрудненій. Въ умноженіи, напротивъ, слѣдуетъ пріостановиться; начавъ съ простыхъ случаевъ умноженія десятичнаго числа на цѣлое и цѣлаго на десятичное (сводя къ первому), перейти къ конкретнымъ примѣрамъ (рубли, метры) перемноженія двухъ десятичныхъ чиселъ. При этомъ молно придерживаться такого порядка упражненій: 1) 3,4 . 5 2) 4,7 . 4 3) 2,78 . 3 4) 0,5 . 2 5) 0,32 14 6) 0,28 . 3 7) 13,5 . 2,7 8) 2,47. 4,52 9) 0,2 . 5,3 10) 0,3 . 0,4 и т. п. Вообще случаи перемноженія двухъ десятичныхъ чиселъ въ житейскихъ вопросахъ не встрѣчаются; они — достояніе прикладныхъ наукъ, но и тамъ либо пользуются пріемами приближенныхъ вычисленій, либо логариѳмами.

Для иллюстраціи возьмемъ задачу: *куплено 13, 5 арш. матеріи по 2 р. 10 к. аршинъ.* Здѣсь можно умножить: 1) 13,5 . 210 2) 13,5 . 21 3) 13,5 . 2,1 . Отвѣты 1) : 2835 коп. 2) 283,5 грив. 3) 28,35 р. выясняютъ „правило запятой“ достаточно убѣдительно.

Такая же послѣдовательность должна быть проведена и при дѣленіи десятичныхъ чиселъ; напр. 1) 274,5 : : 9 = 30,5 2) 9 : 4,5 = 2 3) 57,12 : 2,1 = 27,2 . Примѣры лучше всего заимствовать изъ геометріи (по данной площади фигуры и ея длинѣ или ширинѣ найти ширину или длину) и изъ физики (удѣльный вѣсъ).

---

[1]) Если дѣти вмѣсто запятой предложатъ свой знакъ, то съ этимъ надо сначала согласиться, такъ какъ: Стевинъ (1585) писалъ 2 5 (0) 3 (1) 7 (2) 9 (3), Бриггсъ (1616) — 25 $\underline{379}$; позже — $25|\underline{379}$ или 25, 3′ 7″ 9‴ или 25. 379 ; точка вмѣсто запятой до сихъ поръ употребляется въ Англіи, Сербіи и другихъ государствахъ.

Обыкновенныя дроби. 12. Первоначальныя свѣдѣнія объ обыкновенныхъ дробяхъ должны быть сообщаемы попутно, на конкретныхъ примѣрахъ измѣренія и дробленія; но всѣ эти половинки, трети, четвертушки составляютъ привходящій элементъ, поэтому говорить о курсѣ дробей не приходится. Однако совсѣмъ иное положеніе создается въ дальнѣйшемъ, послѣ изученія десятичныхъ чиселъ, съ одной стороны, и перехода къ уравненіямъ — съ другой. Именно тогда полагаютъ, что курсъ дробей не только возможенъ, но и необходимъ. Дѣйствительно ли это такъ?

Въ настоящее время основы ученія о числѣ тщательно пересмотрѣны; оказалось, что теорія дробей покоится на допущеніи тождества $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, *въ справедливости коего не сомнѣваются, но доказать его нельзя.* Въ силу этого къ вопросу о дробяхъ можно подойти лишь съ формальной стороны, т. е. согласиться относительно смысла новаго символа, опредѣлить смыслъ дѣйствій надъ нимъ и подчинить эти опредѣленія закону перманентности [1]). Больше мы ничего не можемъ сдѣлать: о *доказательствахъ* не можетъ быть и рѣчи. Таково научное положеніе вопроса о дробяхъ. Поэтому можно считать, что отнынѣ „доказательный“ курсъ дробей исчезнетъ со страницъ учебниковъ и вмѣсто него появится *пояснительный* и *показательный.*

Съ другой стороны—необходимы ли дѣйствія надъ обыкновенными дробями? На практикѣ умноженіе и дѣленіе дроби на дробь не встрѣчается, такъ какъ всегда можно одну изъ дробей замѣнить цѣлымъ или десятичнымъ числомъ; да и тѣ виды дробей, съ которыми приходится имѣть дѣло, настолько просты, что дѣйствія надъ ними не представляютъ затрудненій. *Сейчасъ всѣ рѣшительно вычисленія производятся въ десятичныхъ числахъ*, и удобства такого пріема настолько велики, что практика давно уже ввела при техническихъ разсчетахъ десятыя и сотыя доли сажени.

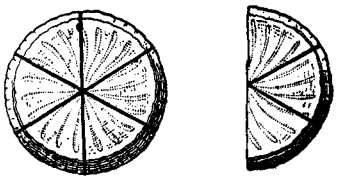
---

[1]) См. *Encyclopédie*, I, 1, стр. 46 — 52; *Веберъ и Вельштейнъ*, I, стр. 55—66; *Klein*, Elementarmathematik, стр. 71—79, и др. Слѣдуетъ замѣтить, что въ наукѣ существуетъ нѣсколько „теорій“ дробей, но всѣ онѣ имѣютъ чисто формальный характеръ.

Единственный оплотъ дробей — это алгебраическія дроби, продуктъ россійскаго производства XIX в., такъ пышно разцвѣтшій въ нашихъ учебникахъ. Къ сожалѣнію, наука такихъ дробей не знаетъ. Всѣ эти преобразованія, приведенія къ одному знаменателю, сокращенія алгебраическихъ дробей и пр. излюбленные коньки русскихъ „педагоговъ“ могутъ лишь вызвать улыбку истиннаго математика. Тѣ дроби, съ которыми приходится имѣть дѣло въ уравненіяхъ, настолько просты, что объ ихъ „теоріи“ не можетъ быть рѣчи. Въ интегральномъ же исчисленіи существуютъ *дробныя функціи*, но онѣ изучаются по иному.

Перейдемъ къ изложенію нѣсколькихъ штриховъ о дробяхъ, могущихъ найти себѣ мѣсто въ школѣ.

Двѣ дроби $^a/_b$ *и* $^c/_d$ *называются равными, если* $ad = bc$. Эта точка зрѣнія требуетъ изложить сначала ученіе о пропорціи; таковы взгляды всѣхъ выдающихся ученыхъ и методистовъ, отодвигающихъ дроби за отрицательныя числа и пропорціи. Слѣдуетъ замѣтить, что при рѣшеніи уравненій мы имѣемъ дѣло именно съ пропорціями, а не съ дробями.



Чер. 36.

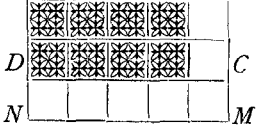
Приведеніе къ одному знаменателю должно быть объяснено наглядно. Напр. $^1/_2$ и $^3/_6$ въ суммѣ даютъ единицу, такъ какъ $^1/_2 = {}^3/_6$ (черт. 36). Въ качествѣ пособія надо брать кругъ, раздѣленный на секторы, или прямоугольникъ, но только не традиціонную прямую линію, наглядность которой очень сомнительна. Картонные круги съ раскрашенными секторами особенно привились заграницей.

Подобными же наглядными пріемами легко объяснить сложеніе и вычитаніе дробей. Никакихъ опредѣленій не требуется.

Умноженіе до сихъ поръ еще опредѣляется по старому рецепту Лякроа (1799): „Умножить значитъ изъ множимаго составить новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы“. Это опредѣленіе давно отвергнуто, такъ какъ оно не подчиняется принципу

перманентности. Теперь говорятъ просто: „Подъ произведеніемъ двухъ дробей $^a/_b$ и $^c/_d$ мы будемъ разумѣть дробь $^{ab}/_{cd}$ “.

Необходимы, конечно, иллюстраціи. Такъ умноженіе $^4/_5$ на $^2/_3$ даетъ $^8/_{15}$. Возьмите $^4/_5$ прямоугольника ABCD (чер. 37); въ свою очередь ABCD есть $^2/_3$ прямоугольника ABMN, который легко получить, прикладывая къ ABCD его половину. Такимъ образомъ заштрихованная часть содержитъ 8 квадратовъ, а весь прямоугольникъ—15.



Чер. 37.

Дѣленіе опредѣляется какъ обратное дѣйствіе и сводится къ умноженію. Старые способы построенія умноженія и дѣленія на задачахъ: *найти часть отъ числа* и *по данной части отыскать число* — искусственны и неудобны.

Можно и слѣдуетъ знакомить съ буквенными дробями, пользуясь примѣрно слѣдующей схемой: 2 четверти + +3 четверти=5 четвертей, $^2/_4+^3/_4=^5/_4$, $^2/_a+^3/_a=^5/_a$ и т. п.

Связь обыкновенныхъ дробей съ десятичными числами ближе всего уясняется при упрощеніи записей. Напр. 0,25 все равно, что $^1/_4$; 0,375 все равно, что $^3/_8$; но запись въ видѣ дроби проще и нагляднѣе. Наряду съ этимъ можно легко объяснить сокращеніе дробей: если $^{25}/_{100}=^1/_4$, то 25 и 100 можно раздѣлить на 25. Обратно: $^1/_4=^{1.25}/_{4.25}=^{25}/_{100}$.

Иногда поэтому выгоднѣе десятичное число замѣнять дробью, если она небольшая (но не въ случаѣ 0,4; 0,6; 0,8; 0,16 и т. д.); иногда дробь—десятичнымъ числомъ съ точностью до 1 %, если дробь имѣетъ большого числителя и знаменателя. При этомъ слѣдуетъ показать, что всякую дробь можно замѣнить десятичнымъ числомъ, точнымъ или приблизительнымъ; но давъ *понятіе* о періодѣ, вовсе не слѣдуетъ *вводить* періодическія десятичныя числа. Запись періода : 0,(6) или $0,\overline{6}$ (Италія).

Какъ ввести понятіе „дробь“? Научныхъ точекъ зрѣнія существуетъ 3.

I) *Дробь есть пара чиселъ* — тогда, напр., умноженіе дроби на дробь выполняется въ силу согла-

шенія $^a/_b \cdot {}^c/_d = {}^{ab}/_{cd}$. Представителями этой точки зрѣнія являются Веберъ и Вельштейнъ, и др.

II. *Дробь есть операторъ* — тогда помножить на дробь $^a/_b$ значитъ помножить на a и раздѣлить на b; помножить на $^c/_d$ — помножить на c и раздѣлить на d; слѣдовательно, помножить на $^a/_b \cdot {}^c/_d$ все равно, что помножить на ac и раздѣлить на bd, поэтому $^a/_b \cdot {}^c/_d = {}^{ac}/_{bd}$. Представителемъ этой теоріи является Буркгардтъ [1]), и др.

Эти двѣ теоріи чисто логическія, не выходящія за понятіе о цѣломъ числѣ.

III. *Дробь есть результатъ измѣренія, дробь есть количество.* Это—гносеологическая точка зрѣнія. Она—и только она—доступна школьному пониманію, такъ какъ позволяетъ оперировать съ конкретными понятіями, опирается на наглядные и осязаемые образы, даетъ интуитивное представленіе о дробяхъ, между тѣмъ какъ логическія теоріи остаются на почвѣ абстракціи и формальнаго ученія о дроби. Съ простѣйшими случаями измѣренія знакомятъ вопросы вѣса, монетной системы, времени и длины. Дальше — вторая стадія: вопросы дробленія индивидуумовъ. Здѣсь на сценѣ историческое яблоко, пирожное и т. д. Третья стадія—рѣшеніе уравненія $3x = 7$; здѣсь мы имѣемъ дѣло съ расширеніемъ понятія о числѣ при помощи обратныхъ дѣйствій (аналогично введенію отрицательныхъ чиселъ при вычитаніи).

Процентныя вычисленія. 13. Понятіе „процентъ“ можно ввести очень рано, такъ какъ простѣйшія процентныя вычисленія оперируютъ лишь надъ цѣлыми числами. При этомъ терминологія должна быть слѣдующая: сотая часть числа наз. *процентъ*, число взятыхъ частей наз. *такса*, вычисленные проценты наз. *интересы*. Слѣдуетъ объяснить и происхожденіе записи %, а именно — изъ римскаго „pro centum“ (за сто) италіанское „pro cento“ дало рядъ сокращеній: p. cento, p. cto, p. % (t превратилось въ прямую, c — въ o). Запись 5 p. % (5 pour cent) до сихъ поръ употребляется во Франціи.

---

[1]) *H. Burkhardt*, Algebraischer Analysis, 1903.

Въ Россіи и Германіи мѣсяцы считаются въ 30 дней, годъ—въ 360 дней, и только въ Англіи годъ—въ 365 дней. Въ связи съ этимъ пользуются двумя пріемами для быстрыхъ %-хъ разсчетовъ. Раздѣлить число на 360 значитъ найти $\frac{1}{100}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{40}+\frac{1}{400}+\cdot\cdot\cdot\cdot\right)$ даннаго числа; напр., найти интересы за день по годовымъ интересамъ 2076 рубл. Имѣемъ $5{,}19 + 0{,}519 + 0{,}0519 + 0{,}00519 = 5{,}76609$ съ точностью до одной сотой. Непосредственное дѣленіе даетъ 5,7(6). Для англійскихъ разсчетовъ нужно дѣленіе на $365 = 73.5$; поэтому $\frac{1}{73}=\frac{1}{100}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{300}\right)$, причемъ ошибка выходитъ за предѣлы необходимой точности [1]).

Полезно указать при рѣшеніи соотвѣтственныхъ задачъ, что иногда капиталъ и интересы съ него даны въ общей суммѣ; тогда говорятъ, что надо найти *проценты на сто*. Такимъ образомъ различаютъ проценты со ста, т.-е. дробь $\frac{p}{100}$, и проценты на сто, т.-е. дробь $\frac{p}{100+p}$.

Въ статистическихъ разсчетахъ встрѣчается часто *промилля*, т.-е. одна тысячная; ее обозначаютъ черезъ $^0/_{00}$.

Изъ обычныхъ коммерческихъ задачъ интересны и доступны слѣдующія. Простой учетъ векселя (дисконтъ + ажіотажъ); куртажъ [2]) (или скидки при опто-

---

[1]) Въ самомъ дѣлѣ имѣемъ: $\frac{100}{360} = 0{,}2777\ldots = 0{,}25 + 0{,}025 + 0{,}0025 + \ldots\ldots$ Далѣе $\frac{1}{73} = 0{,}0136986$; но $^1/_{100} = 0{,}01$, $^1/_{300} = 0{,}003333\ldots$, $^1/_{3000} = 0{,}000333\ldots$, $^1/_{30000} = 0{,}000033\ldots$, поэтому $\frac{1}{100}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{300}\right) = 0{,}013699\ldots$ Это правило извѣстно подъ названіемъ „правило трехъ третей“.

[2]) См. *Dilworth*, Schoolmaster's Assistant, London, 1784, стр. 37: „*В*. Какъ называются эти скидки за моремъ? *О*. Ихъ называютъ *Courtesies of London* (Лондонскія милости), потому что ихъ нѣтъ ни въ какомъ другомъ мѣстѣ“.—Такимъ образомъ *куртажъ* обозначаетъ *милость*, въ родѣ добровольной подачки.

выхъ сдѣлкахъ); комиссіонныя вознагражденія. Что касается послѣднихъ, то въ банковыхъ и биржевыхъ операціяхъ приняты комиссіонныя въ $^1/_8$%; поэтому слѣдуетъ ознакомить учащихся съ сокращеннымъ дѣленіемъ на 8. Такъ какъ $^1/_{10} + ^1/_{40} = ^1/_8$, то данное число дѣлятъ на 10, а полученное частное на 4 и складываютъ оба частныхъ. Напр. $73474 = 7347{,}4 + 1836{,}85 = 9184{,}25$.

Наконецъ вопросы о рентахъ, акціяхъ, облигаціяхъ, покупкѣ %% бумагъ и т. п., предлагаемые въ видѣ легкихъ задачъ, разнообразятъ курсъ и знакомятъ съ жизнью. Сюда же относятся вопросы о банкахъ, страхованіи, кредитныхъ обществахъ и пр.

Конечно—не все сразу. Опытный учитель съумѣетъ такъ расположить матеріалъ, чтобы постепенныя трудности и детали шли медленно; иначе слишкомъ большое число новыхъ понятій затуманитъ голову ученика.

Къ задачамъ на % примыкаютъ задачи на пробу и сплавы. Принято въ метрической системѣ пробу выражать десятичнымъ числомъ съ тремя цыфрами; напр. золото пробы 0,850 или серебро пробы $0{,}916^2/_3$. Въ русской системѣ за основаніе взято 96, въ метрической—1000, въ англійской—24 для золота и 240 для серебра. Въ Россіи и Англіи проба выражается числителемъ дроби: $\frac{84}{96} = 84$-ая проба серебра; $\frac{22}{24} = 22$-ая проба *стандартнаго* [1]) золота. И здѣсь слѣдуетъ указать, насколько отсутствіе международнаго соглашенія затрудняетъ разсчеты различныхъ государствъ.

Всѣ задачи на %% должны быть рѣшаемы безъ помощи сложнаго тройного правила. Не говоря уже о томъ, что пользованіе тройнымъ правиломъ создаетъ вредную рутину, не позволяющую изъ-за деревьевъ увидѣть лѣсъ, оно еще вдобавокъ непомѣрно усложняетъ вычисленія. Примѣры на лицо. Если капиталъ отданъ на срокъ, не равный году, то прежде всего

---

[1]) Англійскій *нормальный* сплавъ наз. *стандартнымъ*: $\frac{22}{24}$ для золота и $\frac{222}{240}$ для серебра. Всякое отступленіе отъ этой нормы наз. *репортомъ* (чер. B—лучше, чер. W—хуже).

высчитываютъ интересы за весь срокъ съ сотни, а затѣмъ—интересы со всего капитала. Это—разъ. Во-вторыхъ, при статистическихъ вычисленіяхъ обычный типъ таблички для сложнаго тройного правила не встрѣчается, да и не нуженъ: вычисленія ведутся гораздо проще. Въ третьихъ, сложное тройное правило часто заставляетъ вводить два неизвѣстныхъ, т.-е. въ замаскированномъ видѣ приводитъ къ системѣ 2 уравненій. Напр., задача: „Какъ великъ капиталъ, если интересы за 8 мѣсяцевъ по $8^0/_0$ больше интересовъ за 5 м. по $7^1/_2{}^0/_0$ на 53 р.?“ приводитъ къ 2 табличкамъ

$$\begin{array}{ccc} 100 & — 12 & — 8 \\ A & — 8 & — x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 100 & — 12 & — 7^1/_2 \\ A & — 5 & — y \end{array}$$

и А опредѣляется изъ условія $x - y = 53$. Между тѣмъ простое разсужденіе показываетъ, что капиталъ въ 8 м. даетъ 64 части, въ 5 м. даетъ $37^1/_2$ частей; разность между ними $26^1/_2$ и эта разность составляетъ 53 р., поэтому одной части соотвѣтствуетъ 2 р. Помножьте эти 2 р. на 12 (число мѣсяцевъ) и на 100 (мы брали $^0/_0$) и вы получите 2400 р., т.-е. искомый капиталъ. Такъ вычисляютъ, напр., сравнительное достоинство нѣсколькихъ помѣщеній капитала. Здѣсь необходимо выясняется учащимся, что такса $8^0/_0$ взимается за всякую единицу времени—годъ, мѣсяцъ, недѣлю, сутки; этимъ совершенно пренебрегаетъ система тройного правила.

Тройное правило.

14. Популярные англійскіе стихи XVI в. гласятъ:

Multiplication is mie vexation	Умноженье—мое мученье
And Division is quite as bad,	И съ дѣленьемъ тоже бѣда,
The Golden Rule is mie stumbling stule	Тройное правило—камень преткновенья,
And Practice drives me mad.	А Практика сводитъ меня съ ума.

Умноженье и дѣленье нелегко даются и теперь; что касается т. наз. Итальянской Практики, то опасность ея для психики очевидно была связана съ методами обученія, такъ какъ это одинъ изъ самыхъ древнихъ и распространенныхъ вычислительныхъ пріемовъ. Но тройное правило съ его знаменитымъ „приведеніемъ къ единицѣ“—дѣйствительно *мученье*! Кромѣ того, тройное правило заставляетъ невольно

получать дробное число работниковъ, что́ проходитъ обыкновенно не безъ треній.

Но дѣло даже и не въ этомъ. Дробное число работниковъ поддается толкованію—можно свести вопросъ къ измѣренію работоспособности. Гораздо хуже то, что тройное правило опирается всецѣло на законъ простой пропорціональности, который въ жизни играетъ лишь исключительную роль; гораздо чаще встрѣчается „квадратная“ пропорціональность (почти вся механика и физика). Наконецъ, въ тѣхъ случаяхъ, когда простая пропорція примѣнима, кругъ ея примѣненій тщательно ограниченъ, и внѣ его примѣненіе „правила“ даетъ курьезныя нелѣпости. Хорошо подобранные примѣры находятся у Лоджа въ §, озаглавленномъ: „Необходимость развѣнчанія простой пропорціи или *тройного правила*“. Вотъ нѣкоторые изъ нихъ.

1) Пароходу сообщается скорость въ 8 узловъ паровымъ двигателемъ, обладающимъ мощностью въ 1000 лошадиныхъ силъ. Какая мощность сообщитъ ему скорость 12 узловъ?

Вѣроятно, никто не ожидаетъ на это отвѣта 1500. Ибо, на основаніи этого принципа, мощность въ 10.000 лош. силъ двигала бы его со скоростью 80 узловъ.

2) Канатъ растягивается на $1/2$ дюйма при нагрузкѣ въ 100 фунтовъ. На сколько растянется онъ при нагрузкѣ въ 50 пудовъ?

3) Если одного человѣка можетъ разбудить крикъ 2 пѣтуховъ, то сколькихъ человѣкъ можетъ разбудить крикъ 6 пѣтуховъ?

4) Если верблюдъ можетъ выдержать ношу въ 14 пудовъ въ теченіе 6 часовъ, то въ теченіе какого времени онъ можетъ выдержать ношу въ 560 пудовъ?

„Эти задачи—прибавляетъ Лоджъ—не могутъ быть рѣшены по способу простой пропорціи. Вообще, прежде, чѣмъ приниматься за ихъ рѣшеніе, необходимо обладать нѣкоторыми спеціальными свѣдѣніями. Но получается такое впечатлѣніе, что цѣлыя поколѣнья учителей, по молчаливому соглашенью, отвергли всѣ эти задачи безъ разбора и исключили ихъ совсѣмъ изъ ариѳметическаго разсмотрѣнія. Явленія же эти совершенно такого порядка, какъ если бы мы въ геометріи,

найдя, что прямыя линіи проще кривыхъ, стали задавать всѣ задачи только на прямую линію".

Чѣмъ-же можно замѣнить пресловутое тройное правило?

Способъ кратныхъ частей, извѣстный въ глубокой древности (см. папирусъ Ринда), возродившійся у итальянскихъ купцовъ XV в. и до сихъ поръ имѣющій громадное комерческо-практическое примѣненіе, способъ этотъ и въ педагогическомъ отношеніи является наилучшимъ. Онъ позволяетъ пользоваться сокращенными и приближенными вычисленіями, совершенно не утомляетъ мышленія и, благодаря своей замѣчательной гибкости, сохраняетъ индивидуальность учащихся.

Найти стоимость 75 ф. товара, зная, что 5 п. 16 ф. стоятъ 17 р. 64 к.

216 ф.	— 17 р.	64 к.	216 ф.	— 17 р.	64 к.
36 ф.	— 2 р.	94 к.	24 ф.	— 1 р.	96 к.
180 ф.	— 14 р.	70 к.	240 ф.	— 19 р.	60 к.
60 ф.	— 4 р.	90 к.	60 ф.	— 4 р.	90 к.
15 ф.	— 1 р.	$22^1/_2$ к.	15 ф.	— 1 р.	$22^1/_2$ к.
75 ф.	— 6 р.	$12^1/_2$ к.	75 ф.	— 6 р.	$12^1/_2$ к.

216 ф.	— 17 р.	64 к.
24 ф.	— 1 р.	96 к.
6 ф.	—	49 к.
30 ф.	— 2 р.	45 к.
90 ф.	— 7 р.	35 к.
15 ф.	— 1 р.	$22^1/_2$ к.
75 ф.	— 6 р.	$12^1/_2$ к.

и т. п.

Можно придумать еще нѣсколько комбинацій, нѣсколько видоизмѣненій—каждый можетъ прійти къ отвѣту самостоятельно. Сравните теперь это рѣшеніе съ обычнымъ разсужденіемъ: Если 216 ф. стоятъ 17 р. 64 к., то 1 ф. стоитъ не 17 р. 64 к., а въ 216 разъ меньше; 75 ф. стоятъ въ 75 разъ больше; отсюда

$$x = \frac{17{,}64 \cdot 75}{216}.$$

Когда же приходится рѣшать задачу: За 3 курицы заплатили на рынкѣ 2 р., сколько курицъ можно купить на 10 р.? то обычное разсужденіе: „Если на 2 р. покупаютъ 3 кур., то на 1 р. купятъ $\frac{3}{2}$ кур., а на 10 р.— $\frac{3.10}{2}$ кур. = 15 кур.“ — приводитъ къ очевидному абсурду и притомъ двойному: и части курицъ не покупаются, и единицей служитъ не 1 р., а курица.

Замѣчательны въ своемъ родѣ задачи на сложное тройное правило. Ихъ искусственность и нелогичность бьютъ въ глаза, а между тѣмъ онѣ занимаютъ почетное мѣсто въ задачникахъ. Далѣе, онѣ заставляютъ насиловать и здравый смыслъ, и логику. Такъ при прорытіи траншеи или рва приходится допускать, что одинъ работникъ можетъ проработать въ сутки 1800 часовъ, если дано, что артель въ 200 чел. работаетъ по 9 час. При покупкѣ матеріи длиною въ 12 арш. и шириною въ 14 верш. сводятъ вопросъ къ отысканію матеріи несуществующей ширины 1 арш., и т. п.

Можно съ увѣренностью сказать, что сложное тройное правило годится лишь для антикварнаго обученія, и его слѣдуетъ всегда сводить къ простому; простое же можно и слѣдуетъ рѣшать либо „практикой“, либо по соображенью въ умѣ, но только не „приведеніемъ къ единицѣ“ [1]).

Въ первой части настоящей книги мы уже указали, что правила: товарищества, цѣпное, смѣшенія были введены въ школы (XVI в.) въ силу колоніальной политики Европы. Всѣ эти правила—архаизмъ въ двухъ направленіяхъ: во I-хъ, задачи указанныхъ типовъ легче рѣшаются уравненіями; во II-хъ, содержаніе задачъ рѣзко измѣнилось, и только несчастные школьники продолжаютъ высчитывать результаты торговыхъ операцій, производившихся въ эпоху завоеванія Америки

---

[1]) Конечно, мы имѣемъ въ виду механическое рѣшеніе (разсужденіе, запись, вычисленіе), а не идею приведенія къ единицѣ. Сама идея настолько проста и естественна, что дѣти сами пользуются ею при рѣшеніи простыхъ задачъ. Но не слѣдуетъ методу взрослыхъ навязывать дѣтскому уму.

и Индіи. Если цѣпное правило встрѣчается въ банковыхъ операціяхъ и въ физикѣ (система C. G. S.), то это еще не значитъ, что его надо навязать дѣтямъ; правило смѣшенія полезно лишь при фальсификаціи пищевыхъ продуктовъ; наконецъ правило товарищества сейчасъ вовсе не такъ просто въ жизненныхъ задачахъ, исключая случаи, когда „ломаютъ рубль"; но въ этихъ послѣднихъ въ сущности и нѣтъ никакого правила.

Графики. 15. О роли графической интерпретаціи въ математикѣ много говорить не приходится, такъ какъ ея польза и неоцѣнимая ясность признаны повсемѣстно. Прикладныя науки давно уже развиваются благодаря графической методѣ; ею же исключительно пользуется статистика. Пожалуй, близокъ моментъ, когда наши города будутъ похожи на утопическій „Городъ Солнца" Кампанелля: стѣны ихъ покроются раскрашенными діаграммами, съ высоты башенъ волшебные фонари будутъ бросать графическія картины, на услуги преподаванія пойдетъ и кинематографъ—словомъ, массамъ станутъ доступны въ широкомъ масштабѣ тѣ знанія, какими до сихъ поръ питались единицы. Музеи замѣнятъ собою книги, драма—романы, фонографы—газеты. Наглядное и живое обученіе станетъ со временемъ настолько обыденнымъ явленіемъ, насколько была обыденной система авторитета и „отъ сихъ до сихъ [1])".

Простѣйшія графическія записи явленій могутъ быть даны въ начальномъ курсѣ исчисленія. Таковы напр. задачи на нахожденіе суммъ простыхъ рядовъ, разсмотрѣнныя выше, графическое умноженіе, построеніе статистическихъ данныхъ въ видѣ столбиковъ различной вышины и т. п. Это—первый этапъ. Вторымъ явится построеніе „ломаныхъ" графикъ, напр. температурной. Покажемъ на этомъ примѣрѣ, какъ методически разработать построеніе графики.

---

[1]) См. прекрасную книгу: *Ludwik Krzywicki*, W otchłani, Warszawa, 1909, а также брошюру проф. *Озерова*, Къ реформѣ преподаванія, Москва, 1907.

Пусть наблюденіе за сутки дало рядъ высотъ термометра:

12 ч.	дня	+ 6⁰
2 ч.	„	+ 8⁰
4 ч.	„	+ 9⁰
6 ч.	„	+ 8⁰
8 ч.	веч.	+ 5,5⁰
10 ч.	„	+ 3⁰
12 ч.	ночи	+ 1⁰
2 ч.	„	— 0,5⁰
4 ч.	„	— 1⁰
6 ч.	утра	0⁰
8 ч.	„	+ 2⁰
10 ч.	„	+ 3⁰
12 ч.	дня	+ 4⁰

Сначала одинъ изъ учениковъ отсчитываетъ на приборѣ (см. дальше) вправо числа 2,4,6...., означающія промежутки времени; затѣмъ на вертикальные стержни накладывается 6,8,9,..., шариковъ (по числу градусовъ). Когда наступитъ очередь отрицательныхъ градусовъ, то шарики накладываютъ ниже прежнихъ, пользуясь особыми пружинками. Такимъ образомъ на приборѣ получится 13 столбиковъ, показывающихъ *наглядно* высоту термометра въ различные моменты наблюденія.

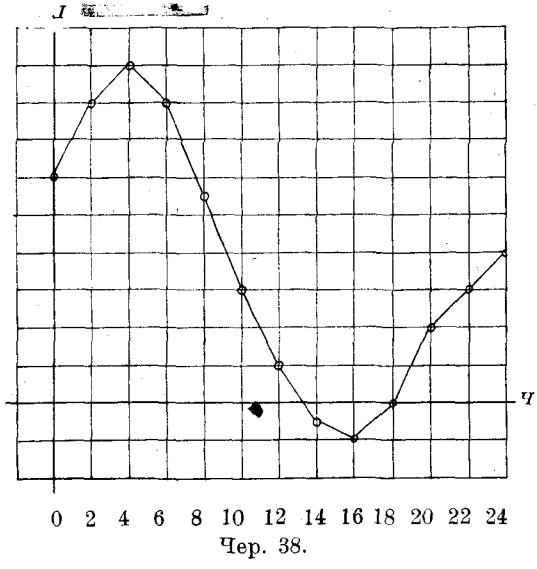
Теперь очередь за разграфленной бумагой. Можно повторить на бумагѣ тотъ же процессъ и получить рядъ столбиковъ; далѣе, можно обозначать лишь конечныя точки столбиковъ (чер. 38), что будетъ соотвѣтствовать удаленію на приборѣ остальныхъ шариковъ; наконецъ, можно соединить эти точки прямыми отрѣзками [1]).

Непрерывныя графики—третій этапъ. Здѣсь придется уже пользоваться миллиметровой бумагой, тогда какъ раньше вполнѣ достаточны большія клѣтки.

---

[1]) И здѣсь, конечно, надо соблюдать постепенный переходъ: 1) графики возрастающія (напр. питейный доходъ), 2) графики возрастающія и убывающія (температура лѣтомъ), 3) графики убывающія (охлажденіе), 4) графики съ положительными и отрицательными точками (температура зимою).

Матеріалъ для задачъ можно черпать въ изобиліи отовсюду. Биржевые обороты и цѣны бумагъ; бюджетныя нормы и отдѣльные налоги; ростъ желѣзныхъ дорогъ и народонаселенія; цѣны на какой-нибудь товаръ



Чер. 38.

здѣсь и въ Америкѣ—все, что измѣняется, можетъ быть представлено графически простыми и общедоступными пріемами.

Вотъ нѣсколько примѣровъ, гдѣ данныя расположены въ видѣ табличекъ. Въ первомъ — масштабъ *1000 км. въ 1 дцм., во второмъ—1000 км. въ 1 см.*

1. Длины рѣкъ Ср. Европы.

Везеръ	— 0,5
Висла	— 1,05
Дунай	— 2,9
Маасъ	— 0,65
Майнъ	— 0,42
Одеръ	— 0,9
Рейнъ	— 1,2
Эльба	— 1,15

2. Длины діаметровъ планетъ.

Меркурій	— 0,5
Венера	— 1,2
Земля	— 1,3
Марсъ	— 0,7
Юпитеръ	—17,4
Сатурнъ	—12,4
Уранъ	— 6,0
Нептунъ	— 5,5

3. Пространство и населеніе Россіи (въ сотняхъ тысячъ верстъ и людей).

ГУБЕРНІИ И ОБЛАСТИ.	ПРОСТРАНСТВО	ЧИСЛО ЖИТЕЛЕЙ.
Центр. — землед.	2,6	128,5
Средневолжскія	2,5	91,6
Нижневолжскія	4,9	53,5
Новороссійскія	3,5	108,0
Юго-Западныя	1,4	95,6
Малороссійскія	1,3	75,7
Московск.—промышл.	2,6	93,0
Бѣлорусскія	2,1	68,5
Пріуральскія	5,3	82,2
Крайняго Сѣвера	1,1	16,8
Пріозерныя	2,9	49,6
Литовскія	1,0	47,7
Прибалтійскія	0,8	23,8
Польскія	1,1	94,0
Кавказъ	4,1	92,9
Сибирь	109,5	57,2
Области Степныя	30,1	77,4

4. Важнѣйшія пищевыя вещества.

Наименованіе пищевыхъ веществъ.	Число питательныхъ единицъ.	
	Содержится въ 1 фунтѣ.	Можно получить за 50 коп.
Очень жирное бычачье мясо	687	1021
Тощее „ „	435	622
Жирная баранина	678	1115
„ свинина	739	1200
Ветчина	933	778

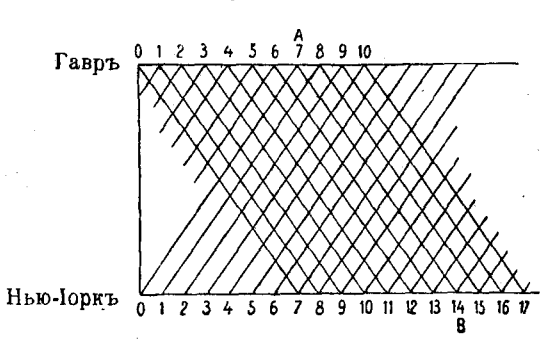
Наименованіе пищевыхъ веществъ.	Число питательныхъ единицъ.	
	Содержится въ 1 фунтѣ.	Можно получить за 50 коп.
Колбаса	1046	1633
Икра	904	203
Молоко коровье	135	2247
Масло	1030	1120
Сыръ (жирный)	876	1152
Яйца (куриныя)	400	586
Рисъ	460	1913
Горохъ	700	5803
Бобы	736	6140
Макароны	490	1535
Капуста (зимняя)	138	1714
Картофель	128	4902

Послѣдній этапъ — ознакомленіе съ прямоугольной системой координатъ въ общемъ видѣ. Основными упражненіями могутъ служить слѣдующія. Какъ точно опредѣлить мѣсто въ лѣсу или въ полѣ? Въ классѣ ученикъ занимаетъ 3-ье мѣсто на 5-ой скамьѣ; что принять за ось „иксовъ“ и что за ось „игрековъ“? Опредѣлить по географической картѣ широту и долготу родного города. Американскіе города построены большею частью правильно въ видѣ прямоугольной сѣтки улицъ. Какъ найти адресъ дома, если за оси принять двѣ среднія улицы? Примѣнить къ Васильевскому О-ву (въ СПб.), взявъ за ось иксовъ“ Кадетскую и 1-ю линію, а за ось „игрековъ“—Большой проспектъ.

Всѣ эти упражненія должны быть задаваемы сначала въ предѣлахъ 1-го координатнаго угла; постепенно они могутъ распространяться и на другіе углы, но спѣшить не слѣдуетъ.

Наконецъ, графики великолѣпно разъясняютъ тонкости вычисленій и даютъ простое рѣшеніе тамъ, гдѣ приходится безъ нихъ серьезно подумать. Для иллю-

страціи приведемъ лишь одинъ примѣръ, которымъ Эдуардъ Люка на одномъ научномъ конгрессѣ смутилъ не мало знаменитостей. „Я полагаю, — сказалъ онъ,— что каждый день, въ полдень, отправляется пакетботъ изъ Гавра въ Нью-Іоркъ и въ то же самое время пакетботъ той же компаніи отправляется изъ Нью-Іорка въ Гавръ. Переѣздъ совершается ровно въ 7 дней въ томъ и другомъ направленіи. Сколько судовъ своей компаніи, идущихъ въ противоположномъ направленіи, встрѣтитъ пакетботъ, отправляющійся сегодня въ полдень изъ Гавра“? Нѣкоторые изъ знаменитостей молчали,



Чер. 39.

другіе отвѣтили: *семь!* Но ни одинъ не далъ отвѣта правильнаго, между тѣмъ, какъ графика сразу показываетъ 15 пересѣченій (напр. отъ A до B, чер. 39).

Лабораторная метода въ ариѳметикѣ.

16. Ручной трудъ можетъ найти примѣненіе въ ариѳметикѣ въ большомъ масштабѣ. Такъ, ученіе о дробяхъ можно соединить со столярными и картонажными работами; графическій элементъ и его спутникъ—черченіе сопровождаютъ почти всѣ вычисленія; задачи на комерческія вычисленія требуютъ экскурсій въ банки и большіе магазины, хлѣбныя биржи и пароходныя пристани; наконецъ, умѣнье обращаться съ приборами и счетными машинами должно составить не менѣе важную черту ариѳметическаго образованія. Было упомянуто выше, что *абакъ* и теперь играетъ крупную роль: это

вѣрно. Соотвѣтственно устроенный приборъ [1]) позволитъ путемъ наложенія шариковъ проходить нумерацію цѣлыхъ и десятичныхъ чиселъ, дѣйствія надъ ними, нахожденіе суммъ, построеніе графикъ и т. п. Можно, наконецъ, упомянуть о таблицѣ умноженія на пальцахъ, о математическихъ играхъ, о взвѣшиваніи, и пр.

Функціональность. 17. Идея функціональной зависимости можетъ быть указана въ предлагаемомъ курсѣ довольно часто. Такъ, при изслѣдованіи свойствъ членовъ 4 ариѳметическихъ дѣйствій, полезно пояснить зависимость между ними, напр., такъ:

$5+3=8$	$1+7=8$	$20-8=12$	$13-1=12$
$6+2=8$	$2+6=8$	$30-18=12$	$14-2=12$
$4+4=8$	$3+5=8$	$40-28=12$	$15-3=12$
$1+7=8$	$4+4=8$	$24-12=12$	. . . . .
$3+5=8$	$5+3=8$	. . . . .	$100-88=12$
$7+1=8$	$6+2=8$	$13-1=12$	. . . . .
$2+6=8$	$7+1=8$	$14-2=12$	и т. д.

Въ первомъ случаѣ говорятъ: $5+3=8$. Сколько еще чиселъ въ суммѣ даютъ 8? Дѣти сначала пишутъ комбинаціи какъ попало, затѣмъ располагаютъ ихъ въ порядкѣ и убѣждаются, что число комбинацій конечное и что изъ одной можно получить остальныя. Напротивъ, въ примѣрѣ на постоянную разность 12 число комбинацій безчисленно.

Хорошими примѣрами на нахожденіе постоянныхъ суммъ одинаковаго числа слагаемыхъ являются магическіе квадраты. Всѣ суммы разобранныхъ нами рядовъ суть функціи числа ихъ членовъ. Функціональная идея рѣзко выражена въ простой и квадратной пропорціональности, въ задачахъ на движеніе; на нее надо обратить вниманіе при приближенныхъ вычисленіяхъ, если даже ограничиться только умноженіемъ и дѣленіемъ десятичныхъ чиселъ. Наконецъ, могущественнымъ орудіемъ для выясненія этой идеи является графическая интерпретація различныхъ ариѳметиче-

---

[1]) Таковъ, напр., „*Абакъ*“ Мрочека, изд. Института Уч. Пос. „Песталоцци“, СПб. (см. рис. на сл. стр.).

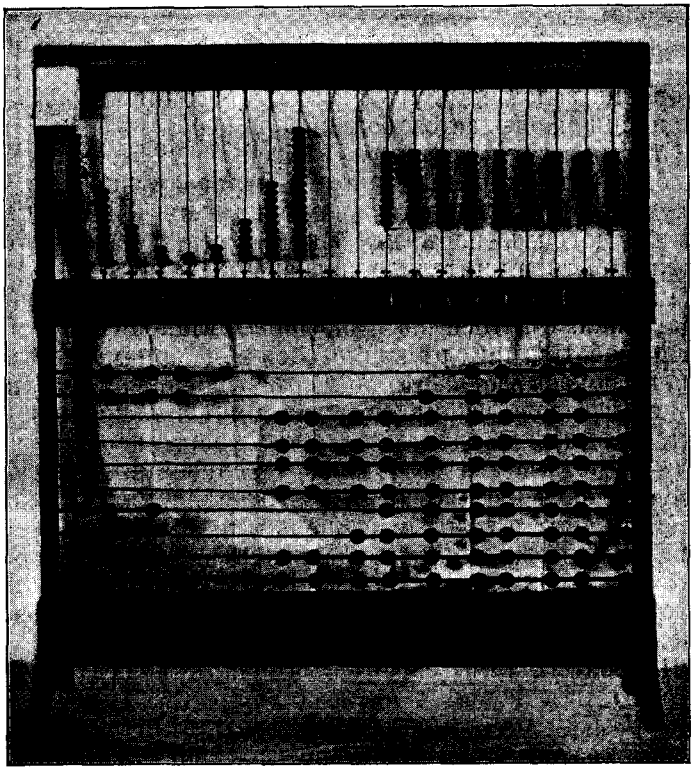


Рис. 40.

На верхней, вертикальной части прибора изображена парабола (слѣва) и сумма квадратнаго ряда (справа). Внизу десять горизонтальныхъ проволокъ съ шариками представляютъ счеты до 100, устроенные по системѣ Лая. На рисункѣ изображены 2 числовыя фигуры: на 1-ой и 2-ой проволокахъ числовая фигура 9, на 7-ой и 8-ой – числовая фигура 5.

На рисункѣ приборъ изображенъ въ 1/18 натуральной величины; шарики двухъ цвѣтовъ.

скихъ вопросовъ [1]). Это ознакомленіе съ идеей функціональной зависимости подготовитъ къ ознакомленію позже съ функціей.

Задачи. 18. Можно закончить эту главу тѣмъ, съ чего мы начали: нужны не учебники исчисленія, а хорошіе задачники. Къ счастью, заграницей въ этомъ отношеніи наблюдается большой прогрессъ.

Старыя *задачи по типамъ* отошли въ архивъ; всѣ эти бассейны, курьеры, синее и черное сукно, и т. д., и т. д., а въ особенности знаменитый г-нъ Нѣкто, царившій до сихъ поръ въ задачникахъ Россіи — тоже должны быть рѣшительно изгнаны. Противъ рѣшенія задачъ по типамъ ополчилась и экспериментальная педагогика. Опытное изслѣдованіе интенсивности мозговой работы при рѣшеніи сложной ариѳметической задачи показываетъ, что по мѣрѣ рѣшенія ея приливъ крови къ головѣ усиливается; но лишь только пріобрѣтенъ навыкъ въ рѣшеніи, кровь перестаетъ приливать—и получается бездумная механизація.

Къ сожалѣнію, всѣ эти изслѣдованія для русскихъ математиковъ — книга за 7 печатями. Намъ извѣстна одна „прогрессивная“, школа въ СПб., гдѣ по ариѳметикѣ даютъ 28 типовъ задачъ (на сукно, на бассейны, на x, на отниманіе назадъ (?!), и т. п. милые подзаголовки).

Приводимъ типы задачъ, матеріалъ коихъ позаимствованъ изъ жизни и наукъ о природѣ.

1) Самка-капустница кладетъ въ лѣто 3 раза по 70 яичекъ, изъ которыхъ впослѣдствіи выходятъ бабочки (половина самокъ и половина самцовъ); 6 гусеницъ вѣсятъ одинъ граммъ; каждая гусеница до окукливанія съѣдаетъ количество капусты, вѣсящее въ 60 разъ больше, нежели сама гусеница; 1 клгр. капусты стоитъ 12 пфениговъ. Найти убытокъ, причиненный за лѣто всѣми гусеницами.

2) Синица съѣдаетъ ежедневно 300 яичекъ и гусеницъ-капустницы. Сколько капустницъ уничтожитъ: a) въ одинъ день и b) въ одинъ мѣсяцъ семья си-

---

[1]) См., напр., *Н. А. Томилинъ*, Роль графическаго метода при обученіи математикѣ, 1910.

ницъ, состоящая изъ самки, самца и 4 птенцовъ, если принять, что птенецъ съѣдаетъ половину того, что съѣдаетъ взрослая синица?

3) 100 пудовъ каменнаго угля даютъ столько же тепла, сколько 300 пудовъ сухихъ дровъ, а 33 пуда мазута (нефтяной остатокъ) по количеству даваемаго тепла замѣнятъ 50 пуд. каменнаго угля. Сколько нужно взять дровъ, чтобы замѣнить ими 165 пуд. мазута?

4) Самое маленькое (и самое древнее) государство въ Европѣ — республика Санъ-Марино; плотность его населенія—175 человѣкъ на 1 кв. версту; численность его войска—950 человѣкъ, что на 5 человѣкъ больше 10% всего населенія. Какъ велика площадь земли, занимаемая республикой?

5) Купецъ, обанкротившись, оставилъ 324.000 руб. актива и 845.600 р. пассива. По сколько за рубль получатъ его кредиторы? Сколько получитъ главный, имѣющій на счетѣ 130.000 р.?

6) Выгоднѣе ли купить $3^1/_2$% бумаги по курсу 104,10 или 3% по курсу 99? (отвѣтъ: первая покупка выгоднѣе на 33 коп.).

7) Сколько потеряетъ лицо, купившее 3% ренту на 6.000 р. по курсу 102 за 100 въ 1889 г. и вынужденное теперь продать ее по курсу 98?

8) Торговецъ при ликвидаціи своего дѣла устроилъ распродажу съ уступкой въ 15% и, кромѣ того, онъ дѣлаетъ 6% скидки, если покупатель уплачиваетъ сразу. Какъ разсчитать быстро всю скидку?

Указ. Такъ какъ послѣ первой скидки остается $\frac{85}{100}$, а послѣ второй $\frac{85}{100} \cdot \frac{94}{100} = \frac{799}{1000}$, то вся скидка составляетъ $\frac{201}{1000}$ номинальной стоимости; слѣдовательно, отъ общей суммы нужно отсчитать $\frac{2}{10}$ и $\frac{1}{1000}$.

9. На фабрикѣ ежедневно вырабатывается $293^3/_8$ арш. шелковой матеріи; на каждые 1.000 арш. идетъ 8.325

золотниковъ шелку, цѣною по Р. 17,28 за фунтъ. Фабрика стоитъ Р. 12.000, ткацкіе станки и проч. Р. 15.000. Годовое жалованье рабочимъ Р. 8.240, служащимъ Р. 7.500. Отопленіе и освѣщеніе Р. 1.260, прочіе расходы Р. 400. На погашеніе отчисляется 8% съ недвижимаго и 20% съ движимаго имущества. Интересы на затраченный капиталъ считаются по 6%. Опредѣлить стоимость 1 арш. матеріи, считая въ году 280 рабочихъ дней.

10. Четыре лица образовали товарищество для эксплоатаціи изобрѣтенія. Первый, какъ собственникъ патента, переуступилъ его товариществу на 5 лѣтъ, получая за это 25% прибыли. Второй внесъ 18.000 р. и, какъ директоръ, получаетъ 10% прибыли. Третій внесъ 30.000 р., а четвертый вносилъ по 5.000 р. въ началѣ каждаго года. Черезъ 5 лѣтъ капиталъ съ интересами составлялъ 104.500 рублей? Какъ имъ подѣлиться?

11. Арабъ, умирая, оставилъ 17 верблюдовъ своимъ 3 сыновьямъ и завѣщалъ первому $^1/_2$, второму $^1/_3$, третьему $^1/_9$. Какъ имъ подѣлиться?

(*Указ.* Наслѣдники отправились къ шейху, который, подумавъ, велѣлъ привести своего верблюда; тогда 1-й получилъ 9, 2-й—6, 3-й—2, а верблюдъ шейха вернулся обратно.)

12. У одного араба было 5 хлѣбовъ, у другого—3. Когда они собирались поѣсть, имъ повстрѣчался богатый и голодный путешественникъ. Послѣ завтрака онъ оставилъ 8 золотыхъ монетъ. Сколько причитается каждому? (Отвѣтъ: 7 и 1).

13. Поставить недостающія числа отъ 1 до 16, чтобы сумма каждой строки составила 34.

13			6
	8	15	
7			16
	5	14	

14. Найти ошибку въ одной изъ дробей слѣдующаго магическаго квадрата:

$\frac{47}{40}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{7}{12}$

(Отвѣтъ: вмѣсто $^7/_{12}$ д. б. $^{17}/_{40}$).

15. Бассейнъ комнатнаго акваріума имѣетъ форму правильной восьмиугольной призмы, причемъ длина стороны основанія = 22 см., апоѳема восьмиугольника = = 26,5 см., а высота акваріума = 33 см.

Сколько литровъ воды содержитъ этотъ бассейнъ, наполненный до краевъ?

16. Башня съ квадратнымъ основаніемъ имѣетъ крышу въ видѣ правильной пирамиды, ребро основанія которой=2,8 м., и боковое ребро = 13,75 м. Требуется покрыть шпицъ желѣзомъ. Во что обойдется облицовка башеннаго шпица, если на фальцовку и выкраиваніе надбавляется 20%, а кв. м. желѣзной крыши съ заработной платой включительно стоитъ 4 марки? Апоѳема пирамиды = 13,68 м.

17. Сколько вѣситъ круглый желѣзный стержень въ 20 мм. толщины и 1,75 м. длины, если удѣльный вѣсъ желѣза = 7,78?

18. Буй (вѣха́ для указанія фарватера, плавающая на морѣ и укрѣпленная на днѣ помощью якорей) имѣетъ форму со всѣхъ сторонъ закрытаго полаго конуса, діаметръ основанія котораго = 0,8 м., образующая=1,32 м., а высота = 1,25 м. Сколько вѣситъ этотъ буй, если кв. м. жести вѣситъ съ краской 12 кгр. и если не обращается вниманія ни на швы, ни на отвороты, ни на заключенный въ буѣ воздухъ?

ГЛАВА X.

Рѣшеніе треугольниковъ.

„Тригонометрія играетъ именно необходимую роль въ элементарной математикѣ. Освобожденная отъ догматической формы, которую ей иногда даютъ съ первыхъ же уроковъ, она должна дополнить элементы геометріи и алгебры, съ которыми она составляетъ первый циклъ изученія; она въ то же время подготовляетъ къ общимъ методамъ аналитической геометріи; съ другой стороны она устанавливаетъ вполнѣ естественную связь между абстрактной наукой и техническими приложеніями.

H. Fehr.

Тригонометрія въ методическомъ развитіи.

1. Прекрасная оцѣнка тригонометріи, данная извѣстнымъ педагогомъ Феромъ [1]), въ настоящее время общепринята. Тѣмъ интереснѣе замѣтить, что еще недавно тригонометрія изучалась, какъ формальный отдѣлъ, и сторонники такого изученія не перевелись и понынѣ. Судьба этого отдѣла въ средней школѣ очень поучительна; она лишній разъ убѣдительно показываетъ, что программы и сущность математики мѣнялись какъ перчатки, подъ вліяніемъ соціальныхъ условій. Для иллюстраціи достаточно разсмотрѣть судьбу тригонометріи въ Россіи.

---

[1]) Основатель и соредакторъ (вмѣстѣ съ Лезаномъ) международнаго журнала „L'enseignement mathématique", убѣжденный сторонникъ реформы, много лѣтъ работающій въ этомъ направленіи, теперь генеральный секретарь Международной Комиссіи по реформѣ школьной математики, Феръ является однимъ изъ компетентнѣйшихъ педагоговъ, такъ какъ давно уже состоитъ профессоромъ въ Женевскомъ университетѣ и преподавателемъ въ гимназіи.

Въ одномъ изъ первыхъ руководствъ, именно, въ „*Сокращенной математикѣ*“ С. Румовскаго [1]), 1760 г., отдѣлъ „Начальныя основанія плоской тригонометріи“ начинается такъ: „*Тригонометрія плоская* есть знаніе черезъ Ариѳметическіе (sic!) выкладки сыскивать треугольники, которые геометрія черченьемъ находитъ“. Сообразно съ этимъ сначала изучаются основныя тригонометрическія величины (на 22 стр. только общія понятія и зависимости), затѣмъ рѣшеніе треугольниковъ (на 13 стр). Дальше 104 стр. занимаетъ практическая геометрія (съ тригонометріей). О функціяхъ нѣтъ и помину.

Въ извѣстномъ руководствѣ Н. Фусса [2]) въ § 1 читаемъ: „*Плоская Тригонометрія* есть наука имѣющая *предметомъ*, изъ трехъ данныхъ и числами изображенныхъ *частей* прямолинейнаго треугольника опредѣлять три прочія его части“. Расположеніе матеріала: общія понятія (на 14 стр.), рѣшеніе треугольниковъ (на 19 стр.), приложеніе тригонометріи къ практической геометріи и геодезіи (на 15 стр.), и, наконецъ, теорема суммы, двойные и половинные углы, поскольку они нужны для рѣшенія болѣе сложныхъ задачъ геометріи (на 15 стр).

Въ 20-ые годы, когда прежнее утилитарное направленіе въ математикѣ стало понемногу смѣняться формальнымъ, появились попытки измѣнить сущность тригонометріи въ школѣ. Онѣ продолжались недолго. Знаменитый академикъ М. В. Остроградскій, въ 40-ые годы жестоко напавшій на формально-схоластическую педагогику и требовавшій непрерывной и глубокой связи математики съ жизнью, повліялъ на судьбу тригонометріи. Въ 1848 г. Главное Управленіе Военно-Учебныхъ Заведеній издало программу-конспектъ, опять устанавливавшую прежнее прикладное содержаніе тригонометріи. Въ 1852 г. появился учебникъ Франца Симашко, въ теченіе 40 съ лишнимъ лѣтъ заполонившаго своими

---

[1]) Она содержитъ элементы ариѳметики, геометріи, алгебры и тригонометріи; въ XVIII в. излагалась вообще математика.

[2]) „Начальныя основанія Плоской Тригонометріи“, 1804.—У Фусса впослѣдствіи появилось тоже полное руководство по математикѣ, со включеніемъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія.

учебниками по ариѳметикѣ, алгебрѣ, геометріи и тригонометріи русскую среднюю школу. Въ началѣ курса онъ говоритъ: „Предметъ Тригонометріи состоитъ въ рѣшеніи треугольниковъ, то есть въ разысканіи неизвѣстныхъ его частей по данной сторонѣ и двумъ другимъ частямъ“. Тригонометрическія величины выводятся изъ прямоугольнаго треугольника, какъ отношенія его сторонъ; введено еще упрощеніе: „Начальная Тригонометрія, ограничиваясь рѣшеніемъ треугольниковъ, не нуждается въ секансѣ и косекансѣ“. Только въ концѣ учебника (53—63 стр.) дана теорема суммы, двойные и половинные углы; заканчивается геодезическими приложеніями.

Эволюція учебника Симашко отразила на себѣ и эволюцію русской школы. Во 2-мъ изданіи 1857 г. къ опредѣленію предмета тригонометріи добавлено слово „преимущественно“ [1]); порядокъ расположенія матеріала почти не измѣнился; объемъ увеличенъ. За истекшіе 5 лѣтъ учебникъ былъ одобренъ какъ руководство для гимназій и кадетскихъ корпусовъ.

Въ 1861 г. умеръ Остроградскій, въ 1864 и 1871 г. русская школа подверглась рѣшительнымъ преобразованіямъ; воцарившаяся надолго система Д. Толстого порвала съ прежней математикой,—и вотъ въ предисловіи къ 3-му изданію 1886 г. читаемъ: „Въ настоящее время программы всѣхъ учебныхъ заведеній, не исключая кадетскихъ корпусовъ, требуютъ разсмотрѣнія тригонометрическихъ величинъ изъ круга; согласно этимъ программамъ я передѣлалъ заново теоретическую часть науки(?!)“. И дѣйствительно—отъ прежняго учебника осталось только заглавіе, да фамилія автора, убѣжденія котораго измѣнились такъ согласно съ программой.

Новый порядокъ—изученіе функцій и изгнаніе треугольниковъ на задворки, въ гимназіяхъ сохранился до сихъ поръ. Въ реальныхъ же училищахъ въ 1906 г. была введена новая программа тригонометріи, согласно которой въ 6-мъ классѣ знакомятъ съ рѣшеніемъ тре-

---

[1]) „Предметъ Тригонометріи состоитъ *преимущественно* въ рѣшеніи“ и т. д., см. выше.

угольниковъ, а въ 7-мъ съ основными свойствами гоніометрическихъ функцій.

Между тѣмъ заграницей пошли гораздо дальше. Еще на 70-мъ съѣздѣ (Дюссельдорфъ, 1898) германскихъ математиковъ проф. Мейеръ [1]) предложилъ раздѣлить тригонометрическій матеріалъ на 3 цикла: 1) рѣшеніе треугольниковъ, 2) теорія треугольниковъ, 3) преобразованія. Во Франціи приблизительно въ то же время включили *рѣшеніе треугольниковъ при помощи натуральныхъ таблицъ* въ обычные курсы геометріи; ихъ примѣру послѣдовали вскорѣ и германскіе авторы руководствъ; остальной матеріалъ распредѣленъ на 2 года. Наконецъ американцы расчленили весь матеріалъ и отнесли его части къ алгебрѣ и геометріи. Такъ въ планиметрію включено рѣшеніе треугольниковъ при помощи натуральныхъ таблицъ, въ алгебру—рѣшеніе треугольниковъ при помощи логариѳмовъ, а также рѣшеніе гоніометрическихъ уравненій; преобразованія и тождества отнесены къ дальнѣйшимъ ступенямъ и т. д.

Не касаясь вопроса о дальнѣйшихъ циклахъ, можно съ увѣренностью сказать, что знакомство съ синусомъ и тангенсомъ и рѣшеніе треугольниковъ при помощи натуральныхъ таблицъ доступны младшему возрасту и могутъ найти себѣ мѣсто въ концѣ курса наглядной геометріи.

2. Естественная и логическая связь тригонометріи съ геометріей возможна *лишь* при разсмотрѣніи подобныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ съ общимъ острымъ угломъ. Вводя понятіе о коэффиціентѣ подобія, мы легко переходимъ къ понятіямъ о синусѣ и тангенсѣ остраго угла. Эта точка зрѣнія принята въ настоящее время какъ въ наукѣ, такъ и въ методикѣ [2]).

Знакомство съ натуральными таблицами синусовъ и тангенсовъ должно быть облегчено на сколько возможно. Во I-хъ, гораздо чаще приходится пользоваться именно натуральными таблицами; во II-хъ, обращеніе

---

[1]) Редакторъ нѣмецкаго изданія „Энциклопедіи математическихъ наукъ“.

[2]) См. напр. „Encyclopédie“, Веберъ-Вельштейнъ и др.; Baltzer, Laisant, Fehr, Simon, Reidt, Ioung, Schwering и др.

съ ними несравненно легче; въ III-хъ, ихъ устройство вытекаетъ непосредственно изъ первыхъ свойствъ синуса и тангенса, очень просто и можетъ быть выполнено самими учащимися; въ крайнемъ случаѣ—допускаетъ легкую повѣрку.

Вычисленія при помощи таблицъ пережили тоже интересную эволюцію. Сначала знакомили исключительно съ логариѳмическими таблицами, и притомъ 7-мизначными; затѣмъ перешли къ 5-тизначнымъ [1]), благодаря авторитету Лялянда и Леверье (1852); теперь во многихъ государствахъ введены и 4-рехзначныя. До 90-хъ годовъ XIX вѣка натуральныя таблицы были въ загонѣ, но затѣмъ стали довольно быстро распространяться, чему не мало способствовали указанія Hoüel'a [2]), категорически высказавшагося: „Слишкомъ раннее употребленіе логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ въ обученіи, предназначенномъ для молодежи, которая еще малоопытна въ практикѣ вычисленій, можетъ лишь задержать ихъ развитіе въ этомъ направленіи и связать ихъ природныя способности. Зло тѣмъ больше, когда даютъ въ ихъ ученическія руки большія таблицы, годныя лишь для опытныхъ практиковъ, и пользованіе которыми, съ точки зрѣнія теоріи, не научаетъ ничему больше по сравненію съ 3-хъ или 4-рехзначными“.

Тригонометрія въ историческомъ развитіи. 3. До сихъ поръ мы не обращали вниманія на исторію тригонометріи,—и сдѣлали это умышленно, съ цѣлью показать, что избранный путь для ея изученія въ школѣ совершенно совпадаетъ съ ея историческимъ развитіемъ.

Рѣшая практическіе вопросы, Халдеи и Египтяне съ одной стороны, Китайцы съ другой—пользовались *косинусомъ* въ глубокой древности. Накопленіе астрономическихъ наблюденій, требовавшихъ математической обработки, и попытки градусныхъ измѣреній (напр. Эратосѳенъ въ 220 г. прибл. до Р. Х.) заставили грековъ разработать подробнѣе ученіе о треугольникахъ.

---

[1]) Семизначныя таблицы остались до сихъ поръ въ Португальскихъ школахъ.

[2]) *Hoüel*, Remarques sur l'enseignement de la Trigonométrie, 1883.

Этимъ занялись: геніальный Гиппархъ (періодъ дѣятельности 160—125 до Р. Х.) и Геронъ Александрійскій (ок. 120 до Р. Х.). Первый составилъ таблицу хордъ, впослѣдствіи передѣланную въ таблицу синусовъ, второй далъ нѣкоторыя основныя зависимости для рѣшенія треугольника. Съ тѣхъ поръ прошли столѣтья—и только въ 1464 г. п. Р. Х. Регіомонтанусъ вводитъ тангенсы и составляетъ для нихъ таблицы. Дальнѣйшіе шаги—это изобрѣтеніе логариѳмовъ, какъ необходимаго облегченія при сложныхъ тригонометрическихъ вычисленіяхъ; оно было сдѣлано одновременно и независимо, на различныхъ основаніяхъ, швейцарцемъ Бюрги и англичаниномъ Нэпиромъ, въ началѣ XVII в. Затѣмъ попутно была разработана теорія рѣшенія треугольниковъ, и къ началу XIX в. тригонометрія получила законченный видъ.

Исторія тригонометріи, такимъ образомъ, не только интересна сама по себѣ, но и крайне поучительна въ педагогическомъ и методическомъ отношеніи. Это обстоятельство было учтено давно: вотъ почему единственные, пожалуй, учебники по тригонометріи бываютъ снабжены историческими очерками развитія этого отдѣла математики. Таковы напр.

Проф. *Г. Тиме*, Плоская Тригонометрія, 1881.

F. G.-M., Compléments de Trigonométrie, Tours, 1906.

Bützberger, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, 4 Aufl., Zürich, 1909.

В. Мрочекъ, Прямоугольная Тригонометрія и основанія теоріи гоніом. функцій, 1908, и др.

Геометрія въ связи съ тригонометріей.

4. Связь геометріи съ тригонометріей необходима. При разсмотрѣніи отдѣла о треугольникахъ обнаруживается важный пробѣлъ—не указана точная зависимость между сторонами и углами треугольника. Такъ какъ всякій вычислительный вопросъ геометріи непремѣнно сводится къ вычисленію треугольника, то при современныхъ требованіяхъ геометрія оказалась бы совершенно безъ значенія, она не играла бы никакой роли, если бы только она гордо отказалась отъ услугъ тригонометріи. Теперь это обстоятельство учтено, и во многихъ учебникахъ геометріи тригонометрическія величины съ ихъ

простѣйшими зависимостями разсматриваются въ главѣ о подобіи фигуръ. Съ другой стороны введеніе тригонометрическихъ величинъ даетъ возможность облегчить и обобщить многія теоремы геометріи, то-есть даетъ выигрышъ въ методическомъ отношеніи; таковы теоремы о квадратѣ стороны треугольника, пропорціональныхъ отрѣзкахъ въ треугольникѣ и кругѣ, теорема проэкцій, выводъ многихъ формулъ для площадей и объемовъ (особенно поверхность шара) и т. п. [1]).

Вотъ списокъ главнѣйшихъ руководствъ по геометріи, со включеніемъ элементовъ тригонометріи:

Holzmüller, Elementar-Mathematik, B. II, 1896.

Martin und *Schmidt*, Raumlehre für Mittelschulen, H. III, 1899.

Walther, Lehr-und Uebungsbuch der Geometrie, 1907.

Andoyer, Cours de Géometrie, 1896.

Borel, Géometrie, 1905.

Bourlet, Eléments de Géométrie, 1908.

Houston and *Kennely*, The interpretation of mathematical formulae, New-Iork, 1900.

Eggar, Practical exercises in Geometry, London, 1907.

Ройтманъ, Курсъ элементарной геометріи, Москва, 1907, и др.

Содержаніе перваго цикла.

5. Строго говоря, не можетъ быть рѣчи о „содержаніи“ тригонометріи въ первомъ циклѣ; все сводится къ слѣдующимъ вопросамъ, которые должны быть включены въ курсъ геометріи:

1. Понятіе о синусѣ и его вычисленіи.
2. Составленіе простѣйшихъ натуральныхъ таблицъ.
3. Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ при помощи синуса.
4. Понятіе о тангенсѣ и его вычисленіи; таблицы тангенсовъ.
5. Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ при помощи тангенса.

---

[1]) „ . . . . Il n'y a nul incovénient à introduire les relations trigonométriques dans les démonstrations géométriques“ (нѣтъ никакихъ препятствій для введенія тригонометрическихъ зависимостей въ геометрическія доказательства)—говорятъ французскія оффиціальныя программы 1905 г. (Plan d'études, стр. 202).

6. Формулы синусовъ; рѣшеніе произвольныхъ треугольниковъ.

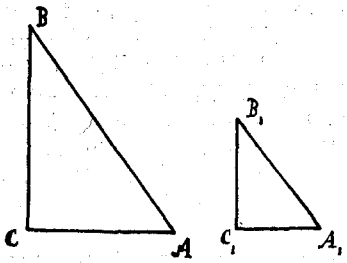
7. Основные вопросы изъ землемѣрія, геодезіи, географіи, астрономіи и т. п.

Разсмотримъ намѣченные пункты послѣдовательно.

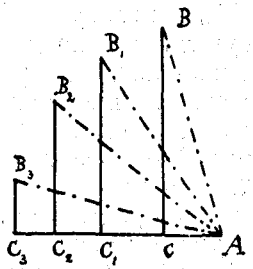
Введеніе „синуса“ можетъ быть сдѣлано такъ. Возьмемъ два подобныхъ прямоугольныхъ треугольника; у нихъ равные острые углы A и A_1. Изъ ихъ подобія находимъ (чер. 41)

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$$

Такъ какъ такихъ подобныхъ треугольниковъ существуетъ безчисленное множество, то мы заключаемъ, что во всѣхъ треугольникахъ отношенія разсматриваемыхъ сторонъ будутъ выражаться однимъ и тѣмъ же числомъ; это число зависитъ лишь отъ величины угла A. Дѣйствительно, измѣняя уголъ A такъ, чтобы гипотенуза оставалась постоянной, мы получимъ меньшіе или бо̀льшіе противолежащіе катеты, смотря по тому, будетъ ли уголъ A уменьшаться или увеличиваться (чер. 42).



Чер. 41.



Чер. 42.

Условились отношеніе противолежащаго углу катета къ гипотенузѣ называть синусомъ [1]) *угла* и писать

$$\frac{BC}{AB} = \sin A.$$

[1]) Интересно и поучительно происхожденіе слова „синусъ“. Гиппархъ и Кл. Птоломей за мѣру центральнаго угла принимали

Построеніе таблицы синусовъ можетъ быть выполнено двояко: 1) графически, чертя различные треугольники въ опредѣленномъ масштабѣ и измѣряя ихъ стороны съ точностью до 1%; 2) при помощи прибора „Тригонометръ“, дающаго сразу значеніе синуса или тангенса для даннаго угла [2]). Конечно, здѣсь важна лишь идея построенія таблицъ; для вычисленій слѣдуетъ давать въ руки учащимся 3-хъ или 4-хзначныя таблицы черезъ 1°, умѣщающіяся на одной страничкѣ.

Введеніе на первыхъ порахъ косинуса представляется лишнимъ; въ дальнѣйшемъ при рѣшеніи задачъ можно будетъ указать на „дополнительный синусъ“ (sinus complementi = sin. co. = cosin) и даже назвать его косинусомъ. Но для большинства задачъ требуется лишь синусъ.

Къ тангенсу слѣдуетъ перейти лишь при рѣшеніи треугольника по данному катету и углу. Показавъ, насколько неудобно рѣшеніе при помощи синуса, можно ввести отношеніе синуса къ косинусу, назвать его *тангенсъ* и составить для него таблицы, какъ указано выше. Что касается котангенса, то онъ совершенно лишній, а между тѣмъ каждое новое понятіе требуетъ времени и продолжительныхъ упражненій для усвоенія его учащимися.

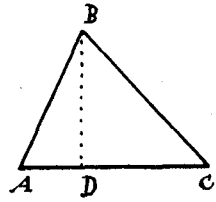
Послѣдній теоретическій вопросъ—это формулы синусовъ. Возьмемъ произвольный треугольникъ ABC (чер. 43); проводя высоту BD, находимъ $BD = AB\sin A$ и $BD = BC\sin C$, откуда $AB\sin A = BC\sin C$ и $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin A}{\sin C}$.

хорду (при радіусѣ = 1); Индусы впервые ввели полухорду (по санскритски ardhagiva) или половина тетивы лука, такъ какъ сегментъ дѣйствительно напоминаетъ лукъ. Арабы слово „giva“ передѣлали въ „giba“; но т. к. въ арабскомъ языкѣ гласныя не пишутся, то слово „gb“ можно принять за чисто арабское „gaib“ (джайбъ, впадина). Это и случилось съ первымъ переводчикомъ, Платономъ Тибуртинскимъ (ок. 1120—1136 п. Р. Х.); слово „gb“ онъ перевелъ на латинскій буквально черезъ „sinus“ (впадина, заливъ). Ошибка выяснилась лишь въ XIX вѣкѣ, но терминологія за это время прочно утвердилась и измѣнить ее теперь нѣтъ основаній.

[2]) Такой приборъ можно въ грубомъ видѣ изготовить самому: циркуль съ квадрантомъ и привѣсомъ.

Такимъ же образомъ установимъ зависимость и для другихъ сторонъ и угловъ; результатъ формулируемъ словами: *во всякомъ треугольникѣ стороны пропорціональны синусамъ противолежащихъ угловъ.*

Нѣтъ надобности разсматривать отдѣльно тригонометрическія величины тупыхъ угловъ; въ вопросахъ, подлежащихъ разсмотрѣнію на этой ступени обученія, тупые углы не встрѣчаются. Единственный случай, когда приходится вычислять $\sin(\alpha+\beta)$, гдѣ $\alpha+\beta>90^\circ$, но порознь каждый изъ угловъ острый, можно легко истолковать геометрически, не прибѣгая вовсе къ теоретической зависимости $\sin(180^\circ-x)=\sin x$.

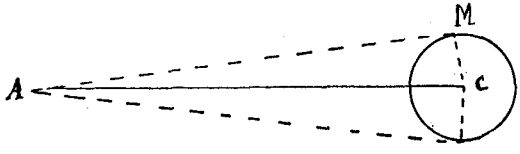


Чер. 43.

Задачи. 6. Переходимъ къ разсмотрѣнію главнѣйшихъ типовъ задачъ.

I. *Опредѣлить высоту доступнаго предмета, стоящаго на горизонтальной плоскости.* Вопросъ сводится къ отысканію катета BC по данному базису AC и углу A (чер. 40). Вычисленіе производится по формулѣ $BC=AC\,tg A+h$, гдѣ h—высота угломѣрнаго прибора.

II. *Опредѣлить діаметръ круглаго предмета, виднаго издали, разстояніе до котораго извѣстно.* Задача сводится къ рѣшенію прямоугольнаго треугольника ACM (чер. 44); искомый діаметръ $x=2MC$, а $MC=AC\sin\frac{A}{2}$. Это—обычный типъ задачи объ опредѣленіи діаметра свѣтилъ; уголъ A называется *видимымъ діаметромъ* [1]).



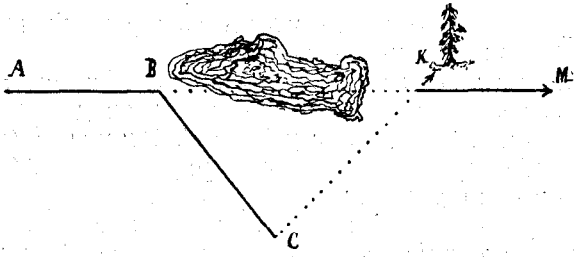
Чер. 44.

[1]) Вслѣдствіе громадныхъ междупланетныхъ разстояній, выражаемыхъ въ милліонахъ земныхъ радіусовъ, можно пренебречь радіусами земли и измѣряемой планеты и отсчитывать разстоянія отъ центра до центра.

III. *Опредѣлить площадь треугольнаго участка земли.* Для этого достаточно знать размѣры двухъ любыхъ сторонъ треугольника и измѣрить уголъ между ними. Напр., при данныхъ AB, AC и A (чер. 43) находимъ $F = \frac{1}{2}$ BD.AC, но BD = ABsinA, слѣдовательно $F = \frac{1}{2}$ AC.ABsinA. Это позволяетъ намъ сдѣлать общее заключеніе: *площадь треугольника равна полупроизведенію двухъ сторонъ на синусъ угла между ними.*

Если участокъ земли имѣетъ форму многоугольника, то его разбиваютъ на треугольники и вычисляютъ площади отдѣльныхъ участковъ.

IV. *Опредѣлить разстояніе между двумя точками, изъ коихъ одна недоступна.* Вопросъ сводится къ рѣшенію треугольника ABC (чер. 43) по базису и двумъ при-



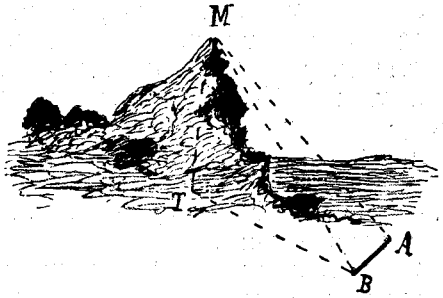
Чер. 45.

лежащимъ угламъ. Напр., при данныхъ AC, A и C искомое разстояніе AB можно найти такъ. Сначала вычисляемъ третій уголъ B, затѣмъ по формулѣ синусовъ получаемъ $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B}$, откуда $AB = \frac{AC.\sin C}{\sin B}$.

V. *Продолжить прямую черезъ препятствіе.* Положимъ, что прямую дорогу (желѣзнодорожный путь и т. п.) AB (чер. 45) требуется продолжить черезъ препятствіе P (оврагъ, рѣка, болото, холмъ и т. п.). Выбираемъ такую точку C, изъ которой была бы видна мѣстность по обѣ стороны препятствія; разстояніе BC принимаемъ за базисъ. Затѣмъ изъ точки C визируемъ какой-нибудь выдающійся пунктъ K по правую сторону препятствія (дерево, домъ и т. п.) и наносимъ на планѣ

направленіе СК; кромѣ того, измѣряемъ углы АВС и С. Тогда изъ Δ ВЕС находимъ (Е искомая точка): $CE = \frac{BC \sin EBC}{\sin BEC}$, $\angle EBC = 180° - \angle ABC$, $\angle BEC = \angle ABC - \angle C$

Наконецъ изъ Е проводимъ прямую ЕМ подъ угломъ $CEM = B + C$, и задача рѣшена.



Чер. 46.

VI. *Опредѣлить высоту недоступной горы.* Пусть МТ представляетъ искомую высоту (чер. 46). Мы не можемъ выбрать базисъ въ одной вертикальной плоскости съ МТ, такъ какъ этому мѣшаетъ гористый характеръ мѣстности; поэтому выбираемъ базисъ АВ въ плоскости, параллельной МТ, на участкѣ по возможности болѣе ровномъ. Измѣряя углы МВА и МАВ, изъ Δ ВАМ находимъ: $MB = \frac{AB \sin A}{\sin BMA}$; измѣривъ затѣмъ еще уголъ МВТ, изъ прямоугольнаго треугольника МВТ находимъ: $MT = MB \sin MBT$, и окончательно $MT = \frac{AB \sin A \sin MBT}{\sin BMA}$.

Таковы главнѣйшія задачи, доступныя на этой ступени обученія. Ихъ можно крайне разнообразить, взявъ матеріалъ изъ различныхъ отдѣловъ прикладныхъ математическихъ наукъ. Нѣкоторые учебники тригонометріи за послѣднее время даютъ много подобныхъ задачъ, хотя не всѣ онѣ являются простыми. Чтобы показать возможность подбора простѣйшихъ, мы помѣщаемъ нижеслѣдующіе образцы.

1) Холмъ возвышается надъ горизонтомъ и видѣнъ съ нѣкотораго мѣста подъ угломъ въ 11°. По картѣ съ масштабомъ 1 : 10000 его разстояніе отъ наблюдателя составляетъ 26,8 мм. Опредѣлить дѣйствительную высоту холма.

2) Максимальная высота моста 6 м., его подъемъ 5°. Какова длина моста?

3) Капштадтъ и Сидней находятся на южной широтѣ 33° 53′; ихъ восточныя долготы суть 18° 30′ и 151° 12′. Найти разстояніе между ними.

4) Какой длины радіусъ параллельнаго круга Москвы (широта 55°45′20″)? Какой длины градусъ параллели?

5) Крайнія точки дороги длиною 82,67 км. лежатъ на 0,11 м. и 4,87 м. подъ горизонтомъ нивеллирующаго инструмента. Какъ великъ уголъ наклона, наклонъ въ % и горизонтальное проложеніе дороги на картѣ 1 : 1000?

6) Найти приблизительную толщину земной атмосферы, зная, что въ сумерки солнце находится на 18° подъ горизонтомъ.

7) Изъ крѣпостной башни въ 10 саж. вышины, стоящей на скалѣ въ 170 саж., наблюдаютъ привязной воздушный шаръ подъ углами въ 3° и въ 3°20′ съ горизонтомъ (считая отъ верхушки башни и основанія скалы). Найти высоту подъема и разстояніе шара отъ крѣпости.

8) На какомъ разстояніи отъ глаза надо поставить кружокъ 1 дюймъ въ діаметрѣ, чтобы онъ закрылъ солнце?

9) Если уголъ зрѣнія меньше 40″, то наблюдаемый предметъ представляется въ видѣ точки. Какова должна быть длина аллеи, чтобы, ставъ по серединѣ, мы видѣли ее на обоихъ концахъ сливающейся?

10) Найти радіусъ земного шара, зная, что уголъ пониженія горизонта на высотѣ человѣческаго роста (2 м.) составляетъ около 2′44″?

Въ заключеніе укажемъ двѣ таблички, откуда можно черпать обильный матеріалъ для задачъ.

I. Таблица уклоновъ (по Вихерту).

Едва замѣтно для глаза паденіе въ	1 : 300
Желѣзнодорожные вагоны начинаютъ катиться сами при уклонѣ въ	1 : 200
Въ Германіи на *желѣзныхъ дорогахъ* допускаются уклоны: на равнинахъ не свыше	1 : 200

въ холмистой мѣстности не свыше . . . . . 1 : 100
въ горахъ не свыше. . . . . 1 : 40

Для большихъ *шоссейныхъ дорогъ* въ Пруссіи допускаются уклоны:
на равнинахъ не свыше . . . . . 1 : 40
въ горахъ на равнинахъ не свыше . . . . . 1 : 20
на менѣе важныхъ дорогахъ они доходятъ до . 1 : 15
или даже до . . . . . 1 : 10

На *картахъ для велосипедистовъ* отмѣчаются, какъ опасныя, дороги съ уклономъ въ . . . . . 1 : 20
для *телѣгъ* опасны дороги съ уклономъ отъ . . 1 : 6

Мулъ можетъ одолѣвать еще подъемы въ . . . . . 1 : 1,8

Человѣкъ съ трудомъ только поднимается по тропинкѣ съ уклономъ . . . . . 1 : 1²/₃
и съ трудомъ взлѣзаетъ на обрывъ, покрытый газономъ, въ . . . . . 1 : 1,43

Среднее пониженіе *западно-германской низменности* отъ Вигенскихъ горъ до берега моря составляетъ около. . . . . 1 : 4000

Паденіе равнины По отъ Альповъ къ рѣкѣ составляетъ около . . . . . 1 : 400
такія же незначительныя повышенія мы находимъ и въ другихъ низменностяхъ.

Въ *горныхъ долинахъ* уклонъ въ . . . . . 1 : 40
можетъ уже считаться довольно крутымъ

Подъемы круче . . . . . 1 : 1
рѣдко встрѣчаются и въ горахъ.

Для *движеній войскъ* при 20°, отвѣчающихъ уклону въ 1 : 2,7
начинаются замѣтныя затрудненія; поэтому у военныхъ различаютъ уклоны ниже и выше 20°, подъ названіемъ „*скатовъ*“ и „*обрывовъ*“.

Паденіе Рейна составляетъ
возлѣ Базеля . . . . . 1 : 1000
возлѣ Мангейма . . . . . 1 : 9000
возлѣ Кельна . . . . . 1 : 5000

Миссисипи имѣетъ паденіе при впаденіи Огайо около 1 : 10000
а возлѣ Новаго Орлеана паденіе въ . . . . . 1 : 50000

Несмотря на такое ничтожное паденіе — 2 сантиметра на 1 километръ—ея теченіе около Новаго Орлеана имѣетъ скорость 1,8 метра въ 1 секунду. Большая величина этой скорости является слѣдствіемъ большой ширины и глубины рѣки (800 и 40 метровъ). Чѣмъ больше поперечное сѣченіе ложа рѣки, тѣмъ значительнѣе бываетъ—вслѣдствіе уменьшенія тренія - и скорость.

Вообще можно принять, что граница *судоходности* бываетъ при паденіи отъ . . . . . 1 : 1000 до 1 : 500
и что при паденіи въ . . . . . 1 : 2000
въ благопріятныхъ случаяхъ движеніе можетъ совершаться подъ парусами.

Въ заключеніе еще нѣсколько данныхъ относительно *сельскаго хозяйства*: обработка поля плугомъ при дѣлается трудной, а употребленіе жатвенной машины затрудняется при . . . . . 1 : 6
. . . . . 1 : 10
Для дренажа берутъ возможно большій уклонъ отъ . 1 : 1000
до . . . . . 1 : 10

„Эти числа ясно показываютъ намъ, что при опредѣленіи разницы высотъ вообще нужно стремиться къ гораздо большей точности, чѣмъ при измѣреніи длинъ въ горизонтѣ. Часто бываетъ необходимо принимать въ разсчетъ миллиметры или даже десятыя доли миллиметра“.

II. Таблица поправокъ для горизонтальныхъ проложеній.

Углы уклона.	3°	5°	7°	10°	15°	20°	23°	25°	30°	32°	35°	40°	45°
Поправка для 10 саж.	0,01	0,04	0,08	0,15	0,34	0,60	0,80	0,94	1,34	1,52	1,81	2,34	2,93

Пользуясь данными таблицы, можно по данному проложенію узнать длину въ дѣйствительности, прибавляя соотвѣтствующую поправку, или вычислить, каково должно быть проложеніе на картѣ, вычитая поправку изъ дѣйствительной длины. Напр., если дорога образуетъ скатъ длиною въ 56 саж. и уклонъ въ 20°, то вся поправка составитъ 3,36 саж., а проложеніе на картѣ сажень въ дюймѣ равно 44 дюймамъ (приблизительно).

ГЛАВА XI.

Обоснованія начальнаго курса алгебры.

„Помѣщаемъ въ „Учителѣ“ этотъ курсъ алгебры по глубокому нашему убѣжденію, что принятый въ общеобразовательныхъ заведеніяхъ способъ преподаванія ея и геометріи есть одно изъ величайшихъ безобразій теперешней системы обученія.“

Предисловіе редакціи журнала „Учитель“ къ курсу алгебры Страннолюбскаго, 1868 г.

Къ исторіи алгебры.

1. Изъ приведенной нами цитаты видно, что недовольство школьной алгеброй принимало опредѣленныя формы еще 40 лѣтъ назадъ. Съ тѣхъ поръ немногое измѣнилось въ постановкѣ дѣла въ русскихъ школахъ, за то тѣмъ разительнѣе перемѣна за границей. Въ то время какъ у насъ все еще стоятъ на точкѣ зрѣнія Эйлера и продолжаютъ „обучать наукѣ“, въ Западной Европѣ и Америкѣ съумѣли перейти къ живому, современному и прикладному построенію курса.

Для уясненія современной точки зрѣнія нужно взглянуть на историческое развитіе алгебры.

Алгебра пережила пока три періода. Изъ *риторической* (словесной) алгебры древнихъ она черезъ арабовъ и итальянцевъ дошла до *„синкопированныхъ“* [1])

---

[1]) Такъ наз. алгебраическіе трактаты, содержавшіе начала символики—въ видѣ начальныхъ слоговъ или буквъ различныхъ словъ. Напр. уравненіе $12+3x^2=30x$ у *Шюке* въ его „Triparty“ (1484) записано такъ: „.12. plus 3^2 egaux *a*. 30^1.“ (т.-е. .12. плюсъ. 3^2 приравниваются къ 30^1.). А у *Bombelli*, L'Algebra, 1579, выраженіе $\sqrt{4+\sqrt{6}}+2$ представлено такъ: „R . q. L 4. p. R. q. 6. L p. 2“, что̀ значитъ: „Radix quadrata legata 4 plus Radix quadrata 6, plus 2“.

трактатовъ XVI вѣка и закончилась современной *символической*. Рѣзкой грани провести между этими періодами нельзя, но характерныя черты присущи каждому. Отъ первыхъ символовъ Халдеи и Египта до обозначеній Діофанта прошли тысячелѣтья; европейскіе трактаты съ ихъ обозначеніями — обрывками словъ (отсюда названіе — синкопированный, т.-е. усѣченный) въ рукахъ Віета, Лейбница и Эйлера стали принимать благородную форму международной символики. Но какъ медленно прививалась эта форма! Большими и малыми буквами обозначали величины еще Гиппократъ Хіосскій (440 до Р. Х.), Аристотель, Эвклидъ, Аполлоній, Паппусъ, Діофантъ; Леонардъ Пизанскій (1202), изображая по греческому обычаю всѣ числа отрѣзками, ставитъ около каждаго уже *одну букву*; вплоть до Віета (1591) это нововведеніе не прививалось, а затѣмъ Декартовское (1637) обозначеніе a, b, c,.... для извѣстныхъ и x, y, z,.... для неизвѣстныхъ утвердилось окончательно лишь 100 лѣтъ спустя, благодаря Эйлеру. Только въ трудахъ послѣдняго мы находимъ впервые современный алгебраическій символизмъ.

Развитіе алгебры необходимо разсматривать въ двухъ отношеніяхъ: матеріала и языка. Въ то время какъ матеріалъ развивался сравнительно быстро—и по крайней мѣрѣ современный школьный курсъ алгебры насчитываетъ столѣтья и даже тысячелѣтья, языкъ алгебры развивался крайне медленно. Между тѣмъ при составленіи офиціальныхъ программъ это обстоятельство совершенно не принято во вниманіе. Дѣтямъ, еле справляющимся съ рѣшеніемъ задачъ, преподносятъ хитроумный аппаратъ буквенныхъ обозначеній и теорію преобразованій, совершенно не считаясь съ тѣми затрудненіями. какія пришлось осилить человѣчеству по пути къ обобщенію и отвлеченію.

Алгебра, какъ „ученіе объ уравненіи“, существовала еще у Египтянъ; подъ видомъ „Ариѳметики“ ее разрабатывалъ Діофантъ [1]); Индусы и Арабы занимались только уравненіями; Віета, Декартъ, Ньютонъ и др.

---

[1]) Наша ариѳметика (исчисленіе) у грековъ называлась „Логистика“.

не знаютъ „нашей“ алгебры. Лишь въ концѣ XVIII-го и началѣ XIX вѣка ученіе о тождественныхъ преобразованіяхъ *приклеили* (иначе нельзя выразиться) къ рѣшенію уравненій. Лѣтъ 50 спустя (именно съ выхода въ свѣтъ книги Г. Грассманна, 1861) въ алгебрѣ на первый планъ выдвинуто ученіе объ уравненіяхъ и о функціяхъ; расширеніе же понятія „число“ (положительныя, отрицательныя, ирраціональныя, мнимыя, комплексныя и др. числа) есть достояніе одной лишь Ариѳметики, часть которой составляетъ и все ученіе о тождественныхъ преобразованіяхъ. Эта точка зрѣнія въ настоящее время принята всѣми [1]).

Алгебра, какъ учебный предметъ, введена въ школы недавно, съ эпохи Великой французской революціи. Основаніе Политехнической Школы въ Парижѣ послужило толчкомъ для созданія ряда элементарныхъ руководствъ по математикѣ. Въ Германіи и Англіи въ то время царствовалъ Эйлеръ. Мы уже имѣли случай указывать, какимъ преобразованіямъ подверглась математика въ 20-ые годы прошлаго вѣка — тогда-то и создался типъ руководствъ, царствующихъ до сихъ поръ въ русскихъ школахъ.

Разсмотримъ теперь три главныхъ системы построенія школьнаго курса алгебры и дадимъ ихъ критическій разборъ въ связи съ новыми требованіями.

I-ая система — преобразованія.

2. Первая система построена такъ, что весь курсъ является развитіемъ основной идеи—ученія о тождественныхъ преобразованіяхъ. Всѣ другіе отдѣлы, какъ-то: уравненія, ряды, логариѳмическія вычисленія — являются привходящими. Авторы руководствъ ясно подчеркиваютъ свою точку зрѣнія. Такъ, вдохновитель русскихъ алгебраистовъ, Бертранъ, говоритъ [2]): „Алгебра имѣетъ цѣлью *сокращать*, *упрощать*, и въ особенности *обобщать* рѣшеніе вопросовъ, которые можно себѣ ставить относительно чиселъ. Для достиженія этой цѣли алгебра

---

[1]) См. напр., Stolz, Klein, Weber und Wellstein, „Encyclopédie,“ и др.

[2]) *Bertrand*, Traité d'Algèbre, 1850 (есть рус. пер.). Необходимо помнить, что курсъ написанъ не для начинающихъ.

пользуется *буквами* и *знаками*". Русскіе сочинители пошли еще дальше. Такъ, Киселевъ заявляетъ [1]): „Алгебра указываетъ способы, посредствомъ которыхъ можно одно алгебраическое выраженіе преобразовать въ другое, тождественное ему". То же находимъ у Давидова, Билибина и др.

Содержаніе курса изумительно согласовано у всѣхъ сторонниковъ этой системы. Вкратцѣ оно сводится къ слѣдующимъ главамъ:

Алгебраическія знакоположенія. Одночленъ и многочленъ. Приведеніе подобныхъ членовъ.

Первыя четыре дѣйствія надъ одночленами и многочленами; разложеніе на множителей, общій наибольшій дѣлитель.

Уравненіе 1-й степени съ одной, двумя и болѣе неизвѣстными.

Степени и корни.

Уравненія высшихъ степеней.

Обобщеніе понятія о показателяхъ.

Прогрессіи и Логариѳмы.

Теорія соединеній, биномъ Ньютона, непрерывныя дроби, неопредѣленныя уравненія.

Методической разработкѣ вопроса удѣлено крайне мало вниманія. Сухое отвлеченное изложеніе, отсутствіе какихъ бы то ни было графическихъ иллюстрацій, построеніе курса догматическое, а именно: опредѣленія, теоремы, правила, примѣры, — словомъ, извѣстная уже намъ картина варварской педагогики, не требующая особыхъ поясненій, является и картиной офиціальной русской алгебры.

Характерные курсы:

Euler, Vollständige Anleitung zur Algebra, St.-Petersburg, 1770.

J. Bertrand, Traité d' Algèbre, 1850.

Сомовъ, Начальная алгебра, 1860.

Н. Билибинъ, Учебникъ алгебры.

Давидовъ, Элементарная алгебра.

Киселевъ, Элементарная алгебра, и др.

---

[1]) *Киселевъ*, Элементарная алгебра, 1904, стр. 2.

II система— уравненія. 3. Вторая система является самой древней и самой распространенной. Въ 830 г. появилась книга „Альджебръ уальмукâбала“ арабскаго математика Мухаммеда ибнъ Мусâ Альхуаризми [1]). Альджебръ — возстановленіе, перенесеніе отрицательныхъ членовъ въ другую часть уравненія; уальмукâбала — противуположеніе, сопоставленіе и приведеніе подобныхъ членовъ, послѣ чего уравненіе принимаетъ упрощенный видъ. Авторъ не вдается въ болѣе подробныя разсужденія по существу, но за него это дѣлаютъ продолжатели. Такъ Ньютонъ, написавшій руководство по алгебрѣ, говоритъ: „Особенное превосходство алгебры состоитъ въ томъ, что между тѣмъ какъ въ ариѳметикѣ вопросы рѣшаются путемъ перехода отъ данныхъ величинъ къ искомымъ, — алгебра слѣдуетъ обратному порядку—отъ количествъ искомыхъ, разсматриваемыхъ какъ данныя, къ количествамъ даннымъ, какъ будто бы они были искомыми, съ цѣлью придти такъ или иначе къ заключенію или уравненію, изъ котораго можно было-бы искомыя опредѣлить“.

„Что-бы *привести вопросъ къ уравненію*, нужно дать обозначенія какъ извѣстнымъ, такъ и неизвѣстнымъ количествамъ, насколько того требуетъ данный случай, и выразить смыслъ вопроса аналитическимъ языкомъ, если можно такъ выразиться. Условія вопроса, выраженныя такимъ образомъ алгебраически, дадутъ столько уравненій, сколько нужно для его рѣшенія“.

„Вы видите отсюда, что для рѣшенія вопросовъ, которые относятся къ числамъ или отвлеченнымъ отношеніямъ величинъ, требуется только *перевести* задачу съ англійскаго или другого языка, на которомъ она предложена, *на языкъ алгебраическій*, т.-е. на языкъ

---

[1]) Къ 830 г. термины „Aldschebr walmukâbala“ были во всеобщемъ употребленіи; они латинизировались въ „Algebra et Almucabala“ въ XII в., и это двойное названіе удержалось до XVI в. Послѣдній разъ мы его находимъ въ заглавіи одного трактата 1577 г. Въ народномъ языкѣ испанцевъ „альгебристъ“ означаетъ *врачъ*; такъ, Санчо-Панса ищетъ альгебриста для пострадавшаго Донъ-Кишота. Кстати буква „х“ должна читаться какъ „ш“ (по русски); шау (вещь)—арабское названіе неизвѣстнаго въ уравненіи, откуда и произошелъ обычай начальной буквой „х“ обозначать неизвѣстное.

знаковъ, способный выражать наши понятія о соотношеніяхъ величинъ“ [1]).

Безполезно приводить дальнѣйшія выдержки изъ другихъ сочиненій, авторы которыхъ (какъ Декартъ, Ролль, Клеро и др.) раздѣляли положенія Ньютона. Слѣдуетъ лишь отмѣтить, что Лякроа [2]) опредѣлялъ алгебру такъ: „наука о свойствахъ и разрѣшеніи уравненій, изображенныхъ во всеобщности буквами, представляющими нѣкоторыя извѣстныя или неизвѣстныя величины, именуется Алгеброю“. Дюгамель, разсматривая лишь „science des nombres“ (наука о числахъ), совершенно не отдѣляетъ ариѳметики отъ алгебры и разсматриваетъ ихъ какъ взаимно-дополняющія другъ друга дисциплины. Его точка зрѣнія теперь принята повсемѣстно (внѣ оффиціальной Россіи): нужно вводить въ ариѳметику уравненія такъ, чтобы они давали методъ рѣшенія вопросовъ. Отвѣчая на ожидаемые упреки въ потерѣ времени, онъ говоритъ [3]): „Мы повторяемъ, что не слѣдуетъ слишкомъ скоро знакомить съ улучшенными пріемами, на открытіе которыхъ люди затратили столѣтья; всегда прошедшее даетъ необходимыя наставленія, безъ коихъ нельзя понять настоящаго. Не слѣдуетъ также думать, что обученіе будетъ задержано этими очевидными промедленіями. Всегда въ выигрышѣ, когда изучатъ то, что дѣлаютъ, съ большимъ пониманіемъ; и когда хорошо знаютъ причины вещей, то становятся болѣе способными къ открытью новыхъ; а это и должно составить главную цѣль обученія. Ибо жизнь человѣка не можетъ быть урегулирована на подобіе функцій машины, и то, что слѣдуетъ стараться имъ дать, это — методы, для наилучшаго по возможности рѣшенія непредвидѣнныхъ вопросовъ“.

Современные французскіе курсы исчисленія включаютъ и начала алгебры (см. подр. въ главѣ XIII); такъ же поступаютъ отчасти англійскіе и американскіе авторы руководствъ; спеціальныя руководства алгебры

---

[1]) *Newton*, Arithmetica universalis, 1707.

[2]) *Lacroix*, Elémens d'Algèbre (цитир. по пер. 1822 г.). Труды знаменитаго педагога—математика до сихъ поръ не утратили значенія.

[3]) *Duhamel*, loc. cit.., стр. 96.

въ большинствѣ случаевъ принадлежатъ ко II-ой системѣ. Изъ русскихъ авторовъ обращаетъ на себя вниманіе В. В. Лермантовъ, книга котораго, къ сожалѣнью, слишкомъ мало извѣстна въ педагогическихъ кругахъ. Въ предисловіи онъ говоритъ: „Прежде чѣмъ написать изложеніе каждой статьи, я старался указать, на что она нужна, согласно правилу, высказанному еще царемъ Соломономъ приблизительно такъ: *невѣжда не внемлетъ словамъ мудрости, если они не отвѣчаютъ на вопросы, уже зародившіеся въ сердцѣ его.* Поэтому у меня выдвинуто на первый планъ, какъ цѣль обученія, рѣшеніе уравненій, дающее возможность дѣлать разсчеты, а правила для алгебраическихъ вычисленій излагаются лишь по мѣрѣ надобности, какъ средства".

Что можно сказать о содержаніи курсовъ этой системы? Такъ какъ они раскинулись на протяженіи тысячелѣтья, то ясно, что матеріалъ подвергся значительнымъ видоизмѣненіямъ. Курсы послѣднихъ 20 лѣтъ, въ общемъ, сходны по содержанію; въ нихъ матеріалъ группируется около двухъ главныхъ моментовъ: уравненій I-ой ст. и уравненій II-ой степени. Въ нѣкоторыхъ дѣленіе многочленовъ, дроби и др. второстепенные вопросы отнесены подъ конецъ курса.

Критика II-ой системы. 4. Критиковать вторую систему довольно неудобно. Во I-хъ, она является генетической по изложенію, и это обезпечиваетъ ей успѣхъ; во II-хъ, она сама идетъ къ реформѣ, въ силу естественныхъ требованій жизни. Ея болѣе счастливая соперница, III-ья система, въ то же время и ея союзница: то раздвоеніе, какое мы наблюдаемъ сейчасъ въ алгебрѣ, раздвоеніе методическаго характера, заставляющее часть матеріала отойти къ ариѳметикѣ, а остальную часть преобразоваться на новыхъ началахъ, — только подчеркиваетъ значеніе разсматриваемой системы. Она не устарѣла, она лишь недостаточна и требуетъ пополненія. Но для цѣлей первоначальнаго образованія она незамѣнима. Ученики вѣроятно не съумѣютъ дѣлить шестидюймовые многочлены другъ на друга, какъ это рекомендуютъ учебники и задачники I-ой системы, но научатся цѣнить *методъ уравненія* и примѣнять настоящую алгебру къ рѣшеніямъ вопросовъ, выдвигаемыхъ жизнью.

Характерные курсы II-ой системы:

Clairaut, Eléments d'Algébre, 4 éd., 1768.

Lacroix, Начальныя основанія алгебры, пер. съ фр., 1822 (оригиналъ 1799 г.).

Milne, Elements of Algebra, New-York, 1894.

Лермантовъ, Курсъ примѣнимой алгебры, СПб., 1900.

Leyssenne, La troisième année d'Arithmétique, 12 èd., 1902 (I-er sem.).

Colson, Éléments d'Algèbre, 1902.

Lachlan, The Elements of Algebra, London, 1904.

Ettore Bortolotti, Aritmetica generale ed Algebra, Roma, 1904, и др.

III-ья система—идея функціональной зависимости.

5. Лѣтъ 20 тому назадъ въ педагогическихъ сферахъ Западной Европы и Америки начался походъ противъ старой алгебры и ея неподвижности, противъ отсутствія въ ней понятій объ измѣняемости, функціональной зависимости и графической интерпретаціи. Послѣднее десятилѣтіе увидѣло плоды этого движенія. Первая Франція стала на путь новой алгебры — и въ ея программахъ 1902 г. ученіе о функціи заняло доминирующую позицію. Такъ, въ „Методическомъ наставленіи“ сказано[1]): „Изученіе измѣненій функціи должно сопровождаться графической интерпретаціей, на сколько возможно точной. Начерченная кривая послужитъ для опредѣленія одной координаты въ зависимости (функціи) отъ другой; сравненіе графическихъ результатовъ съ числами, вычисленными непосредственно, дастъ возможность тѣмъ болѣе подчеркнуть важное значеніе точности при черченіи, и такимъ образомъ ученикъ пріучится давать себѣ отчетъ въ величинѣ приближенія, которое можетъ быть въ графическомъ процессѣ“.

Въ пользу функціи высказалась и Германія, сначала осторожно въ программахъ 1901 г., но затѣмъ — подъ вліяніемъ агитаціи педагогическихъ сферъ — болѣе рѣшительно. „Я съ удовольствіемъ обращаю вниманіе

---

[1]) *Plan d'études* et programmes d'enseignement, 1907-8, стр. 199.

на то, — говоритъ въ 1904 г. Клейнъ [1]), — что прусскіе учебные планы 1901 года содержатъ требованіе, чтобы ученики высшихъ классовъ получали обстоятельное понятіе о функціяхъ, а также и понятіе о координатахъ. Моя цѣль — убѣдительно предложить: указанныя въ планахъ идеи должны, начиная съ V-го класса, въ правильной методической послѣдовательности составлять неотъемлемую принадлежность всякаго математическаго преподаванія; понятіе о функціяхъ въ геометрическомъ смыслѣ должно, подобно ферменту, проходить черезъ весь прочій учебный матеріалъ".

Меранскій учебный планъ 1905 г. перестраиваетъ всю математику въ средней школѣ именно въ этомъ смыслѣ. Къ Германіи спѣшитъ присоединиться Швейцарія. Въ засѣданіи 17 Декабря 1904 г. *Ассоціаціи преподавателей математики швейцарскихъ средне-учебныхъ заведеній* докладчикъ проф. Ферь, между прочимъ, указалъ [2]): „Если обратить вниманіе на все возрастающій прогрессъ знанія, то надо признать, что математика все болѣе и болѣе проникаетъ въ самыя разнообразныя отрасли. Чаще всего главную роль играетъ именно понятіе о функціи..... Діаграммы, графическія интерпретаціи, пользованіе эмпирическими формулами — встрѣчаются не только во всѣхъ отдѣлахъ техническихъ наукъ, но ими въ равной мѣрѣ пользуются въ естественныхъ и біологическихъ наукахъ и въ вопросахъ соціологіи..... Можно сказать, что сейчасъ — для химика, какъ и для ботаника, для медика и біолога, какъ и для юриста, — глубокое знакомство съ понятіемъ о функціи стало неизбѣжнымъ, такъ какъ безъ него громадное число основныхъ свойствъ останутся совершенно неуловимыми".

Единогласное постановленіе Ассоціаціи подтвердило выводы докладчика.

Въ 1906 г. на съѣздѣ Австрійскихъ преподавателей средней школы въ Вѣнѣ (9—11 Апр.) рѣшено было

---

[1]) *F. Klein*, Über eine zeitgemässe Umgestaltung des math. Unterrichts, 1904, стр. 4.

[2]) *H. Fehr*, La notion de fonction dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes, 1904, стр. 2—3.

присоединиться къ основнымъ положеніямъ Меранскаго плана, высказывая надежду, что понятіе о функціи проникнетъ всю ариѳметику и алгебру.

Одновременно съ этимъ новыя программы введены и въ Даніи, причемъ алгебра сливается съ геометріей въ графической интерпретаціи функціи.

Такъ наз. „движеніе Перри“ въ Англіи и Америкѣ привело къ появленію множества учебниковъ и курсовъ для самообразованія, проникнутыхъ ученіемъ о функціи настолько, что нѣкоторые изъ нихъ даютъ исключительно графическую алгебру.

Въ Россіи „функціональное“ направленіе нашло себѣ мѣсто пока: въ программахъ 1906 г. для 7-го класса реальныхъ училищъ, въ проэктѣ учебнаго плана Варшавскаго кружка преподавателей физики и математики и въ такомъ же проэктѣ Кіевскаго Физико-Математическаго Общества (оба проэкта 1908 г.).

Большинство руководствъ, составленныхъ по этой системѣ, слѣдующаго содержанія:

Алгебраическія формулы и ихъ вычисленіе. Дѣйствія надъ одночленами и многочленами.

Уравненія I-ой степени въ связи съ изученіемъ линейной функціи.

Уравненія II-ой степени въ связи съ изученіемъ квадратной функціи. Понятіе о производной.

Ученіе о степеняхъ и корняхъ. Логариѳмическая функція.

Уравненія высшихъ степеней, рѣшаемыя графически и аналитически. Начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.

Критика III-ей системы. 6. Поглощенные новой идеей, авторы руководствъ почти все вниманіе обратили на перестройку середины и конца курса алгебры, мало позаботившись о началѣ. Если курсъ строится на понятіи о функціи, то преобразованія должны играть второстепенную роль и должны быть вводимы по мѣрѣ надобности, но ужъ никакъ не въ началѣ курса. Это— первый недостатокъ. Второй — слѣдующій: удѣляя графической интерпретаціи достаточно мѣста въ дальнѣйшихъ частяхъ курса, авторы не использовали ея въ началѣ, особенно при изложеніи 4 дѣйствій, оставивъ

этотъ отдѣлъ сухимъ по прежнему. Эти два недостатка, основанные на пренебреженіи къ психологическимъ требованіямъ, способны убить интересъ при началѣ обученія алгебрѣ и такимъ образомъ отразиться на дальнѣйшемъ.

Въ общемъ, курсы III-ей системы являются наиболѣе соотвѣтствующими духу времени и — при извѣстныхъ поправкахъ — могутъ оказаться наилучшими.

Характерные курсы III-ей системы (послѣднее десятилѣтіе):

Bourlet, Leçons d'Algèbre élémentaire, Paris.
Borel, Algèbre, Paris.
Grévy, Traité d'Algèbre, Paris.
Zoretti, Leçons d'algèbre, Paris.
Baker and Bourne, Elementary Algebra, London.
Paterson, School Algebra, London.
Bonnesen, Matematik for Gymnasiet, Kôbenhavn.
Behrendsen und Götting, Lehrbuch der Mathematik für höhere Mädchenlehranstalten, Lyzeen und Studienanstalten, Leipzig.
Schwab und Lesser, Mathematisches Unterrichtswerk, Wien.
Глаголевъ, Элементарная алгебра, Москва.
Лебединцевъ, Курсъ алгебры, Кіевъ, и др.

Общіе выводы. 7. Въ алгебрѣ, какъ и въ другихъ отдѣлахъ математики, матеріалъ долженъ быть распредѣленъ по цикламъ. Если имѣть въ виду интересы учащихся, то содержаніе I-го цикла должно ограничиваться вопросами объ уравненіяхъ 1-ой и 2-ой ст., рѣшаемыхъ аналитически и графически, и знакомствомъ съ практикой логариѳмическихъ вычисленій. Построеніе курса должно быть таково, чтобы ариѳметика и алгебра развивались нераздѣльно и непрерывно.

Этимъ, въ сущности, предопредѣляется выборъ системы. *Уравненія и функціи* — вотъ два базиса, на которыхъ должна основываться перестройка курса. Эта точка зрѣнія удовлетворяетъ педагогическимъ требованіямъ, такъ какъ учащіеся ознакомятся съ методомъ уравненій, съ графической интерпретаціей, научатся

рѣшать практическіе вопросы — задачи, пріобрѣтутъ умѣніе пользоваться готовыми или эмпирическими формулами и т. п. Такой курсъ алгебры даетъ широкое примѣненіе наглядной и лабораторной методъ. Наконецъ, онъ согласованъ съ научными взглядами послѣднихъ лѣтъ. Такъ, въ „Энциклопедіи Математическихъ наукъ“ отдѣлъ „Алгебра“ озаглавленъ:

I., Раціональныя функціи одной перемѣнной; ихъ нулевыя значенія.

II., Раціональныя функціи многихъ перемѣнныхъ.

III., Алгебраическіе образы (Gebilde). Ариѳметическая теорія алгебраическихъ величинъ.

А дальше—все, относящееся опять къ уравненіямъ, корнямъ, ихъ функціямъ, и т. п.

Этотъ взглядъ на уравненіе, какъ на частный случай функціи, долженъ уже появиться въ концѣ I-го цикла; графическая интепретація—лучшая метода для изложенія такихъ вопросовъ.

Въ слѣдующихъ главахъ мы покажемъ, какъ можно излагать отдѣльные моменты курса. При этомъ необходимо помнить, что простѣйшіе случаи уравненій вкрапливаются въ начальный курсъ исчисленія съ первыхъ же шаговъ, и что согласованность съ остальными учебными предметами должна проводиться при распредѣленіи указываемаго матеріала.

ГЛАВА XII.

Положительныя и отрицательныя числа.

„Исторія подчеркиваетъ важность графическаго представленія отрицательныхъ чиселъ для преподаванія алгебры. Если опустить всѣ иллюстраціи отрицательныхъ чиселъ линіями или посредствомъ термометра, то эти числа покажутся современнымъ учащимся настолько же нелѣпыми, насколько они казались таковыми старымъ алгебраистамъ".

Ф. Кэджори.

Къ исторіи вопроса.

1. Затрудненія, испытываемыя преподавателями математики при прохожденіи съ учениками главы о положительныхъ и отрицательныхъ числахъ, зависятъ въ значительной мѣрѣ отъ господствующей въ Россіи догматической системы изложенія и преподаванія алгебры, отчасти же отъ незнакомства русскихъ авторовъ учебниковъ съ особенностями этого вопроса.

Изъ исторіи математики мы знаемъ, что отрицательныя числа не представляютъ собою открытія какого-либо генія, который, вмѣстѣ съ тѣмъ, обнаружилъ бы отсутствіе противорѣчья между новыми и прежними числами. Напротивъ. Въ процессѣ крайне медленно развивавшагося употребленія отрицательныхъ чиселъ математики все время упорно твердили, что это противорѣчіе существуетъ, упорно называли отрицательныя числа „нелѣпыми", „абсурдными", „придуманными", „ложными", „воображаемыми", хотя и оперировали надъ ними. Невольно возникаетъ вопросъ: почему же ученіе объ отрицательномъ числѣ представлялось такимъ труд-

нымъ шагомъ въ математикѣ? Потому, что хотѣли разсматривать это число, какъ нѣчто абсолютное, а не относительное.

Первые Индусы прибѣгли къ зрительнымъ, графическимъ изображеніямъ чиселъ или же толковали ихъ, какъ „имущества“ и „долги“, отказавшись отъ абсолюта [1]). За ними вслѣдъ пошли Леонардо Пизанскій (Фибоначчи) [2]), Шюке, Штифель и др. Наконецъ Декартъ въ 1637 г., въ своей „Аналитической геометріи“, далъ имъ правильное истолкованіе.

Однако, этимъ вопросъ не былъ исчерпанъ. Вскорѣ началась настоящая война за существованіе отрицательныхъ чиселъ. До того разсматривали выраженія a—b; система Декарта ввела чистыя отрицательныя числа, какъ расположенныя налѣво по оси абсциссъ. Какую же роль отвести имъ среди положительныхъ чиселъ? Штифель (1544) [3]) ввелъ еще раньше опредѣленіе: „меньшія, чѣмъ 0“ и разсматривалъ рядъ .... 0—3,0—2,0—1,0,1,2, ... Валлисъ (1695) пользовался неравенствами $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1}$ ....., т. е. считалъ, что отрицательныя числа больше безконечно-большихъ! Къ сомнѣніямъ относительно значеній отрицательныхъ чиселъ приводилъ также знаменитый парадоксъ $1:-1=-1:1$, которымъ [4]) занимались Ролль (1690), Ньютонъ (1707), Лейбницъ (1712), Маклоренъ

---

[1]) *Bhaskara*, Vîjaganita, V, ed. Colebrooke, стр. 217: „People do not approve a negative absolute number“ (люди не признаютъ абсолютныхъ отрицательныхъ чиселъ).

[2]) *Leonardo Pisano*, Flos, II, 238: „Hanc quidem quaestionem insolubilem esse monstrabo, nisi concedatur primum hominem habere debitum (этотъ случай я бы призналъ неразрѣшимымъ, если только не допустить, что первый имѣлъ долгъ).

[3]) *Stifel*, Arithmetica integra, 1544, стр. 48^a: „Finguntur numeri minores nihilo ut sunt 0—3, 0—8 etc.“ и стр. 249^b: „0 i. e. nihil (quod mediat inter numeros veros et numeros absurdos)“—нуль это есть ничто (онъ стоитъ между истинными и абсурдными числами).

[4]) Оба отношенія равны—1, слѣдовательно, пропорція вѣрна; но старые алгебристы такъ разсуждали: первый предыдущій больше, а второй—меньше своего послѣдующаго, слѣдовательно, пропорція невѣрна. Это и породило вопросъ: дѣйствительно-ли отрицательныя числа меньше нуля?

(1748), д'Алямберъ (1761), Карно (1803), Дюгамель (1866) и др. Взгляды Штифеля раздѣлялъ Вольфъ (1717) и Эйлеръ (1755); послѣдній даже считалъ вѣрнымъ мнѣніе Валлиса [1]. Съ ними не соглашались д'Алямберъ (1761) и Sniadecki (1783). Взглядъ на отрицательныя числа, какъ на дѣйствительно существующія и лишь *качественно* отличающіяся отъ положительныхъ, высказали Hoene-Wroński (1811) и Гауссъ (1831), а затѣмъ Мерэ (1890). Напротивъ, въ нихъ видѣли только символы Карно (1803), Коши (1821), Дюгамель (1866), Дюрингъ (1884), Кронекеръ (1888); послѣдній даже стремился совершенно изгнать отрицательныя числа изъ математики. Все XIX столѣтіе наполнено борьбой самыхъ разнообразныхъ мнѣній, а усилившееся во второй половинѣ его стремленіе къ строгому обоснованію математики проявило необычную для математиковъ рѣзкость отзывовъ. Такъ, доказательства Ляпляса [2], которыя онъ приводилъ въ своихъ лекціяхъ объ отрицательныхъ числахъ, подверглись жестокой критикѣ Дюгамеля [3], который назвалъ ихъ „двойной безсмыслицей". Вслѣдъ затѣмъ теорія Коши, ученикомъ котораго являлся Дюгамель, аттестована Ганкелемъ [4], какъ „поверхностная", „представляющая неслыханную игру словъ и фокусы акробата (Gaukelspiel)". Точка зрѣнія Германа Грассманна, Ганкеля, Шрёдера (1873) и отчасти Кронекера не раздѣляется съ одной стороны Дедекиндомъ (1888), а съ другой—Георгомъ Канторомъ (1890). Въ свою очередь Робертъ Грассманнъ [5] въ 1895 г. считаетъ, что за исключеніемъ работъ его брата и Шрёдера, „всѣ остальныя изложенія въ своихъ основныхъ отдѣлахъ представляютъ при такъ называемыхъ доказательствахъ сомнительнѣйшіе выводы, ничего не доказывающіе". Съ ними всѣми несогласны опять таки

---

[1]) *Euler*, Institutiones calculi differentialis, 1755, artic. 98—101, стр. 87—98.

[2]) *Laplace*, Leçons de Mathématiques données à l'Ecole normale en 1795.

[3]) *Duhamel*, Des méthodes dans les sciences de raisonnement t. II, 1866, стр. 163: „ce qui est un non-sens double".

[4]) *Hankel*, Theorie der complexen Zahlsysteme, 1867, стр. 14.

[5]) *Grassmann*, Die Formenlehre etc., 1895, предисловіе.

сторонники теоріи поликомплексовъ, разсматривающіе отрицательное число, какъ „пару“ (couple) частнаго вида — таковы Гамильтонъ (1835), Lerch (1886) и др. Наконецъ въ 1896 г. проф. Кэджори [1]) рѣшительно высказывается: „Штифелю принадлежитъ нелѣпое выраженіе, что отрицательныя числа—*меньше, чѣмъ ничто.* Потребовалось около 300 лѣтъ, чтобы исключить эту безсмысленную фразу изъ математическаго языка“. А въ 1903 г. проф. Веберъ [2]), въ пользующейся всемірной извѣстностью „Энциклопедіи“ высказываетъ слѣдующее правило: „Всѣ положительныя числа больше нуля, всѣ отрицательныя числа меньше нуля. Если a есть положительное число, то $a > 0$ и $-a < 0$, и т. д.“

Правило знаковъ въ умноженіи.

2. Прежде, чѣмъ разобраться въ этой путаницѣ и указать выходъ изъ нея, необходимо взглянуть и на методику вопроса. Дѣйствія надъ отрицательными числами подвергались разнообразнымъ истолкованіямъ, но эти истолкованія шли въ уровень съ развитіемъ математики, какъ науки. Знаменитое *правило знаковъ* при умноженіи создало цѣлую литературу; именно это мѣсто курса служитъ прекрасной иллюстраціей разницы между старой и новой педагогикой. Оставляя пока въ сторонѣ другія дѣйствія, мы укажемъ, какимъ истолкованіямъ подверглось до сихъ поръ упомянутое правило.

I. Итальянская школа возрожденія обыкновенно сообщала правило знаковъ безъ доказательства. Такъ, Люка Пачіоло [3]) прежде всего помѣщаетъ слѣдующее правило:

Piu via piu sempre fa piu	Плюсъ на плюсъ всегда дастъ плюсъ,
Meno via meno sempre fa piu	Минусъ на минусъ всегда дастъ плюсъ,

---

[1]) *Fl. Cajori,* History of elementary Mathematics, N.—J.—Цитир. по рус. перев. 1910 г., стр. 250.

[2]) *Weber und Wellstein,* Энциклопедія элементарной математики, пер. съ нѣм., 1906, т. I, стр. 36.

[3]) *L. Paciuolo,* Summa, 1494, I, dist. IX, стр. 112b .

Piu via meno sempre fa meno	Плюсъ на минусъ всегда дастъ минусъ,
Meno via piu similiter anche meno.	Минусъ на плюсъ равнымъ образомъ минусъ,

а затѣмъ даетъ правила дѣленія, сложенія и вычитанія. То же у Штифеля [1]) и др. Извѣстный же Клявіусъ [2]) къ этому прибавляетъ: „Виновато безсиліе человѣческаго ума въ томъ, что не можетъ понять, почему это справедливо. Во всякомъ случаѣ сомнѣваться въ вѣрности такого умноженія нельзя, такъ какъ оно подтверждено многими примѣрами“.

Лишь 250 лѣтъ спустя безсиліе человѣческаго ума было установлено вторично . . . . .

II. Еще Петръ Рамюсъ (1569) даетъ такое „доказательство“: два отрицанія составляютъ утвержденіе!“ [3]). Въ томъ же родѣ „доказательство“ Крампа [4]): „Теорема, въ силу которой два отрицательныхъ множителя даютъ произведеніе со знакомъ, противоположнымъ минусу, и слѣд. положительное, сводится къ извѣстному правилу грамматики: duplex negatio affirmat“.

III. Въ томъ же родѣ поясненія: Другъ моего друга—мнѣ другъ; другъ моего недруга—мнѣ недругъ; недругъ моего друга—мнѣ недругъ; недругъ моего недруга—мнѣ другъ.

IV. „Возьмемъ [5]) выраженіе a—a и станемъ умножать его на b; такъ какъ множимое равно нулю, то и произведеніе должно быть равно нулю; но первый членъ произведенія есть ab, слѣдовательно, второй будетъ—ab. Изъ этого слѣдуетъ, что $(-a).(+b)=-ab$“.

„Пусть теперь требуется умножить a на b—b; такъ какъ множитель равенъ нулю, то и произведеніе бу-

---

[1]) *Stifel*, Arithmetica integra, 1544, III, стр. 238a: „Eadem signa ponunt signum additorum; diuersa uero signa ponunt subtractorum“.

[2]) *Clavius*, Algebra, 1608.—Цитир. по собр. соч., изд. 1612 г., II, стр. 17 (Werke, Algebra caput VI).

[3]) *Petrus Ramus*, Scholae mathematicae, стр. 269: „E duabus negatis fit affirmativus“.

[4]) *Kramp*, Elémens d'Arithmétique universelle, Cologne, 1808.

[5]) *Maclaurin*, A treatise of algebra, London, 1748, I, 2.—Такое же доказательство дано Ляплясомъ въ его первой лекціи въ Нормальной школѣ (1795).—Изъ новѣйшихъ руководствъ см. *Behrendsen* und *Götting*, и др.

детъ нуль; но первый членъ произведенія есть ab, поэтому второй будетъ—ab. Изъ этого слѣдуетъ, что (+ a) . (—b) = — ab".

„Когда—a умножается на b—b, то произведеніе должно быть нуль; но первый членъ произведенія (какъ уже показано) есть—ab, а потому второй по необходимости будетъ + ab. Итакъ (— a) . (—b) = + ab.".

V. Доказательство Эйлера [1]), хотя было дано позже, но очень примитивно: „Станемъ въ первыхъ множить (—a) на + 3 : поелику—a почитать можно за долгъ, то явно, что когда долгъ сей возмется три раза, то оный также сдѣлается долженъ въ три раза больше; слѣдовательно искомое произведеніе есть—3a. Равнымъ образомъ когда требуется умножить—a на + b, то выйдетъ—ba, или, что все то же,—ab. Изъ сего мы можемъ заключить, что когда положительная величина умножена будетъ на отрицательную, то произведеніе будетъ отрицательное; откуда происходитъ слѣдующее правило: + умноженный на + даетъ +; напротивъ того, + умноженный на —, или — на + даетъ—".

„Теперь остается разрѣшить еще этотъ случай, когда—умноженъ долженъ быть на —, или напр.— a на—b. Въ первыхъ явно, что произведеніе въ разсужденіи буквъ будетъ ab; но должно-ли оному придать + или —, о томъ сказать еще ничего не можно, а извѣстно только то, что одинъ изъ оныхъ знаковъ, или тотъ или другой приданъ быть долженъ. Но я говорю, что сей знакъ не можетъ быть—, ибо—a, умноженное на + b, даетъ—ab, и—a умноженное на — b, не можетъ дать то же, что даетъ — a, умноженное на + b, но должно дать противное; а именно + ab. Изъ сего происходитъ слѣдующее правило: — умноженный на — даетъ +, подобно какъ и + умноженный на +".

VI. Одно изъ самыхъ распространенныхъ (и самыхъ древнихъ) доказательствъ слѣдующее [2]): (a—b) (c—d) = =(a—b)c—(a—b) d=ac—bc — (ad — bd)=ac —bc—ad+ bd.

---

[1]) *Euler*, Vollständige Anleitung zur Algebra, S.-Petersburg, 1770.— Цитир. по русскому переводу 1812 г., т. I, стр. 16—18.

[2]) Впервые встрѣчается у Діофанта (365 г. по Р. Хр.), Люка Пачіоло (1494); въ XIX в. у Лякроа (1806), Бальцера (1868), Hall and Knight (1902) и др.

VII. Видоизмѣненіе доказательства V/го можетъ быть такое [1]). Полагая $a=0$ и $c=0$, имѣемъ $(0-b)(0-d)=$ $=0.0-0.d-b.0+bd$, откуда $(-b)(-d)=+bd$.

VIII. Пользуясь опредѣленіемъ умноженія, даннымъ Лякроа [2]): „Умножить a на b есть то же, что составить изъ количества, изображеннаго черезъ a, нѣкоторое другое количество точно такъ, какъ количество, представленное черезъ b, составлено изъ единицы“, легко прійти къ извѣстной фомулѣ: *взять не слагаемымъ, а вычитаемымъ.*

IX. Рейдтъ [3]) (1886) указалъ, что умноженіе сводится къ отысканію нѣкотораго члена безконечнаго ряда..... —4,—3,—2,—1, 0, 1, 2, 3.... Если напр. надо умножить 3 на—4, то произведеніе надо искать влѣво отъ 0, и т. п. По его мнѣнію, формула $(-a).(-b)=+ab$ не есть теорема, а лишь условное опредѣленіе (эта точка зрѣнія принята въ настоящее время).

X. Дюгамель [4]), а за нимъ Страннолюбскій разсматривали умноженіе въ связи съ вопросомъ о движеніи точки по прямой. Такимъ образомъ, 4 случая ($x=a\pm$ $\pm vt$) могутъ быть сведены къ одному, если только ввести правило знаковъ. Подробное рѣшеніе задачи можно найти во многихъ современныхъ курсахъ алгебры: *Borel, Bourlet, Глаголевъ, Лебединцевъ* и др.

XI. Если держаться „методы цѣлесообразныхъ задачъ“, то можно правило знаковъ вывести сначала для дѣленія [5]). Напр. Лермантовъ излагаетъ это такъ: „Нагляднѣе всѣхъ .... дѣленіе отрицательнаго на отрицательное: $\frac{-a}{-b}=+k$. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣляя какое угодно именованное число на другое, того же наименованія, получимъ число отвлеченное и „абсолютное“, независимое отъ знака обоихъ. Такой взглядъ

---

1) См., напр., *Ермаковъ*, О преподаваніи алгебры, 1892, стр. 30.

2) *Лякроа*, Начальныя основанія алгебры, пер. съ франц., 1822, стр. 44.—См. напр. *Н. Шапошниковъ*, Введеніе въ алгебру, 1887, стр. 38; *Simon*, Didaktik und Methodik etc., стр. 72 и др.

3) *Reidt*, Anleitung zum mathematischen Unterricht, стр. 133—134.

4) *Duhamel*, ibid., стр. 152—158. — *Страннолюбскій*, Курсъ алгебры, 1868, стр. 130.

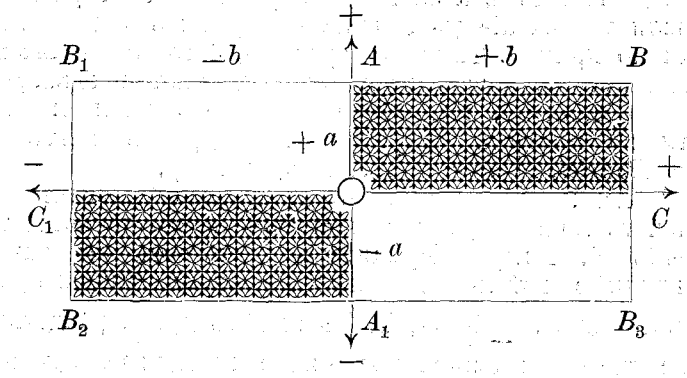
5) *Duhamel*, ibid., стр. 144—150. — *В. Лермантовъ*, Курсъ примѣнимой алгебры, 1900, стр. 14—16, и др.

совершенно согласенъ съ обыденными понятіями: вѣдь безпрестанно говорятъ, что одинъ долгъ во столько-то разъ больше другого, и долги сравниваютъ между собою такъ же, какъ и наличныя имущества".

„Понятно и сообразно съ нашимъ представленіемъ объ отрицательныхъ количествахъ и то, что помноживъ или раздѣливъ отрицательную величину на положительную, получимъ отрицательный результатъ. Вѣдь удвоенный или утроенный долгъ все остается долгомъ, точно также какъ и половина или какая угодно часть долга. Итакъ $(-a) \cdot (+b) = -n$; $\frac{-a}{+b} = -k$, и т. д.".

Теперь легко показать, что $(-a) \cdot (-b) = +n$, стоитъ только разсмотрѣть равенство $\frac{+n}{-b} = -a$, которое выведено раньше.

XII. Разсматривая площадь фигуры, какъ векторъ [1]), легко ввести правило знаковъ наглядно, гра-



Чер. 47.

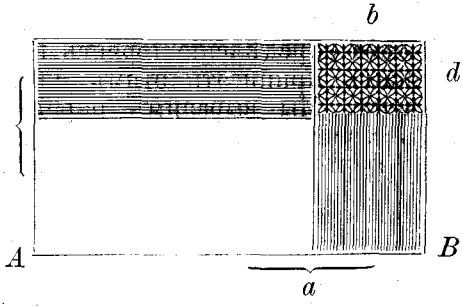
фически. Для этого разсмотримъ *задачу о сѣятелѣ*. Пусть $BB_1B_2B_3$ представляетъ поле, разбитое на 4 равныхъ участка (чер. 47). Если *условиться*, что сѣятель, желающій засѣять это поле, начинаетъ обходъ изъ O и идетъ сначала по оси A, а потомъ по B (т.-е. сначала

[1]) Впервые установлено знаменитымъ геометромъ Мёбіусомъ (1790—1868). См. *Möbius*, Der barycentrische Calcul, 1827.

вверхъ или внизъ, а затѣмъ вправо или влѣво) и бросаетъ зерно все время правой рукой, то нетрудно видѣть, что два участка будутъ засѣяны, а два—нѣтъ. Итакъ мы получаемъ $(+a).(+b) = +ab$, $(+a).(-b) = -ab$, $(-a).(-b) = +ab$, $(-a).(+b) = -ab$.

XIII. Старое доказательство Діофанта (см. VI) можетъ быть дано въ наглядной формѣ, какъ это сдѣлалъ, напр., Клейнъ; приведемъ его полностью [1]).

„Пусть $a > b$ и $c > d$; тогда разности $a-b$ и $c-d$ представляютъ собою цѣлыя положительныя числа. Разсмотримъ произведеніе $(a-b)(c-d)$. Съ этою цѣлью мы построимъ прямоугольникъ со сторонами $a-b$ и $c-d$ (чер. 47); онъ составитъ часть прямоугольника, имѣющаго стороны a и c. Чтобы изъ послѣдняго получить первый, мы отнимемъ сначала верхній, горизонтально заштрихованный прямоугольникъ $a.d$, а потомъ расположенный и заштрихованный вертикально прямоугольникъ $b.c$. Однако, небольшой прямоугольникъ $b.d$, заштрихованный накрестъ, мы отняли лишній разъ; мы должны его поэтому снова прибавить. Этимъ путемъ мы приходимъ къ извѣстной формулѣ:



Чер. 48.

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd\text{“}.$$

XIV. Проф. Шубертъ [2]) излагаетъ то-же довольно своеобразно. Во-первыхъ, онъ даетъ поясненія, а не доказательства. Во-вторыхъ, даетъ примѣръ

$$(-a).4 = (-a) + (-a) + (-a) + (-a) = -(4a).$$

---

[1]) *Klein*, Elementarmathematik vom höheren Standpuncte aus, 1908, T. I (русскій переводъ печатается).—Графическая интерпретація была извѣстна еще арабамъ.

[2]) *Schubert*, Arithmetik und Algebra, 1896, стр. 32—36.—Авторъ считается знатокомъ вопроса и трактуетъ его съ научной точки зрѣнія.

Въ-третьихъ, умноженіе $(-a)$ на $(-b)$ поясняется такъ: „$(-a).(-b) = (-a)[c-(c+b)] =$

$$= (-a).c - (-a)(c+b) = -ac - [-ac - ab] =$$
$$= -ac + ac + ab = +(ab)$$“.

XV. „Если [1]) мы будемъ разсматривать умноженіе, какъ повторное сложеніе, то мы можемъ распространить это дѣйствіе и на тотъ случай, когда множимое отрицательно или равно нулю. Правило сложенія предыдущаго параграфа въ этомъ случаѣ даетъ

$$a.(-b) = -(ab) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$
$$a.0 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Но если множитель [2]) есть число отрицательное, то прежнее опредѣленіе теряетъ всякій смыслъ: отъ насъ зависитъ приписать этимъ символамъ то или другое значеніе. Мы выразимъ опредѣленіе умноженія для тѣхъ случаевъ, когда множитель отрицателенъ или равенъ нулю, слѣдующими соотношеніями:

$$(-a)\,b = -(ab) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$
$$(-a)(-b) = ab \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$
$$0b = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Формула (3) необходимо вытекаетъ изъ формулы (1), если поставимъ себѣ задачей сохранить перемѣстительный законъ; формула же (4) слѣдуетъ изъ формулы (3), если послѣдняя должна остаться въ силѣ и для отрицательныхъ значеній числа b, ибо $-(-a) = +a$, какъ мы установили выше. Наконецъ, соотношеніе (5) вытекаетъ изъ (2) въ силу перемѣстительнаго закона“.

XVI. Послѣдняя—и новѣйшая—точка зрѣнія установлена въ упоминаемой уже нами международной *Энциклопедіи* [3]); она по существу та же, что въ XIV и

---

[1]) *Weber und Wellstein*, Энциклопедія элементарной математики, пер. съ нѣм., 1906.—Т. I, стр. 40.

[2]) „Сумму a слагаемыхъ мы будемъ обозначать символомъ $a.b$ или $a \times b$, или, наконецъ, просто черезъ ab. Образованіе этой суммы называется *умноженіемъ числа b на число a*. Число b наз. множимымъ, число a—множителемъ, а ab—результатъ умноженія - *произведеніемъ числа b на число a*“ (стр. 26).

[3]) *Encyclopédie* des sciences mathématiques pures et appliquées, éd. française, 1904, t. I, vol. I, p. 41.

XV, но въ виду безусловной компетентности источника приводимъ подлинную выдержку:

„Если a, b обозначаютъ относительныя числа, то ихъ произведеніе будетъ относительнымъ числомъ, котораго абсолютное значеніе есть произведеніе абсолютныхъ значеній a, b, а знакъ (истинный) есть $+$, или $-$, сообразно съ тѣмъ, имѣютъ ли *оба* числа a, b знаки (истинные) одинаковые или разные. Изъ этого и изъ предыдущихъ правилъ слѣдуетъ (*правило знаковъ*)“.

„$(+a)(+b) = +(ab)$; $(+a)(-b) = -(ab)$;
„$(-a)(+b) = -(ab)$; $(-a)(-b) = +(ab)$.

„Въ выраженіяхъ $+(ab)$, $-(ab)$ обыкновенно выпускаютъ скобки и пишутъ $+ab$ или ab, и $-ab$“.

„Эти опредѣленія могутъ быть связаны съ закономъ перманентности, замѣчая сначала, что положительныя числа должны быть приняты за одно съ ихъ абсолютными значеніями, а тогда опредѣленіе умноженія любого числа на положительное число вытекаетъ изъ общаго опредѣленія. Опредѣленія, относящіяся къ умноженію на отрицательное число, необходимо имѣютъ мѣсто въ силу того, что стремятся сохранить перемѣстительный характеръ операціи. Сочетательный характеръ тоже имѣетъ силу“.

Какъ вводить отрицательныя числа?

3. Набросанная широкими мазками историческая картина невольно приковываетъ къ себѣ вниманіе. Остается распутать этотъ клубокъ и указать точные и опредѣленные методическіе выводы.

Начнемъ съ основныхъ понятій, относящихся къ истолкованію *мѣста* отрицательныхъ чиселъ среди положительныхъ. Выше было приведено мнѣніе Кэджори и рядомъ съ нимъ выписка изъ Вебера: никакого противорѣчія здѣсь нѣтъ—и это не парадоксъ. Да, безсмысленно говорить: — a меньше нуля, если подъ нулемъ подразумѣвать *отсутствіе* числа. Но неравенство $-a < 0$ этого и не выражаетъ. Еще Дюгамель [1]) пока-

---

[1]) *Duhamel*, стр. 167—170: „il est bien entendu qu'on ne veut pas dire qu'il existe quelque chose de plus petit que rien, et l'inégalité qui le dit n'est qu'une forme sans danger qu'on peut changer dès qu'on y aura quelque intêret“.

залъ, что это неравенство нужно понимать лишь, какъ $a > 0$, а предыдущая форма явилась въ результатѣ аналитическихъ преобразованій; напр. таковыхъ (если положить $d = b$ и $a < c$)

$$a + b < c + d,$$
$$a - c < d - b,$$
$$a - c < 0;$$

такимъ образомъ мы какъ бы нашли, что отрицательное количество $a - c$ меньше нуля. Но это—способъ выраженія, а не зависимость по существу. Поступая иначе, найдемъ

$$a + b < c + d,$$
$$b - d < c - a,$$
$$0 < c - a,$$
$$c - a > 0,$$

что́ подтверждаетъ сказанное выше.

Съ другой стороны, выраженіе: „минусъ 5 меньше нуля“ вполнѣ осмысленно, если нуль имѣетъ условное значеніе (т. наз. относительный нуль). Это именно и имѣлъ въ виду Веберъ. Прекрасными примѣрами относительности нуля,—и притомъ вполнѣ доступными дѣтскому пониманію—являются слѣдующіе:

1) Термометры Цельзія и Реомюра показываютъ 0° при температурѣ замерзанія воды, а термометръ Фаренгейта показываетъ въ это время 32°; нуль Фаренгейта соотвѣтствуетъ — 17,°(7) по Цельзію или — 14,°(2) по Реомюру.

2) Христіанскій календарь начинаетъ счетъ времени съ 1 января того года, когда родился Христосъ. Такимъ образомъ по этому календарю покореніе Рима германцами произошло въ + 476 г., по магометанскому въ — 146 г., по еврейскому въ + 4237 г., и т. п. [1]).

3) Петя зашелъ утромъ къ своему товарищу Колѣ, живущему на той же улицѣ *влѣво* на разстояніи 20 ша-

---

[1]) Магометане начинаютъ лѣтосчисленіе 16 іюля 622 г. п. Р. Х., евреи—7 октября 3761 г. до Р. Х.; особое лѣтосчисленіе у китайцевъ, индусовъ и др.

говъ, а затѣмъ оба отправились въ школу, расположенную *вправо*, на разстояніи 570 шаговъ, считая отъ дома Пети (чер. 49). Тогда точка П есть 0, точка К

есть — 20, точка Ш есть 570. Считая же отъ дома Коли, найдемъ К = 0, П = 20, Ш = 590.

Подобныхъ примѣровъ можно привести и больше. Во всякомъ случаѣ значеніе *условія* въ математикѣ выступаетъ здѣсь крайне рельефно.

Первыя свѣдѣнія объ отрицательныхъ числахъ можно сообщить гораздо раньше, чѣмъ понадобится производить дѣйствія надъ отрицательными количествами. Такіе случаи представлялись не разъ при упоминаніи о времени, температурѣ и пр. въ Исчисленіи. Слѣдуетъ лишь замѣтить, что обозначеніе отрицательнаго числа знакомъ минусъ *не обязательно*. Уже давно обращали вниманіе на двойное значеніе знаковъ + и —, какъ знаковъ дѣйствій и какъ „атташѐ“ чиселъ [1]). Индусы употребляли значокъ ′, напр. 5′ вмѣсто —5; этимъ обозначеніемъ пользуются и теперь авторы многихъ математическихъ сочиненій. Мерэ и Рикье (1890) предложили снабжать числа стрѣлками → и ←, поставленными сверху. Съ педагогической точки зрѣнія всякое другое обозначеніе лучше „минуса“, особенно путающаго начинающихъ при преобразованіяхъ.

Разсматриваемыя съ житейской какъ и съ научной точекъ зрѣнія отрицательныя числа должны найти себѣ мѣсто въ курсѣ математики раньше обыкновенныхъ дробей, если только пользоваться графическими интерпретаціями. Что отрицательныя числа должны быть вводимы на конкретныхъ примѣрахъ, объ этомъ

---

[1]) См. напр. *Delambre*, Rapport sur les progrès des sc. math., 1810, p. 44, *H. Padé* (1892), *G. Peano* и *A. Padoa* (1900) и др. Выраженіе „attachés“ употреблено въ „Encyclopédie des sc. math. etz.“, t. I, vol. I, p. 36.

въ настоящее время нѣтъ двухъ мнѣній [1]). Лучше другихъ объ этомъ говоритъ Лезанъ [2]).

„Если отрицательныя числа поражаютъ въ самомъ началѣ, то достаточно немного подумать, чтобы найти имъ вполнѣ естественныя объясненія. Говорятъ, что число не можетъ быть меньше ничего, т.-е. нуля. Однако, въ обыкновенной разговорной рѣчи мы каждый день говоримъ, что термометръ показываетъ столько-то градусовъ ниже 0. Когда мы хотимъ обозначить высоту какой-нибудь точки надъ уровнемъ воды въ морѣ, мы прекрасно понимаемъ, что если эта точка будетъ находиться въ глубинѣ моря, она будетъ ниже уровня. Если, идя отъ себя, я желаю опредѣлить длину дороги, которую я хочу пройти въ опредѣленномъ направленіи, и если я иду въ направленіи совершенно противоположномъ, то я прекрасно понимаю, что не могу пользоваться одними и тѣми же числами для опредѣленія противоположныхъ вещей. Человѣкъ безъ всякаго капитала, но и безъ долга, не богатъ; но если онъ, лишенный капитала, имѣетъ долги, можно сказать, что онъ имѣетъ меньше, чѣмъ ничего; его капиталъ отрицательный. Пробка имѣетъ извѣстный вѣсъ; если ее не удерживать въ воздухѣ, она упадетъ; погрузите эту же пробку въ воду и не удерживайте ее тамъ,— она всплыветъ: ея вѣсъ сталъ отрицательный, по крайней мѣрѣ, повидимому. Коротко говоря, отрицательныя числа, далекія отъ всякой таинственности, прилагаются совершенно естественно ко всякимъ количествамъ, не исключая и тѣхъ, которыя, по самой своей сущности, заключаютъ въ себѣ два противоположныхъ смысла: тепло и холодъ; высоко и низко; кредитъ и дебетъ; будущее и прошедшее, и пр. Съ помощью реальныхъ предметовъ можно ввести эти понятія въ мозгъ даже очень маленькаго ребенка, такъ какъ они поистинѣ дѣтскія понятія. И дѣти заинтересуются ими, если вы

---

[1]) *Encyclopédie* etz., p. 38; *H. Poincaré*, Les definitions générales en mathématiques, 1904, p. 16; *Klein*, loc. cit., гл. II, и др.

[2]) *Лезанъ*, Начатки математики, пер. съ фр., 1908, стр. 31—32.— Къ примѣрамъ, указаннымъ авторомъ, полезно прибавить еще одинъ: два электроскопа, противоположно заряженные, даютъ рядъ наглядныхъ опытовъ.

не перестанете пріятно разнообразить свои объясненія спичками, палочками, что будетъ гораздо полезнѣе для формулированія ихъ ума, чѣмъ монотонное повтореніе непонятныхъ правилъ и непостижимыхъ опредѣленій".

Можно ли „доказать" правило знаковъ?

4. Разсматривая длинный рядъ „доказательствъ" правила знаковъ, мы невольно должны задать себѣ вопросъ: да возможно-ли вообще доказательство? Этотъ вопросъ былъ поставленъ въ половинѣ XIX вѣка и разрѣшенъ отрицательно. Вотъ что говоритъ по этому поводу Клейнъ [1]).

„Въ дальнѣйшемъ развитіи этихъ идей сказывается общая особенность человѣческой натуры, заключающаяся въ томъ, что мы постоянно стремимся распространять правила, выведенныя для частныхъ случаевъ, на другіе болѣе общіе случаи... Если мы примѣнимъ, такимъ образомъ, формулу

$$(a - b)\ (c - d) = ac - ad - bc + bd,$$

напримѣръ, къ случаю $a = c = 0$ (*для какового случая мы этой формулы отнюдь не доказали*), то мы получимъ $(-b) \cdot (-d) = +bd$, т.-е. *получимъ правило знаковъ при умноженіи отрицательныхъ чиселъ*. Такимъ образомъ, мы дѣйствительно можемъ почти безсознательно придти ко всѣмъ четыремъ правиламъ, которыя мы, пожалуй, склонны будемъ даже признать за *совершенно необходимыя допущенія*... Простое разъясненіе (правила знаковъ), которое принесъ только XIX вѣкъ, заключается въ томъ, что *о логической необходимости этого положенія, о его доказуемости не можетъ быть никакой рѣчи*. Напротивъ, *рѣчь можетъ идти только о томъ, чтобы признать его логическую допустимость*; въ остальномъ же оно является совершенно произвольнымъ и регулируется лишь соображеніями *цѣлесообразности* и приведеннымъ выше *принципомъ перманентности*".

„Обращаясь къ критическому обзору того, какъ отрицательныя числа излагаются въ школѣ, нужно прежде всего сказать, что преподаватели часто здѣсь дѣлаютъ ту же ошибку, въ которую впадали старые

---

[1]) Ibid., глава II.

математики, именно они все пытаются *доказать* правило знаковъ, какъ нѣчто логически необходимое. Особенно часто выдаютъ за доказательство приведенный выше эвристическій выводъ правила $(-b).(-d) = +bd$ изъ формулы для $(a-b).(c-d)$, фактически совершенно забывая, что эта формула первоначально неразрывно связана съ неравенствами $a > b$, $c > d$. Такимъ образомъ, *доказательство какъ бы симулируется и психологическій моментъ*, который, ~~въ силу принципа перманентности~~, приводитъ къ этому правилу, *смѣшивается съ логическимъ доказательствомъ*".

„Ученикъ, которому это въ такомъ видѣ въ первый разъ преподносится, естественно не можетъ этого понять, но повѣрить этому онъ, въ концѣ-концовъ, вынужденъ; если же, какъ это часто бываетъ, при повтореніи на высшей ступени обученія, ученикъ не получаетъ болѣе точныхъ разъясненій, то у многихъ можетъ установиться убѣжденіе, что эта теорія содержитъ нѣчто мистическое, непонятное".

„По поводу этихъ пріемовъ я долженъ, однако, вообще высказать требованіе, что *никогда не слѣдуетъ пытаться симулировать невозможныя доказательства*. Слѣдовало бы, напротивъ, на простыхъ примѣрахъ, сообразно фактическому положенію дѣла, убѣдить ученика, а если возможно, то заставить его самого придти къ тому, что именно эти положенія, основанныя на принципѣ перманентности, способны дать однообразный и удобный алгорифмъ, между тѣмъ, какъ при другихъ правилахъ всегда придется различать отдѣльные случаи. Конечно, при этомъ не нужно проявлять лишней поспѣшности, нужно дать ученику время освоиться съ тѣмъ внутреннимъ переворотомъ, который въ немъ совершается при этомъ познаніи".

Дѣйствія надъ отрицательными числами.

5. Надобность въ дѣйствіяхъ надъ отрицательными числами является позже, когда основныя понятія достаточно усвоены. Сложеніе и вычитаніе можетъ встрѣтиться раньше, умноженіе и дѣленіе — только при рѣшеніи уравненій. Однимъ изъ наиболѣе доступныхъ способовъ объясненія нужно признать термометрическій, такъ какъ онъ соединяетъ графики и вычисленіе.

Остановимся на 4 случаяхъ вычитанія.

1) Пусть термометръ показываетъ утромъ $+3^\circ$, а днемъ $+4^\circ$. Очевидно для того, чтобы узнать разность между этими двумя температурами, нужно изъ дневной температуры вычесть утреннюю, т.-е. $(+4^\circ)-(+3^\circ)=+1^\circ$; условимся далѣе считать число градусовъ положительнымъ, если оно получено поднятіемъ ртути въ термометрѣ, и отрицательнымъ, если оно получено опусканіемъ ртути.

2) Разсмотримъ второй случай. Термометръ показываетъ днемъ -4°, а утромъ показываетъ $+3^\circ$. Чтобы узнать разность, вычитаемъ изъ дневной температуры утреннюю, т. е. $(-4^\circ)-(+3^\circ)=-7^\circ$. Если посмотрѣть на чертежъ, то конечно абсолютная разность равняется 7°, но чтобы опредѣлить, какой будетъ знакъ, мы должны вспомнить наше условіе. Такъ какъ утренняя температура $+3^\circ$, а дневная -4°, то, стало быть, послѣдняя получилась опусканіемъ ртути на 7°; и такъ: $(-4)-(+3)=-7$.

3) Теперь разсмотримъ третій случай. Утромъ термометръ показывалъ -3°, а днемъ $+4^\circ$. Слѣдовательно изъ $(+4^\circ)$ нужно вычесть (-3°), т.-е. $(+4^\circ)-(-3^\circ)=+7^\circ$. Изъ чертежа видно, что разность равняется 7°, но что касается знака, то мы опять на основаніи нашего условія ставимъ знакъ $+$, ибо дневная температура получилась поднятіемъ ртути. Итакъ:

$$(+4)-(-3)=+7.$$

4) Пусть, наконецъ, термометръ утромъ показывалъ -3°, а днемъ показываетъ -4°. Имѣемъ: $(-4^\circ)-(-3^\circ)=-1^\circ$, такъ какъ изъ чертежа видно, что абсолютная разность равняется 1°, а знакъ будетъ — на основаніи нашего условія.

Выпишемъ полученные нами во всѣхъ 4-хъ частныхъ случаяхъ результаты

$$\left.\begin{array}{l}(+4)-(+3)=+1\\(-4)-(+3)=-7\\(+4)-(-3)=+7\\(-4)-(-3)=-1\end{array}\right\}$$

Замѣчаемъ, что опредѣленіе вычитанія въ ариѳметикѣ сохраняется и въ алгебрѣ, т. к.:

$$\left.\begin{array}{l}(+1)+(+3)=+4\\(-7)+(+3)=-4\\(+7)+(-3)=+4\\(-1)+(-3)=-4\end{array}\right\}$$

Но т. к. мы съ другой стороны можемъ сдѣлать еще такой выводъ: вычесть положительное число все равно, что прибавить отрицательное съ той же абсолютной величиной; а вычесть отрицательное число все равно, что прибавить положительное съ той же абсолютной величиной, то можемъ сказать, что вычитаніе становится дѣйствіемъ, не имѣющимъ исключенія и перестаетъ существовать, какъ самостоятельная операція, ибо вычитаніе всегда можно свести къ сложенію.

Разсмотримъ еще 4 случая умноженія.

1) Термометръ поднимается въ каждый часъ на 3 градуса; теперь стоитъ на нулѣ. Сколько онъ будетъ показывать черезъ 5 часовъ? Результатъ выразится черезъ:

$$(+3)\ (+5)=+15.$$

2) Термометръ падаетъ въ каждый часъ на 3 градуса; теперь стоитъ на нулѣ. Сколько онъ будетъ показывать черезъ 5 часовъ? Результатъ получится такой:

$$(-3).\ (+5)=-15.$$

3) Термометръ поднимается въ каждый часъ на 3 градуса; теперь стоитъ на нулѣ. Сколько онъ показывалъ 5 часовъ тому назадъ? Имѣемъ:

$$(+3).\ (-5)=-15.$$

4) Термометръ опускается въ каждый часъ на 3 градуса; теперь стоитъ на нулѣ. Сколько онъ показывалъ 5 часовъ тому назадъ? Результатъ будетъ:

$$(-3).\ (-5)=+15.$$

Правило знаковъ при сложеніи и дѣленіи мы особо не разсматриваемъ, такъ какъ они не представляютъ особенныхъ трудностей и вытекаютъ изъ нашего представленія объ отрицательныхъ количествахъ. Кромѣ

того правило знаковъ при дѣленіи легко сопоставить съ правиломъ знаковъ при умноженіи.

Общія замѣчанія. 6. Мы разобрали подробно термометрическій способъ, но этимъ мы вовсе не хотѣли сказать, что онъ — единственно удобный. Столь же легкими и наглядными представляются задачи на движеніе поѣздовъ, записи въ приходо-расходныхъ книгахъ и др. Кромѣ того, чѣмъ больше областей будетъ затронуто при выясненіи дѣйствій надъ отрицательными числами, тѣмъ глубже западутъ основныя понятія. Полезно указать на самые разнообразные факты, если только они способствуютъ выясненію деталей. Такъ русско-французскій и французско-русскій словари не могутъ замѣнить другъ друга; разстояніе отъ земли до солнца можетъ быть высчитано, но отъ солнца до земли—нѣтъ. Если купецъ списываетъ свой „дебитъ" (долгъ), то его балансъ увеличивается. Потеря части ноши выгодно отражается на носильщикѣ. При этомъ можно разсказать случай изъ жизни Ѳалеса. Занимаясь торговыми операціями, Ѳалесъ однажды сопровождалъ караванъ муловъ, нагруженныхъ солью. Переходя вбродъ рѣчку одинъ изъ муловъ оступился и упалъ въ воду. Послѣдствія этого ему чрезвычайно понравились, такъ какъ вода унесла часть соли. И вотъ умный мулъ съ тѣхъ поръ сталъ падать во всѣ ручьи и болота, встрѣчавшіеся на пути. Но и Ѳалесъ не растерялся: онъ велѣлъ нагрузить на мула добавочную кучу губокъ. При слѣдующемъ паденіи губки разбухли и дали себя почувствовать настолько, что мулъ сразу же прекратилъ свои эксперименты.

Отрицательныя числа заполняютъ собою вторую половину прямой линіи и даютъ возможность создать алгебру линіи, подобно тому какъ комплексныя числа создаютъ алгебру плоскости, а бикомплексы — алгебру пространства. Но можно и здѣсь выходить изъ плоскости, если пользоваться простыми и удобными пріемами вращенія. Такъ, помножить (-5) на (-1) значитъ повернуть векторъ (-5) на 180° по направленію часовой стрѣлки; помножить (-5) на $(+1)$ значитъ повернуть тотъ же векторъ на 360° и т. п. Вообще безъ геометріи здѣсь нельзя ступить ни шагу, и это прекрасно выра-

жено у Пуанкаре: „Мы видимъ, какую роль играютъ во всемъ этомъ геометрическіе образы; и эта роль узаконена философіей и исторіей науки. Если бы ариѳметика осталась чистой внѣ всякой смѣси съ геометріей, то она знала бы лишь цѣлое число; лишь для того, чтобы приспособиться къ нуждамъ геометріи, она изобрѣла нѣчто другое.“

ГЛАВА XIII.

Уравненія I-ой степени.

„Уравненіе представляетъ собою наиболѣе серьезную и важную вещь въ математикѣ".

О. Лоджъ.

„Одинъ мой учитель математики дѣлалъ обыкновенно послѣ того, какъ уравненіе было написано на доскѣ, вѣрное замѣчаніе: теперь намъ больше не нужно думать. За насъ думаетъ уравненіе".

Шустеръ.

Аналитическое рѣшеніе уравненій.

1. Простѣйшія уравненія 1-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ рѣшаются и въ ариѳметикѣ, ибо каждое изъ первыхъ 4-хъ ариѳметическихъ дѣйствій есть не что иное, какъ рѣшеніе уравненія 1-ой степ. съ однимъ неизвѣстнымъ [1]). Уравненія типа: $x+5=8$; $x-3=5$; $5x=20$; $\frac{x}{4}=16$,..... которыя мы рѣшали уже раньше, относятся къ этой категоріи.

Многія ариѳметическія задачи гораздо легче и проще рѣшаются съ помощью уравненія, нежели чисто ариѳметическими способами. Возьмемъ для примѣра нѣсколько задачъ.

1) У двухъ мальчиковъ было вмѣстѣ 54 орѣха, при чемъ у второго вдвое больше, чѣмъ у перваго. Сколько каждый изъ нихъ имѣлъ орѣховъ?

---

[1]) Эта точка зрѣнія сейчасъ общепринята и въ наукѣ, см. Encyclopédie, Веберъ-Вельштейнъ, Шверингъ, Шубертъ, Симонъ и др.

Алгебраическій способъ.

Если первый изъ нихъ имѣлъ x орѣховъ, то второй, стало быть, имѣлъ 2x орѣховъ, на основаніи чего составляемъ уравненіе:

$$x + 2x = 54$$
$$3x = 54$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{54}{3}$$
$$x = 18$$

т.-е. первый имѣлъ 18 орѣховъ, а второй 36 орѣховъ.

Ариѳметическій способъ.

Если у второго мальчика вдвое больше орѣховъ, чѣмъ у перваго, то предположимъ, что у перваго былъ одинъ орѣхъ; тогда у второго ихъ было два, вмѣстѣ у обоихъ—три. Такъ какъ по условію задачи у нихъ было не три, а 54 орѣха, то это показываетъ, что первый имѣлъ не одинъ орѣхъ, а во столько разъ больше, во сколько 54 больше 3; итакъ первый имѣлъ 18 орѣховъ.

2) Требуется раздѣлить 58 рублей между тремя лицами такъ, чтобы первый получилъ 7-ю руб. больше второго, а второй 3-мя руб. больше третьяго.

Алгебраическій способъ.

Пусть 3-ье лицо получило	x
то 2-ое получаетъ	$x + 3$
а 1-ое получитъ	$x + 3 + 7$
Всего они втроемъ получаютъ	$3x + 6 + 7$.

Итакъ составляемъ уравненіе:

$$3x + 6 + 7 = 58$$
$$3x + 13 = 58$$
$$3x + 13 - 13 = 58 - 13$$
$$x = \frac{45}{3}$$
$$x = 15$$

3-е лицо получаетъ 15 р., 2-ое 18 р., а 1-ое 25 руб.

Ариѳметическій способъ.

Т. к. второе лицо получило 3 р. больше третьяго, а первое (3 + 7) р. больше третьяго, то по условію за-

дачи нужно изъ 58 вычесть 13 и полученную разность 45 раздѣлить на 3; тогда узнаемъ, сколько получило 3-е лицо, и т. д. [1]).

3) Поѣздъ проходитъ 57 верстъ въ 3 часа; сколько верстъ пройдетъ онъ въ I-ый, II-ой и III-й часъ, если каждый разъ будетъ дѣлать на 3 версты больше?

Составляемъ уравненіе:

$$x + x + 3 + x + 3 + 3 = 57$$
$$3x + 9 = 57$$
$$3x = 48$$
$$x = 16$$

4) Двое желали купить домъ, I-ый могъ заплатить только $^2/_5$ требуемой суммы, а II-ой—$^3/_7$. Что стоитъ домъ, если оба вмѣстѣ могли внести 58.000 рублей?

Составляемъ уравненіе:

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{7}x = 58.000$$
$$\frac{14x + 15x}{35} = 58.000$$
$$\frac{29}{35}x = 58.000$$
$$x = 70.000$$

5) Капиталъ, отданный въ ростъ по 6%, обратился черезъ годъ въ 79.500 р. Какъ великъ былъ первоначальный капиталъ?

$$x + 0{,}06x = 79.500$$
$$1{,}06x = 79.500$$
$$x = 79.500 : 1{,}06$$
$$x = 75.000$$

6) Капиталъ въ 7.300 руб. отданъ частями по $4^1/_2$ % и 5%, причемъ въ $3^1/_2$ года общая прибыль составила 1.198 р. 75 к. Найти каждую часть.

$$\frac{9x}{200} + \frac{(7300 - x)5}{100} = \frac{1198{,}75.2}{7}$$
$$73000 - x = 68500$$
$$x = 4500$$

---

[1]) Эти 2 задачи ясно показываютъ, что т. наз. ариѳметическій способъ рѣшенія есть не что иное, какъ *истолкованіе* алгебраическаго рѣшенія, т. е. вмѣсто естественнаго пути указывается искусственный. Нечего и говорить, что подобное *истолкованіе* далеко не всегда возможно.

До сихъ поръ мы брали такія задачи, приводящія къ уравненіямъ 1-ой степ., гдѣ неизвѣстное входитъ только въ одну часть ур-ія. Здѣсь ученикамъ придется кромѣ обыкновенныхъ 4-хъ ариѳметическихъ дѣйствій примѣнять еще четыре аксіомы: (1 и 2) если къ двумъ равнымъ величинамъ поровну прибавимъ (отнимемъ), то и полученныя суммы (разности) будутъ равны, и (3 и 4) если обѣ части равенства умножимъ (раздѣлимъ) на одно и то же число, то равенство не нарушится. Первыя двѣ аксіомы лучше всего пояснить дѣтямъ на вѣсахъ, гдѣ они могутъ воочію убѣдиться въ справедливости данныхъ аксіомъ. Предположимъ для этого, что на лѣвой чашкѣ вѣсовъ находятся три совершенно одинаковыхъ карандаша + 3 грамма, а на правой 5 гр., и нужно узнать, сколько вѣситъ каждый карандашъ. Отнимая поровну (здѣсь по 3 гр.), мы равенства не нарушимъ, т.-е. равновѣсіе не измѣнится. Теперь, имѣя только карандаши на лѣвой чашкѣ вѣсовъ, можно опредѣлить вѣсъ каждаго. Затѣмъ слѣдуетъ ученикамъ все это записать—т.-е. составить уравненіе и рѣшить его. Итакъ будемъ имѣть:

$$x + x + x + 3 = 5$$
$$3x + 3 = 5$$
$$-3 = -3$$
$$3x = 2$$
$$x = \frac{2}{3}$$

Что касается правила перенесенія членовъ уравненія изъ одной части въ другую, то его надо дать значительно позже; напротивъ, слѣдуетъ очень долго держать учениковъ на прибавленіи (и отниманіи) равныхъ чиселъ къ обѣимъ частямъ уравненія и требовать отъ нихъ, чтобы они вполнѣ сознательно примѣняли первыя двѣ аксіомы [1]). Не малую роль при этомъ играетъ и самая запись; такъ напр.:

---

[1]) Таковъ былъ и историческій порядокъ: Діофантъ (III ст. п. Р. Х.) рѣшаетъ сложныя уравненія, не зная правила перенесенія членовъ, которое встрѣчается лишь въ работахъ арабовъ (IX ст.).

$$4x + 5 = 25$$
$$-5 = -5$$
$$4x = 20$$
$$\frac{4x}{4} = \frac{20}{4}, \text{ и т. п.}$$

Въ противномъ случаѣ ученики будутъ рѣшать всякое уравненіе механически, а отъ этого, конечно, рѣшеніе уравненій потеряетъ всю свою образовательно-воспитательную цѣнность. Мы высказываемся также противъ ранняго введенія отрицательныхъ корней уравненія и въ первое время рѣшаемъ такія задачи, которыя насъ не приводятъ къ нимъ. Вообще, что касается уравненій, то мы придерживаемся мнѣнія, что ихъ нужно непремѣнно облекать въ форму задачъ, ибо это возбуждаетъ интересъ у дѣтей и способствуетъ общему успѣху занятій. Но при такомъ „облеченіи" выборъ сюжета имѣетъ не малое значеніе. Напримѣръ, уравненіе $7x + 4 = 18$ словами можно передать такъ: если задуманное мною число умножить на 7 и къ полученному произведенію прибавить 4, то получится 18; узнать, какое я число задумалъ? Или же: Мальчикъ въ концѣ каждаго мѣсяца клалъ извѣстную сумму денегъ въ копилку; спустя 7 мѣсяцевъ отецъ подарилъ ему 4 рубля, и въ кассѣ послѣ этого оказалось 18 рублей. Сколько онъ клалъ въ копилку въ концѣ каждаго мѣсяца? Ясно, что вторая форма болѣе жизненная и живѣе первой.

Послѣ задачъ, приводящихъ къ уравненіямъ 1-ой ст. съ однимъ неизвѣстнымъ, но гдѣ неизвѣстныя находятся только въ одной части уравненія, переходимъ къ болѣе труднымъ задачамъ на составленіе уравненій—съ неизвѣстными въ обѣихъ частяхъ. Разсмотримъ нѣсколько такихъ задачъ.

1) Два путешественника ѣдутъ одинъ за другимъ. Первый проѣзжаетъ ежедневно 80 верстъ, а второй 90 в. Черезъ сколько дней второй догонитъ перваго, если онъ выѣхалъ, когда первый уже проѣхалъ 50 верстъ?

Для того, чтобы ученики яснѣе себѣ представили смыслъ задачи и облегчили свой трудъ, при соста-

вленіи уравненія полезно прибѣгнуть къ чертежу (графикѣ). Пусть путь обозначается отрѣзкомъ АВ (А представляетъ начало пути, а В мѣсто встрѣчи). Точка С изображаетъ, гдѣ находился I-ый путешественникъ, когда II-ой выѣхалъ изъ А (чер. 50).

Получается уравненіе: $80x + 50 = 90x$; $x = 5$.

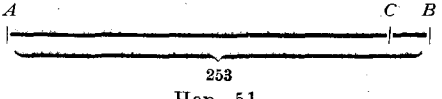
Чер. 50.

2) Торговецъ смѣшалъ 2 сорта табаку въ 1 р. 60 к. и 1 р. 25 к., причемъ перваго сорта взялъ 45 ф. Изъ полученной смѣси 7 ф. пришлось уничтожить, а остальное обошлось по 1 р. 50 к. за фунтъ. Сколько было взято 2-го сорта?

$$45.\ 160 + 125x = (38 + x)\ 150$$
$$x = 60$$

3) Возьмемъ еще одну задачу на движеніе:

Два мальчика бѣгаютъ по направленію отъ А къ В. Первый пробѣгаетъ въ каждую секунду 2,5 метра и, дойдя къ В, возвращается обратно съ такой же ско-



Чер. 51.

ростью на встрѣчу второму, который пробѣгаетъ въ секунду 2,1 мет. Черезъ сколько секундъ они встрѣтятся, если разстояніе между А и В равно 253 метр.?

Опять, прибѣгая къ чертежу, находимъ, что путь, пройденный I мальчикомъ, $AB + BC = 253 + (253 - x) = 506 - x$, а путь второго мальчика x, т. к. оба мальчика употребляютъ одно и то же время на перебѣжку; поэтому мы можемъ написать (чер. 51):

$$\frac{x}{2,1} = \frac{506 - x}{2,5},\ x = 231$$

На задачахъ лучше всего иллюстрировать и отрицательныя рѣшенія. Такъ, напр., задача: одному маль-

чику a лѣтъ, другому b лѣтъ. Когда ихъ лѣта будутъ находиться въ отношеніи m:n?—при нѣсколькихъ различныхъ заданіяхъ a, b, m и n дастъ возможность познакомить съ положительными, нулевыми и отрицательными рѣшеніями. Приведемъ примѣры.

1) $a=10$, $b=3$, $m=3$, $n=1$. Имѣемъ уравненіе $\frac{10+x}{3+x}=3$, откуда $x=\frac{1}{2}$, т.-е. *черезъ полгода.*

2) $a=10$, $b=8$, $m=5$, $n=4$. Имѣемъ уравненіе $\frac{10+x}{8+x}=\frac{5}{4}$, откуда $x=0$, т.-е. *уже теперь.*

3) $a=5$, $b=7$, $m=9$, $n=13$. Имѣемъ уравненіе $\frac{5+x}{7+x}=\frac{9}{13}$, откуда $x=-\frac{1}{2}$ т.-е. *полгода тому назадъ.*

Другіе типы задачъ были нами указаны въ предыдущей главѣ.

Общія указанія. 2. Мы уже сказали, что любое уравненіе можно облечь въ форму задачи, но это не значитъ, что не надо давать готовыхъ уравненій. Напротивъ, при рѣшеніи какихъ-либо новыхъ типовъ уравненій задачи вначалѣ неумѣстны, такъ какъ— „по одной трудности заразъ“!

При выборѣ задачъ надо отдавать предпочтеніе вопросамъ изъ жизни и естествознанія; данныя не должны быть выдуманы, числа должны соотвѣтствовать дѣйствительнымъ соотношеніямъ величинъ. Исключеніе составляютъ историческія задачи (египетскія, индусскія, китайскія, греческія, средневѣковыя и др.). Кромѣ оригинальныхъ по преимуществу сюжетовъ и притомъ отражающихъ міросозерцаніе того или иного народа, онѣ даютъ возможность попутно вводить историческія данныя [1]); наконецъ, служатъ полезнымъ отдыхомъ отъ житейской прозы, которую могутъ культивировать черезчуръ усердные адепты новыхъ идей.

Многія задачи полезно рѣшать не однимъ, а двумя и болѣе способами; это имѣетъ большое воспитательное значеніе. Помимо свободы мышленія и возможности

---

[1]) См. въ литературномъ указателѣ ко II-ой части отдѣлъ „Математика I-го цикла“.

критической провѣрки другъ друга, выясняющей относительную цѣнность рѣшеній (болѣе простое, болѣе изящное) ученики пріобрѣтутъ еще и убѣжденіе, что надъ данными числами можно произвести нѣсколько рядовъ дѣйствій, при одномъ и томъ же результатѣ.

Въ связи съ этимъ находится выборъ неизвѣстнаго въ уравненіи. Нѣсколько удачно подобранныхъ задачъ выяснятъ ученикамъ, что при томъ или иномъ выборѣ *икса* уравненіе существенно мѣняетъ форму, а его рѣшеніе представляетъ бо́льшія или меньшія затрудненія. Крайне важно также выбирать для неизвѣстнаго разныя буквы, обозначать извѣстное „иксомъ", а неизвѣстное черезъ *a*, и т. п. Небрежность преподавателя въ этомъ отношеніи часто приводитъ къ печальнымъ результатамъ при рѣшеніи физическихъ уравненій, въ особенности $\frac{1}{f}+\frac{1}{d}=\frac{1}{F}$ (нерѣдко ученики не понимаютъ, что f и d могутъ означать неизвѣстное).

Буквенныя обозначенія необходимо вводить крайне осмотрительно и, главное, *не торопиться*. Лучшимъ пріемомъ мы считаемъ обобщеніе уравненій того или иного типа; этимъ путемъ естественнѣе всего прійти къ формуламъ. Вотъ два примѣра.

1) Рѣшая задачи на $^0/_0$-ныя вычисленія (№ 5, стр. 321), легко найти $x=\frac{100\ a}{100+p}$, гдѣ *a*—капиталъ, а *p*—такса. Вводя еще *t*—время, находимъ $x+\frac{x}{100}pt=a$, откуда $x=\frac{100a}{100+pt}$.

2) Задача о возрастахъ, разобранная выше, въ общемъ видѣ приводитъ къ уравненію: $\frac{a+x}{b+x}=\frac{m}{n}$, откуда $x=\frac{an-bm}{m-n}$.

Послѣднія указанія отнесемъ къ техникѣ рѣшенія уравненій. Почему-то никогда не указываютъ, что *уравненіе можно читать слѣва направо и справа налѣво и сообразно съ этимъ записывать*; напр. $730-x=685$ или $685=730-x$; между тѣмъ выгода замѣны очевидна: при рѣшеніи, уравненій типа „$-ax=-b$" ни-

когда не получится. Вмѣстѣ съ этимъ исчезнетъ знаменитое „умноженіе на — 1“, камень преткновенія для большинства учащихся; его можно замѣнить нагляднымъ поворачиваніемъ вѣсовъ (лѣвая чашка станетъ правой и наоборотъ), причемъ равновѣсіе чашекъ не нарушится. Въ сущности это и есть умноженіе на — 1, т.-е. вращеніе на 180° или приведеніе въ симметричное положеніе.

Не указывается также, что при переносѣ членовъ изъ одной части уравненія въ другую знаки *всѣхъ* дѣйствій мѣняются на обратныя. А между тѣмъ сколько бываетъ ошибокъ при преобразованіяхъ уравненій, которыя могли бы быть удалены этимъ простымъ указаніемъ.

При упрощеніи уравненій могутъ представиться два случая: 1) $\frac{100+x}{4}=\frac{129}{4}$ и 2) $\frac{27}{2+x}=\frac{27}{3}$. Здѣсь надо ввести аксіому: Если двѣ дроби равны и числители (знаменатели) ихъ равны, то и знаменатели (числители) ихъ тоже равны. Этимъ мы избѣгаемъ необходимости *говорить о сокращеніи (?!) знаменателей*, обыкновенно ведущемъ къ столькимъ ученическимъ ошибкамъ.

Если мы теперь ограничимся этими указаніями, то не слѣдуетъ думать, что это—вся методика уравненій; но подробное описаніе мелочей можетъ легко привести къ механизаціи въ родѣ той, съ которой мы боремся въ настоящей книгѣ.

Линейная функція. 3. Предыдущіе годы были посвящены ознакомленію учащихся съ идеей функціональной зависимости; такъ они строили графики температуры, движенія поѣздовъ, статистическія, финансовыя,— словомъ, зависимость между двумя величинами чувствовалась и наблюдалась, не принимая еще осязательной, аналитической формы. Въ этомъ мѣстѣ курса возможно уже дать имъ понятіе о линейной функціи, связавъ ее съ рѣшеніемъ уравненія I—ой ст. съ однимъ неизвѣстнымъ.

Сначала возьмемъ рядъ задачъ. 1) Мальчикъ получилъ на Новый годъ въ подарокъ копилку и въ концѣ каждой недѣли кладетъ въ нее 7 коп. Представить

графически и аналитически состояніе копилки къ концу мѣсяца? Года? 2) Металлическій стержень опредѣленной длины подвергнутъ нагрѣванію, причемъ записываются его послѣдовательныя удлиненія. Изобразить ходъ процесса аналитически и графически.

А. Въ первой задачѣ мы наносимъ рядъ дѣленій на горизонтальной оси и такой же рядъ дѣленій на вертикальной; на первой мы считаемъ приростъ денегъ (по 7 коп.), на второй—приростъ недѣль (по 7 дней). Получаемая при этомъ графика имѣетъ видъ прямой линіи; такимъ образомъ графическое рѣшеніе не представляетъ затрудненій. Для вывода аналитической зависимости достаточно обратить вниманіе учащихся, что полученная прямая дѣлитъ уголъ между осями пополамъ. Тогда обозначая горизонтальную ось черезъ x, вертикальную черезъ y, находимъ искомую зависимость: $y = x$.

Пользуясь полученнымъ равенствомъ, мы можемъ подчеркнуть его важное значеніе, а именно, показать, что въ любое время года можно вычислить состояніе копилки, не прибѣгая болѣе къ чертежу.

Задачу о копилкѣ можно затѣмъ видоизмѣнять такъ: мальчикъ кладетъ еженедѣльно 5 коп., тогда получаемъ $y = \frac{5}{7}x$; мальчикъ кладетъ 14 коп., тогда $y = 2x$, и т. п. Словомъ, подробно разобравъ нѣсколько случаевъ, можно легко установить общую зависимость

$$y = ax.$$

Число a при этомъ характеризуетъ *подъемъ* прямой. Чѣмъ оно больше, тѣмъ прямая ближе къ оси Y-овъ, чѣмъ оно меньше, тѣмъ прямая ближе къ оси X-овъ. Этотъ общій видъ зависимости даетъ теперь массу частныхъ иллюстрацій на вычисленіе и построеніе.

В. Во второй задачѣ мы откладываемъ на горизонтальной оси температуру (градусы), на вертикальной—длину стержня. Въ началѣ опыта его длина 1 м. Наблюдая удлиненія при повышеніи температуры на 5°, 10°, 15°, ..., мы придемъ графически къ прямой линіи, аналитически же къ равенству $y = ax + b$.

Если этотъ примѣръ покажется учащимся затруднительнымъ, то полезно вернуться къ прежней задачѣ,

видоизмѣнивъ ее такъ: мальчикъ получилъ въ подарокъ копилку съ 10 коп. внутри, а еженедѣльно опускалъ въ нее 3 коп. Равенство $y = 3x + 10$ будетъ искомымъ отвѣтомъ.

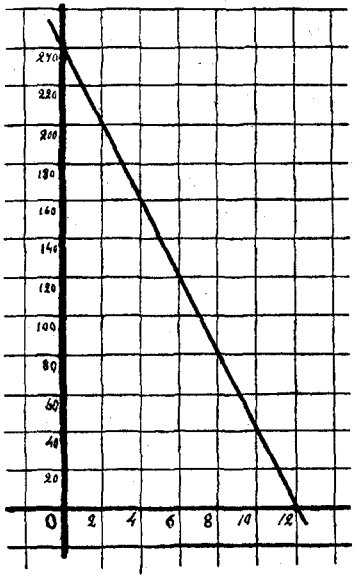
Оставаясь все время въ области графикъ и наглядности, легко выяснить слѣдующія подробности: Въ чемъ разница между равенствами $y = ax$ и $y = ax + b$? Когда прямая проходитъ черезъ пересѣченіе осей? Когда она ближе къ той или другой?

С. Теперь перейдемъ къ новому видоизмѣненію первой задачи.

Мальчикъ сталъ тратить накопившуюся въ копилкѣ сумму 2 р. 40 к., причемъ еженедѣльно тратилъ по двугривенному. Представить графически и аналитически убываніе его кассы.

Графически мы получимъ прямую (чер. 52), пересѣкающую ось Y-овъ въ точкѣ B (240) и ось X-овъ въ точкѣ A (12); аналитически равенство $y = -20x + 240$.

Отрицательный подъемъ покажетъ учащимся, что направленіе прямой существенно измѣнилось: она не поднимается слѣва направо, а падаетъ.



Чер. 52.

Функція и уравненіе. 4. Мы подошли къ самому интересному и важному мѣсту курса — къ графическому рѣшенію уравненія 1—ой ст. съ однимъ неизвѣстнымъ. Поставивъ вопросъ въ послѣдней задачѣ такъ: *когда въ копилкѣ ничего не останется?*—мы получаемъ $y = 0$ и новое равенство $240 - 20x = 0$, откуда $x = 12$. Итакъ пересѣченіе прямой $y = ax + b$ съ осью X-овъ даетъ точку, значеніе которой есть рѣшеніе уравненія $ax + b = 0$. Эта точка — одна, такъ какъ двѣ прямыя пересѣкаются

лишь въ одной точкѣ, слѣдовательно, уравненіе 1—ой ст. съ однимъ неизвѣстнымъ даетъ всегда только одно рѣшеніе.

Если могутъ намъ возразить, что *графически* никто не станетъ рѣшать уравненія $ax+b=0$, то мы готовы съ этимъ согласиться; но воспитательная и образовательная цѣнность предложеннаго пріема отъ этого нисколько не уменьшится. Уравненіе при такомъ освѣщеніи представитъ лишь частный случай функціи, случай, часто наиболѣе насъ интересующій или же наиболѣе намъ доступный; остальные моменты изъ жизни функціи мы какъ бы оставляемъ временно [1]) безъ разсмотрѣнія. Этого требуетъ не только соблюденіе индукціи въ обученіи; но выдѣляя на первый планъ изученіе уравненій, а затѣмъ изученіе функцій, мы лишь согласуемся съ общими законами развитія мышленія. Передъ тѣмъ какъ охватить какой-либо процессъ въ цѣломъ, мы начинаемъ подмѣчать отдѣльныя его фазы, будетъ-ли это наблюденіе показанія термометра въ одинъ моментъ среди сутокъ или слѣда кометы на пластинкѣ фотографа. Лишь затѣмъ ставится вопросъ о суточной измѣняемости температуры, о пути кометы—и мы приходимъ къ температурной графикѣ (кривая, а не ломаная) и къ кометной орбитѣ. Если бы только интересовались вопросомъ: когда термометръ стоялъ на нулѣ? или—гдѣ находилась среди созвѣздій промелькнувшая въ моментъ снимка комета?, то общее изученіе природы, открытіе въ ея процессахъ функціональныхъ зависимостей и эмпирическихъ законовъ стало бы невозможной задачей не только въ обученіи, но, пожалуй, и въ наукѣ. Мы убѣждены, что такой взглядъ на уравненіе гораздо законнѣе стараго статическаго взгляда, потому что вмѣсто окостенѣлаго формальнаго равенства мы даемъ картину постоянной динамики. Наконецъ, нисколько не легче и не понятнѣе учащимся изученіе теоремъ и аксіомъ, предлагаемыхъ авторами алгебраическихъ учебниковъ при изложеніи

---

[1]) Можно „игреку“ давать разныя значенія, не только нулевое; тогда мы получимъ цѣлый рядъ уравненій для опредѣленія соотвѣтственныхъ „иксовъ“. Объ этомъ подробнѣе въ § 12.

отдѣла объ уравненіяхъ; сравнительная же цѣнность обѣихъ методъ очевидна.

Отношеніе и пропорція. 5. Въ настоящее время рекомендуютъ отнести ученіе объ отношеніи и пропорціи въ главу объ уравненіяхъ 1—ой ст. съ однимъ неизвѣстнымъ. Придерживаясь того же мнѣнія, мы покажемъ здѣсь, какъ легко и просто изученіе этихъ вопросовъ при помощи графической методы.

Уравненіе прямой, проходящей черезъ пересѣченіе осей, будетъ вида $y = ax$, откуда $\frac{y}{x} = a$. Мы говоримъ, что y всегда больше x въ опредѣленное число разъ, или что отношеніе y къ x равно постоянному числу a. Если прямая задана въ общемъ видѣ: $y = ax + b$, то здѣсь $y - b = ax$ и $\frac{y-b}{x} = a$, т. е. и въ этомъ случаѣ между y-b и x наблюдается постоянство отношенія. Это свойство присуще прямой линіи и только ей.

Формулы $y = ax$ и $\frac{x}{y} = a$ позволяютъ по двумъ даннымъ найти третью. Напр. возьмемъ задачу: Страсбургскій соборъ въ полдень 21 Іюня бросаетъ на горизонтальную поверхность земли тѣнь въ 45,8 м. длиною; стоящая недалеко отъ собора вертикальная палка, высотою въ $2\frac{2}{3}$ парижскихъ фут., бросаетъ въ то же время тѣнь въ $10\frac{1}{3}$ пар. дюйм. Какъ при помощи этихъ данныхъ найти высоту собора?

Мы не знаемъ, допустимъ, размѣра парижскаго фута, но намъ его и не надо. Изъ чер. 53 мы видимъ, что искомая высота x больше своей тѣни во столько разъ, во сколько высота палки больше тѣни палки; поэтому $32 : 10^1/_3 = a$, и $x = 45{,}8a$, откуда $x = 141{,}8$ метр. (приблизит.).

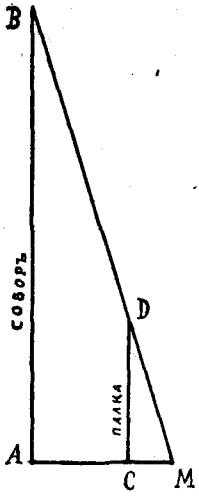
Ту же задачу можно рѣшить при помощи пропорціи. Такъ какъ $\frac{x}{45{,}8} = a$ и $\frac{32}{10^1/_3} = a$, то мы получаемъ уравненіе

$$\frac{x}{45{,}8} = \frac{32}{10^1/_3}$$

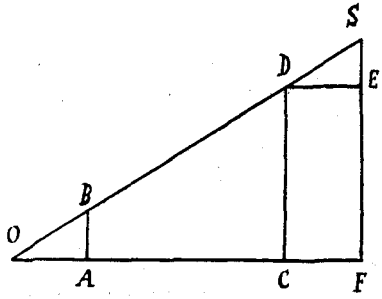
откуда $x = (45{,}8 \,.\, 32) : 10^1/_3$. Вводя названія „пропорція“, „крайніе и средніе члены“, легко прійти къ правилу о нахожденіи неизвѣстнаго члена пропорціи.

Другой типъ задачъ, приводящихъ къ отношеніямъ и пропорціямъ, даютъ параллельныя прямыя. Такъ, изъ уравненій $y=3x+5$ и $y=3x-7$ находимъ $\frac{y-5}{x}=\frac{y+7}{x}$; равенство этихъ отношеній показываетъ, что подъемъ обѣихъ прямыхъ одинаковъ, т. е. прямыя параллельны. Обратно, если прямыя параллельны, то подъемы ихъ равны.

Теорему „сумма членовъ перваго отношенія такъ относится къ суммѣ членовъ второго отношенія, какъ первый послѣдующій ко второму послѣдующему“ можно легко доказать графически. Возьмемъ для этого два подоб-



Чер. 53.



Чер. 54.

ныхъ прямоугольныхъ треугольника (чер. 54) OAB и OCD; имѣемъ $OA : OC = OB : OD$. Откладываемъ на продолженіи OC отрѣзокъ $CF = OA$ и возставляемъ перпендикуляръ FS до пересѣченія съ продолженной стороной OD; тогда новый треугольникъ OFS подобенъ предыдущимъ, и мы находимъ $OF : OS = OC : CD$. Но $OF = OA + OC$ по отложенію; $\triangle DSE = \triangle OAB$, въ чемъ нетрудно убѣдиться, откуда $OB = DS$ и $OS = OB + OD$. Итакъ $(OA + OC) : (OB + OD) = OC : OD$, что и т. д.

Подобнымъ же образомъ доказываются (при помощи того же чертежа) и другія теоремы о пропорціяхъ.

Простая пропорціональность.

6. Вопросы о прямой и обратной пропорціональности играютъ громадную роль какъ въ наукѣ, такъ и въ жизни. Первая—прямая пропорціональность—связываетъ линейнымъ образомъ самыя разнообразныя величины; достаточно упомянуть о пути и времени при равномѣрномъ движеніи, о силѣ и сопротивленіи (треніи) въ системѣ зубчатыхъ колесъ, о гальваническомъ сопротивленіи, о расширеніи тѣлъ при нагрѣваніи, о мощности паровой машины и потребленіи ею пара, объ электрической энергіи и количествѣ угля, расходуемаго въ печахъ подъ котлами, и т. п., и т. п. Изъ этихъ областей преподаватель можетъ черпать задачи десятками; графическое изображеніе результатовъ, отыскиваніе *вида* функціи, затѣмъ повѣрка найденнаго эмпирическаго закона—все это раскроетъ передъ учащимися новые горизонты. Попутно можно будетъ ввести и новые термины, напр. *коэффиціентъ пропорціональности* или лучше *быстрота прироста;* можно связать подъемъ прямой съ тангенсомъ; но все это второстепенныя детали. Необходимо, чтобы центромъ вниманія являлись функціональные вопросы.

Мы уже говорили, что полученіе прямой линіи при нанесеніи на клѣтчатую бумагу результатовъ какихъ-либо лабораторныхъ измѣреній свидѣтельствуетъ о линейной зависимости между изучаемыми величинами. Эта линейная зависимость носитъ еще названіе закона прямой пропорціональности. Покажемъ на одномъ примѣрѣ, какъ придти эмпирически къ такому закону.

Положимъ, что наблюденія нѣкотораго процесса дали намъ рядъ слѣдующихъ значеній для двухъ величинъ x и y

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0,5	0,8	1	1,2	1,6	2,1	2,5	2,6	3	3,3

Нанесемъ эти значенія y на клѣтчатую бумагу (чер. 56, стр. 337); нетрудно замѣтить, что эти точки довольно близко подходятъ къ прямолинейному направленію.

Мы убѣждены, что въ нашихъ наблюденіяхъ допущены ошибки; на самомъ дѣлѣ, *вѣроятно*, всѣ эти точки должны лежать на одной прямой. Выберемъ теперь двѣ точки, для которыхъ результаты найдены наиболѣе вѣроятные; таковы $y=1$ и $y=3$ (круглыя числа). Натягивая красную нитку, укрѣпленную въ этихъ 2 точкахъ [1]), мы видимъ, что она почти проходитъ и черезъ остальныя точки; остается найти уравненіе нитки—прямой. Для этого въ общее уравненіе прямой: $y = ax + b$ подставляемъ $y = 1$ и $x = 2$ и находимъ $1 = 2a + b$; затѣмъ подставляемъ $y = 3$ и $x = 8$ и находимъ $3 = 8a + b$. Нетрудно видѣть, что $1 - 2a = 3 - 8a$, откуда $a = 1/3$. Далѣе $b = 1 - 2a$ и $b = 1/3$. Итакъ искомая прямая выражается зависимостью $y = 1/3x + 1/3$. Составляя новую табличку

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1/3	2/3	1	1 1/3	1 2/3	2	2 1/3	2 2/3	3	3 1/3

мы получаемъ рядъ значеній y, весьма мало отличающихся отъ найденныхъ раньше.

Разсмотрѣнный примѣръ можетъ показаться искусственнымъ. Поэтому на чер. 55 приведена подлинная запись результатовъ изслѣдованія, произведеннаго учениками знаменитаго нью-іоркскаго „Института Пратта“. Въ мѣдномъ сосудѣ (объемъ 37.812) нагрѣвается вода, начиная отъ 0°; прямая даетъ расширеніе сосуда, нижняя кривая — расширеніе воды *видимое* (съ сосудомъ), средняя кривая—расширеніе воды *дѣйствительное*. Изъ чертежа видно, что до 4° вода сжимается.

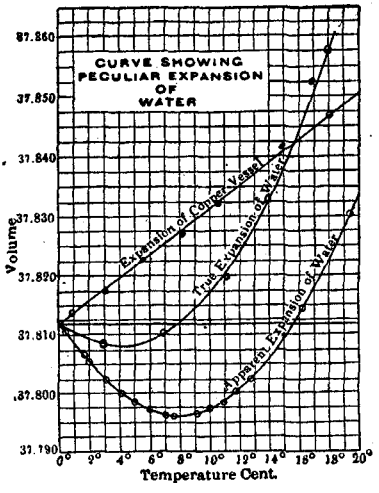
Можно-ли полагаться на такое вычисленіе? „Самоувѣренный, какъ пѣтухъ, академическій ученый, съ деревянной головой, скажетъ вамъ, что у него есть алгебраическій способъ, безконечно точный, основанный на теоріи вѣроятностей, чтобы найти наилучшія

---

[1]) Въ классѣ все это можно продѣлать на координатной доскѣ, которая должна быть необходимой принадлежностью каждаго учебнаго заведенія, подобно тому какъ клѣтчатая бумага должна быть постоянной спутницей учащихся съ перваго до послѣдняго года обученія.

значенія для a и b. Не вѣрьте ему: способъ съ ниткою легко понять, а поэтому всякій дастъ себѣ отчетъ въ томъ, что онъ дѣлаетъ, когда его примѣняетъ. Обыкновенному смертному пользованіе тѣмъ или инымъ методомъ представляется чѣмъ-то темнымъ, онъ вѣритъ въ него, какъ наши предки вѣрили въ магію. Даже хорошіе математики забываютъ, что все это основано на предположеніи, что ошибки каждаго наблюденія въ одинаковой степени вѣроятны, одно какъ другое".

Къ этимъ словамъ Перри добавлять нечего; можно лишь подчеркнуть, что аналитическіе способы въ данномъ случаѣ даже недоступны учащимся.



Чер. 55.

Обратная пропорціональность. 7. Зависимость $s = v.t$ (гдѣ s — путь, v — скорость и t — время) можетъ намъ послужить для наглядной иллюстраціи не только прямой, но и обратной пропорціональности. Въ первомъ случаѣ при постоянной скорости v путь и время связаны линейной зависимостью; во второмъ случаѣ при постоянномъ пути s скорость и время обратно — пропорціональны другъ другу. Эта новая зависимость выражается графически не прямой, а кривой линіей—равносторонней гиперболой. Идея обратной пропорціональности уже не чужда учащимся, такъ какъ простыя задачи на %, работу, площади, объемы и пр. вводили это понятіе съ качественной стороны; здѣсь его можно изучить подробнѣе [1]).

---

[1]) Мы не помѣщаемъ графики равносторонней гиперболы въ виду ея общеизвѣстности; построеніе ея по точкамъ тоже не представляетъ затрудненій.

Преподаватель можетъ брать примѣры обратной пропорціональности не только изъ физики и механики, какъ напр. законъ Бойль-Марріота, формула Ньютона для стеколъ, зависимость между радіусами блоковъ и приложенными къ блокамъ силами и т. п., но и изъ различныхъ житейскихъ соотношеній; таковы вопросы о наймѣ рабочихъ, о ширинѣ матеріала на платье, о числѣ черепицъ на крышу, досокъ на мостъ и т. п.

Итакъ, уравненіе, выражающее законъ прямой пропорціональности, будетъ вида $\frac{y}{x} = a$ или $y = ax$; уравненіе, выражающее законъ обратной пропорціональности, будетъ вида $xy = k$.

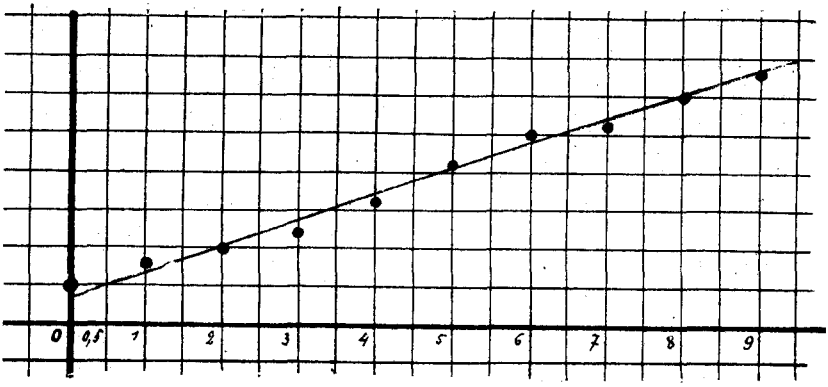
Интерполяція. 8. Графическое рѣшеніе вопросовъ позволяетъ намъ прибѣгнуть къ нему въ случаѣ необходимости *интерполяціи* [1]). Такъ графика линейной функціи дастъ возможность найти y при любомъ x и x при любомъ y; равносторонняя гипербола окажетъ тѣ же услуги для обратно-пропорціональныхъ зависимостей. Наконецъ, можно находить вѣроятныя данныя и на будущее время — и этимъ пріемомъ пользуются страховыя общества, банки, техники, заводчики и фабриканты, и др. Лица послѣдней категоріи обыкновенно опредѣляютъ крайніе и какой-либо промежуточный размѣръ предмета, вычисляютъ ихъ стоимость, а затѣмъ посредствомъ интерполированія составляютъ каталогъ своихъ издѣлій; если поступаютъ заказы, то требуемый размѣръ изготовляется, но нѣтъ смысла изготовлять заранѣе всѣ размѣры.

Совмѣстныя уравненія. 9. При вычисленіи a и b въ уравненіи прямой мы уже встрѣтились съ простѣйшимъ случаемъ двухъ совмѣстныхъ уравненій; рѣшеніе такихъ случаевъ можетъ быть перемѣшано съ рѣшеніями отдѣльныхъ уравненій съ однимъ неизвѣст-

---

[1]) Если напр. на температурной графикѣ съ нанесенными точками мы отыскиваемъ промежуточныя, то такой пріемъ наз. интерполированіемъ, отъ латинскаго inter-pono (кладу между).

нымъ. Вообще здѣсь надо держаться системы переплетанія и не спѣшить съ общими пріемами рѣшеній совмѣстныхъ уравненій. Простые случаи, какъ $y = ax$, $mx + ny = p$; $x + y = k$, $mx + ny = p$; $x + y = k$, $mx = ny$ и т. п., должны быть рѣшаемы безъ всякихъ общихъ правилъ и „способовъ“, такъ-сказать—по догадкѣ; хорошо подобранныя задачи помогутъ эвристически прійти къ тому или иному общему способу. Затѣмъ непремѣнно слѣдуетъ показать, что одну и ту же задачу можно рѣшить или вводя одно неизвѣстное, или—



Чер. 56.

два. Для иллюстраціи такихъ пріемовъ укажемъ рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ.

1) Капиталъ 73000 руб. отданъ въ два предпріятія по частямъ и въ $3^1/_2$ года принесъ общей прибыли 1198 р. 75 к. Найти обѣ части, если извѣстно, что первая отдана по таксѣ $4^1/_2$%, а другая—по таксѣ 5%.

Эту задачу мы рѣшали раньше при помощи уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ. Теперь, напомнивъ прежнее рѣшеніе, можно дать новое. Обозначимъ черезъ x и y искомыя части, но подъ x и y условимся

подразумѣвать сотни, а не рубли. Тогда оба уравненія представятся такъ:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=730 \\ 4{,}5x+y=342{,}5 \end{array}\right\}$$

Слѣдуетъ сразу же пріучить къ правильной записи совмѣстныхъ уравненій, а именно: писать одно подъ другимъ и сбоку ставить фигурныя скобки; эти скобки и служатъ признакомъ совмѣстности уравненій. Кромѣ того, можно нѣкоторыя вычисленія выполнить до составленія уравненія; напр., въ данномъ случаѣ достаточно знать общую прибыль за годъ. Эти предварительныя вычисленія, равно какъ и предложенныя нами обозначенія неизвѣстныхъ, значительно упрощаютъ внѣшній видъ уравненій.

Рѣшеніе полученной системы слѣдуетъ предоставить учащимся. Легче всего сравнить второе уравненіе съ тѣмъ, которое было получено раньше при одномъ неизвѣстномъ x; это ихъ наведетъ на мысль подстановки.

2) Въ [1]) клѣткѣ 35 головъ и 94 ноги; сколько въ ней фазановъ и сколько кроликовъ? Система $x+y=35$, $x+2y=47$ даетъ $x=23$, $y=12$.—Можно прибѣгнуть къ способу сложенія и вычитанія.

3) Одинъ пастухъ сказалъ другому: „Дай мнѣ одну овцу, тогда у меня будетъ вдвое больше, чѣмъ у тебя“. Другой отвѣтилъ: „Нѣтъ, лучше ты дай мнѣ одну овцу; тогда у насъ съ тобой будетъ поровну“. Сколько было овецъ у каждаго?

Получается система $x+1=2(y-1)$, $x-1=y+1$; отвѣтъ $x=7$, $y=5$.—Здѣсь надо сначала упростить уравненія: $x=2y-3$, $x=y+2$; дальше — подстановка или сравненіе.

4) 27 тысячъ отданы въ два предпріятія по 4% и 5%; доходъ съ обѣихъ частей одинаковъ. Каковы части?

Обозначая черезъ x и y число искомыхъ тысячъ, получаемъ систему $x+y=27$, $5x=4y$. Второе уравне-

---

[1]) Изъ китайскаго руководства „9 отдѣловъ искусства счисленія“, 2637 г. до Р. Х.

ніе представимъ въ видѣ $\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$; пользуясь теоремой о производной пропорціи, находимъ $\frac{x+y}{x}=\frac{9}{4}$ $\frac{x+y}{y}=\frac{9}{5}$, откуда $x=12$, $y=15$. Маленькая подробность: уравненіе $\frac{27}{x}=\frac{9}{4}$ не зачѣмъ рѣшать какъ пропорцію; достаточно замѣтить, что числитель первой дроби въ 3 раза больше числителя второй, слѣдовательно, $x=4.3$. — Если такое рѣшеніе покажется затруднительнымъ, то можно воспользоваться способомъ сложенія и вычитанія.

Аналитическіе способы рѣшенія совмѣстныхъ уравненій. 10. Послѣ такого предварительнаго ознакомленія учащихся съ системою двухъ уравненій 1-ой ст. съ двумя неизвѣстными можно перейти къ рѣшенію уравненій общими способами. Мы разсмотримъ вкратцѣ ихъ сравнительное достоинство.

I. *Способъ сложенія и вычитанія*, иначе наз. „способъ уравниванія коэффиціентовъ“, принадлежитъ францисканскому монаху Іоанну Бутео или Борелю (1492—1572, род. въ Шарпэ, въ Дофинэ, почему иногда его называютъ Іоаннъ Дельфинатикусъ), и впервые опубликованъ въ его сочиненіи „Logistica, Leyden, 1559“. Этотъ способъ основанъ на аксіомѣ: „два равенства можно почленно сложить или вычесть“.

Простота, симметричность вычисленій и отсутствіе „тонкостей“ выдвигаютъ въ методическомъ отношеніи этотъ способъ на первый планъ; но при большихъ или дробныхъ коэффиціентахъ онъ неудобенъ. Имъ слѣдуетъ пользоваться при системахъ типа $a_1x+b_1y=c_1$; $a_2x+b_2y=c_2$.

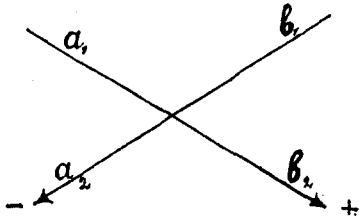
II. *Способъ подстановки* встрѣчается впервые у Ньютона въ его „Arithmetica universalis, 1707“. Этотъ способъ наиболѣе важный, и его кругъ примѣненія самый обширный. Лучше всего онъ можетъ быть изложенъ на системѣ $ax+by=c$, $kx=y$; неудобенъ при полныхъ уравненіяхъ съ большими коэффиціентами.

III. *Способъ сравненія* тоже принадлежитъ Ньютону. Если даже коэффиціенты цѣлыя числа, то примѣненіе

этого способа приводитъ къ дробямъ; имъ пользуются на практикѣ рѣдко, въ школѣ же знакомство съ нимъ лишнее.

IV. *Способъ произвольнаго множителя* или *способъ Безу* (Bézout, Paris, 1730—1783). Онъ имѣетъ скорѣе теоретическое значеніе, притомъ не всегда примѣнимъ. Въ школѣ—лишній.

V. *Способъ опредѣлителей* въ научномъ отношеніи наиболѣе важный и общій, такъ какъ примѣняется къ системѣ n уравненій съ n неизвѣстными, какихъ угодно степеней (конечно, одинаковыхъ во всѣхъ уравненіяхъ). Онъ былъ изобрѣтенъ Лейбницемъ письмо къ Лопиталю (L'Hospital) 28 Апрѣля 1693 г.], а затѣмъ вторично, независимо, Габріэлемъ Крамеромъ (Cramer 1704—1752, проф. мат. въ Genf—Женевѣ). Этотъ способъ заслуживаетъ вполнѣ введенія въ школу, по крайней мѣрѣ для системы 2 уравненій съ 2 неизвѣстными; въ дальнѣйшемъ его можно примѣнить и къ системѣ квадратныхъ уравненій вида $ax^2 + by^2 = c$. Рѣшая систему $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$, находимъ $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$. Знаменатели обѣихъ дробей одинаковы, а числители получаются изъ знаменателя соотвѣтственной замѣной *a* на *c* и b на *c*, поэтому надо умѣть составить знаменателя. Это достигается при помощи *правила Крамера* [1]): пишутъ коэффиціенты такъ:



Чер. 57.

[1]) Introduction à l'analyse des lignes courbes, 1750, стр. 657—659.

перемножаютъ ихъ крестъ на крестъ и первое произведеніе берутъ со знакомъ +, второе со знакомъ —. Числовой примѣръ: $3x + 7y = 27$, $5x + 2y = 16$; $x = \frac{27.2 - 16.7}{3.2 - 5.7}$, $y = \frac{3.16 - 5.27}{3.2 - 5.7}$; $x = 2$, $y = 3$.

Графическій способъ рѣшенія совмѣстныхъ уравненій.

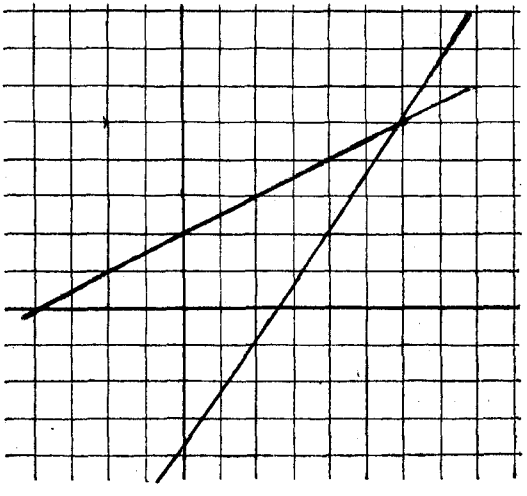
11. Пусть даны два совмѣстныхъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2 &= 0 \\ 3x - 2y - 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Приводимъ ихъ къ виду $y = ax + b$

$$\left.\begin{aligned} y &= x + 2 \\ y &= 1{,}5x - 2 \end{aligned}\right\}$$

и строимъ каждое уравненіе отдѣльно (чер. 58). Что́ же у нихъ общаго? Эти прямыя пересѣкаются, и точка пересѣченія имѣетъ $x = 3$ и $y = 2{,}5$. Такъ какъ эта



Чер. 58.

точка принадлежитъ одновременно обѣимъ прямымъ, то значенія x и y въ этой точкѣ одновременно удовлетворяютъ обоимъ уравненіямъ.

Выгоды графическаго рѣшенія очевидны. Общность пріема, наглядность рѣшенія, простота операцій—все это даетъ предпочтеніе графическому способу передъ аналитическими. Вотъ почему можно—если хватаетъ времени—сначала познакомить учащихся съ перечисленными выше способами, а затѣмъ перейти къ графикамъ. Если же кто дорожитъ временемъ, то графическое рѣшеніе надо сообщить въ началѣ.

12. Линейная зависимость между двумя величинами иногда выражается очень просто равенствомъ $y = a$. Но эта кажущаяся простота—съ хитростью, и знакомить съ такимъ равенствомъ въ началѣ курса опасно. Гдѣ же x? Да у вѣдь постоянно?—вотъ неизбѣжные вопросы. Необходимо пояснить, что иная величина можетъ мѣняться, оставаясь въ извѣстныхъ отношеніяхъ постоянной. Напр., ширина почтоваго тракта вездѣ 20 сажень, но длина его мѣняется; можно взять цѣлый кусокъ сукна или же отрѣзать нѣсколько аршинъ, но ширина сукна—постоянна; въ каждой дести 24 листа; форматъ листа постояненъ, и т. п.

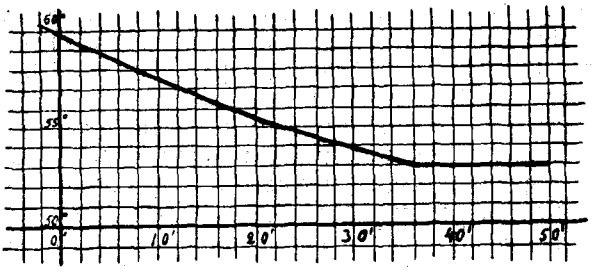
Пусть учащіеся построятъ двѣ—три прямыхъ, заданныхъ уравненіемъ $y = a$, и они убѣдятся, что это—условіе параллельности прямой оси X—овъ.

Встрѣчаются ли такія графики въ изслѣдованіяхъ процессовъ природы? Для иллюстраціи возьмемъ примѣръ изъ физики. Расплавляя чистый парафинъ и наблюдая температуру по термометру, помѣщенному въ сосудѣ, мы можемъ графически изображать этотъ процессъ, отмѣчая на оси X-овъ время, а на оси Y-овъ температуру. Подобнымъ же образомъ можно изобразить процессъ остыванія расплавленнаго парафина (болѣе легкое наблюденіе). На прилагаемомъ чертежѣ показано, что около 33° кривая обращается въ прямую, параллельную оси X-овъ, и это будетъ продолжаться, пока весь парафинъ не застынетъ, послѣ чего пойдетъ дальнѣйшее пониженіе графики.

Остановимъ вниманіе учащихся на случаѣ $y = 0$; нетрудно *видѣть*, что это уравненіе оси X-овъ. Замѣтивъ это, можно показать, что всякое уравненіе 1-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ можно замѣнить системой двухъ совмѣстныхъ уравненій: $y = ax + b$ и

$y = 0$. Графически мы придемъ къ пересѣченію двухъ прямыхъ, одна изъ которыхъ—ось X-овъ.

Въ заключеніе укажемъ, почему мы все время брали уравненіе прямой вида $y = ax + b$, хотя существуютъ и другіе виды, какъ напр. $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$; $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$. Дѣло въ томъ, что сообщать разные виды уравненія прямой въ I-мъ циклѣ немыслимо; если же выбрать одинъ изъ нихъ, то предпочтеніе слѣдуетъ отдать именно первому. Оба параметра, *a* и *b*, строятся очень просто; *b* откладывается по вертикальной оси



Чер. 59.

вверхъ или внизъ; *a*—по горизонтальной и вертикальной, такъ какъ *a* есть тангенсъ, т.-е. отношеніе катетовъ. Если *a* отрицательно, то возможны два построенія: влѣво и вверхъ при положительномъ *b*, вправо и внизъ при отрицательномъ *b*. Такимъ образомъ построеніе сводится къ 2 точкамъ, которыя отсчитываются по осямъ. Что-же можетъ быть легче? Но все это слѣдуетъ предоставить эвристическому искусству учащихся.

13. *Задачи.* Выборъ матеріала для задачъ имѣетъ громадное значеніе, поэтому—кромѣ указанныхъ въ этой главѣ типовъ—мы помѣщаемъ еще и нижеслѣдующіе. Въ послѣдней задачѣ слѣдуетъ обратить вниманіе учащихся на то, что получающіяся квадратныя уравненія, послѣ упрощеній, даютъ линейныя уравненія, и что таковы почти всегда задачи на теорему Пиѳагора.

1) Въ составъ пороха входятъ селитра, сѣра и уголь. Сколько футовъ каждаго вещества въ пудѣ пороха, если селитры должно быть въ $7^1/_2$ разъ болѣе, а угля въ $1^1/_2$ раза болѣе, чѣмъ сѣры?

2) Торговецъ покупаетъ 11 ягнятъ по 35 франковъ. Часть изъ нихъ пала, остальные онъ продаетъ, накинувъ на каждаго столько пятифранковыхъ билетовъ, сколько пало ягнятъ. Зная, что онъ продалъ ягнятъ безъ прибыли и убытка, опредѣлить число павшихъ?

3) $^1/_2$ литра смѣси изъ алкоголя (уд. в. = 0,8) и эфира (уд. в. = 0,7) вѣситъ 390 гр. Сколько содержится въ ней алкоголя и сколько эфира?

4) Свинцовый шаръ (уд. в. = 11,4) вѣситъ 209 гр. Сколько онъ потеряетъ въ своемъ вѣсѣ въ водѣ?

5) Серебрянная ложка вѣситъ въ воздухѣ 40,4 гр., въ водѣ 36,4 гр. Сколько серебра (уд. в. = 10,5) и ск. мѣди (уд. в. = 8,9) содержитъ она?

6) Двѣ паровыя машины имѣютъ вмѣстѣ 108 лошадиныхъ силъ. Одна изъ нихъ производитъ въ 25 дней такую же работу, какъ другая въ 11 дней. Сколько лошадиныхъ силъ имѣетъ каждая машина?

7) Два воздушныхъ шара поднялись въ Берлинѣ. Первый изъ нихъ достигъ города Кельна, отдаленнаго на 425 км. отъ Берлина; другой, который обладалъ только $^3/_5$ скорости перваго, достигъ города Меца, отдаленнаго отъ Берлина на 630 км., но употребилъ на это $12^1/_2$ час. больше перваго. Какую скорость развили воздушные шары въ 1 часъ?

8) Цилиндрическій сосудъ имѣетъ емкость въ 10,59 литра и внутренній діаметръ 2,12 дцм.; чему равняется его глубина?

9) Даны два глобуса, одинъ 1,22 фута въ діаметрѣ, другой—3,14 ф. Если поверхность нѣкоторой страны на первомъ глобусѣ занимаетъ 15 кв. дюймовъ, то чему равняется поверхность этой страны на другомъ глобусѣ?

10) Въ одной древней китайской ариѳметикѣ, называемой Кіу-чангъ, написанной ученымъ Цзинь-Кіу-чау за 2600 л. до Р. Х., помѣщены, между прочимъ, слѣдующія двѣ задачи: а) въ центрѣ квадратнаго пруда, имѣющаго 10 фут. въ длину и въ ширину, растетъ тростникъ, возвышающійся на 1 ф. надъ поверхностью

воды. Притянутый къ берегу, къ серединѣ стороны пруда, онъ достигъ своей верхушкой берега. Опредѣлить глубину пруда; b) бамбуковый стволъ въ 10 ф. вышиною переломленъ бурей такъ, что если верхнюю часть его нагнуть къ землѣ, то верхушка касается земли въ разстояніи 3 ф. отъ основанія ствола. На какой высотѣ дерево переломлено?

ГЛАВА XIV.

Квадратныя уравненія.

Пропедевтика квадратныхъ уравненій.

1. Приступая къ изложенію уравненій 2-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ— квадратныхъ ур-ій, лучше всего связать ихъ рѣшеніе съ разложеніемъ на простыхъ сомножителей. Этотъ путь позволитъ избѣжать на первыхъ порахъ разныхъ затрудненій, находящихся въ связи съ двузначностью полученнаго результата; затѣмъ поможетъ учащимся прійти окончательно къ извѣстному способу рѣшенія *своими* активными усиліями и облегчить имъ переходъ къ рѣшенію общаго вида квадратныхъ ур-ій.

Возьмемъ вначалѣ числовыя квадратныя уравненія и для ихъ рѣшенія разобьемъ уравненія на пять группъ по мѣрѣ сложности ихъ преобразованій.

1) Напримѣръ уравненіе $x^2+1=5$ рѣшается такъ:

$$x^2+1=5$$
$$x^2=5-1$$
$$x^2=4$$
$$x.x=2.2$$

или

$$x.x=(-2).(-2)$$

Отсюда $x=+2$ или $x=-2$;

т. е. $x=\pm 2$.

Въ началѣ поступаемъ какъ при рѣшеніи ур-ій 1-ой ст. съ однимъ неизвѣстнымъ, но потомъ, получивъ $x^2=4$, какъ x^2 такъ и 4 разлагаемъ на два про-

стыхъ сомножителя, т. е. $x.x = 2.2$ или $x.x = (-2).(-2)$. Оба эти разложенія равновозможны и они то даютъ первый намекъ на двойственность рѣшенія.

Повѣрка доказываетъ ученикамъ, что данному уравненію удовлетворяютъ оба корня, поэтому мы и ставимъ двойной знакъ. Если же мы это уравненіе получили изъ какой нибудь задачи, то очевидно, что нужно изслѣдовать, какой изъ корней (оба или одинъ изъ нихъ) удовлетворяетъ по смыслу задачи уравненію.

Цѣлый рядъ квадратныхъ ур-ій въ этомъ родѣ можетъ помочь ученикамъ освоиться съ такимъ рѣшеніемъ. Таковы:

$$x^2 - 4 = 5;\ x^2 + 1 = 82;\ x^2 - 10 = 90;\ x^2 + 5 = 41;$$
$$x^2 + 15 - 8 = 8;\ x^2 + 5 = 30 + 11;\ x^2 - 4a^2 = 21a^2;$$
$$x^2 + 3c^2 = 7c^2.$$

Послѣднія два уравненія содержатъ кромѣ x и другія буквы, но ихъ рѣшеніе не представляетъ затрудненій, а между тѣмъ они подготовляютъ почву для рѣшенія полныхъ буквенныхъ квадратныхъ ур-ій.

2) $x^2 + 6x + 9 = 49$. Для этого случая придется возобновить въ памяти учащихся такія важныя тожества, какъ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab^2 + b^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. На основаніи первой формулы имѣемъ

$$x^2 + 2.3.x + 3^2 = 7.7 \text{ или } (-7).(-7),$$
$$(x + 3)^2 = 7.7 \text{ или } (-7).(-7),$$
$$(x + 3)(x + 3) = 7.7 \text{ или } (x + 3)(x + 3) = (-7).(-7),$$
$$x + 3 = 7;\ x_1 = +4;\ \text{или}\ x + 3 = -7;\ x_2 = -10.$$

Къ этой группѣ (2) квадратныхъ ур-ій для упражненія подходятъ такія: $x^2 + 4x + 4 = 16$; $y^2 - 16y + 64 = 9$; $x^2 + 6x + 9 = 4$; $z^2 + 2z + 1 = 36$; $x^2 - 14x + 49 = 9$; $y^2 + 40y + 400 = 900$, и т. п.

3) Возьмемъ такое уравненіе:

$$x^2 + 10x = -25,$$
$$x^2 + 10x + 25 = 0,$$
$$x^2 + 2.5.x + 5^2 = 0,$$
$$(x + 5)^2 = 0,$$
$$(x + 5)(x + 5) = 0,$$
$$x + 5 = 0,$$
$$x = -5.$$

При перенесеніи члена (—25) изъ правой части ур-ія въ лѣвую получаемъ въ лѣвой части трехчленъ, который является полнымъ квадратомъ, а въ правой части—нуль. Но если произведеніе двухъ сомножителей равняется 0, то это значитъ, что одинъ изъ нихъ непремѣнно долженъ равняться нулю. Такъ какъ нѣтъ основаній выбрать тотъ или другой, то мы считаемъ, что оба могутъ обратиться въ нуль. Стало быть: $x+5=0$, откуда $x_1=-5$; точно также еще разъ $x+5=0$ и $x_2=-5$.

Для упражненій этой группы могутъ послужить слѣдующія ур-ія: $x^2+4x=-4$; $x^2-8x=-16$; $y^2+12y+36=0$; $y^2+6y+9=0$; $z^2-14z+49=0$; $x^2+24x=-144$; $z^2-100z=-2500$, и т. п.

4) Возьмемъ уравненіе $x^2+6x+8=0$. Его можно рѣшить двумя пріемами, которые мы приведемъ параллельно.

$$\begin{array}{c} x^2+6x+8=0, \\ x^2+6x+2.4=0, \\ x^2+2x+4x+2.4=0, \\ x(x+2)+4(x+2)=0, \\ (x+2)(x+4)=0, \\ x_1=-2,\ x_2=-4. \end{array} \qquad \begin{array}{c} x^2+6x+8=0, \\ x^2+6x=-8, \\ x(x+6)=(-2).4, \\ x(x+6)=2(-4), \\ x_1=-2, \text{ если } x+6=4, \\ x_2=-4, \text{ если } x+6=2. \end{array}$$

Первый пріемъ—группировка; онъ наглядно показываетъ, что квадратный трехчленъ всегда можно представить въ видѣ произведенія двухъ биномовъ. Второй пріемъ проще и, кромѣ того, позволяетъ подмѣтить важныя соотношенія между коэффиціентами и корнями уравненія. Для этого достаточно подробно продѣлать слѣдующій примѣръ.

$$\begin{array}{c} x^2-9x+18=0, \\ x^2-9x=-18, \\ x(x-9)=(-3).6, \\ x(x-9)=3.(-6), \\ x_1=3,\ x_2=6. \end{array} \qquad \left.\begin{array}{c} 18.(-1) \\ (-18).(+1) \\ 9.(-2) \\ (-9).2 \\ 6.(-3) \\ (-6).3 \end{array}\right\}=-18.$$

Изъ всѣхъ возможныхъ разложеній мы должны выбрать два послѣднихъ. Почему? Потому что лѣвая часть показываетъ, что первый множитель больше

другого на 9, а это возможно лишь при множителяхъ 6 и—3 или—6 и 3.

Изъ предыдущаго ясно, что произведеніе корней равно свободному члену; теперь еще слѣдуетъ, что алгебраическая сумма корней равна среднему коэффиціенту, взятому съ обратнымъ знакомъ.

Примѣры для упражненія: $x^2-2x-15=0$; $x^2+4x-21=0$; $x^2+5x-14=0$; $x^2-22x-75=0$; $x^2-6ax+8a^2=0$; $x^2+11bx+24b^2=0$, и т. п.

5) Наконецъ разсмотримъ такое уравненіе: $x^2+6x+7=23$. Его можно свести къ предыдущему, приводя къ виду $x^2+6x=16$; но лучше рѣшать по способу дополненія до квадрата, такъ какъ этимъ мы подготовимъ выводъ общей формулы. Имѣемъ

$$x^2+6x+7=23,$$
$$x^2+2.3x+(7+2)=25,$$
$$(x+3)^2=25,$$
$$x+3=+5,\ x_1=2,$$
$$x+3=-5,\ x_2=-8.$$

Такъ какъ $(+5)^2=25$ и $(-5)^2=25$, то мы должны разсмотрѣть оба предположенія. Рѣшивъ два-три примѣра, можно видоизмѣнить запись такъ: $(x+3)^2=25$, $x+3=\pm\sqrt{25}$, $x=-3\pm\sqrt{25}$.

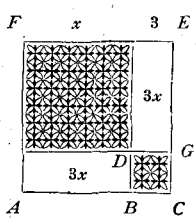
Послѣ этихъ предварительныхъ изысканій можно познакомить учащихся съ геометрическимъ рѣшеніемъ квадратнаго ур-ія, т. к. оно какъ разъ подходитъ къ данной группѣ ур-ій. Мы знаемъ изъ исторіи математики, что Арабы вносили въ алгебру геометрію, и это имъ помогло доказывать правила рѣшенія уравненій геометрически.

У Ж. Кардана (род. въ Миланѣ 1501 г., умеръ въ Римѣ 1576 г.) находимъ слѣдующій примѣръ:

$$x^2+6x=91.$$

Пусть квадратъ $FD=x^2$ (чер. 60); его сторона равна x; сверхъ того $DG=DB=3$ = половинѣ коэффиціента при x; построимъ квадратъ AFEC, тогда прямоугольникъ AD = прямоугольнику $DE=3x$, т. к. $AB=EG=x$. Сумма квадрата FD и прямоугольниковъ AD и DE равна, слѣдовательно, x^2+6x или 91; малый квадратъ DC равенъ 9 по построенію, а вмѣстѣ съ

тѣмъ весь квадратъ $FC = 100$; стало быть, сторона AC этого квадрата равна 10, откуда слѣдуетъ, что $AB = x = AC - BC = 7$. Тотъ же результатъ получается изъ ур-ія и алгебраическимъ путемъ:



Чер. 60.

$$x^2 + 6x = 91,$$
$$x^2 + 6x + 9 = 91 + 9,$$
$$x^2 + 2.3x + 3^2 = 100,$$
$$(x + 3)^2 = 10^2,$$
$$(x + 3) = 10,\ x_1 = 7,$$
$$(x + 3) = -10;\ x_2 = -13.$$

Рѣшить[1]) геометрически и аналитически слѣдующія ур-ія: $x^2 - 12x + 33 = 46$; $x^2 + 10x + 20 = 11$; $x^2 + 8x + 12 = 32$; $x^2 + 4x + 2 = 7$, и т. п.

Обобщая рѣшеніе уравненій 5-ой группы, мы приходимъ къ формулѣ $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$; въ этомъ видѣ ее запомнить лучше. Выводъ формулы для уравненія $ax^2 + bx + c = 0$ легко привести къ предыдущему.

Построеніе параболы. 2. Приступая къ графическому рѣшенію квадратнаго уравненія, мы должны предварительно познакомить учащихся съ параболой.

Можно получить параболу, разсматривая одинъ изъ параболическихъ процессовъ; самымъ простымъ является свободное паденіе тѣлъ. Если не принимать во вниманіе сопротивленіе воздуха, то камень, брошенный съ вершины башни, пролетитъ въ 1-ю секунду 4 м. 90 см., во 2-ую сек.—19 м. 60 см., въ 3-ью сек.—44 м. 10 см., и т. д. Эти числа показываютъ намъ, что графика такого движенія будетъ имѣть форму кривой, а не прямой линіи; эта кривая назыв. *параболой.* Существуютъ самопишущіе приборы для вычерчиванія параболы; однимъ изъ нихъ является цилиндръ, оклеенный клѣтчатой бумагой и движущійся по винтовой линіи; тогда остріе карандаша или конецъ кисти, укрѣпленныхъ

---

[1]) Хотя второй корень геометрически *сразу* не находится, но его легко вычислить, т. к. $x_1 . x_2 = 91$, откуда $x_2 = (-91) : 7 = -13$. Впрочемъ, можно x_2 найти и геометрически, но для этого нуженъ новый чертежъ.

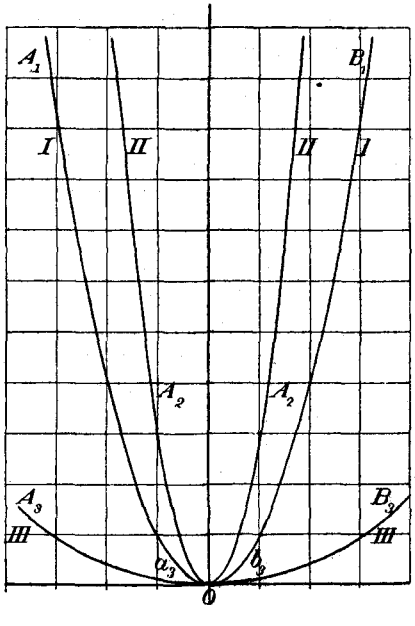
горизонтально, проведутъ на цилиндрѣ кривую линію; снявъ бумагу и развернувъ ее, мы увидимъ параболу.

Эту же кривую можно получить и аналитическимъ путемъ.

Пусть дано $y = x^2$. Давая „иксу“ послѣдовательныя значенія, отрицательныя и положительныя, получимъ соотвѣтствующія значенія „игрека“. Пусть учащіеся составятъ табличку

x	— 4	— 3	— 2	— 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
y	+ 16	+ 9	+ 4	+ 1	0	+ 1	+ 4	+ 9	+ 16

и нанесутъ затѣмъ точки кривой на клѣтчатую бумагу (чер. 61). Соединивъ отдѣльныя точки непрерывной



Чер. 61.

кривой, мы видимъ, что графика функціи $y = x^2$ въ началѣ осей идетъ почти прямо, а затѣмъ подни-

мается все круче и круче (кривая I — I). Такъ какъ для двухъ сопряженныхъ значеній x ($+a$ и $-a$) всегда имѣемъ одно значеніе y ($+a^2$), то лѣвая половина кривой точно такая же, какъ и правая — она служитъ зеркальнымъ изображеніемъ послѣдней. Стало быть, правая половина симметрична по отношенью къ лѣвой, и обратно. Вертикальная ось есть ось симметріи.

Если мы возьмемъ функцію $y = 3x^2$, то она отличается отъ предыдущей лишь коэффиціентомъ 3 при x^2; поэтому всѣ предыдущія значенія y должны увеличиться втрое. Графика этой функціи — парабола II — II. Точно также для функціи $y = \frac{1}{3} x^2$ всѣ „игреки" втрое меньше, и графика новой функціи — парабола III — III.

Построивъ всѣ три функціи ученики убѣдятся, что всѣ онѣ — параболы, отличающіяся другъ отъ друга лишь подъемомъ. Легко провести здѣсь аналогію между прямой и параболой и установить эмпирически зависимость между подъемомъ и коэффиціентомъ при x^2.

Изученіе параболы. 3. Посмотримъ теперь, какое будетъ уравненіе параболы при различныхъ ея положеніяхъ относительно начала осей.

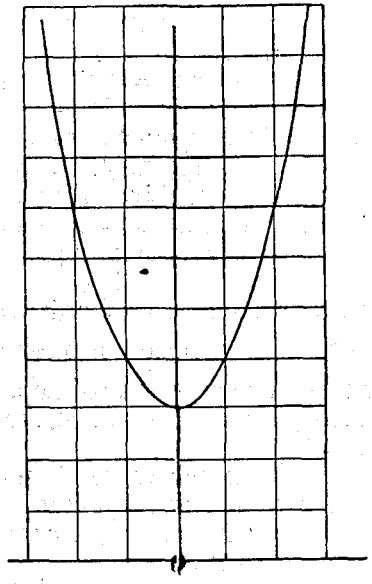
1) Пусть вершина параболы поднимется вверхъ по оси Y-овъ на 3 дѣленія; тогда всѣ „игреки" увеличатся на 3. Слѣдовательно, уравненіе параболы (чер. 62) [1]) будетъ $y = x^2 + 3$. По чертежу легко провѣрить, что при $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $y = +3, +4, +7, \ldots$. Парабола и этого типа поднимается вверхъ быстрѣе или медленнѣе въ зависимости отъ бо̀льшаго или меньшаго коэффиціента при x^2, но всегда остается симметричной относительно оси Y-овъ.

2) Опустивъ вершину параболы на 3 дѣленія внизъ, мы — по аналогіи съ предыдущимъ — получимъ уравненіе $y = x^2 - 3$ (чер. 63). Симметрія относительно оси Y-овъ сохранилась и здѣсь.

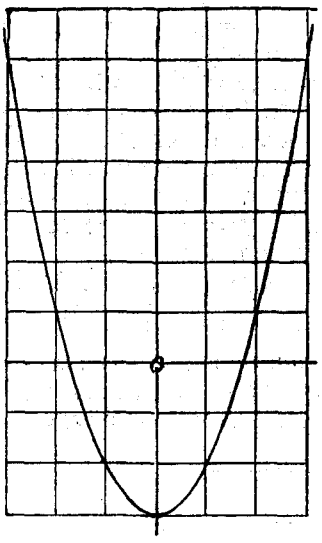
3) Передвинемъ теперь параболу по горизонтальной оси вправо на 4 дѣленія (чер. 64, парабола I — I). Всѣ

---

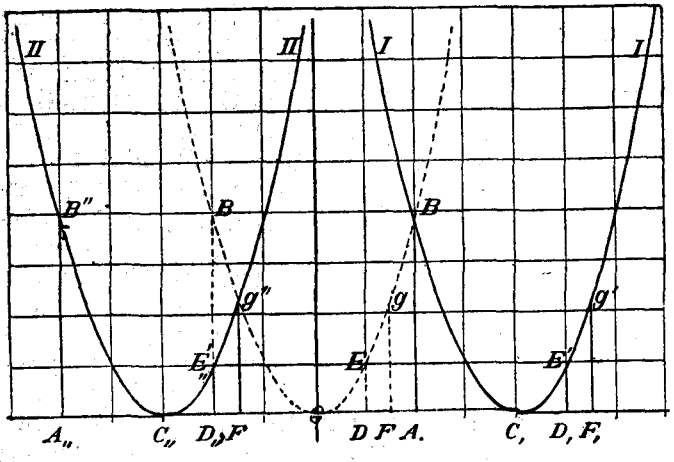
[1]) Здѣсь, какъ и дальше, красныя линіи показываютъ путь, по которому перемѣщалась вершина параболы.



Чер. 62.



Чер. 63.

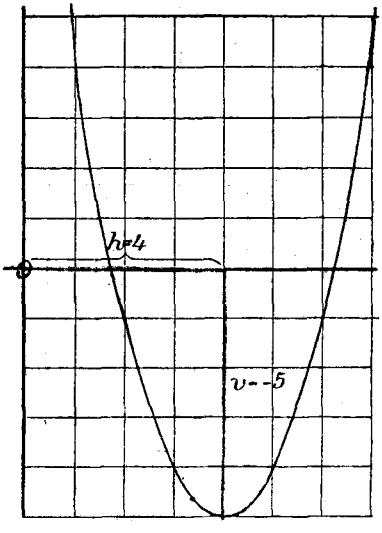


Чер. 64.

„игреки“ при этомъ не измѣнятся, но каждый „иксъ“ увеличится на 4; поэтому уравненіе параболы приметъ видъ $y=(x-4)^2$ или $y=x^2-8x+16$.

Все это провѣрить нетрудно. Во I-хъ, при $x=5$ имѣемъ $y=D'E'=DE=1$; при $x=5{,}5$ имѣемъ $y=F'g'=Fg$, и т. п. Это показываетъ, что значенія „игрека“ остались тѣ же. Во II-хъ, такъ какъ „иксы“ возросли на 4, то ихъ необходимо обрѣзать, уменьшить, по сравненію съ прежними, т. е. вмѣсто x взять $x-4$. Такъ для $x=6$ уравненіе $y=x^2-8x+16$ даетъ $y=4$, что̀ легко провѣрить по чертежу.

Вводя обозначеніе h для половины коэффиціента при x $\left(h=\frac{p}{2}\right)$ мы видимъ, что его числовое значеніе показываетъ, на сколько дѣленій перемѣстилась парабола горизонтально; знакъ „минусъ“ показываетъ, что перемѣщеніе совершилось *вправо*.



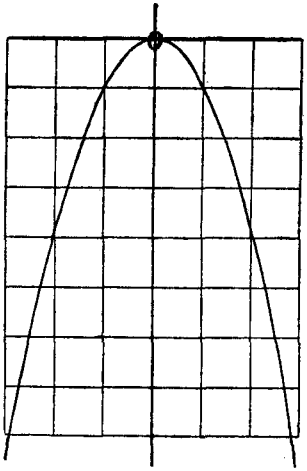
Чер. 65.

Тѣ же разсужденія покажутъ намъ, что при перемѣщеніи параболы *влѣво* на 3 дѣленія уравненіе ея приметъ видъ $y=(x+3)^2$ или $y=x^2+6x+9$ (чер. 64, парабола II—II). Здѣсь $h=+3$. Противорѣчье въ знакахъ и направленіяхъ лишь кажущееся: чтобы изъ C′ прійти въ O, надо отсчитать -4 дѣленія $(h=-4)$, при переходѣ изъ C″ въ O надо отсчитать $+3$ дѣленія $(h=+3)$. Наконецъ въ обоихъ случаяхъ $q=h^2$, такъ какъ правыя части суть полные квадраты (q — свободный членъ въ уравненіи $x^2+px+q=0$).

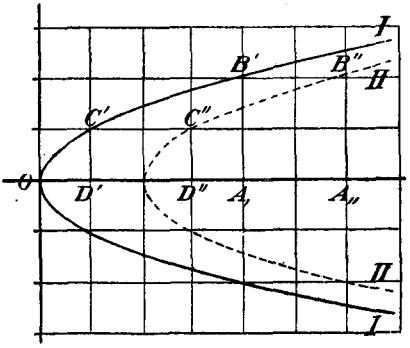
Параболы 3-го типа уже не симметричны къ оси Y-овъ, но каждая изъ нихъ имѣетъ свою ось симметріи, параллельную первой.

4) Передвинемъ теперь вершину параболы на 4 вправо и на 5 внизъ. Сказаннаго раньше достаточно, чтобы заключить о видѣ уравненія параболы въ этомъ случаѣ (чер. 65); имѣемъ $y=(x-4)^2-5$ или $y=x^2-8x+11$. Здѣсь $h=-4$, что же касается q, то $q=h^2+v$, гдѣ $v=-5$ и показываетъ вертикальное перемѣщеніе.

5) Наконецъ разсмотримъ, какое положеніе параболы, заданной уравненіемъ $y=-x^2$. Сравнивая ее съ параболой $y=+x^2$ мы видимъ, что числовыя значенія „игрековъ" въ обоихъ случаяхъ равны, знаки же ихъ противоположны. Это показываетъ, что новая парабола симметрична прежней по отношенью къ оси X-овъ (чер. 66).



Чер. 66.



Чер. 67.

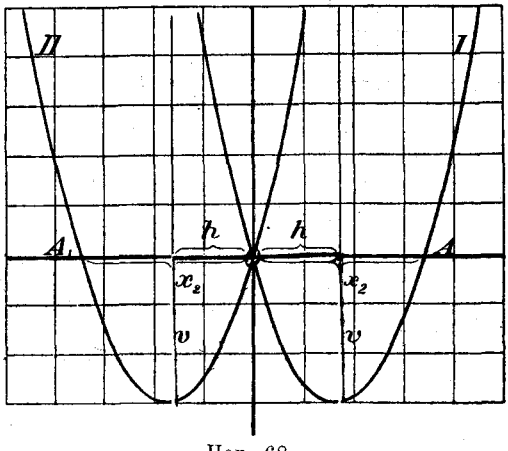
6) Мы разсмотрѣли функціи вида $y=f(x)$, гдѣ $f(x)$ — квадратная функція. Полезно указать учащимся, чѣмъ отличается такая функція отъ новой $x=f(y)$? Сначала на уравненіи $x=y^2$ они убѣдятся, что это такая же парабола, но расположенная симметрично относительно горизонтальной оси (чер. 67, парабола I — I). Передвигая затѣмъ полученную параболу вправо на 2 дѣленія, легко видѣть, что „игреки" не измѣнятся, „иксы" уменьшатся на 2. Дѣйствительно, при $x=3$ имѣемъ $y=D,,C''=D,C'$; при $x=6$ имѣемъ $y=A,,B''=A,B'$

и т. п. Поэтому новое уравненіе будетъ $x = y^2 + 2$ (парабола II—II).

Дальнѣйшія изслѣдованія лишни, такъ какъ очевидно, что новыя параболы получаются изъ прежнихъ простымъ поворачиваніемъ чертежа на 90^0, что соотвѣтствуетъ взаимному перемѣщенію осей.

Графическое рѣшеніе квадратныхъ уравненій.

4. Перейдемъ теперь къ графическому рѣшенію квадратныхъ сравненій, пользуясь сказаннымъ выше. Для учащихся стало ясно, что всякій квадратный трехчленъ графически изображаетъ параболу; вершина ея занимаетъ то или иное положеніе въ зависимости отъ вида трехчлена. Разсмотримъ три случая.



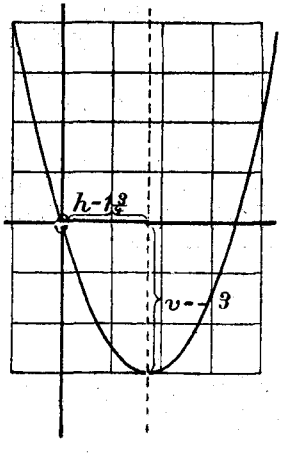
Чер. 68.

1., $x^2 + q = 0$. Если q положительное, то парабола выше оси X-овъ и не пересѣкаетъ ея; это показываетъ, что уравненіе не имѣетъ дѣйствительныхъ корней. Если q отрицательно, то парабола пересѣкаетъ ось X-овъ въ двухъ симметричныхъ точкахъ. Примѣрами могутъ служить уравненія $x^2 + 3 = 0$ и $x^2 - 3 = 0$ (чер. 62 и 63).

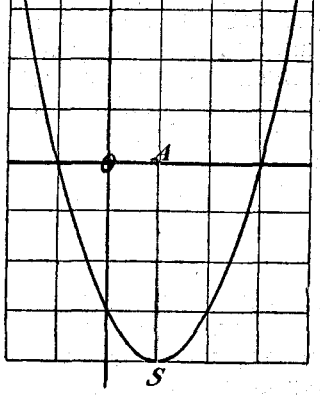
Вводя условный символъ $\sqrt{-3}$, можно уравненіе $x^2 + 3 = 0$ преобразовать такъ: $x^2 - (-3) = 0$,

$x^2 - (\sqrt{-3})^2 = 0$, $(x + \sqrt{-3})(x - \sqrt{-3}) = 0$, откуда $x_1 = +\sqrt{-3}$, $x_2 = -\sqrt{-3}$. Это первое знакомство съ мнимымъ числомъ, о которомъ мы не считаемъ возможнымъ говорить въ I-мъ циклѣ.

2., $x^2 + px = 0$. Парабола, уравненіе которой $y = x^2 + px$, проходитъ черезъ начало координатъ. Если p положительно, то черезъ O проходитъ правая вѣтвь (чер. 68, парабола II); если p отрицательно, то — лѣвая вѣтвь (парабола I). Слѣдовательно, $x_1 = 0$, $x_2 = p$ (по



Чер. 69.



Чер. 70.

чертежу $p = 2h$). Числовой примѣръ рѣшенъ для случая $x^2 - 3{,}5x = 0$ (чер. 69).

3., $x^2 + px + q = 0$. Здѣсь, какъ мы видѣли раньше, вершина параболы перемѣщается въ двухъ направленіяхъ, но ни одна изъ вѣтвей не проходитъ черезъ начало. Всѣ возможные случаи распадаются на двѣ группы: a) парабола пересѣкаетъ ось X-овъ въ двухъ точкахъ и b) парабола совсѣмъ не пересѣкаетъ оси X-овъ. Въ первомъ случаѣ мы получаемъ два рѣшенія; напр. изъ уравненія $x^2 - 2x - 3 = 0$ находимъ

$x_1 = 3$, $x_2 = -1$ (чер. 70). Во второмъ случаѣ q положительно и больше $\frac{p^2}{4}$; примѣромъ можетъ служить уравненіе $x^2 - 6x + 12 = 0$, съ корнями $x_1 = 3 + \sqrt{-3}$ и $x_2 = 3 - \sqrt{-3}$ (графика на чер. 62, если O передвинуть на 3 дѣленія вправо).

Графическія таблицы.

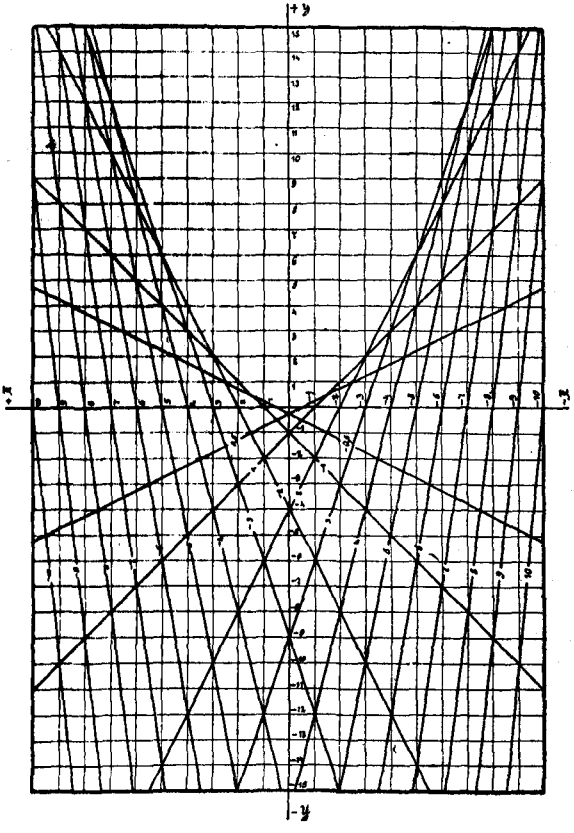
5. Разсмотрѣнный пріемъ рѣшенія квадратнаго уравненія аналогиченъ рѣшенію линейнаго уравненія: тамъ строилась прямая въ различныхъ положеніяхъ относительно начала и осей, здѣсь — парабола. Кромѣ общности пріема выгода такого рѣшенія еще и въ томъ, что учащіеся знакомятся съ различнаго вида параболами; всѣ эти виды встрѣчаются при рѣшеніи вопросовъ физики и механики. Но въ предыдущей главѣ мы указали, что уравненіе I-ой ст. съ однимъ неизвѣстнымъ можно замѣнить системой двухъ уравненій, изъ коихъ одно есть уравненіе оси X-овъ. Аналогично этому и уравненіе $x^2 + px + q = 0$ можно замѣнить системой (вычитая изъ перваго уравненія второе, получимъ $0 = x^2 + px + q$)

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= -px - q \end{aligned}\right\}$$

Здѣсь постоянная парабола $y = x^2$ играетъ ту же роль, что раньше постоянная прямая $y = 0$. Начертивъ такую параболу на клѣтчатой бумагѣ, остается лишь строить различныя прямыя, зависящія отъ коэффиціентовъ p и q. Это и будетъ графическая таблица для рѣшенія уравненій 2-ой ст.

Графическихъ таблицъ въ настоящее время существуетъ довольно много и самыхъ разнообразныхъ типовъ. Кромѣ указанной сейчасъ, еще двѣ заслуживаютъ особаго вниманія. Первая (чер. 71) дана французомъ Лялянномъ въ 1846 г. Здѣсь какъ бы изображена парабола и рядъ прямыхъ, но на самомъ дѣлѣ это лишь прямыя; такимъ образомъ *парабола есть геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія нѣкоторой системы прямыхъ.* Не вдаваясь въ теорію построенія таблицы, укажемъ лишь, какъ ею пользоваться. На оси Y-овъ откладываемъ q — вверхъ, если положителенъ, внизъ, если отрица-

теленъ; затѣмъ по горизонтали откладываемъ p — вправо, если положителенъ, влѣво, если отрицателенъ[1]). Точка, въ которую мы придемъ, есть точка пересѣченія 2 прямыхъ; эти прямыя пересѣкаютъ ось X-овъ въ искомыхъ



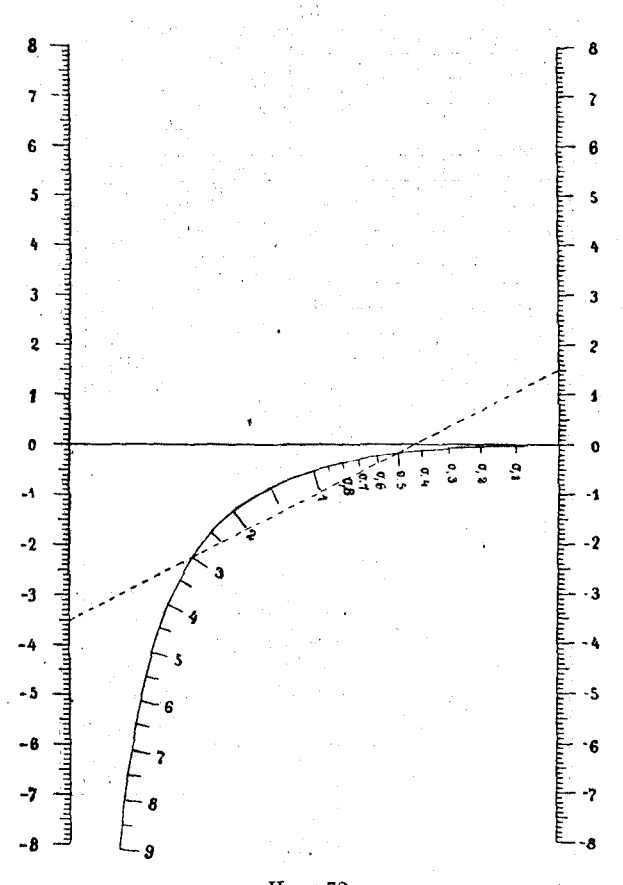
Чер. 71.

точкахъ. Такъ для уравненія $x^2 + 5x - 6 = 0$ находимъ сначала точку $(-5, -6)$; изъ этой точки идутъ прямыя, пересѣкающія ось X-овъ въ точкахъ -6 и $+1$, слѣдовательно $x_1 = 1$, $x_2 = -6$.

---

[1]) Для удобства отрицательная ось X-овъ направлена *вправо*.

Вторая таблица дана извѣстнымъ Оканемъ въ 1884 г. (M. d'Ocagne). Кривая, изображенная на ней, гипербола — и сама таблица построена, исходя изъ другого принципа. На прилагаемомъ чертежѣ дано рѣшеніе



Чер. 72.

уравненія $x^2 - 3{,}5\,x + 1{,}5 = 0$. Пунктирная прямая пересѣкаетъ постоянную кривую въ точкахъ 3 и 0,5; поэтому $x_1 = 3$, $x_2 = 0{,}5$. Чтобы провести прямую, откладываемъ $p = -3{,}5$ *слѣва внизу*, $q = 1{,}5$ *справа наверху*, затѣмъ

соединяемъ обѣ точки пунктиромъ. При пользованіи таблицей чертить прямыя незачѣмъ; достаточно приложить линейку съ тонкимъ ребромъ или кусокъ толстаго картона.

Таблица Оканя универсальна. Если дано $x^2 - 6x + 9 = 0$, то прямая *коснется* кривой въ точкѣ 3, т. е. $x_1 = x_2 = 3$. Если $x^2 + 6x + 8 = 0$, то оба корня отрицательны; тогда берутъ коэффиціенты — 6 и 8, находятъ точки 2 и 4, слѣдовательно $x_1 = -2$, $x_2 = -4$. Если $x^2 + 2x - 3 = 0$, то прямая идетъ слѣва сверху на право внизъ, пересѣкая кривую лишь въ одной точкѣ $x_1 = 1$; слѣдовательно, второй корень отрицателенъ. Его находимъ изъ условія $-3 = (+1) . x_2$, откуда $x_2 = -3$. Наконецъ въ случаѣ $x^2 - 6x + 13 = 0$ прямая вовсе не пересѣкаетъ кривой, поэтому оба корня мнимы. Но и здѣсь таблица можетъ послужить для нахожденія корней, какъ это показалъ *A. Haas* въ 1887 г.

Геометрическое рѣшеніе квадратныхъ уравненій.

6. Существуетъ нѣсколько геометрическихъ теоремъ, пользуясь которыми можно найти корни квадратнаго уравненія при помощи геометрическаго построенія. Такъ при положительномъ q и отрицательномъ p откладываемъ на прямой отрѣзокъ, равный p, на немъ строимъ полуокружность и изъ конца діаметра возставляемъ перпендикуляръ $= \sqrt{q}$; проводя затѣмъ черезъ конецъ перпендикуляра прямую, параллельную діаметру, найдемъ точку пересѣченія ея съ окружностью; наконецъ, опуская изъ послѣдней точки перпендикуляръ на діаметръ, раздѣлимъ діаметръ на два отрѣзка: x_1 и x_2.

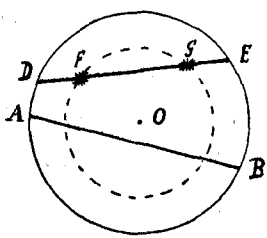
Въ данномъ случаѣ мы воспользовались теоремой о перпендикулярѣ, опущенномъ изъ вершины прямого угла на гипотенузу; можно также прибѣгнуть къ теоремамъ о катетахъ и ихъ проэкціяхъ на гипотенузу, о сѣкущей и касательной, и др. Всѣ эти построенія достаточно извѣстны, но въ нихъ отсутствуетъ общность: для разныхъ видовъ уравненія $x^2 + px + q = 0$ надо примѣнять то или иное построеніе. Съ цѣлью избѣжать этого неудобства проф. Бераръ [1]) далъ въ 1908 г. замѣ-

---

[1]) „La Revue de l'Enseignement des Sciences", Mai 1908, стр. 208.—Обобщеніе пріема Берара на случай мнимыхъ корней принадлежитъ намъ.

чательно простой и изящный пріемъ, являющійся въ то же время общимъ, съ одной стороны, и связаннымъ съ важными соотношеніями изъ проэктивной геометріи, съ другой. Сущность его состоитъ въ слѣдующемъ.

Разсмотримъ два случая, когда q положительно и когда q отрицательно. *Если q положительно*, то p есть сумма корней. Возьмемъ одно изъ разложеній q на множители и обозначимъ $q = a.b$; далѣе опишемъ окружность произвольнымъ радіусомъ, если только $2R > p$ и $2R > a + b$ [1]). Изъ произвольныхъ точекъ A и D (чер. 73) проводимъ хорды $AB = a + b$ и $DE = p$; кромѣ того, $AC = b$, $CB = a$ (AC — меньшій отрѣзокъ). Наконецъ радіусомъ OC описываемъ концентрическую окружность, пересѣкающую DE въ точкахъ F и G. Такъ какъ $FD.FE = CA.CB = a.b$, то $x_1 = FE$, $x_2 = FD$ [2]).



Чер. 73.

Если q отрицательно, то p есть разность корней. Въ этомъ случаѣ начинаемъ съ меньшей окружности: описываемъ ее радіусомъ R, такимъ, что $2R > p$ и $2R > a - b$, проводимъ изъ C хорду, равную $a - b$ и продолжаемъ ее на b, такъ что $CB = a$; затѣмъ проводимъ хорду $FG = p$ и продолжаемъ ее въ обѣ стороны. Наконецъ радіусомъ OB описываемъ изъ O концентрическую окружность, которая пересѣчетъ вторую хорду въ точкахъ D и E; тогда $x_1 = FE$, $x_2 = FD$, какъ и раньше.

Если корни не вещественны, а мнимы, то это обнаружится при построеніи; въ этомъ случаѣ вторая окружность не пересѣчетъ хорды DE. Предоставляемъ читателямъ убѣдиться въ этомъ на примѣрѣ $x^2 - 6x + 18 = 0$.

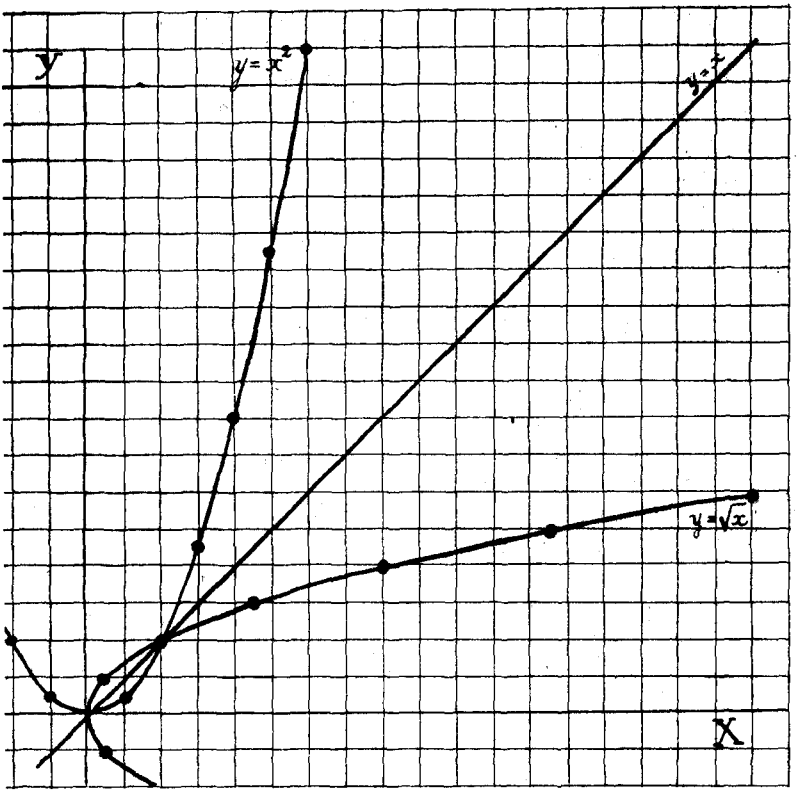
---

[1]) Если $q = 18$, $p = 11$, то имѣемъ $x_1 = 9$, $x_2 = 2$; но 18 разлагается и на другіе множители, а именно: 18 и 1, 3 и 6; поэтому не всегда $a + b = p$.

[2]) Для доказательства равенства $FD.FE = CA.CB$ можно черезъ C провести хорду $D_1E_1 = DE$ или же продолжить обѣ хорды до пересѣченія внѣ окружности.

Извлеченіе квадратнаго корня.

7. Извлеченіе квадратнаго (и вообще) корня есть дѣйствіе, обратное возвышенію въ степень, поэтому на первыхъ порахъ лучше всего пользоваться таблицей квадратовъ цѣлыхъ чиселъ. Такъ какъ при рѣшеніи геометрическихъ вопросовъ въ громадномъ большинствѣ



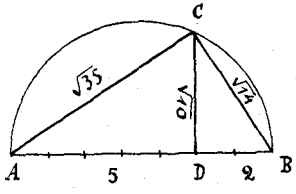
Чер. 74.

случаевъ получаются ирраціональныя числа, то учащіеся скоро будутъ поставлены въ необходимость интерполировать свою таблицу; такимъ образомъ они по-

знакомятся съ различными пріемами приближеннаго извлеченія квадратныхъ корней. Эти пріемы мы сейчасъ укажемъ.

Парабола $y = x^2$ въ сущности представляетъ собою таблицу квадратовъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ; обратно парабола $y = \sqrt{x}$ представитъ таблицу квадратныхъ корней изъ тѣхъ же чиселъ. На черт. 74 изображены какъ обѣ параболы, такъ и биссектрисса $y = x$. Такимъ образомъ мы можемъ прямо *читать* значенія различныхъ корней на оси Y—овъ. Кромѣ того, если провести вторую, симметричную вѣтвь параболы $y = \sqrt{x}$ (на чер. 74 не указана), то *видно*, что $\sqrt{x}$ имѣетъ два сопряженныхъ значенія, на верхней и нижней оси Y-овъ. Такое интуитивное, зрительное представленіе навсегда останется въ памяти учащихся, между тѣмъ какъ выводы $(\pm a)^2 = a^2$ производятъ искусственное впечатлѣніе.

Геометрически многіе корни можно построить непосредственно, а затѣмъ измѣрить. Для этого, во I-хъ, пользуются теоремой Лягранжа, въ силу которой всякое цѣлое число есть сумма 2, 3 или 4 квадратовъ; напр. $10 = 3^2 + 1^2$, $14 = 3^2 + 2^2 + 1^2$, и т. п. Видоизмѣнивъ немного теорему, можно брать сумму и разность квадратовъ, что во многихъ случаяхъ удобнѣе; такъ $35 = 6^2 - 1^2$, $431 = 21^2 - 3^2 - 1^2$. А такъ какъ $a^2 + b^2 = c^2$, то $\sqrt{a^2 + b^2}$ есть гипотенуза, $\sqrt{c^2 - a^2}$ есть катетъ—и такимъ образомъ вопросъ сводится къ построенію прямоугольнаго треугольника. Во II-хъ, пользуясь теоремами о пропорціональныхъ линіяхъ въ окружности, можно значительно упрощать построенія. На черт. 75 показано построеніе сразу трехъ корней: $\sqrt{10}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{35}$; всѣ они связаны другъ съ другомъ посредствомъ чиселъ 5, 2, 7. Измѣривъ полученные отрѣзки, найдемъ искомые корни съ желаемой степенью точности (до 10%, до 1%, до 0,1%); чѣмъ больше надо цыфръ послѣ запятой, тѣмъ крупнѣе долженъ быть масштабъ.



Чер. 75.

Способъ дѣленія для нахожденія квадратнаго корня является наиболѣе простымъ, но совершенно неизвѣстнымъ въ Россіи. Здѣсь поступаютъ такъ: $\sqrt{33489}$ больше 100 и меньше 200, но гораздо ближе къ 200. Берутъ наудачу какое-либо число между 150 и 200, напр. 180, и дѣлятъ на него данное; въ частномъ получается 186, въ остаткѣ 9. Пренебрегая остаткомъ мы можемъ сказать, что искомый корень лежитъ между 180 и 186 и равенъ среднему ариѳметическому этихъ чиселъ, а именно $\frac{180+186}{2} = 183$. Дѣйствительно, $183^2 = 33489$. Преимущества способа дѣленія очевидны: корень получается при помощи одного дѣйствія и притомъ извѣстнаго учащимся. Его можно примѣнять и въ томъ случаѣ, когда хотятъ найти корень изъ большого числа съ точностью лишь до 1.

Разложеніе на сомножителей полезно при извлеченіи корней изъ большихъ чиселъ. Тогда либо корень находится точно, напр. $\sqrt{11035} = \sqrt{5^2.3^2.7^2} = 5.3.7 = 105$, либо его можно легко вычислить съ большой точностью; такъ $\sqrt{156800} = \sqrt{10^2 . 4^2 . 7^2 . 2} = 280\sqrt{2}$, но $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, поэтому $\sqrt{156800} = 395{,}98$ — съ точностью до $1^0/_0$. Въ этомъ случаѣ можно свести извлеченіе корня изъ любого числа къ извлеченію корня изъ однозначныхъ либо двузначныхъ чиселъ, т. е. взять готовые корни изъ таблицъ.

Приближенное вычисленіе квадратныхъ корней легче всего производится по способу Герона (Μετρικά, ок. 100 г. до Р. Х.). Пусть $\sqrt{N} = a + h$, гдѣ h — малая дробь. Имѣемъ $N = (a+h)^2$ или $N = a^2 + 2ah + h^2$. Пренебрегая членомъ h^2 вслѣдствіе его малости, получимъ $a^2 + 2ah = N$, $h = \frac{N - a^2}{2a}$. Поэтому $N = a + \frac{N - a^2}{2a}$, откуда $N = \frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right)$. Покажемъ на примѣрѣ, какъ пользоваться этой формулой. $\sqrt{57} = \frac{1}{2}\left(7 + \frac{57}{7}\right) = 7{,}57$ съ точностью до $10^0/_0$. Для второго приближенія имѣемъ

$\sqrt{57} = \frac{1}{2}\left(7{,}57 + \frac{57}{7{,}57}\right) = 7{,}5495$ съ точностью до $0{,}1\%$, и т. д. Обычное извлеченіе даетъ $\sqrt{57} = 7{,}5491\ldots$

Въ такомъ порядкѣ, психологическомъ, а не „систематическомъ“, слѣдуетъ знакомить дѣтей съ корнями. Въ заключеніе, если преподаватель пожелаетъ, онъ можетъ дать обычное извлеченіе, но непремѣнно съ доказательствомъ; послѣ предложенной здѣсь пропедевтики оно станетъ доступнымъ учащимся.

Несоизмѣримыя числа.

8. Извлеченіе корня приводитъ насъ къ необходимости установить новую совокупность чиселъ, такъ какъ выполненіе этого обратнаго дѣйствія тоже оказывается не всегда возможнымъ. Необходимость такой установки должна быть сознана учащимися, послѣ того какъ они убѣдились, что вопросъ о дѣленіи неразрѣшимъ до введенія дробныхъ чиселъ, а вопросъ о вычитаніи — отрицательныхъ чиселъ. Но какъ произвести эту установку? Обратимся къ исторіи вопроса.

Пиѳагоръ (V вѣкъ до Р. Х.), установивъ свою теорему, примѣнилъ ее къ нахожденію діагонали квадрата; оказалось, что эта діагональ символически выражается черезъ $\sqrt{2}$, но что выразить ее точно при помощи цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ — нельзя. Поэтому онъ назвалъ ее словомъ „невыразимый“ (ἄῤῥητος). Недавнія изслѣдованія Поля Таннери (1900) показали, что одновременно и теорія музыки привела къ установленію новаго числового понятія $\sqrt{2}$. Это — задача о дѣленіи октавы на двѣ равныя части. Но отъ $\sqrt{2}$ до общей идеи о новой совокупности чиселъ было очень далеко. Да и сама терминологія постоянно мѣнялась. Разсматривая сначала лишь отношенія отрѣзковъ, Греки называли ихъ „соизмѣримый“ и „несоизмѣримый“ (ἀσύμμετρον); затѣмъ у Діофанта появляется терминъ „ἄλογον“ (тоже невыразимый). Въ началѣ Среднихъ Вѣковъ эти названія переводили правильно черезъ *commensurabilis*, *assimetrus*. Но затѣмъ въ дальнѣйшемъ „λόγος“ стали переводить не какъ „слово“ (verbum), а какъ „разумъ“ (ratio)[1]); такимъ образомъ по-

[1]) „Λόγος“ значитъ и „слово“, и „разумъ“.

лучились *раціональныя* (разумныя) и *ирраціональныя* (неразумныя) числа. Съ другой стороны еще болѣе запутали терминологію Индусы и Арабы. Греки умѣли находить только *бокъ* квадрата, который они называли „πλευρά“. Еще у Віета (1540—1603) встрѣчается дословный переводъ черезъ „latus“ (ширина). Индусы пользовались сокращеніемъ слова „Karanî“ (дѣлать), для обозначенія извлеченія квадратнаго корня изъ даннаго числа; затѣмъ называли результатъ „mûla“, что̀ означаетъ также *корень растенія*. Переводчики-арабы передали его дословно черезъ „jidr“, а Іоаннъ Севильскій (XII вѣкъ) — черезъ „radix“ (корень); отсюда — радикалъ. Только у Стевина (1585) встрѣчаемъ символъ $\sqrt{}$ [напр. $\sqrt{}^{(3)}$ вмѣсто $\sqrt[3]{\ }$], а у Декарта (1637) запись: $\sqrt{}$ C. $\overline{+A}$ вмѣсто $\sqrt[3]{A}$. Отъ этой горизонтальной прямой, употребляемой въ смыслѣ скобокъ, и произошелъ[1]) теперешній символъ $\sqrt{\ }$, утвердившійся въ математической литературѣ лишь въ XVIII в.

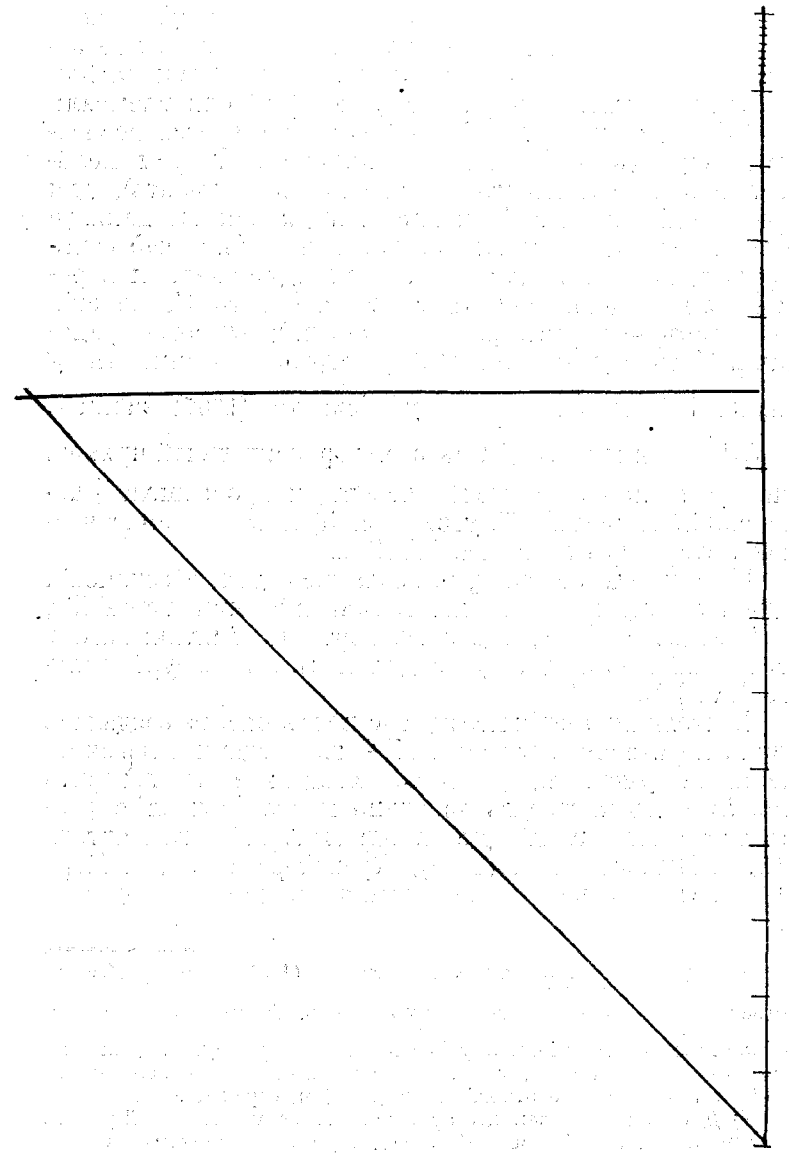
Наряду съ этимъ употреблялись для обозначенія новой совокупности чиселъ термины: incommensurabilis, assimetrus, surdus[2]) (до сихъ поръ въ Англіи: surds), irrationalis; послѣдній утвердился въ литературѣ лишь въ XVIII в.

Настоящая теорія несоизмѣримыхъ чиселъ создалась лишь во второй половинѣ XIX в., трудами многочисленныхъ ученыхъ, да и то слѣдовало бы говорить *теоріи*, такъ какъ ихъ довольно много. Наиболѣе распространены взгляды Дедекинда (1872), Георга Кантора (1870), Вейерштрасса (1865), Кронекера (1887) и Мерэ (1869). Однако всѣ точки зрѣнія сходятся въ одномъ

---

[1]) Это ясно изъ записей Harriot'a (1631): $\overline{\sqrt{ccc}+\sqrt{cccccc}}$ вмѣсто $\sqrt[3]{c^3\sqrt{c^6}}$, какъ пишутъ теперь. Такимъ образомъ излюбленное объясненіе, что $\sqrt{\ }$ есть испорченная буква r, начальная въ словѣ „radix“, оказалось притянутымъ за волосы; въ дѣйствительности же писали не r, а R (см. стр. 287).

[2]) Дословный переводъ арабскаго „a sam“ (тяжелый); такъ называли сначала Арабы всѣ числа, трудно выражаемыя на ихъ языкѣ.



Чер. 76.

пунктѣ: какова бы ни была теорія несоизмѣримыхъ чиселъ, она должна опираться на нѣкоторую аксіому, продиктованную наблюденіемъ и опытомъ.

Такой основной аксіомой является слѣдующая, принадлежащая Георгу Кантору: „Каждому соизмѣримому или несоизмѣримому числу соотвѣтствуетъ точка, имѣющая это число своей абсциссой; каждой точкѣ на прямой соотвѣтствуетъ въ качествѣ абсциссы соизмѣримое или несоизмѣримое число“.

Перейдемъ теперь къ изложенію этого вопроса въ школѣ.

Лучше всего начать съ историческаго примѣра, $\sqrt{2}$. Построивъ прямоугольный треугольникъ (чер. 76) съ катетами 1, откладываемъ гипотенузу на оси X-овъ; ея конецъ лежитъ, какъ видно, между 1 и 2, т. е.

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

Раздѣлимъ теперь промежутокъ между 1 и 2 на 10 частей; мы *видимъ*, что

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

Повѣрка: $1{,}4^2 = 1{,}96$; $1{,}5^2 = 2{,}25$. Теперь раздѣлимъ еще на 10 частей промежутокъ между 1,4 и 1,5; мы *видимъ*, что конецъ гипотенузы лежитъ между 1,41 и 1,42, слѣдовательно

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

Дѣйствительно, $1{,}41^2 = 1{,}9881$ и $1{,}42^2 = 2{,}0104$. Дальнѣйшія дѣленія промежутка между 1,41 и 1,42 при нашемъ масштабѣ невозможны; но если воспользоваться лупой и при ея помощи нанести такія дѣленія, то мы получимъ слѣдующее приближеніе, а именно

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$

Повѣрка: $1{,}414^2 = 1{,}999396$ и $1{,}415^2 = 2{,}002225$ показываетъ, что значеніе 1,414 точно до 0,1%.

Пользуясь лупой, или же взявъ покрупнѣе масштабъ, мы можемъ продолжать наши вычисленія; но наступитъ моментъ, когда учащіеся спросятъ: какъ долго это можетъ продолжаться? Предложите имъ тогда убѣдиться аналитически въ безконечности такого процесса, а именно, докажите имъ, что не существуетъ такого

дробнаго числа, квадратъ котораго равнялся бы 2. Пусть $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, гдѣ a и b цѣлыя взаимно-простыя числа. Тогда $2 = \frac{a^2}{b^2}$; но дробь $\frac{a^2}{b^2}$ тоже несократима, и мы пришли къ нелѣпости: цѣлое число равно несократимой дроби. Слѣдовательно, предположеніе, что $\sqrt{2}$ есть дробное число, невозможно. Остается допустить, что это число особаго рода, пока намъ неизвѣстнаго. Теперь выступаетъ на сцену аксіома Кантора: надо показать, что такія числа дѣйствительно возможны, что они соотвѣтствуютъ реальнымъ объектамъ. Лучше всего взять непрерывную кривую и показать, что проэкціи всѣхъ ея точекъ на ось X-овъ должны выражаться числами; одни изъ перпендикуляровъ попадутъ на цѣлыя дѣленія, другіе — на дробныя, но будутъ и такіе, для которыхъ необходимо допустить существованіе особыхъ чиселъ — несоизмѣримыхъ. Такимъ образомъ непрерывность геометрической области будетъ связана съ непрерывностью ариѳметической области.

Послѣ этого полезно указать учащимся, что несоизмѣримость — свойство нашей системы счисленія, а не тѣхъ величинъ, какія мы разсматриваемъ: абсолютной несоизмѣримости нѣтъ. Возьмемъ примѣръ. Отношеніе длины окружности къ длинѣ діаметра есть величина постоянная, но число π, ее выражающее, въ нашей системѣ счисленія является несоизмѣримымъ. Если бы у насъ была иная, напр., такая система, гдѣ единицы писались бы на своемъ мѣстѣ, а на второмъ мѣстѣ тотъ же знакъ выражалъ бы число не въ 10 разъ, а въ π разъ больше, и т. д., то тогда въ такой системѣ числа кратныя π были бы соизмѣримы, а всѣ соизмѣримыя числа нашей системы стали бы несоизмѣримы.

Вообще аналитическія операціи надъ числовыми символами (дробными, отрицательными, несоизмѣримыми и др. числами), въ области реальныхъ объектовъ и ихъ соотношеній, не представляютъ никакихъ логическихъ противорѣчій; мало того, каждому новому шагу въ области чиселъ можно дать реальные образы. Но такъ какъ построенія различныхъ ученій въ мате-

матикѣ основаны на простѣйшихъ законахъ, добытыхъ изъ наблюденій надъ окружающими вещами, то и непосредственныя отношенія ихъ къ дѣйствительности могутъ быть провѣрены на опытѣ. Такимъ образомъ математическое знакоположеніе только облегчаетъ и, такъ сказать, механизируетъ процессъ мышленія. И по отношенію къ несоизмѣримымъ числамъ вполнѣ умѣстно сказать: „Nihil est in intellectu, quod non fuerit in sensu“ (нѣтъ ничего въ сознаніи, чего раньше не было бы въ чувствѣ).

Общее замѣчаніе. 9. Тотъ разнообразный матеріалъ, какой мы указали въ настоящей главѣ, можетъ возбудить недоумѣнія и вопросы: неужели все это преподносить учащимся? Конечно, нѣтъ. Учитель самъ выберетъ тотъ или иной пріемъ, ту или иную деталь. Приходится также считаться въ значительной мѣрѣ съ типомъ школы, съ ея учебнымъ планомъ и потребностями учащихся. Тамъ, гдѣ хватитъ времени, можно расположить матеріалъ по указанному плану; гдѣ времени въ обрѣзъ — надо взять главныя идеи и главные пріемы вычисленій. Въ послѣднемъ случаѣ приближенные пріемы всегда должны идти впереди точныхъ, наглядные — впереди абстрактныхъ.

Задачи. 10. Вопросы, приводящіе къ составленію квадратныхъ уравненій, встрѣчаются рѣже другихъ — и поэтому именно здѣсь преобладаютъ сборники искусственныхъ задачъ. Однако при желаніи подборъ естественныхъ и практическихъ упражненій возможенъ; вотъ нѣкоторые примѣры.

1) Два фонаря, электрическій и простой, горятъ на улицѣ, на разстояніи 100 метровъ другъ отъ друга. На разстояніи одного метра электрическій фонарь даетъ освѣщеніе въ 49 разъ сильнѣе, чѣмъ простой фонарь на такомъ же разстояніи. Какая точка равноосвѣщена обоими?

$$\left(\frac{49}{x^2} = \frac{1}{(100 - x)^2} \right).$$

2) Опредѣлить глубину шахты (колодца и т. п.), если звукъ отъ удара камня о дно шахты дойдетъ до

насъ черезъ t секундъ. За ускореніе g принимаемъ 10 мет., а за v (скорость звука) 330 мет.

$$\left(\frac{x}{v} + \sqrt{\frac{2x}{g}} = t \right).$$

3) Найти время, необходимое для поднятія тѣла до высоты h надъ точкою исхода, если намъ извѣстна начальная скорость v_0.

$$\left(h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right).$$

4) Тѣло движется по закону $s = 12{,}2 - 3{,}4t + 6{,}7t^2$. Черезъ сколько секундъ оно попадетъ въ точку, находящуюся на разстояніи 106,23 метра? Отвѣтъ: черезъ 4 секунды.

5) Пароходъ совершилъ рейсъ въ оба конца въ 9 часовъ, всего 160 верстъ. Скорость теченія 2 версты въ часъ. Какова скорость парохода?

$$\left(\frac{80}{x+2} + \frac{80}{x-2} = 9 \right).$$

6) Отъ Франкфурта-на-Майнѣ до Кельна пассажирскій поѣздъ идетъ $3^1/_2$ часами дольше скораго поѣзда. Съ какой скоростью идутъ поѣзда, если разстояніе между Франкфуртомъ-на-М. и Кельномъ 220 км. и если скорый поѣздъ въ 3 часа проѣзжаетъ 77 км. больше, чѣмъ пассажирскій въ то же самое время? Отвѣтъ: 55 км. и $29^1/_8$ км.

7) При составленіи батареи изъ 60 элементовъ получился токъ силою $\frac{6}{37}$ ампера. Въ то же время извѣстно, что при наивыгоднѣйшемъ дѣйствіи батареи ея элементы должны быть соединены въ x послѣдовательныхъ группъ. Каково x, если въ данномъ случаѣ формула соединенія имѣетъ видъ

$$\frac{6}{37} = \frac{x}{\frac{10x^2}{60} + 50}\ ?$$

Отвѣтъ: $x_1 = 15$, $x_2 = 20$. Оба соединенія безразличны.

8) Въ сберегательную кассу внесли 450 руб. По истеченіи одного года слѣдуемые интересы причислили къ капиталу и опять сдѣлали взносъ въ 450 руб. За

второй годъ получили интересовъ на 36,72 руб. Найти процентную таксу. Отвѣтъ: 4%.

9) Интересы въ 1680 р. съ капитала одного благотворительнаго общества требовалось распредѣлить на равныя части между просителями. Но такъ какъ тремъ просителямъ было отказано, то каждый изъ оставшихся получилъ на 150 р. больше. Сколько просителей было въ самомъ началѣ? $\left(\frac{1680}{x} + 180 = \frac{1680}{x-3}\right)$.

10) Воспитанники школы по окончаніи курса обмѣнялись карточками; всего было роздано 380. Сколько лицъ окончило школу? $x(x-1) = 380$.

11) Прямоугольная клумба, стороны которой равны 3 арш. и 2 арш., обложена кругомъ дерномъ. Опредѣлить ширину дерна, если площадь каймы равна площади клумбы. $2[(3+x)x + (2+x)x] = 6$.

12) Нѣсколько смѣльчаковъ взялись за 180 руб. осмотрѣть состояніе осажденнаго города. Четверо изъ нихъ были пойманы, отъ чего награда каждаго изъ возвратившихся увеличилась 12-ю руб. Сколько ихъ было? $\left(\frac{180}{x-4} - \frac{180}{x} = 12\right)$.

Слѣдующія задачи взяты изъ сочиненія „Лилявати“ индусскаго математика Баскара (1141—1225 гг.):

13) „Стая обезьянъ забавлялась: одна восьмая ея часть въ квадратѣ бѣгала въ лѣсу, остальныя двѣнадцать кричали на верхушкѣ холмика. Скажи мнѣ, сколько было обезьянъ?“ 2 отвѣта: 48 и 16.

14) „Корень квадратный изъ половины числа пчелъ роя полетѣлъ на кустъ жасмина; $\frac{8}{9}$ цѣлаго роя осталась дома; одна самочка полетѣла за самцомъ, который жужжитъ въ цвѣткѣ лотоса, куда онъ попалъ ночью, привлеченный пріятнымъ запахомъ, и изъ котораго онъ не можетъ выйти, такъ какъ цвѣтокъ закрылся. Скажи мнѣ число пчелъ роя?“. Неизвѣстное обозначено черезъ $2x^2$.

$$\left(x + \frac{16}{9}x^2 + 2 = 2x^2\right).$$

ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

Квадратныя уравненія и рѣшеніе треугольниковъ заканчиваютъ курсъ I-го цикла; но на протяженіи этого тома мы еще нигдѣ не изложили практики приближенныхъ и логариѳмическихъ вычисленій, хотя они относятся къ тому же циклу. Причина та, что оба послѣднихъ вопроса необходимо разсмотрѣть всесторонне, и лишь затѣмъ выдѣлить элементы и детали. II-ой томъ „Педагогики математики“ будетъ состоять тоже изъ двухъ частей. Въ первой будутъ изложены дополнительные вопросы алгебры и тригонометріи, по сколько они связаны съ элементарнымъ курсомъ анализа, аналитическая геометрія, диффер. и интегр. исчисленія и начала теоріи вѣроятностей. Вся вторая часть будетъ посвящена геометріи: критика основъ, логика и аксіоматика, содержаніе научнаго и школьнаго курса, начала синтетической и начертательной геометріи. Наконецъ будутъ освѣщены общіе методы математики и ихъ роль во II-мъ циклѣ.

Съ преобразованіемъ программъ не все измѣнится къ лучшему. Чрезвычайно важное значеніе нужно признать за тѣмъ духомъ, который вѣетъ вокругъ учителя и которымъ онъ самъ дышитъ. Экономическія отношенія вліяютъ на ростъ государства и общества, на развитіе техники и школы; экономическія отношенія, государство, школа и наука вліяютъ на развитіе мысли (философскія системы); въ свою очередь философскія системы даютъ толчокъ практической разработкѣ политическихъ и общественныхъ нормъ. Это великое переплетаніе всѣхъ факторовъ, эта ихъ сложная функціональная зависимость — признаны, наконецъ, и совре-

менной наукой. Теперь стало яснымъ, что всякое открытіе, всякая отдѣльная работа, даже цѣлая научная или философская система могутъ оставаться въ забвеніи, если не возникаетъ въ нихъ насущной потребности со стороны общества.

Программы—нѣчто, учитель и методъ—все, а учитель и методъ — дѣти вѣка. Наиболѣе важное — воздѣлать почву, и тогда не заставятъ себя ждать самые роскошные цвѣты цивилизаціи и мирнаго прогресса.

Литературный указатель ко II-ой части.

I. Общій отдѣлъ.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, 1904 и далѣе. — Французское изданіе предпочтительнѣе передъ нѣмецкимъ, такъ какъ весь матеріалъ тщательно пересмотрѣнъ и дополненъ. Книга необходима всякому математику.

Веберъ и Вельштейнъ, Энциклопедія элементарной математики, 3 тома. — Вышли пока въ русскомъ переводѣ: т. I, 1906—07, и т. II, кн. I, 1909. — Книга содержитъ научное изложеніе основъ математики.

Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpuncte aus, 1908, 2 B-de. — Это литографированное изданіе лекцій для преподавателей; мастерское и живое изложеніе, духъ новой педагогики, энциклопедичность и научность матеріала выдѣляютъ эту книгу на первый планъ въ библіотекѣ для преподавателя.

О. Лоджъ, Легкая математика, пер. съ англ., 1909.— „Содержитъ рядъ указаній для учителей, родителей, студентовъ и юношей, самостоятельно изучающихъ математику“.

Перри, Практическая математика, пер. съ англ., 1909. — Популярное изложеніе графической методы.

Plan d'études et programmes d'enseignement dans les lycées et collèges de garçons, Paris. — Особенно цѣнны общія и детальныя методическія указанія.

II. Математика I-го цикла.

Кромѣ книгъ, перечисленныхъ по системамъ въ различныхъ главахъ, особенно интересны еще и слѣдующія:

Лай, Руководство къ первоначальному обученію ариѳметикѣ, пер. съ нѣм., 1910.

Бубновъ, Ариѳметическая самостоятельность европейской культуры, Кіевъ, 1908.

Leyssenne, Arithmétique, I-ый, II-ой, III-ій г. обуч.— Наиболѣе распространенный во Франціи учебникъ, со включеніемъ геометріи и началъ алгебры; обиліе задачъ.

Bortolotti, Aritmetica pratica, Roma, 1910 (7-ое изд.).— Много интереснаго матеріала.

Dickstein, Arytmetyka w zadaniach, 3 cz., 1906.—Хорошій типъ ариѳметическаго задачника со включеніемъ началъ алгебры, геометріи, физики и космографіи.

Заборскій, Ариѳметическіе задачи и примѣры. Числа любой величины. Москва, 1906.—„Въ основаніе каждой задачи взято какое-либо число изъ дѣйствительности“.

Мартель, Пріемы быстраго счета, пер. съ фр., 1909.— Необходима для преподавателя.

Smith, Practical Arithmetic, Boston, 1906.

Tuckey, Examples in Arithmetic, London, 1906.

Лезанъ, Начатки математики, пер. съ фр., 1908.

Флляммаріонъ, Начатки астрономіи, пер. съ фр., 1909.

Гильомъ, Начатки механики, пер. съ фр., 1910.

Шассаньи, Начатки физики (гот. къ печати).

С. Роу, Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги, пер. съ англ., 1910.

Martin und Schmidt, Raumlehre, 3 Hefte, 1896—98.— Прекрасное пособіе для преподавателей геометріи и тригонометріи. Богатый сборникъ задачъ изъ техники и жизни, доступныхъ на младшей ступени обученія.

Вихертъ, Введеніе въ геодезію. Лекціи для преподавателей, пер. съ нѣм., 1907.

Bützberger, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie mit vielen Aufgaben und Anwendungen, Zürich, 4 Aufl., 1909.— Подборъ задачъ, отвѣчающихъ новымъ требованіямъ.

C. Hawkins, Elementary Trigonometry, London, 1907.

В. Мрочекъ. Прямолинейная тригонометрія, ч. I., СПб., 1908 (съ задачами).

Schulze und Pahl, Mathematische Aufgaben, 2 Teile, 1908—09.

Schülke, Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie, 1902.

Schülke, Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik, nebst Anwendungen auf das bürgerliche Leben, 1906.

Veronese, Elementi di Geometria intuitiva, Padua, 1909.

Pietzker, Lehrgang der Elementar-Mathematik, 2 Teile, 1907.

Zwicky, Leitfaden für die Elemente der Algebra, Bern, 1901.

Касаткинъ, Ручной трудъ изъ бумаги и папки въ общеобразовательныхъ школахъ, Москва, 1909.

Ренэ Леблянъ, Упражненія ручного труда, пер. съ фр., 1897.

Либерти Тэддъ, Новый путь для художественнаго воспитанія юношества и дѣтей, пер. съ англ., 1907.

Pabst, Normallehrgang für den Papparbeits - Unterricht, 2 Aufl., 1903. — Лучшее руководство въ межд. литературѣ; богатый выборъ образцовъ матеріаловъ.

W. Rouse Ball, Récréations mathématiques et problèmes de temps anciens et modernes, 1907—8, 3 части, пер. съ англ. на фр. — Лучшій изъ современныхъ сборниковъ.

E. Fourrey, Récréations arithmétiques, 4 éd., 190.

Ch. Joliet, Mille Jeux d'Esprit, 1900.

Шубертъ, Математическія развлеченія, пер. съ нѣм., 1910.

С. Тромгольтъ, Игры со спичками, пер. съ нѣм., 1907.

Игнатьевъ, Въ царствѣ смекалки, 2 т., СПб., 1908—10.

ИНСТИТУТЪ УЧЕБНЫХЪ ПОСОБІЙ

„ПЕСТАЛОЦЦИ“

С.-Петербургъ, Казанск., 14. Тел. 65-63.

Рис 1.

НОВѢЙШІЯ УЧЕБНЫЯ ПОСОБІЯ.

I. По математикѣ.

1) Приборъ для измѣренія круга (см. рис., стр. 192)... Руб. 2.50
2) Новые счеты по системѣ профессора Лайя..... „ 6.50
3) 10 геометрич. тѣлъ изъ бристольск. картона больш. размѣра ..... „ 4.—
4) 10 развертокъ геометр. тѣлъ изъ бристоля ..... „ 2.50
5) Кеппъ, деревянная доска съ 12-ю заострен. проволоками для нагляднаго доказательства главн. стереом. теоремъ при помощи этого аппарата (см. рис. 1) „ 1.60
6) Приборъ для доказательства теоремы Архимеда, состоящ. изъ конуса, цилиндра и шара ..... „ 3.—
7) Винеке, подвижныя геометрическія фигуры для планиметріи: треугольникъ, квадратъ, прямоугольникъ и кругъ изъ буковаго дерева съ мѣдью ..... „ 16.—
8) Боппъ, нов. таблицы метрическ. мѣръ и вѣсовъ въ пяти краскахъ..... „ 1.50
наклеен. складн. ..... „ 2.—
9) Мюллеръ, стѣнныя таблицы для первоначальн. обученія счету, 10 табл. 66 × 59 ненакл. ..... „ 2.40
10) В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ, 16 геометрическихъ разборныхъ тѣлъ, состоящихъ изъ 55 частей (см. рис. 2). **РЕКОМЕНД.** Гл. Упр. В.-Уч.-Зав.—Коллекція въ деревян. ящикѣ съ гнѣздами на всѣ тѣла „ 25.—
11) Приборъ (металлическій) для изуч. тригон. величинъ (см. рис. 1)..... „ 2.50
12) В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ, 10 развертокъ геом. тѣлъ, склад. въ тѣла ..... „ 10.—
13) „Абакъ“ Мрочека, приборъ для изученія нумераціи, дѣйствій надъ числами и графикъ (см. рис. 40 въ текстѣ, стр. 267)..... Р. 50.— 90.—

II. Практичныя школьныя принадлежности.

1) Картинодержатель, новый, удобный для вѣшанія картинъ и картъ. Состоитъ изъ двухъ брусковъ съ пружиной посерединѣ, съ ручкой..... „ 1.90
2) Универсальный станокъ „Саксонія“ для развѣшиванія картъ, таблицъ, картинъ и т. д., изъ желѣза, складной и подымающійся на любую высоту ..... „ 12.—

3) Подставка для горизонтальн. храненія 30 картъ, желѣзная солидная конструкція ..... Руб. 25.—
4) Желѣзный станокъ кружащійся, для хранен. 15 картъ. На вертящейся подставкѣ. Очень удобн. приспособл. „ 14.40
5) Большой станокъ, желѣзный, для храненія—вѣшанія 130 картинъ и для храненія географическихъ картъ. Складной—солидной конструкціи..... „ 20.—
Съ крючками для 130 картинъ..... „ 30.—

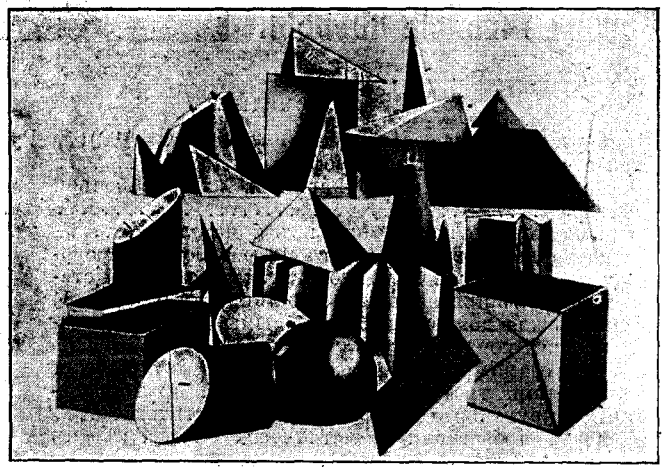


Рис. 2.

6) Классныя стѣнныя доски изъ аспидной массы на полотнѣ разм. 2 × 2 арш. Доски свертываются какъ географическія карты. Легко переносящіяся. Очень удобно сохранять написанное ..... „ 9.—
7) Мѣлъ разноцвѣтный, лучшій и мягкій сортъ въ коробкахъ, дюжина цвѣтовъ ..... „ 1.—
8) Лекціонаръ. Доска для росписанія уроковъ, изъ крѣпкаго картона. Просто — переставленіемъ фигурокъ разл. окраски—получается новое росписаніе. Самый простой и удобный способъ ..... „ 7.—

По желанію высылаются рисунки станковъ и картинодержателей безплатно.

Мѣры (длины и емкости).

Линейки, треугольники, циркули для классныхъ досокъ.

Чернильницы и т. д.

Полный каталогъ учебныхъ пособій, иллюстриров., содержащій всѣ области учебныхъ пособій, высылается за 40 коп. (можно марками).