РУКОВОДСТВА И НАУЧНЫЕ ПОСОБІЯ ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Проф. А. А. АДАМОВ

# АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ

Інвентаризовано

ЧАСТЬ I

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Допущено Научно-Технической Секцией Государственного Ученого Совета*

Бібліотека Українського Учительського Інституту № 25339

ПЕРЕВІРЕНО 1952 р.

ПЕРЕВІРЕНО 2007

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД—МОСКВА
1925

Гиз. № 10581. Ленинградский Гублит № 20791. 10 л. Отпеч. 4.000 экз.

# ЧАСТЬ I.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ.

## Глава I.

### § 1. Рациональные и иррациональные числа. Теория разрезов Дедекинда.

Совокупность всех целых и дробных чисел, положительных и отрицательных, образует область рациональных чисел. Еще древние геометры знали, что, приняв сторону квадрата за единицу, нельзя выразить его диагональ рациональным числом; длина диагонали выражается корнем уравнения $x^2 = 2$ и не может быть ни целым числом, ибо 2 заключено между квадратами двух последовательных целых чисел: 1 и 2, ни дробным числом, так как квадрат всякой несократимой дроби есть также несократимая дробь и не может равняться целому числу 2. Корень уравнения $x^2 = 2$ есть число иррациональное, обозначаемое символом $\sqrt{2}$. В математике создано несколько теорий иррациональных чисел, из которых мы вкратце коснемся теории Дедекинда. В этой теории, разрезом в области рациональных чисел называется такое деление всех рациональных чисел на два класса, при котором выполнены три условия: 1) каждое рациональное число принадлежит к тому или другому классу, 2) каждый класс содержит по крайней мере одно число, 3) всякое число первого (низшего) класса меньше всякого числа второго (высшего) класса. При таком делении могут представиться такие два случая: 1) низший класс не имеет наибольшего числа и вместе с тем высший класс не имеет наименьшего числа (разрез 1-го рода); 2) низший класс имеет наибольшее число, а высший не имеет наименьшего числа или, наоборот: низший класс не имеет наибольшего числа, а высший имеет наименьшее число (разрез 2-го рода). Добавим, что не может быть такого случая, чтобы одновременно низший класс имел наибольшее число $a$ и высший класс имел наименьшее число $b$, ибо тогда все рациональные числа, заключенные между рациональными числами $a$ и $b$, не принадлежали бы ни к одному классу, что противоречит 1-му свойству разреза. Применим разреза 2-го рода в области рациональных чисел может служить всякое рациональное число $m$; именно произведем разрез так, чтобы в первом классе были все рациональные числа $\leqq m$, а во втором все рациональные числа $> m$; тогда первый класс имеет наибольшее число $m$, а второй не имеет наименьшего числа;

мы имеем разрез 2-го рода, определяющий рациональное число $m$ (можно то же число $m$ определить иначе, отнеся к первому классу рациональные числа $< m$, а ко второму — рациональные числа $\geqq m$; тогда первый класс не имеет наибольшего числа, а второй имеет наименьшее число $m$). Примером разреза 1-го рода в области рациональных чисел служит иррациональное число; число $\sqrt{2}$ определяем как такой разрез, когда к первому классу относятся все отрицательные рациональные числа и те из положительных чисел $x$, для которых $x^2 < 2$, а ко второму классу — те положительные рациональные числа, для которых $x^2 > 2$; тогда первый класс не имеет наибольшего числа и второй класс не имеет наименьшего числа. При помощи последовательных проб можно установить неравенства:

$$1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4; \quad 1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 1{,}5^2 = 2{,}25;$$
$$1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2 < 1{,}42^2 = 2{,}0164;$$
$$1{,}414^2 = 1.999396 < 2 < 1{,}415^2 = 2{,}002225;$$
$$1{,}4142^2 = 1{,}99996164 < 2 < 1{,}4143^2 = 2{,}00024449;$$
$$1{,}41421^2 = 1{,}9999899241 < 2 < 1{,}41422^2 = 2{,}0000182084;$$
$$1{,}414213^2 = 1{,}999998409369 < 2 < 1{,}414214^2 = 2{,}000001237796 \text{ и т. д.}$$

Отсюда находим два ряда десятичных дробей: 1) ряд возрастающих десятичных дробей: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213..., принадлежащих к первому классу и называемых приближенными значениями $\sqrt{2}$ с недостатком и с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т. д. 2) ряд убывающих десятичных дробей: 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; 1,414214..., принадлежащих ко второму классу и называемых приближенными значениями $\sqrt{2}$ с избытком и с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т. д.

**§ 2. Понятие о сплошности (непрерывности) совокупности всех вещественных чисел.**

Возьмем вертикальную прямую $OY$ и будем откладывать на ней в определенном масштабе отрезки — положительные вверх от точки $O$, отрицательные вниз от $O$. Имея рациональное число $m$, отложим от точки $O$ отрезок $OM$, содержащий $|m|$ единиц длины, вверх или вниз, смотря по знаку $m$. Тогда каждому рациональному числу $m$ будет отвечать определенная точка $M$ по прямой $OY$, и всей совокупности рациональных чисел будет отвечать бесчисленное множество точек на прямой. Между двумя точками из их числа, сколь угодно близкими, будет содержаться бесчисленное множество промежуточных точек, так как между двумя рациональными числами $\frac{a}{10^m}$, $\frac{a+1}{10^m}$, отличающимися на $\frac{1}{10^m}$, можно вставить произвольно большое число $(10^n - 1)$ рациональных чисел: $\frac{a}{10^m} = \frac{a \cdot 10^n}{10^{m+n}}$, $\frac{a \cdot 10^n + 1}{10^{m+n}}$, $\frac{a \cdot 10^n + 2}{10^{m+n}}$, .... $\frac{a \cdot 10^n + (10^n - 1)}{10^{m+n}}$, $\frac{(a+1)10^n}{10^{m+n}} = \frac{a+1}{10^m}$.

Несмотря на это, упомянутые точки $M$, отвечающие совокупности всех рациональных чисел, не заполняют сплошь прямой $OY$; именно, если мы станем откладывать приближенные значения $\sqrt{2}$, представленные двумя рядами десятичных дробей (см. § 1), то точки $M$ будут сгущаться около некоторого предельного положения, отвечающего числу $\sqrt{2}$, но это предельное положение останется незанятым, ибо иначе отвечающее ему число $\sqrt{2}$ было бы рациональным. Добавим к этому, что между двумя рациональными числами, сколь угодно

близкими, может содержаться бесчисленное множество иррациональных чисел. Именно, между квадратами $\left(\frac{a}{10^m}\right)^2$ и $\left(\frac{a+1}{10^m}\right)^2$ можно вставить $(2a+1)10^{2n}-1$ чисел $\frac{a^2\cdot 10^{2n}+1}{10^{2m+2n}}$, $\frac{a^2\cdot 10^{2n}+2}{10^{2m+2n}}$, .... $\frac{a^2\cdot 10^{2n}+(2a+1)10^{2n}-1}{10^{2m+2n}}=$ $=\frac{(a+1)^2\cdot 10^{2n}-1}{10^{2m+2n}}$, среди которых будет $10^n-1$ точных квадратов — с числителями $(10^n\cdot a+1)^2$, $(10^n\cdot a+2)^2$, ... $(10^n\cdot a+10^n-1)^2=$ $=[10^n(a+1)-1]^2$, следовательно, между рациональными числами $\frac{a}{10^m}$, $\frac{a+1}{10^m}$ можно вставить $(2a+1)10^{2n}-10^n=10^n\{(2a+1)10^n-1\}$ иррациональных чисел $\sqrt{\frac{N}{10^{2(m+n)}}}$, где $N$ принимает значения неполных квадратов, заключенных между $a^2\cdot 10^{2n}+1$ и $(a+1)^2\cdot 10^{2n}-1$. Помимо квадратных корней, между числами $\frac{a}{10^m}$ и $\frac{a+1}{10^m}$ можно вставить бесчисленное множество корней других степеней. К этому нужно добавить, что кроме иррациональностей, выражаемых посредством радикалов, существует бесчисленное множество алгебраических иррациональных чисел, являющихся корнями численных уравнений, как например $x^6+x-1=0$, и трансцендентных чисел, которые не удовлетворяют подобным уравнениям, как например число $\pi$, число $e$ — основание натуральных логарифмов. Из сказанного ясно, что совокупность точек $M$, отвечающих одним рациональным числам, не заполняет сплошь прямой $OY$, и остается на любом малом отрезке бесчисленное множество незанятых мест, отвечающих иррациональным числам; таким образом совокупность рациональных чисел не обладает свойством непрерывности или сплошности, но совокупность всех вещественных чисел, рациональных и иррациональных (это мы примем как постулат), обладает свойством сплошности, так что любой точке, взятой на $OY$, будет отвечать некоторое число из совокупности вещественных чисел.

Как следствие этого постулата вытекает, что, при всяком разрезе в области вещественных чисел, или первый класс должен иметь наибольшее число, или второй класс должен иметь наименьшее число, так как, при отсутствии наибольшего числа в первом классе и наименьшего во втором, разрез определял бы такую точку на прямой $OY$, которая не входит ни в один класс, а в этом заключается противоречие, ибо, по свойству сплошности, всякой точке оси $OY$ отвечает некоторое вещественное число, а по 1-му свойству разреза (см. § 1) всякое вещественное число должно принадлежать к одному из двух классов.

## § 3. Постоянные и переменные величины. Предел переменной величины. Примеры.

*Определение 1.* Величина называется постоянною, если в данном вопросе она имеет одно определенное значение, и называется переменною, если имеет не менее двух значений. В круге данного радиуса $R$ расстояние от центра до точки окружности есть величина постоянная, равная $R$; длина хорды, проведенной через центр, есть величина постоянная, равная $2R$; длина хорды, отстоящей от центра на расстояние $h$, есть величина постоянная, равная $2\sqrt{R^2-h^2}$; длина хорды, стягивающей дугу в $\alpha^\circ$, есть величина постоянная, равная $2R\sin\frac{\alpha^\circ}{2}$. Напротив, вообще длина хорды есть величина переменная, имеющая любое значение от 0 до $2R$; расстояние хорды от центра

есть величина переменная, принимающая значения от 0 до $R$; длина хорды, проходящей через данную точку внутри круга, отстоящую от центра на расстояние $h$, есть величина переменная, принимающая значение от $2\sqrt{R^2-h^2}$ до $2R$. Все приведенные здесь переменные изменяются непрерывно, принимая любое значение в данном промежутке, и значения такой переменной невозможно перенумеровать. Но бывают переменные иного рода, которые принимают значения, зависящие от целого положительного числа $n$ и допускающие потому расположение по порядку нумеров. Например, в данную окружность радиуса $R$ будем вписывать правильные многоугольники о 3, 6, 12,...$3\cdot 2^n$... сторонах и около нее будем описывать одноименные правильные многоугольники. Обозначая для вписанных многоугольников длины сторон через $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ периметры через $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$ апофемы через $\alpha_0, \alpha_1\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, для описанных многоугольников длины сторон через $b_0, b_1, b_2, b_3 \ldots$, периметры через $P_0, P_1, P_2, \ldots$ мы будем иметь пять переменных величин, коих значения можно перенумеровать.

*Определение 2.* Постоянная $L$ называется пределом переменной, принимающей значения $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$, если абсолютное значение разности $x_n - L$ при некотором $n$ сделается и при дальнейшем возрастании $n$ будет оставаться меньше произвольно-малого положительного числа $\varepsilon$; если $|x_n - L| < \varepsilon$ при $n \geqq n_0$ ($n_0$ достаточно большое число), то $L =$ пред. $x_n$.

*Пример 1.* Апофема $\alpha_n$ правильно вписанного многоугольника о $n$ сторонах имеет пределом радиус круга $R$.

Прежде всего заметим, что (на основании теоремы: выпуклая объемлемая короче объемлющей) периметр $n.a_n$ правильно вписанного $n$—угольника короче периметра описанного квадрата $8R$: $na_n < 8R$, откуда $a_n < \frac{8R}{n}$.

Далее $\alpha_n = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}$, $\quad R - \alpha_n = R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2} =$

$$= \frac{\frac{1}{4}a_n^2}{R + \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}} < \frac{1}{4R}\cdot a_n^2 < \frac{16R}{n^2}.$$ При $n \geqq n_0$ имеем: $R - \alpha_n \leqq \frac{16R}{n_0^2}$;

выберем $n_0$ так, чтобы было $\frac{16R}{n_0^2} < \varepsilon$, т.-е. возьмем $n_0 > 4\sqrt{\frac{R}{\varepsilon}}$, и тогда при $n \geqq n_0$ имеем $|R - \alpha_n| < \varepsilon$, следовательно, пред. $\alpha_n = R$.

*Пример 2.* Переменная $x_n = a^{\frac{1}{n}}$, где $a$ положительное число, имеет пределом 1.

Вывод: положив $a^{\frac{1}{n}} = b$, возьмем тождество $\frac{b^n - 1}{b-1} = b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b + 1$; при $a > 1$ имеем $b > 1$ и $\frac{b^n - 1}{b-1} > n$, откуда $b - 1 < \frac{b^n - 1}{n}$ или $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}$; при $n \geqq n_0$ имеем: $a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqq \frac{a-1}{n_0}$ и потому, если взять $\frac{a-1}{n_0} < \varepsilon$, т.-е. положить $n_0 > \frac{a-1}{\varepsilon}$, окажется $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$ при $n \geqq n_0$, т.-е. пред. $a^{\frac{1}{n}} = 1$. Если $a < 1$, то, положив $a = \frac{1}{a_1}$ при $a_1 > 1$, находим

$$1-a^{\frac{1}{n}}=\frac{a_1^{\frac{1}{n}}-1}{a_1^{\frac{1}{n}}}<a_1^{\frac{1}{n}}-1<\frac{a_1-1}{n}<\varepsilon \text{ при } n\geqq n_0, \text{ при чем } n_0>\frac{a_1-1}{\varepsilon},$$

откуда пред. $a^{\frac{1}{n}}=1$ и при $a<1$.

**§ 4. Величины конечные, бесконечно-большие, бесконечно-малые. Свойства бесконечно-малых.**

*Определение 1.* Переменная величина называется конечною, если все ее значения остаются по абсолютной величине меньше некоторого постоянного числа: $|x_n|<A$.

Отсюда следует, что переменная, имеющая предел $L$, есть величина конечная, ибо при $n\geqq n_0$ $|x_n-L|<\varepsilon$, но $x_n=(x_n-L)+L$, следовательно, $|x_n|<|L|+\varepsilon$; взяв число $A$ больше $|L|+\varepsilon$ и больше всех $|x_n|$ при $n<n_0$, будем иметь $|x_n|<A$ при всех $n$.

Обратное заключение неправильно, т.-е. переменные могут быть конечными, но не иметь предела; напр., $x_n=\sin(\pi\sqrt{n})$ при всех $n$ удовлетворяет неравенству $|x_n|\leqq 1$, но предела не имеет (колеблющаяся переменная).

*Определение 2.* Переменная называется бесконечно-большою, если при некотором $n$ ее абсолютные значения сделаются и при возрастании $n$ будут оставаться больше положительного числа $M$, сколь угодно большого: $|x_n|>M$ при $n\geqq n_0$. В этом случае нет предела в смысле определения 2 §3, но принято писать: пред. $x_n=\infty$, при чем, если при $n\geqq n_0$ все значения $x_n$ остаются $>0$, то пред. $x_n=+\infty$, а если при $n\geqq n_0$ все $x_n$ остаются $<0$, то пред. $x_n=-\infty$.

*Пример 1.* При $a>1$ пред. $a^n=+\infty$.

Из тождества $\frac{a^n-1}{a-1}=a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1$ получаем: $a^n-1>$ $>n(a-1)$ и тем более $a^n>n(a-1)$; при $n\geqq n_0$ имеем $a^n\geqq n_0(a-1)$, и, если взять $n_0>\frac{M}{a-1}$, окажется $a^n>M$ при $n\geqq n_0$, т.-е. пред. $a^n=+\infty$.

*Определение 3.* Переменная величина, имеющая пределом нуль, называется бесконечно-малою. Полагая $L=0$ в определении 2 §3, получаем для бесконечно-малой величины неравенство: $|x_n|<\varepsilon$ при $n\geqq n_0$.

*Пример 2.* При $0<a<1$ пред. $a^n=0$.

Полагая $a=\frac{1}{a_1}$ при $a_1>1$, имеем $a^n=\frac{1}{a_1^n}$, но, по примеру 1, $a_1^n>n(a_1-1)$, следовательно, $a^n<\frac{1}{n(a_1-1)}=\frac{a}{n(1-a)}<\frac{1}{n(1-a)}$; при $n\geqq n_0$ имеем $a^n\leqq\frac{1}{n_0(1-a)}$ и, если взять $n_0>\frac{1}{\varepsilon(1-a)}$, окажется $a^n<\varepsilon$ при $n\geqq n_0$, т.-е. пред. $a^n=0$.

*Пример 3.* При всяком $a>0$ пред. $\left(\frac{a^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\right)=0$.

Если $a<1$, то результат следует из примера 2, ибо $\frac{a^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}<a^n$. Если $a>1$, то пусть $a$ содержится между двумя последовательными целыми числами: $k\leqq a<k+1$, при чем можно считать $k+1<n$ при доста-

точно больших $n$. Тогда имеем: $\frac{a^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}=\frac{a^k}{1\cdot2\cdot3\cdots k}\cdot\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a}{k+2}\cdots\frac{a}{n}<$ $<\frac{a^k}{1\cdot2\cdots k}\cdot\left(\frac{a}{k+1}\right)^{n-k}$; пользуясь примером 2, найдем: при $n\geqq n_0$ $\frac{a^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}<\varepsilon$, если взять $n_0>k+\frac{A}{\varepsilon(1-b)}$, где положено $A=\frac{a^k}{1\cdot2\cdots k}$, $b=\frac{a}{k+1}<1$.

*Замечание.* Из определения 2 §3 следует, что для переменной $x_n$, имеющей пределом $L$, величина $x_n-L$ есть бесконечно-малая: $\alpha_n$, так что $x_n=L+\alpha_n$, т.-е. переменную можно представить как сумму ее предела и бесконечно-малой величины.

Отметим следующие свойства бесконечно-малых величин:

*Теорема 1.* Сумма конечного числа бесконечно-малых слагаемых есть также величина бесконечно-малая.

Вывод. Пусть $\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(k)}$ — $k$ бесконечно-малых величин; при $n\geqq n_0$ можно (см. определение 3) считать $|\alpha_n^{(1)}|<\frac{\varepsilon}{k}$, $|\alpha_n^{(2)}|<\frac{\varepsilon}{k}$, $\ldots|\alpha_n^{(k)}|<\frac{\varepsilon}{k}$, и тогда $|\alpha_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}+\ldots+\alpha_n^{(k)}|\leqq|\alpha_n^{(1)}|+|\alpha_n^{(2)}|+$ $+\ldots+|\alpha_n^{(k)}|<k.\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon$, т.-е. переменная $\beta_n=\alpha_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}+\ldots+\alpha_n^{(k)}$ есть бесконечно-малая (здесь мы пользуемся очевидным свойством алгебраической суммы, что абсолютное значение суммы равно сумме абсолютных значений слагаемых, если все слагаемые одного знака, и абсолютное значение суммы меньше суммы абсолютных значений слагаемых, если слагаемые разных знаков).

Теорема 1 может не оправдываться, если число слагаемых $k$ зависит от $n$ и растет беспредельно; в этом случае сумма бесконечно-малых слагаемых может быть конечною, бесконечно-малою и бесконечно-большою, как видно из примера 4.

*Пример 4.* Положим: $S_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}$, $T_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+$ $+\frac{2}{n^2\sqrt{n}}+\ldots+\frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}$, $U_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{2}{n\sqrt{n}}+\ldots+\frac{n-1}{n\sqrt{n}}$.

Имеем: пред. $S_n=$ пред. $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$, пред. $T_n=$ пред. $\frac{S_n}{\sqrt{n}}=0$, пред. $U_n=$ пред. $S_n\cdot\sqrt{n}=+\infty$.

*Теорема 2.* Произведение конечной величины на бесконечно-малую есть также величина бесконечно-малая, и произведение любого числа бесконечно-малых множителей есть величина бесконечно-малая.

Вывод. Пусть $x_n$—конечная величина, $\alpha_n$—бесконечно-малая; согласно определению 1, при всяком $n$ имеем $|x_n|<A$, и, согласно определению 3, при $n\geqq n_0$ можно считать $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{A}$; тогда $|x_n\cdot\alpha_n|<\varepsilon$, т.-е. величина $\beta_n=x_n\alpha_n$, — бесконечно-малая.

Пусть теперь $\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}, \ldots \alpha_n^{(k)}$ — бесконечно-малые величины; при $n\geqq n_0$ можно считать $|\alpha_n^{(j)}|<\sqrt[k]{\varepsilon}$ $(j=1,2,\ldots k)$, и тогда $|\alpha_n^{(1)}\cdot\alpha_n^{(2)}\cdots\alpha_n^{(k)}|<\varepsilon$, т.-е. произведение — величина бесконечно-малая.

Следует добавить, что произведение бесконечно-малой на бесконечно-большую есть величина неопределенная, которая может быть конечною, бесконечно-малою или бесконечно-большою, например, пред. $\left(n \cdot \frac{2}{n}\right) = 2$, пред. $\left(n \cdot \frac{2}{n^2}\right) = 0$, пред. $\left(n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$.

*Теорема 3.* Частное от деления бесконечно-малой на переменную, имеющую предел $L$, не равный нулю, есть величина бесконечно-малая.

Вывод. Пусть пред. $\alpha_n = 0$, пред. $x_n = L$; тогда при $n \geqq n_0$ имеем $|x_n - L| < \frac{1}{2}|L|$, но $x_n = L + (x_n - L)$, следовательно, $|x_n| \geqq |L| - |x_n - L| > \frac{1}{2}|L|$; при $n \geqq n_0$ можно считать $|\alpha_n| < \frac{1}{2}|L|\,\varepsilon$, и тогда $\left|\frac{\alpha_n}{x_n}\right| < \frac{\frac{1}{2}\varepsilon|L|}{\frac{1}{2}|L|} = \varepsilon$, т.-е. $\frac{\alpha_n}{x_n}$ бесконечно-малая.

Следует добавить, что: 1) частное от деления переменной, имеющей предел $L$ не $= 0$, на бесконечно-малую есть величина бесконечно-большая, ибо $|x_n| > \frac{1}{2}|L|$, $|\alpha_n| < \frac{\frac{1}{2}|L|}{M}$ ($M$ сколь угодно большое положительное число), следовательно, при $n \geqq n_0$ выходит $\left|\frac{x_n}{\alpha_n}\right| > M$; 2) частное от деления двух бесконечно-малых есть величина неопределенная.

**§ 5. Соотношения между пределами переменных, связанных неравенствами. Предел суммы, произведения частного.**

*Теорема 1.* Если переменная $x_n$ имеет предел $L$, то он может быть единственный.

Пусть две постоянных $L$ и $L'$ обладают свойством предела для $x_n$, т.-е. $x_n - L$ и $L' - x_n$ величины бесконечно-малые; тогда, по теореме 1 §4, и сумма их $L' - L$ бесконечно-малая, т.-е. пред. $(L' - L) = 0$, откуда $L' - L = 0$, $L' = L$.

*Теорема 2.* Если пред. $x_n = L$, пред. $y_n = L'$ и если при $n \geqq n_0$ оказывается $x_n \geqq y_n$ (равенство возможно для отдельных значений $n$), то $L \geqq L'$.

При $n \geqq n_0$ имеем $L + \varepsilon > x_n > L - \varepsilon$, $L' + \varepsilon' > y_n > L' - \varepsilon'$, следовательно, условие $x_n \geqq y_n$ приводит к неравенству $L + \varepsilon > L' - \varepsilon'$, $L - L' > -(\varepsilon + \varepsilon')$, откуда $L - L' \geqq 0$.

*Теорема 3.* Если пред. $x_n = L$, и пред. $(x_n - y_n) = 0$, то пред. $y_n = L$.

Величины $x_n - L$ и $y_n - x_n$ — бесконечно-малые, следовательно, и сумма их (§ 4, теорема 1) $y_n - L$ бесконечно-малая, т.-е. пред. $y_n = L$.

*Теорема 4.* Если при $n \geqq n_0$ оказывается $x_n \leqq z_n \leqq y_n$ (равенство имеет место для отдельных значений $n$) и если пред. $x_n =$ пред. $y_n = L$, то и пред. $z_n = L$.

Вывод. По условию, при $n \geqq n_0$ имеем: $0 < z_n - x_n < y_n - x_n$, но $y_n - x_n = (y_n - L) + (L - x_n)$ есть величина бесконечно-малая, следовательно, и $z_n - x_n$ бесконечно-малая, откуда, по теореме 3, пред. $z_n = L$.

*Теорема 5.* Предел суммы конечного числа слагаемых равен сумме пределов этих слагаемых. Пусть пред. $x_n^{(1)} = L_1$, пред. $x_n^{(2)} = L_2, \ldots$ пред. $x_n^{(k)} = L_k$; тогда величины $x_n^{(1)} - L_1$, $x_n^{(2)} - L_2, \ldots x_n^{(k)} - L_k$ суть бесконечно-малые,

следовательно, по § 4, теореме 1, и сумма их $(x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + \ldots + x_n^{(k)}) - (L_1 + L_2 + \ldots + L_k)$ есть бесконечно-малая, откуда пред. $\sum\limits_{j=1}^{k} x_n^{(j)} = \sum\limits_{j=1}^{k} L_j$.

Теорема может не оправдываться, когда число слагаемых растет беспредельно вместе с $n$ (см. § 4, пример 4).

*Теорема 6.* Предел произведения конечного числа множителей равен произведению пределов этих множителей.

Сохраняя обозначения теоремы 5, берем $k=2$ и рассматриваем разность $x_n^{(1)} x_n^{(2)} - L_1 L_2 = (x_n^{(1)} - L_1) x_n^{(2)} + (x_n^{(2)} - L_2) L_1$; так как $x_n^{(1)} - L_1$ и $x_n^{(2)} - L_2$ суть бесконечно-малые, а $x_n^{(2)}$ и $L_1$ — конечные величины, то, по теореме 2 и 1, § 4, разность $x_n^{(1)} x_n^{(2)} - L_1 L_2$ есть бесконечно-малая, откуда пред. $x_n^{(1)} x_n^{(2)} = L_1 L_2$.

От двух множителей переходим к трем, написав: пред. $(x_n^{(1)} x_n^{(2)} x_n^{(3)}) = $ пред. $\{(x_n^{(1)} x_n^{(2)}) \cdot x_n^{(3)}\} =$ пред. $(x_n^{(1)} x_n^{(2)}) \cdot$ пред. $x_n^{(3)} = (L_1 L_2) \cdot L_3 = L_1 L_2 L_3$ и т. д.

Теорема может не оправдываться, когда число множителей растет беспредельно вместе с $n$.

*Пример.* Положим $P_n = 2^{\frac{1}{n^2}} \cdot 2^{\frac{2}{n^2}} \cdot 2^{\frac{3}{n^2}} \ldots 2^{\frac{n-1}{n^2}}$.

Если $\frac{n^2}{j}$ $[j = 1, 2, \ldots (n-1)]$ заключено между двумя последовательными целыми числами $m$ и $m+1$: $m \leqq \frac{n^2}{j} < m+1$, то $\frac{1}{m} \geqq \frac{j}{n^2} > \frac{1}{m+1}$, откуда $2^{\frac{1}{m}} - 1 \geqq 2^{\frac{j}{n^2}} - 1 > 2^{\frac{1}{m+1}} - 1$, но в § 3, пример 2 доказано, что пред. $(2^{\frac{1}{m}} - 1) = 0$, пред. $(2^{\frac{1}{m+1}} - 1) = 0$, следовательно, по теореме 4, § 5, и пред. $(2^{\frac{j}{n^2}} - 1) = 0$, пред. $2^{\frac{j}{n^2}} = 1$.

Однако, пред. $P_n$ не $= 1$, а в силу тождества $P_n = 2^{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{1}{2n}}}$ выходит пред. $P_n = \frac{\sqrt{2}}{\text{пред. } 2^{\frac{1}{2n}}} = \sqrt{2}$.

*Теорема 7.* Если пред. $x_n = L$, неравному нулю, то пред. $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{L}$.

Разность $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{L} = \frac{L - x_n}{L x_n}$ есть частное от деления бесконечно-малой $L - x_n$ на переменную $x_n L$, имеющую пределом $L^2$ не $= 0$, следовательно, по теореме 3, § 4, величина $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{L}$ есть бесконечно-малая, откуда пред. $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{L}$.

*Теорема 8.* Предел дроби равен частному от деления предела числителя на предел знаменателя, если последний не нуль.

Пусть пред. $x_n^{(1)} = L_1$ пред. $x_n^{(2)} = L_2$, не $= 0$; по теореме 6 и 7 имеем: пред. $\frac{x_n^{(1)}}{x_n^{(2)}} =$ пред. $x_n^{(1)} \cdot$ пред. $\frac{1}{x_n^{(2)}} = L_1 \cdot \frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}$.

**§ 6. Порядок бесконечно-малых величин. Эквивалентные бесконечно-малые и их свойства.**

*Определение 1.* Бесконечно-малые $\beta_n$ и $\alpha_n$ называются бесконечно-малыми одного порядка, если пред. $\frac{\beta_n}{\alpha_n} = A$ (конечному числу, не равному 0); бесконечно-малая $\beta_n$ будет высшего порядка сравнительно с $\alpha_n$, если пред. $\frac{\beta_n}{\alpha_n} = 0$; бесконечно малая $\beta_n$ будет низшего порядка, чем $\alpha_n$, если пред. $\frac{\beta_n}{\alpha_n} = \infty$.

*Определение 2.* Бесконечно-малая $\beta_n$ называется бесконечно-малой порядка $k$ относительно $\alpha_n$, если пред. $\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n^k}\right) = A$ (конечному числу, не равному 0).

*Пример 1.* Величины $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ (значки $n$ отброшены) будут 1-го порядка относительно $\alpha$, $1 - \cos\alpha$ 2-го порядка., $\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha$ — 3-го порядка $\sqrt{1+\alpha^k} - 1$ — $k$-го порядка, ибо $\underset{\alpha=0}{\text{пред.}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$, $\underset{\alpha=0}{\text{пред.}} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1$ (известно из тригонометрии);

$$\text{пред.}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} = \text{пред.}\frac{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\text{пред.}\left\{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \frac{1}{2}, \text{пред.}\frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3} =$$

$$= \text{пред.}\left\{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\right\} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{пред.}\frac{\sqrt{1+\alpha^k}-1}{\alpha^k} = \text{пред.}\frac{(1+\alpha^k)-1}{\alpha^k(\sqrt{1+\alpha^k}+1)} =$$

$$= \text{пред.}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^k}+1} = \frac{1}{2}.$$

*Определение 3.* Бесконечно-малые $\beta_n$ и $\alpha_n$ называются эквивалентными, если пред. $\frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1$.

*Пример 2.* Величины $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $2\left(\sqrt{1+\alpha} - 1\right)$ эквивалентны с $\alpha$, согласно примеру 1.

*Теорема 1.* При разыскании предела отношения двух бесконечно-малых можно каждую бесконечно-малую заменить ей эквивалентною, и величина предела не изменится.

Пусть пред. $\frac{\alpha_n}{\gamma_n} = 1$, пред. $\frac{\beta_n}{\delta_n} = 1$. Тогда пред. $\frac{\beta_n}{\alpha_n} = \text{пред.}\left\{\frac{\beta_n}{\delta_n}\cdot\frac{\delta_n}{\gamma_n}\cdot\frac{\gamma_n}{\alpha_n}\right\} =$ $= \text{пред.}\frac{\beta_n}{\delta_n}\cdot\text{пред.}\frac{\delta_n}{\gamma_n}\cdot\frac{1}{\text{пред.}\frac{\alpha_n}{\gamma_n}} = 1\,.\,\text{пред.}\frac{\delta_n}{\gamma_n}\cdot 1 = \text{пред.}\frac{\delta_n}{\gamma_n}$, что и требуется доказать

*Пример 3.* $\underset{\alpha=0}{\text{Пред.}}\left\{\frac{\sin 5\alpha}{\sqrt{1+3\alpha-\alpha^2}-1}\right\} = \text{пред.}\frac{5\alpha}{\frac{1}{2}(3\alpha-\alpha^2)} =$ $= \text{пред.}\frac{5}{\frac{1}{2}(3-\alpha)} = \frac{10}{3}$.

*Теорема 2.* При разыскании предела суммы бесконечно-большого числа бесконечно-малых слагаемых можно заменить каждое слагаемое ему эквивалентным, без влияния на величину предела, если только сумма абсолютных значений данных бесконечно-малых остается конечною.

Пусть пред. $\frac{\beta_n^{(j)}}{\alpha_n^{(j)}}=1$ при $j=1, 2, \ldots m$, при чем число $m$ растет беспредельно вместе с $n$ (при конечном $m$ пред. $\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_n^{(j)}=0$, согласно теореме 1 §4); положим $S_n=\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_n^{(j)}$, $T_n=\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_n^{(j)}$. По свойству предела, при $n\geqq n_0$ можно считать $\frac{\beta_n^{(j)}}{\alpha_n^{(j)}}=1+\varepsilon_n^{(j)}$, где $\varepsilon_n^{(j)}$ бесконечно-малая; отсюда

$$\beta_n^{(j)}=\alpha_n^{(j)}+\alpha_n^{(j)}\varepsilon_n^{(j)},\quad T_n=S_n+\sum_{j=1}^{m}\alpha_n^{(j)}\cdot\varepsilon_n^{(j)}.$$

Пусть при $n\geqq n_0$ и при всех $j=1, 2, \ldots m$ будет $|\varepsilon_n^{(j)}|<\varepsilon$, где $\varepsilon$ положительное число сколь угодно малое; тогда $\left|\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_n^{(j)}\varepsilon_n^{(j)}\right|\leqq\Sigma\,|\alpha_n^{(j)}|\cdot|\varepsilon_n^{(j)}|<$ $<\varepsilon\cdot\Sigma\,|\alpha_n^{(j)}|$, и так как $\Sigma\,|\alpha_n^{(j)}|$ остается по условию конечною, то пред. $\Sigma\alpha_n^{(j)}\varepsilon_n^{(j)}=0$, и потому пред. $T_n=$ пред. $S_n$, что и требуется доказать.

*Пример 4.* Так как $S_n=\frac{a}{n^2}+\frac{2a}{n^2}+\ldots+\frac{(n-1)a}{n^2}=\frac{a}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ и потому пред. $S_n=\frac{a}{2}$, то имеем также пред. $\left\{\sin\frac{a}{n^2}+\sin\frac{2a}{n^2}+\ldots+\right.$ $\left.+\ldots+\sin\frac{(n-1)a}{n^2}\right\}=\frac{a}{2}$, пред. $\left\{\operatorname{tg}\frac{a}{n^2}+\operatorname{tg}\frac{2a}{n^2}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{(n-1)a}{n^2}\right\}=$ $=\frac{a}{2}$, ибо $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ эквиваленты с $\alpha$.

*Пример 5.* В силу эквивалентности $\sqrt{1+\alpha}-1$ и $\frac{1}{2}\alpha$ имеем:

$$\text{пред.}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{\sqrt{1+\frac{j}{n^2}}-1\right\}=\frac{1}{2}\ \text{пред.}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j}{n^2}=\frac{1}{4}.$$

## § 7. Условия существования предела для возрастающей или убывающей переменной. Приложения.

*Теорема 1.* Если при $n\geqq n_0$ значения переменной $x_n$ возрастают, т.-е. если $x_n<x_{n+1}<x_{n+2}<\ldots$, но остаются всегда меньше конечного числа $A$, то переменная $x_n$ имеет предел $L$, который не больше $A$.

Вывод. Произведем разрез в области всех вещественных чисел, относя к 1-му классу такие вещественные числа $a$, которые удовлетворяют неравенству $a\leqq x_m$ для одного из значений $x_n$, а ко 2-му классу такие вещественные числа $b$, которые больше всех значений $x_n$ (число $A$ относится поэтому ко 2-му классу)

При таком разрезе не может быть наибольшего числа в 1 классе, так как для всякого числа $a$ 1-го класса, удовлетворяющего условию $a\leqq x_m$, найдется число $x_{m+1}$, которое больше $a$ и также принадлежит к 1-му классу, ибо $x_{m+1}<x_{m+2}$. По свойству сплошности (§ 2) совокупности вещественных чисел, второй класс должен иметь наименьшее число $L$. Покажем,

что $L$ есть предел для $x_n$. Какое бы малое положительное число $\varepsilon$ мы ни задали, число $L-\frac{1}{2}\varepsilon$ будет принадлежать к 1 классу (ибо $L$ наименьшее число 2-го класса), следовательно, найдется такой нумер $n_0$, что $L-\frac{1}{2}\varepsilon \leqq x_{n_0}$, а тогда, так как значения переменной $x_n$ возрастают, и подавно $L-\frac{1}{2}\varepsilon \leqq x_n$ при всех $n \geqq n_0$; отсюда $L-x_n \leqq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, т.-е. $L=$пред. $x_n$. Так как число $L$ есть наименьшее во 2 классе, а число $A$ также принадлежит ко 2-му классу, то $L \leqq A$, что и требуется доказать.

*Теорема 2.* Если при $n \geqq n_0$ значения переменной $y_n$ убывают, т.-е. если $y_n > y_{n+1} > y_{n+2} > \ldots$, но остаются всегда больше конечного числа $B$, то переменная $y_n$ имеет предел $L'$, который не меньше $B$.

Теорема приводится к предыдущей, если положить $y_n = -x_n$; тогда условия $y_n > y_{n+1}$ и $y_n > B$ принимают вид: $x_n < x_{n+1}$, $x_n < -B = A$, и по теореме 1-ой следует, что пред. $x_n = L \leqq A$, откуда

$$\text{пред. } y_n = -\text{пред. } x_n = -L = L' \geqq -A = B.$$

*Теорема 3.* Если при $n \geqq n_0$ значения переменной $x_n$ возрастают, а значения переменной $y_n$ убывают, при чем $x_n \leqq y_n$ (равенство существует только для отдельных значений $n$), то обе переменные имеют пределы, при чем пред. $x_n \leqq$ пред. $y_n$. Так как при $n \geqq n_0$ имеем $x_n \leqq y_n < y_{n0}$, то по теореме 1-й существует пред. $x_n = L$; так как при $n \geqq n_0$ по условию $y_n \geqq x_n > x_{n0}$, то по теореме 2-й существует пред. $y_n = L'$, при чем $L \leqq L'$ на основании теоремы 2 § 5.

*Теорема 4.* Если при $n \geqq n_0$ значения переменной $x_n$ возрастают, а значения переменной $y_n$ убывают, при чем $x_n \leqq y_n$ и $y_n - x_n < \varepsilon$ (т.-е. пред. $(y_n - x_n) = 0$), то обе переменные имеют общий предел: пред. $x_n =$ $=$ пред. $y_n = L$.

Оставляя сперва в стороне условие $y_n - x_n < \varepsilon$ при $n \geqq n_0$, заключаем по теореме 3-ей, что обе переменные $x_n$ и $y_n$ имеют пределы $L$ и $L'$, а затем, вводя условие $y_n - x_n < \varepsilon$, по теореме 3 §5 заключаем, что $L = L'$.

*Пример 1.* Если в окружность данного радиуса $R$ будем вписывать правильные многоугольники о 3, 6, 12,... $3 \cdot 2^n$... сторонах, то периметры их $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n \ldots$ образуют возрастающий ряд; периметры описанных многоугольников $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n$, образуют убывающий ряд, при чем $p_n < P_n$ и при $n \geqq n_0$ $P_n - p_n < \varepsilon$. По теореме 4-ой заключаем, что существует общий предел для $p_n$ и $P_n$, и так как длина окружности $C$ всегда удовлетворяет неравенству $p_n < C < P_n$, то $C$ и является общим пределом для $p_n$ и $P_n$.

*Пример 2.* Докажем, что при всяком целом положительном $m$ и при всяком целом положительном $A$, неравном $m$-ой степени целого числа, уравнение $Z^m = A$ имеет один положительный корень, называемый арифметическим значением радикала $\sqrt[m]{A}$.

Обозначим приближенные значения этого радикала с точностью до $\frac{1}{10^n}$ с недостатком и с избытком соответственно через $x_n = \frac{a_n}{10^n}$ и $y_n = \frac{a_n+1}{10^n}$; целое положительное число $a_n$ удовлетворяет неравенствам: $\left(\frac{a_n}{10^n}\right)^m < A <$

$<\left(\frac{a_n+1}{10^n}\right)^m$. Взяв другой нумер $p>n$, имеем для $a_p$ такие же неравенства: $\left(\frac{a_p}{10^p}\right)^m<A<\left(\frac{a_p+1}{10^p}\right)^m$; из сравнения с предыдущими неравенствами находим: $\frac{a_n}{10^n}<\frac{a_p+1}{10^p}$ и $\frac{a_n+1}{10^n}>\frac{a_p}{10^p}$ или $10^{p-n}a_n<a_p+1$ и $10^{p-n}(a_n+1)>a_p$; так как оба члена каждого неравенства суть целые положительные числа, то эти неравенства равносильны следующим:

$$10^{p-n}a_n\leqq a_p \quad \text{и} \quad 10^{p-n}(a_n+1)\geqq a_p+1 \quad \text{или} \quad \frac{a_n}{10^n}\leqq\frac{a_p}{10^p},$$

$\frac{a_n+1}{10^n}\geqq\frac{a_p+1}{10^p}$, т.-е. $x_n\leqq x_p$, $y_n\geqq y_p$. Кроме того, $x_n<y_n$ и $y_n-x_n=$ $=\frac{1}{10^n}<\varepsilon$ при $n\geqq n_0$. По теореме 4-й заключаем, что пред. $x_n=$ $=$ пред. $y_n=Z$, при чем по теореме 6 §5, примененной к произведению $m$ равных множителей, имеем: пред. $(x_n^m)=$ пред. $(y_n^m)=Z^m$. Но при всяком $n$ имеем $x_n^m<A<y_n^m$, следовательно, по теореме 4 §5 $A=$ пред. $x_n^m=$ пред. $y_n^m$, и так как предел переменной, если он существует, может быть только один (теорема 1 §5), то $Z^m=A$, т.-е. число $Z$ есть корень уравнения $z^m=A$.

*Пример 3.* Пусть $x_0$ и $y_0$ — два данных положительных числа $x_0<y_0$. Составим из них два новых числа $x_1=\sqrt{x_0y_0}$ и $y_1=\frac{x_0+y_0}{2}$, затем $x_2=\sqrt{x_1y_1}$ и $y_2=\frac{x_1+y_1}{2}$ и т. д., вообще $x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}$, $y_n=$ $=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}$. Тогда, при $x_0<y_0$, имеем: $x_1>x_0$, $y_1<y_0$, $y_1-x_1=$ $=\frac{1}{2}(\sqrt{y_0}-\sqrt{x_0})^2>0$ и вообще, если $x_{n-1}<y_{n-1}$, то $x_n>x_{n-1}$, $y_n<$ $<y_{n-1}$, $y_n-x_n=\frac{1}{2}(\sqrt{y_{n-1}}-\sqrt{x_{n-1}})^2>0$. На основании теоремы 3 заключаем, что переменные $x_n$ и $y_n$ имеют пределы: пред. $x_n=Z$, пред. $y_n=Z'$; но $2y_n=x_{n-1}+y_{n-1}$, следовательно, в пределе, при $n=\infty$, получаем: $2Z'=Z+Z'$, откуда $Z'=Z$, т.-е. оба ряда чисел: $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ и $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots$ имеют общий предел, который называется средним арифметико-геометрическим данных чисел $x_0$ и $y_0$.

## § 8. Понятие об ансамбле (ensemble). Теорема Вейерштрасса относительно точки сгущения бесконечного и ограниченного ансамбля.

Совокупность чисел называется ансамблем, если дано правило, позволяющее относительно всякого данного числа сказать, принадлежит ли оно к этой совокупности или нет. Например, совокупность всех целых чисел есть ансамбль, совокупность дробей вида $\frac{1}{n}$ ($n$ целое положительное) есть ансамбль. Ансамбль называется конечным или бесконечным, смотря по тому, содержит ли он конечное или бесконечное число членов. Ансамбль называется ограниченным, если все члены его содержатся между двумя данными конечными числами. Число $C$ определяет точку сгущения ансамбля, если в интервале между $C-\varepsilon$ и $C+\varepsilon$, при сколь угодно малом положительном $\varepsilon$, содержится бесчисленное множество членов ансамбля.

Теорема Вейерштрасса: всякий бесконечный ограниченный ансамбль имеет по крайней мере одну точку сгущения.

Пусть все члены данного ансамбля заключены между $a$ и $b$. Разобьем интервал $(a, b)$ на два: $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, и тот из новых интервалов, который содержит бесчисленное множество членов ансамбля, обозначим через $(a_1, b_1)$ (не может быть, чтобы в обоих новых интервалах было конечное число членов ансамбля, ибо тогда и общее число членов его было бы конечным, что противоречит условию). Таким образом или $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$, или $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$; при $a < b$ в обоих случаях имеем: $a_1 \geqq a$, $b_1 \leqq b$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2} > 0$. Интервал $(a_1, b_1)$ опять разделим на два $\left(a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right)$, $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right)$ и тот из них, который содержит бесчисленное множество членов ансамбля, обозначим через $(a_2, b_2)$; тогда $a_2 \geqq a_1$, $b_2 \leqq b_1$, $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2} > 0$. Продолжая такое деление интервалов, мы составим два ряда чисел: $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ и $b_0, b_1, b_2, \ldots b_n \ldots$ (где $a_0 = a$ и $b_0 = b$), которые выполняют все 4 условия теоремы 4 § 7, ибо $a_n \geqq a_{n-1}$, $b_n \leqq b_{n-1}$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} > 0$ и $b_n - a_n < \varepsilon$ при $n \geqq n_0$, и потому имеют общий в предел $C$: $C =$ пред. $a_n =$ пред. $b_n$. Докажем, что $C$ отвечает точке сгущения данного ансамбля.

По самому правилу составления чисел $a_n$ и $b_n$, интервал $(a_n, b_n)$ содержит бесчисленное множество членов ансамбля; но по свойству предела при $n \geqq n_0$ имеем: $C - a_n < \varepsilon$, $b_n - C < \varepsilon$, т.-е. $C - \varepsilon < a_n < b_n < C + \varepsilon$; если в интервале $(a_n, b_n)$ содержится бесчисленное множество членов ансамбля, то тем более это справедливо для более широкого интервала $(C - \varepsilon, C + \varepsilon)$, откуда и следует, что точка $C$ есть точка сгущения данного ансамбля.

## § 9. Условие Коши необходимое и достаточное для существования предела переменной.

*Теорема.* Для того, чтобы переменная (или последовательность) $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ имела предел, необходимо и достаточно выполнение неравенства $|x_m - x_p| < \varepsilon$ ($\varepsilon$ положительное число, сколь угодно малое) при всех значениях $m$ и $p$ достаточно больших (при $m \geqq n_0$ и при $p \geqq n_0$).

Вывод. Если переменная $x_n$ имеет предел $L$, то при $m \geqq n_0$ и при $p \geqq n_0$ обе разности $x_m - L$ и $L - x_p$ будут бесконечно-малыми, а потому и сумма их $x_m - x_p$ есть бесконечно-малая, т.-е. $|x_m - x_p| < \varepsilon$; этим доказана необходимость условия Коши.

Обратно, пусть условие Коши выполнено.

Совокупность значений $x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots$ образует ансамбль, бесконечный, но ограниченный, ибо $x_p = x_{n0} + (x_p - x_{n0})$, следовательно $|x_p| \leqq |x_{n0}| + |x_p - x_{n0}| < |x_{n0}| + \varepsilon$ при всех $p > n_0$. По теореме Вейерштрасса (§ 8) этот ансамбль имеет по крайней мере одну точку сгущения $c$; в интервале $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ будет содержаться бесчисленное множество значений переменной $x_n$, и потому среди них будут значения $x_m$, для которых $m \geqq n_0$, где $n_0$ любое большое число; для таких $x_m$ выполнено неравенство $|x_m - c| < \varepsilon$. С другой стороны, по условию теоремы, при $m \geqq n_0$ и при $p \geqq n_0$ имеем $|x_p - x_m| < \varepsilon$, откуда следует, что величина $x_p - c$, равная

сумме двух бесконечно-малых $x_m - c$ и $x_p - x_m$, сама будет бесконечно-малая, так что $|x_p - c| < 2\varepsilon$ при всех $p \geqq n_0$, а это и значит, что пред. $x_p = c$, т.-е. точка сгущения совпадает с пределом значений данной переменной, и так как предел может быть единственный, то данный ансамбль $x_0, x_1, \ldots x_n \ldots$ имеет лишь одну точку сгущения.

*Пример.* Переменная $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ не может иметь предела, ибо для нее

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2},$$

и следовательно условие Коши не выполнено; так как $x_n$ возрастает вместе с $n$, то пред. $x_n = +\infty$.

**§ 10. Предел степенного выражения $x^m$ (при переменном основании и при постоянном показателе).**

*Теорема.* Если пред. $x_n = L$ (конечному числу, не равному 0), то пред. $(x_n^m) = L^m$ при всяком рациональном значении $m$.

1) Если $m$ целое положительное число, то по теореме 6 § 5 (при равенстве всех $m$ множителей) имеем: пред. $(x_n^m) =$ пред. $x_n$ пред. $x_n \ldots$ пред. $x_n = L^m$.

2) Если $m$ целое отрицательное число: $m = -l$ (где $l$ целое положительное), то на основании теоремы 7 § 5 имеем: пред. $(x_n^m) =$ пред. $\left(\frac{1}{x_n^l}\right) = \frac{1}{\text{пред.}\,(x_n^l)}$ и далее, на основании случая 1), находим:

$$\text{пред.}\,(x_n^m) = \frac{1}{L^l} = L^{-l} = L^m.$$

3) Если $m = \frac{1}{l}$, где $l$ целое положительное число, то, положив $x_n^{\frac{1}{l}} = y_n$, $l^{\frac{1}{l}} = b$, имеем тождество:

$$\frac{y_n^l - b^l}{y_n - b} = y_n^{l-1} + y_n^{l-2} \cdot b + y_n^{l-3} \cdot b^2 + \ldots + y_{n2}\ b^{l-1} + b^l = P_n,$$

откуда $y_n - b = \frac{y_n^l - b^l}{P_n} = \frac{x_n - L}{P_n}$, но $x_n - L$ есть бесконечно-малая, а $P_n$ — величина конечная, следовательно по теореме 3 § 4 $y_n - b$ есть бесконечно-малая, т.-е. пред. $y_n = b$ или пред. $\left(x_n^{\frac{1}{l}}\right) = L^{\frac{1}{l}}$.

4) Если $m = \frac{k}{l}$, где $k$ и $l$ целые числа ($k \gtrless 0$, $l > 0$), то $x_n^{\frac{k}{l}} = \left(x_n^{\frac{1}{l}}\right)^k$, откуда, по рассмотренным случаям 1) и 3) имеем: пред. $\left(x_n^{\frac{k}{l}}\right) = \left(L^{\frac{1}{l}}\right)^k = L^{\frac{k}{l}}$.

*Замечание.* В § 12 теорема будет доказана и для $m$ иррационального.

*Пример 1.* $\underset{\alpha=0}{\text{Пред.}}\left[\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha}\right] = m$ (значок $n$ при $\alpha$ опущен).

1) При $m$ целом положительном берем тождество: $\frac{(1+\alpha)^m - 1^m}{(1+\alpha) - 1} = (1+\alpha)^{m-1} + (1+\alpha)^{m-2} + \ldots + (1+\alpha) + 1$, и на основании теоремы 8 § 5 и теоремы § 10 находим: пред. $\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha} = m$.

2) При $m$ целом отрицательном: $m = -l$ имеем $\frac{(1+\alpha)^{-l}-1}{\alpha} = \frac{1-(1+\alpha)^l}{\alpha(1+\alpha)^l} = \frac{-1}{(1+\alpha)^l} \cdot \frac{(1+\alpha)^l-1}{\alpha}$; по теореме 6 § 5 пред. $\frac{(1+\alpha)^{-l}-1}{\alpha} = \frac{-1}{\text{пред.}(1+\alpha)^l} \cdot \text{пред.} \frac{(1+\alpha)^l-1}{\alpha}$; и далее, по теореме § 10 и по разобранному случаю 1), находим: искомый предел $= -l$.

3) При $m = \frac{1}{l}$, полагая $(1+\alpha)^{\frac{1}{l}} = 1+\beta$, имеем $1+\alpha = (1+\beta)^l$, при чем при $\alpha = 0$ выходит $\beta = 0$: отсюда $\underset{\alpha=0}{\text{пред.}} \frac{(1+\alpha)^{\frac{1}{l}}-1}{\alpha} = \underset{\beta=0}{\text{пред.}} \frac{\beta}{(1+\beta)^l-1} = \frac{1}{\text{пред.} \frac{(1+\beta)^l-1}{\beta}} = \frac{1}{l}$ (по сл. 1).

4) При $m = \frac{k}{l}$ та же подстановка дает: $\underset{\alpha=0}{\text{пред.}} \frac{(1+\alpha)^{\frac{k}{l}}-1}{\alpha} = \underset{\beta=0}{\text{пред.}} \frac{(1+\beta)^k-1}{(1+\beta)^l-1} = \frac{\text{пред.} \frac{(1+\beta)^k-1}{\beta}}{\text{пред.} \frac{(1+\beta)^l-1}{\beta}} = \frac{k}{l}$.

*Пример 2.* Найти пред. $\frac{[1+\varphi(\alpha)]^m-1}{\psi(\alpha)}$, при чем $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ означают некоторые зависящие от $\alpha$ выражения, для которых $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$ и $\underset{\alpha=0}{\text{пред.}} \frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)} = A$ (конечному числу).

Полагая $\varphi(\alpha) = \beta$, имеем: пред. $\left\{\frac{(1+\beta)^m-1}{\beta} \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)}\right\} = m \cdot A$, согласно § 5, теорем 6 и согласно примеру 1 § 10.

*Пример 3.* $\underset{\alpha=0}{\text{Пред.}} \frac{[1+\varphi(\alpha)]^m-[1+\varphi_1(\alpha)]^m}{\psi(\alpha)}$, где $\varphi(0) = 0$, $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, пред. $\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)} = A$, пред. $\frac{\varphi_1(\alpha)}{\psi(\alpha)} = A_1$. На основании примера 2 имеем: искомый предел $=$

$$\text{пред.} \frac{[1+\varphi(\alpha)]^m-1}{\psi(\alpha)} - \text{пред.} \frac{[1+\varphi_1(\alpha)]^m-1}{\psi(\alpha)} = mA - mA_1.$$

*Пример 4.* $\underset{\alpha=0}{\text{Пред.}} \frac{\sqrt[3]{1+\alpha-\alpha^2} - \sqrt[4]{1-2\alpha+3\alpha^2}}{\sqrt{1+4\alpha-2\alpha^2} - \sqrt[5]{1+\alpha^2}}$. Деля числитель и знаменатель на $\psi(\alpha) = \alpha$ и пользуясь результатом 3, находим:

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{4}(-2)}{\frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{5} \cdot 0} = \frac{5}{12}.$$

*Пример 5.* $\underset{x=-1}{\text{Пред.}} \frac{\sqrt{2-2x-3x^2} - \sqrt[3]{3+3x+x^2}}{2+3x+x^2}$.

Полагая $x = -1 + y$, преобразуем данное выражение в

$$\underset{y=0}{\text{пред.}} \frac{\sqrt{1+4y-3y^2} - \sqrt[3]{1+y+y^2}}{y+y^2} = \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3} \text{ (по примеру 3).}$$

*Пример 6.* $\underset{x=\pm\infty}{\text{Пред.}} \left\{ x^{\frac{4}{3}} \left( \sqrt[3]{1+x^2} + \sqrt[3]{1-x^2} \right) \right\}$. Полагая $x = \frac{1}{y}$, преобразуем данное выражение в $\underset{y=0}{\text{пред.}} \left\{ \frac{\sqrt[3]{1+y^2} - \sqrt[3]{1-y^2}}{y^2} \right\} =$ $= \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3}(-1) = \frac{2}{3}$ (см. пример 3).

**§ 11. Предел показательного выражения $a^x$ (при постоянном основании и переменном показателе).**

Из алгебры известны формулы $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ и $a^{\frac{k}{l}} = \sqrt[l]{a^k}$, определяющие значение символа $a^x$ (где $a > 0$) при рациональных значениях $x$. Желая определить $a^x$ при $x$ иррациональном, докажем следующие теоремы.

*Теорема 1.* Если переменная $x_n$, оставаясь рациональною, стремится к пределу 0, то пред $a^{x_n} = 1$.

Пусть сперва $a > 1$ и $x_n > 0$; при $n \geqq n_0$ можно считать $x_n < \frac{1}{N}$, где $N$ целое положительно число, сколь угодно большое; тогда

$0 < a^{x_n} - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \frac{a-1}{N}$ (см. § 3, пример 2), откуда пред $a^{x_n} = 1$.

Если $x_n < 0$, то пред. $a^{x_n} =$ пред. $\frac{1}{a^{-x_n}} = \frac{1}{\text{пред.}(a^{-x_n})} = 1$; если $a < 1$, то, полагая $a = \frac{1}{a_1}$ при $a_1 > 1$, имеем пред. $a^{x_n} =$ пред. $\frac{1}{a_1^{x_n}} = \frac{1}{\text{пред.}(a_1^{x_n})} = 1$.

*Теорема 2.* Если переменная $x_n$, оставаясь рациональною, стремится к рациональному пределу $L$, то пред. $a^{x_n} = a^L$.

Вывод. Так как $a^{x_n} - a^L = a^L\left(a^{x_n - L} - 1\right)$, при чем $x_n - L$, оставаясь рациональным, стремится к 0, то по теореме 1 пред. $a^{x_n - L} = 1$, следовательно пред. $\left(a^{x_n} - a^L\right) = 0$, пред. $a^{x_n} = a^L$.

*Теорема 3.* Если переменная $x_n$, оставаясь рациональною, стремится к иррациональному пределу $L$, то переменная $a^{x_n}$ стремится к определенному пределу.

Вывод. Так как пред $x_n$ существует, то по теореме Коши (§ 9) при $m \geqq n_0$ и при $p \geqq n_0$ должно быть $|x_m - x_p| < \varepsilon$; но $a^{x_m} - a^{x_p} = a^{x_p}\left(a^{x_m - x_p} - 1\right)$, при чем $a^{x_p}$ конечно, и $a^{x_m - x_p} - 1$ имеет пределом нуль по теореме 1, следовательно $a^{x_m} - a^{x_p}$ удовлетворяет неравенству $|a^{x_m} - a^{x_p}| < \varepsilon$ при $m \geqq n_0$ и при $p \geqq n_0$, т.-е., по теореме Коши, переменная $a^{x_n}$ имеет предел.

*Теорема 4.* Если две переменные $x_n$ и $y_n$, оставаясь рациональными, стремятся к одному и тому же иррациональному пределу $L$, то переменные $a^{x_n}$ и $a^{y_n}$ стремятся к одному и тому же пределу.

Вывод. По теореме 3 существуют пределы: $L' =$ пред. $a^{x_n}$ и $L'' =$ $=$ пред. $a^{y_n}$, и так как $\frac{L'}{L''} = \frac{\text{пред. } a^{x_n}}{\text{пред. } a^{y_n}} = \text{пред.} \left(\frac{a^{x_n}}{a^{y_n}}\right) = \text{пред.} (a^{x_n - y_n}) = 1$ (по теореме 1, ибо $x_n - y_n$, оставаясь рациональною, стремится к 0), то $L' = L''$.

Теперь определим значение символа $a^x$ при $x = L$ — иррациональному числу. Именно, всякое иррациональное число $L$ можно определить как предел переменной $x_n$, принимающей рациональные значения (приближенные значения $L$ с возрастающею точностью); тогда $a^L$ определим как предел $a^{x_n}$, который по теореме 3 существует и по теореме 4 не зависит от закона приближения $x_n$ к своему пределу $L$.

Известные из алгебры формулы $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, установленные для рациональных показателей $x$, $y$, можно распространить и на случай иррациональных $x$ и $y$. Пусть $z =$ пред. $x_n$ и $z' =$ пред. $y_n$.

1) Имеем: пред. $(a^{x_n} \cdot a^{y_n}) =$ пред. $a^{x_n} \cdot$ пред. $a^{y_n} = a^z \cdot a^{z'}$, и пред. $(a^{x_n} \cdot a^{y_n}) =$ $=$ пред. $(a^{x_n + y_n}) = a^{\text{пред.}(x_n + y_n)} = a^{z+z'}$, так что $a^z a^{z'} = a^{z+z'}$.

2) Пусть сперва $z'$ рациональное; тогда по § 10 и по определению символа $a^z$ имеем: пред. $[(a^{x_n})^{z'}] =$ (пред. $a^{x_n})^{z'} = (a^z)^{z'}$, и вместе с тем в силу равенства $(a^{x_n})^{z'} = a^{x_n z'}$ при рациональных $x_n$ и $z'$, получаем: пред. $\{(a^{x_n})^{z'}\} =$ пред. $(a^{x_n z'}) = a^{\text{пред.}(x_n z')} = a^{zz'}$, следовательно $(a^z)^{z'} = a^{zz'}$. Пусть теперь $z$ и $z'$ оба иррациональные; тогда по определению символа $a^{z'}$ имеем: пред. $\{(a^z)^{y_n}\} = (a^z)^{z'}$, а в силу формулы $(a^z)^{y_n} = a^{zy_n}$, доказанной при иррациональном $z$ и при рациональном $y_n$, пишем:

пред. $\{(a^z)^{y_n}\} =$ пред. $\{a^{zy_n}\} = a^{\text{пред.}(zy_n)} = a^{zz'}$, так что $(a^z)^{z'} = a^{zz'}$.

## § 12. Предел логарифма.

*Теорема 1.* Если $a$ означает положительное число, не равное 1, и $A$ любое положительное число, то уравнение $a^x = A$ имеет единственное решение, называемое логарифмом числа $A$ при основании $a$: $x = \log_a A$.

Вывод. Предположим сперва $a > 1$; по § 3, примеру 2, $a^{\frac{1}{N}} - 1 < \frac{a-1}{N}$, так что $a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon$ сколь угодно малое положительное число; положив $1 + \varepsilon = b$, заключаем, что какое бы число $b > 1$ ни было задано, всегда можно найти столь большое целое положительное число $N$, что $a^{\frac{1}{N}} < b$. Это свойство дает возможность доказать, что среди решений неравенства $a^x < A$ нет наибольшего числа и среди решений неравенства $a^x > A$ нет наименьшего. Именно, если $a^{x_0} < A$, то, положив $b = \frac{A}{a^{x_0}}$, подберем такое $N$, чтобы $a^{\frac{1}{N}} < b =$ $= \frac{A}{a^{x_0}}$; тогда $a^{x_0 + \frac{1}{N}} < A$, т.-е. по данному решению $x = x_0$ неравенства $a^x < A$ можно найти бо́льшее решение $x = x_0 + \frac{1}{N}$, и потому нет наибольшего числа $x$, для которого $a^x < A$. Подобным образом, если $a^{x_0} > A$, то, положив $b = \frac{a^{x_0}}{A}$, подберем такое $N$, чтобы $a^{\frac{1}{N}} < b = \frac{a^{x_0}}{A}$; отсюда $a^{x_0 - \frac{1}{N}} > A$, т.-е. по данному решению $x = x_0$ неравенства $a^{x_0} > A$ можно найти меньшее решение $x = x_0 - \frac{1}{N}$, почему нет наименьшего числа $x$, для которого $a^x > A$.

Теперь произведем разрез в области вещественных чисел, относя к первому классу те числа $x$, для которых $a^x \leqq A$, а ко второму те, для которых $a^x > A$. Как доказано, 2-й класс не имеет наименьшего числа, следовательно, по свойству сплошности (§ 2), 1-й класс должен иметь наибольшее число $x = x'$; но, по доказанному, нет наибольшего числа среди решений неравенства $a^x < A$, следовательно, это число $x'$ представляет решение уравнения $a^x = A$: $x' = \log_a A$. Не может быть двух различных решений $x'$ и $x''$ уравнения $a^x = A$, ибо, предположив $x' > x''$, имеем $a^{x'} - a^{x''} = 0$ или $a^{x''}(a^{x'-x''} - 1) = 0$, откуда $a^{x'-x''} = 1$, что представляет противоречие, ибо при $a > 1$ и при $x' - x'' > 0$ должно быть $a^{x'-x''} > 1$. Теорема 1 доказана при $a > 1$. Если $a < 1$, то, положив $a = \frac{1}{a_1}$, где $a_1 > 1$, уравнение $a^x = A$ переписываем в виде: $\frac{1}{a_1^x} = A$ или $a_1^{-x} = A$; выше доказано, что это уравнение имеет единственный корень $x = -\log_{\frac{1}{a}} A$, следовательно и уравнение $a^x = A$ имеет единственный корень $x = -\log_a A = -\log_{\frac{1}{a}} A$.

*Теорема 2.* Какое бы малое положительное число $\varepsilon$ ни было задано, всегда можно найти столь малое положительное число $\eta$, чтобы при $-\eta < y < +\eta$ выполнялось неравенство $-\varepsilon < \log_a(1+y) < +\varepsilon$, где $a$ любое положительное число, не равное 1.

Вывод. Пусть $a > 1$; положив $a^{+\varepsilon} - 1 = \eta_1$ и $a^{-\varepsilon} - 1 = -\eta_2$, возьмем число $\eta$ равным наименьшему из чисел $\eta_1$ и $\eta_2$ так, что $\eta \leqq \eta_1$ и $\eta \leqq \eta_2$. Положив $\log_a(1+y) = x$, имеем $a^x = 1 + y$, $a^x - 1 = y$; если взять $-\eta < y < +\eta$, то и подавно будет выполнено неравенство $-\eta_2 < y < \eta_1$ или $a^{-\varepsilon} - 1 < a^x - 1 < a^{+\varepsilon} - 1$, откуда $-\varepsilon < x = \log_a(1+y) < +\varepsilon$, что и требуется доказать. Если $a < 1$, то $\log_a(1+y) = -\log_{\frac{1}{a}}(1+y)$, и так как неравенство $-\varepsilon < \log_{\frac{1}{a}}(1+y) < +\varepsilon$ доказано, если взять $-\eta < y < +\eta$ при $\eta$ равном наименьшему из чисел $\eta_1 = a^{-\varepsilon} - 1$, $\eta_2 = 1 - a^{+\varepsilon}$, то из него вытекает неравенство $\varepsilon > \log_a(1+y) > -\varepsilon$.

*Теорема 3.* Если пред. $x_n = L$, при чем $x_n > 0$ и $L > 0$, то пред. $\log_a x_n = \log_a L$.

Докажем сперва, что предел для $\log_a x_n$ существует, для чего возьмем разность $\log_a x_m - \log_a x_p = \log_a\left(\frac{x_m}{x_p}\right) = \log_a\left(1 + \frac{x_m - x_p}{x_p}\right)$; так как $|x_m - x_p|$ сколь угодно малое число при $m \geqslant n_0$ и при $p \geqslant n_0$, а $|x_p| > \frac{1}{2}L$, то $\left|\frac{x_m - x_p}{x_p}\right| < \eta$ и потому, по теореме 2, имеем: $\left|\log_a\left(1 + \frac{x_m - x_p}{x_p}\right)\right| < \varepsilon$; отсюда следует, по теореме § 9, что предел $\log_a x_n$ существует.

Докажем, что он равен $\log_a L$. Имеем: пред. $(a^{\log_a x_n}) =$ пред. $(x_n) = L = a^{\log_a L}$, с другой стороны (по § 11, теоремы 2 — 4) пред. $(a^{\log_a x_n}) = a^{\text{пред.}(\log_a x_n)}$ следовательно $a^{\log_a L} = a^{\text{пред.}(\log_a x_n)}$, откуда пред. $(\log_a x_n) = \log_a L$.

*Замечание 1.* Из результатов § 4 (примеры 1 и 2): пред. $a^n = +\infty$ при $a > 1$ и пред. $a^n = 0$ при $|a| < 1$ следует, что

при $a > 1$: $\log_a(+\infty) = +\infty$, $\log_a 0 = -\infty$;
при $a < 1$: $\log_a 0 = +\infty$, $\log_a(+\infty) = -\infty$.

*Теорема 4.* Если пред. $x_n = L$, при чем $x_n > 0$ и $L > 0$, а пред. $y_n = L'$, то предел показательно-степенного выражения: пред. $(x_n^{y_n}) = L^{L'}$.

*Вывод.* Из тождества $x_n^{y_n} = a^{y_n \log_a x_n}$ имеем на основании § 11, § 5, теоремы 6, § 12 теоремы 3: пред.$(x_n^{y_n}) = a^{\text{пред.}(y_n \log_a x_n)} = a^{L' \cdot \log_a L} = (a^{\log_a L})^{L'} = L^{L'}$.

*Замечание 2.* Тем же способом можно доказать теорему § 10 при $m$ иррациональном.

Именно, $x_n^m = a^{m \cdot \log_a x_n}$, пред. $(x_n^m) = a^{m \cdot \text{пред.}(\log_a x_n)} = a^{m \cdot \log_a L} = (a^{\log_a L})^m = L^m$.

*Замечание 3.* В выражении $x_n^{y_n} = a^{y_n \cdot \log_a x_n}$ показатель $y_n \cdot \log_a x_n$ принимает неопределенную форму $0 \cdot \infty$ в следующих случаях: 1) пред. $y_n = 0$, пред. $\log_a x_n = +\infty$, откуда пред. $x_n = +\infty$ (принимая $a > 1$); 2) пред. $y_n = 0$, пред. $\log_a x_n = -\infty$, откуда пред. $x_n = 0$ $(a > 1)$; 3) пред. $y_n = \pm\infty$, пред. $\log_a x_n = 0$, откуда пред. $x_n = 1$; отсюда находим три типа показательных неопределенностей: $\infty^0$, $0^0$, $1^{\pm\infty}$.

## § 13. Пределы тригонометрических выражений.

*Теорема.* Если пред. $x_n = L$, то пред. $\sin x_n = \sin L$, пред. $\cos x_n = \cos L$, пред. $\operatorname{tg} x_n = \operatorname{tg} L$, пред. $\cot x_n = \cot L$ (при чем $\operatorname{tg}(2k+1)\frac{\pi}{2} = \pm\infty$, $\cot k\pi = \pm\infty$ при $k$ целом).

Вывод. Из тождеств: $\sin x_n - \sin L = 2\sin\frac{x_n - L}{2}\cos\frac{x_n + L}{2}$, $\cos x_n - \cos L = -2\sin\frac{x_n - L}{2}\sin\frac{x_n + L}{2}$ следует, что $|\sin L_n - \sin L| < |x_n - L|$, $|\cos x_n - \cos L| < |x_n - L|$, ибо при малых значениях $|\alpha|$ имеем $|\sin\alpha| < |\alpha|$, и при всяком $\alpha$ $|\sin\alpha| \leqq 1$, $|\cos\alpha| \leqq 1$.

Далее, по теореме 8 § 5 находим пред.$(\operatorname{tg} x_n) = \text{пред.}\left(\frac{\sin x_n}{\cos x_n}\right) = \frac{\text{пред.}(\sin x_n)}{\text{пред.}(\cos x_n)} = \frac{\sin L}{\cos L} = \operatorname{tg} L$ и пред.$(\cot x_n) = \cot L$.

## § 14. Число e. Натуральные логарифмы.

*Теорема.* Предел выражения: $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ равен числу $e = 2{,}7182818\ldots$, по какому бы закону ни возрастало $|n|$.

1) Пусть сперва $n$ принимает целые положительные значения; покажем, что переменная $s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает вместе с $n$, но остается всегда меньше 3, откуда и заключим, по теореме 1 § 7, что переменная $s_n$ имеет предел. По формуле бинома Ньютона имеем: $s_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^n} = 2 + \sum_{k=2}^{n} T_n^{(k)}$, где $T_n^{(k)} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{1.2.3\ldots k} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$.

Заменяя $n$ на $n+m$ ($m$ целое положительное), получим: $s_{n+m}=2+\sum\limits_{k=2}^{n+m} T_{n+m}^{(k)}$, где $T_{n+m}^{(k)}=\frac{1}{1.2\ldots k}\cdot\left(1-\frac{1}{n+m}\right)\left(1-\frac{2}{n+m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+m}\right)$; отсюда $s_{n+m}-s_n=\sum\limits_{k=2}^{n}(T_{n+m}^{(k)}-T_n^{(k)})+\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} T_{n+m}^{(k)}$; но при $k=2, 3, \ldots n$ имеем $T_{n+m}^{(k)}>T_n^{(k)}$, ибо каждый множитель $1-\frac{h}{n+m}>1-\frac{h}{n}$ (при $h=1, 2, \ldots k-1$), и сверх того все $T_{n+m}^{(n)}>0$ при $k=n+1, \ldots n+m$; это дает $s_{n+m}>s_n$, т.-е. $s_n$ растет вместе с $n$. Далее в силу неравенства $T_n^{(k)}<\frac{1}{1.2.3\ldots k}$, находим: $s_n<2+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{1.2\ldots k}<2+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}=2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$. Этим доказано, что пред. $s_n$ существует; его обозначают буквою $e$ (Неперово число).

2) Пусть $n$, оставаясь положительным, принимает любые вещественные значения; всякое значение $n$ будет заключено между двумя последовательными целыми положительными числами:

$$N\leqq n<N+1;\quad \text{отсюда}\quad \left(1+\frac{1}{N}\right)^n\geqq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{N+1}\right)^n$$

и тем более: $\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{N+1}\right)^N$. Переходя к пределу при $n=\infty, N=\infty$, находим: пред. $\left\{\left(1+\frac{1}{N}\right)^N\cdot\left(1+\frac{1}{N}\right)\right\}\geqq$ пред. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqq$ $\geqq$ пред. $\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{N+1}\right)^{N+1}}{1+\frac{1}{N+1}}\right\}$; но пред. $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N=e$, пред. $\left(1+\frac{1}{N+1}\right)^{N+1}=e$, пред. $\left(1+\frac{1}{N}\right)=1$, пред. $\left(1+\frac{1}{N+1}\right)=1$, следовательно (по теоремам 6 и 8 § 5) имеем: $e\geqq$ пред. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqq e$, т.-е. $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, когда $n$ растет, принимая любые положительные значения.

3) Пусть $n$ абсолютно растет, оставаясь отрицательным. Полагая $n=-m$, где $m$ положительное, имеем: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m-1}{m}\right)^{-m}=$ $=\left(\frac{m}{m-1}\right)^m=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\cdot\left(1+\frac{1}{m-1}\right)$; но при $m=+\infty$ пред. $\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}=e$ (по 2), пред. $\left(1+\frac{1}{m-1}\right)=1$, следовательно $\underset{n=-\infty}{\text{пред.}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

4) Пусть $n$ абсолютно растет, принимая то положительное, то отрицательное значения. Разобьем всю последовательность значений $s_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ на две: $s_1', s_2', \ldots s_m', \ldots$ и $s_1'', s_2'', \ldots s_m'' \ldots$, при чем $s_j'$ совпадают со значе-

ниями $s_n$ при $n > 0$, а $s''_j$ совпадают со значениями $s_n$ при $n < 0$. Согласно пунктам 2) и 3) при достаточно больших значениях $m$ (при $m \geqq m_0$) можно считать $|s'_m - e| < \varepsilon$, $|s''_m - e| < \varepsilon$; тогда для всех достаточно далеких значений $s_n$, которые совпадают с $s'_m$ или $s''_m$ при $m \geqq m_0$, будет также выполнено неравенство $|s_n - e| < \varepsilon$, так что $\underset{n=\pm\infty}{\text{пред.}}\, s_n = e$.

Когда доказано, что пред. $s_n$ не зависит от закона возрастания $n$, то для вычисления этого предела предположим $n$ целым положительным и возьмем формулу пункта 1): $s_n = 2 + \sum\limits_{k=2}^{m} T_n^{(k)} + R_n$, где $R_n = \sum\limits_{k=m+1}^{n} T_n^{(k)}$. Замечая, что при всяком конечном $k$ (по теореме 6 § 5) $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\, T_n^{(k)} = \dfrac{1}{1.2.3\ldots k}$, пишем: $e = \underset{n=+\infty}{\text{пред.}}\, s_n = 2 + \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \sum\limits_{k=2}^{m} T_n^{(k)} + \underset{n=\infty}{\text{пред.}}\, R_n$; так как сумма $\sum\limits_{k=2}^{m}$ при всяком целом положительной $m > 2$ содержит конечное число слагаемых: $(m-1)$, не зависящее от $n$, то по теореме 5 § 5 пред. $\sum\limits_{k=2}^{m} T_n^{(k)} = \sum\limits_{k=2}^{m} \dfrac{1}{1.2.3\ldots k}$, и получается формула: $e = 2 + \sum\limits_{k=2}^{m} \dfrac{1}{1.2.3\ldots k} + \underset{n=\infty}{\text{пред.}}\, R_n$. Предел $R_n = \sum\limits_{k=m+1}^{n} T_n^{(k)}$ нельзя вычислить на основании теоремы 5 § 5, ибо число слагаемых $n - m$ зависит от $n$, но можно установить высшую границу для величины пред $R_n$. Именно $T_n^{(k)} < \dfrac{1}{1.2.3\ldots k}$, следовательно при всяком $n$ будет

$$R_n < \frac{1}{1.2.3\ldots(m+1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots(m+2)} + \ldots + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} =$$

$$= \frac{1}{1.2.3\ldots m}\left\{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \ldots + \frac{1}{(m+1)\ldots n}\right\}$$

и тем более $R_n < \dfrac{1}{1.2.3\ldots m}\left\{\dfrac{1}{m+1} + \dfrac{1}{(m+1)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(m+1)^{n-m}} + \ldots\right\} =$

$= \dfrac{1}{1.2.3\ldots m} \cdot \dfrac{\frac{1}{m+1}}{1 - \frac{1}{m+1}} = \dfrac{1}{1.2.3\ldots m.m}$; отсюда и $\underset{n=\infty}{\text{пред}}\, R_n < \dfrac{1}{1.2.3\ldots m.m}$,

так что можно положить пред. $R_n = \dfrac{\theta}{1.2.3\ldots m.m}$ при $0 < \theta < 1$.

Окончательно находим формулу: $e = 2 + \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \dfrac{1}{1.2.3\ldots m} + \dfrac{\theta}{1.2.3\ldots m.m}$, по которой можно вычислить $e$ с любой точностью, именно: желая получить $e$ с точностью до $\dfrac{1}{10^k}$, нужно подобрать $m$ так, чтобы $1.2.3\ldots m.m > 10^k$.

Например при $m = 9$ имеем: $1.2.3\ldots 9.9 = 3265920 > 3.10^6$, следовательно $e = 2 + \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{1.2.3} + \ldots + \dfrac{1}{1.2\ldots 9} + \dfrac{\theta}{3.10^6}$ $(0 < \theta < 1)$. Обращая каждый член суммы, начиная с $\dfrac{1}{1.2.3}$ в десятичную дробь, будем удержи-

вать 8 десятичных знаков; тогда ошибка каждого члена будет $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^8}$, а от 7 членов суммарная ошибка не превзойдет $\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{10^8} < \frac{4}{10^8}$, что вместе с ошибкою приближенной формулы даст погрешность $< \frac{4}{10^8} + \frac{1}{3 \cdot 10^6} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^6}$, так что 6 десятичных знаков полученного выражения для $e$ будут точными (при этом соблюдается правило об увеличении последней оставленной цифры на 1, если первая отбрасываемая цифра 5 или больше). Вычисления дают (делим 0,5 на 3, частное на 4, новое частное на 5 и т. д.):

$$
\begin{array}{rl}
2 & = 2 \\
\frac{1}{1.2} & = 0{,}50000000 \\
\frac{1}{1.2.3} & = 0{,}16666667 \\
\frac{1}{1.2.3.4} & = 0{,}04166667 \\
\frac{1}{5!} & = 0{,}00833333 \\
\frac{1}{6!} & = 0{,}00138889 \\
\frac{1}{7!} & = 0{,}00019841 \\
\frac{1}{8!} & = 0{,}00002480 \\
\frac{1}{9!} & = 0{,}00000276 \\
\hline
 & 2{,}71828153
\end{array}
$$

Отсюда $e = 2{,}718282$ с погрешностью $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^6}$.

Число $e$ принимается за основание натуральных или Неперовых логарифмов, которые будем обозначать символом log ($l$ малое), сохраняя обозначение $\mathrm{Log}_a$ для всякой иной системы логарифмов с основанием $a$.

Для всякого положительного числа $x$ имеем по определению логарифма: $x = e^{\log x} = a^{\mathrm{Log}_a x}$. Беря от обеих частей тождества логарифмы сперва натуральные, затем с основанием $a$, находим: $\log x = \mathrm{Log}_a x . \log a$, $\log x . \mathrm{Log}_a e = \mathrm{Log}_a x$, откуда $\mathrm{Log}_a e = \frac{1}{\log a} = M$ (модуль системы логарифмов с основанием $a$, например для десятичных логарифмом $M = 0{,}4342945$); по формуле: $\mathrm{Log}_a x = M . \log x$ можно по натуральному логарифму данного числа найти его логарифм в другой системе.

## § 15. Некоторые пределы, связанные с числом e.

*Пример 1.* $\underset{n=\infty}{\text{Пред.}} \left\{ \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \right\} = e^a$ или $\underset{\alpha=0}{\text{пред.}} (1 + a\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^a$.

Полагая $\frac{a}{n}=\frac{1}{m}$, имеем $n=am$, при чем $m=\infty$ при $n=\infty$. Итак $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\left\{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right\}=\underset{m=\infty}{\text{пред.}}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^a\right\}=\left\{\underset{m=\infty}{\text{пред.}}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^a$ (по теореме § 10) $=e^a$. Полагая $\frac{1}{n}=\alpha$, приходим ко второму результату.

*Пример 2.* $\underset{\alpha=0}{\text{Пред.}}\left\{\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}\right\}=1.$

Имеем:

$$\underset{\alpha=0}{\text{пред.}}\left\{\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}\right\}=\underset{\alpha=0}{\text{пред.}}\left[\log\left\{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}\right]=\log\left[\underset{\alpha=0}{\text{пред.}}\left\{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}\right]$$

(по § 12, теорема 3) $=\log e$ (по примеру 1) $=1$.

*Пример 3.* $\underset{\alpha=0}{\text{Пред.}}\left\{\frac{a^\alpha-1}{\alpha}\right\}=\log a\ (a>0).$

Полагая $a^\alpha-1=\beta$, имеем: $a^\alpha=1+\beta$, $\alpha\log a=\log(1+\beta)$, при чем $\beta=0$ при $\alpha=0$; таким образом

$$\underset{\alpha=0}{\text{пред.}}\left\{\frac{a^\alpha-1}{\alpha}\right\}=\underset{\beta=0}{\text{пред.}}\left\{\frac{\beta\log a}{\log(1+\beta)}\right\}=\frac{\log a}{\underset{\beta=0}{\text{пред}}\left\{\frac{\log(1+\beta)}{\beta}\right\}}=\frac{\log a}{1}\ \text{(по примеру 2).}$$

*Пример 4.* $\underset{\alpha=0}{\text{Пред.}}\left\{\frac{(1+\alpha)^m-1}{\alpha}\right\}=m$ (см. § 10, пример 1).

Полагая $(1+\alpha)^m=1+\beta$, имеем: $m\log(1+\alpha)=\log(1+\beta)$, при чем $\beta=0$ при $\alpha=0$; таким образом $\underset{\alpha=0}{\text{пред.}}\left\{\frac{(1+\alpha)^m-1}{\alpha}\right\}=$

$$=\text{пред.}\left\{\frac{\beta}{\log(1+\beta)}\cdot\frac{m\log(1+\alpha)}{\alpha}\right\}=m\cdot\frac{\underset{\alpha=0}{\text{пред.}}\left\{\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}\right\}}{\underset{\beta=0}{\text{пред.}}\left\{\frac{\log(1+\beta)}{\beta}\right\}}=m\ \text{(согласно}$$

примеру 2).

Вообще к степени числа $e$ приводится выражение вида $1^{\pm\infty}$, т.-е. пред$(x_n^{y_n})$, если пред. $x_n=1$, пред. $y_n=\pm\infty$. Именно, положив $x_n=1+\frac{}{m}$, при чем пред. $m=\infty$ при пред. $x_n=1$, имеем: $x_n^{y_n}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m\cdot\frac{y_n}{m}}=$ $=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m\cdot y_n(x_n-1)}=\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{y_n(x_n-1)}$; поэтому, если пред. $\{y_n(x_n-1)\}=a$, то получаем пред. $(x_n^{y_n})=\left[\underset{m=\infty}{\text{пред.}}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{\text{пред.}[y_n(x_n-1)]}$ (по § 12 теорема 4) $=e^a$.

*Пример 5.* $\underset{x=\frac{\pi}{4}}{\text{Пред.}}\left[(\text{tg}\,x)^{\text{tg}\,2x}\right]=\frac{1}{e}.$

Здесь пред. $y_n(x_n-1)=\underset{x=\frac{\pi}{4}}{\text{пред.}}\left\{(\operatorname{tg}x-1)\cdot\operatorname{tg}2x\right\}=\text{пред.}\left\{(\operatorname{tg}x-1)\cdot\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}\right\}=$

$=\text{пред.}\left\{\frac{-2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right\}=-1,\quad a=-1.$

*Пример 6.* $\underset{x=0}{\text{Пред.}}\left[(\cos ax)^{\frac{1}{\sin^2 bx}}\right]=e^{-\frac{a^2}{2b^2}}.$

Здесь пред. $y_n(x_n-1)=\underset{x=0}{\text{пред.}}\left(\frac{\cos ax-1}{\sin^2 bx}\right)=\text{пред.}\left(\frac{-2\sin^2\frac{ax}{2}}{\sin^2 bx}\right)=$

$=\text{пред.}\left(\frac{-2\cdot\frac{a^2x^2}{4}}{b^2x^2}\right)$ (см. § 6, пример 3) $=-\frac{a^2}{2b^2}.$

---

Глава II.

## Бесконечные ряды.

### § 1. Необходимое и достаточное условие сходимости.

*Определение* 1. Бесконечным рядом называется символ вида $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$, где отдельные слагаемые (члены ряда) определяются заданием общего члена $u_n$ в зависимости от $n$. Например при $u_n=\frac{1}{n^2}\,(n\geqslant 1)$ имеем ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$

*Определение 2.* Бесконечный ряд называется сходящимся, если переменная $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$ имеет определенный предел при $n=\infty$; этот предел $S$ называется суммою ряда, что записывается в виде равенства: $S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$

Бесконечный ряд называется расходящимся, если переменная $S_n$ не имеет предела или потому, что $|S_n|$ растет беспредельно вместе с $n$, или потому, что предел $S_n$ зависит от закона возрастания $n$.

*Пример 1.* Ряд $a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$ при $|q|<1$ (бесконечно-убывающая геометрическая прогрессия) представляет сходящийся ряд, ибо $S_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^n=\frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}$ и пред. $S_n=S=\frac{a}{1-q}$ (пред. $q^{n+1}=0$ по § 4, пример 2). Тот же ряд при $|q|>1$ (бесконечно-возрастающая геометрическая прогрессия) есть расходящийся, ибо $S_n=\frac{a(q^{n+1}-1)}{q-1}$ и пред. $S_n=+\infty$ (при $a>0$) согласно § 4, пример 1.

*Пример 2.* Ряд $1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\ldots$ сходящийся при $k>1$ и расходящийся при $k\leqslant 1$.

Предполагая, что $n$ заключено в пределах: $10^m\leqslant n<10^{m+1}$, имеем при $k>1$ неравенство: $S_n=\left(1+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{9^k}\right)+\left(\frac{1}{10^k}+\frac{1}{11^k}+\ldots+\frac{1}{99^k}\right)+$

$+\left(\frac{1}{100^k}+\ldots+\frac{1}{999^k}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{10^{mk}}+\ldots+\frac{1}{n^k}\right)<1\cdot 9+\frac{1}{10^k}\cdot 90+$

$+\frac{1}{100^k}\cdot 900+\frac{1}{1000^k}\cdot 9000+\ldots+\frac{1}{10^{mk}}\cdot 10^m\cdot 9<9\left\{1+\frac{1}{10^{k-1}}+\frac{1}{10^{2(k-1)}}+\right.$ $\left.+\frac{1}{10^{3(k-1)}}+\ldots\right\}=\frac{9}{1-\frac{1}{10^{k-1}}}$, ибо при $k>1$ имеем $\frac{1}{10^{k-1}}<1$; таким образом $S_n$, возрастая вместе с $n$, остается меньше определенного числа, и потому (§ 7, теорема 1) $S_n$ имеет предел, т.-е. при $k>1$ ряд сходящийся.

Напротив, при $k\leqq 1$ имеем неравенство: $S_n>9\cdot\frac{1}{10^k}+90\cdot\frac{1}{100^k}+$ $+900\cdot\frac{1}{1000^k}+\ldots+\frac{1}{10^{(m-1)k}}\cdot 9\cdot 10^{m-2}=\frac{9}{10}\left\{10^{1-k}+10^{2(1-k)}+10^{3(1-k)}+\right.$ $\left.+\ldots+10^{(m-1)(1-k)}\right\}$; при $k=1$ получаем $S_n>\frac{9}{10}(m-1)$, при $k<1$ $S_n>\frac{9}{10}\cdot\frac{10^{m(1-k)}-10^{1-k}}{10^{1-k}-1}$, при чем $10^{1-k}>1$; отсюда пред. $S_n=+\infty$, и ряд при $k\leqq 1$ расходящийся.

*Теорема.* Необходимое и достаточное условие сходимости ряда $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ заключается в том, чтобы $|S_{n+m}-S_n|=$ $=|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+m}|$ могло быть сделано $<\varepsilon$ при $n\geqq n_0$ и при всяком $m>0$.

Эта теорема представляет приложение условия Коши (§ 9 гл. I) к переменной $S_n$ с некоторым изменением обозначений ($m$ на $n$, $p$ на $n+m$).

*Следствие.* Необходимое, но недостаточное условие сходимости заключается в том, чтобы $|u_{n+1}|<\varepsilon$ при $n\geqq n_0$, т.-е. пред. $u_n=0$. В самом деле, это условие отвечает случаю $m=1$, когда $S_{n+1}-S_n=u_{n+1}$; примером 2 подтверждается недостаточность этого условия для сходимости, ибо ряд $u_n=\frac{1}{n^k}$ удовлетворяет условию: пред. $u_n=0$ при всех $k>0$, а будет сходящимся лишь при $k>1$.

## § 2. Ряды с положительными членами. Две теоремы о сравнении рядов.

Если все члены $u_n$ ряда остаются положительными (по крайней мере при $n\geqq n_0$), то сумма $S_n=u_0+u_1\ldots+u_n$ возрастает вместе с $n$, и если она остается меньше конечной величины, то ряд будет сходящимся, а если она растет беспредельно вместе с $n$, то ряд — расходящийся.

*Теорема 1.* Пусть $u_n$ и $v_n$ — два ряда с положительными членами; если при $n\geqq n_0$ оказывается $u_n\leqq v_n$ (равенство возможно для отдельных значений $n$), то, при сходимости ряда $v_n$, ряд $u_n$ будет также сходящийся, а при расходимости ряда $u_n$ ряд $v_n$ и подавно расходящийся.

Вывод. Из условия теоремы находим: $u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\ldots+$ $+u_{n_0+m}<v_{n_0+1}+v_{n_0+2}+\ldots+v_{n_0+m}$ или $S_{n_0+m}-S_{n_0}<T_{n_0+m}-T_{n_0}$, если положить $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$, $T_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$. При сходимости ряда $v_n$, величина $T_{n_0+m}<A$ (конечного числа) при всяком $m$, следовательно $S_{n_0+m}<A+S_{n_0}-T_{n_0}$ откуда заключаем, что $S_{n_0+m}$ имеет предел при $m=\infty$, т.-е. ряд $u_n$ сходящийся. При расходимости ряда $u_n$ величина $S_{n_0+m}$ растет беспредельно вместе с $m$, но $T_{n_0+m}>S_{n_0+m}-S_{n_0}+T_{n_0}$, следовательно $T_{n_0+m}$ и подавно растет беспредельно, т.-е. ряд $v_n$ — расходящийся.

*Теорема 2.* Если при $n \geqq n_0$ выполнено неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, где $u_n$ и $v_n$ общие члены двух рядов положительных чисел, то при сходимости ряда $v_n$ ряд $u_n$ будет сходящимся, а при расходимости ряда $u_n$ ряд $v_n$ будет расходящимся.

Вывод. От перемножения неравенств: $\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leqq \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}$, $\frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} \leqq \frac{v_{n_0+2}}{v_{n_0+1}}$, $\ldots \frac{u_{n_0+m}}{u_{n_0+m-1}} \leqq \frac{v_{n_0+m}}{v_{n_0+m-1}}$ находим: $u_{n_0+m} \leqq a \cdot v_{n_0+m}$, где $a = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$, или $u_n \leqq a \cdot v_n$ при $n \geqq n_0$. Так как умножение членов ряда на постоянное число не влияет на его сходимость или расходимость, то мы пришли к условию теоремы 1-й, следовательно можем повторить ее заключение, что и доказывает теорему 2-ю.

## § 3. Четыре признака сходимости и расходимости рядов, составленных из положительных чисел.

*Признак 1-й* (д'Аламбера). Если $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, то при $k < 1$ ряд $u_n$ — сходящийся, а при $k > 1$ — расходящийся.

1) Если $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k < 1$, то при $n \geqq n_0$ можно считать $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k + \varepsilon$, где $\varepsilon$ положительное число сколь угодно малое; беря $\varepsilon = \frac{1-k}{2} > 0$, находим $k_1 = k + \varepsilon = k + \frac{1-k}{2} = \frac{1+k}{2} < 1$; итак, при $n \geqq n_0$ получаем: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k_1 < 1$; но для сходящегося ряда $v_n = k_1^n$ имеем $\frac{v_{n+1}}{v_n} = k_1$, следовательно $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$ и по теореме 2, § 2 ряд $u_n$ — сходящийся.

2) Если $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k > 1$, то при $n \geqq n_0$ можно считать $\frac{u_{n+1}}{u_n} > k - \varepsilon$; беря $\varepsilon = \frac{k-1}{2} > 0$, находим $k_1 = k - \varepsilon = \frac{k+1}{2} > 1$; итак, при $n \geqq n_0$ оказывается $\frac{u_{n+1}}{u_n} > k_1$; для расходящегося ряда $v_n = k_1^n$ имеем $\frac{v_{n+1}}{v_n} = k_1$, следовательно $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$, и по теореме 2 § 2 ряд $u_n$ — расходящийся.

*Пример 1.* $u_n = \frac{x^n}{n}$, $x > 0$. Здесь $\frac{u_{n+1}}{u_n} = x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$, следовательно ряд сходящийся при $0 < x < 1$ и расходящийся при $x > 1$.

*Признак 2-й* (Коши). Если $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \sqrt[n]{u_n} = k$, то при $k < 1$ ряд $u_n$ сходящийся, при $k > 1$ — расходящийся.

1) При $k < 1$ можно считать, для значений $n \geqq n_0$, $\sqrt[n]{u_n} < k + \varepsilon = k_1$, где $k_1 < 1$; тогда $u_n < k_1^n$, но ряд $v_n = k_1^n$ сходящийся, следовательно по теореме 1 § 2 и ряд $u_n$ — сходящийся.

2) При $k>1$ и при $n\geqq n_0$ можно считать $\sqrt[n]{u_n}>k-\varepsilon=k_1>1$; тогда $u_n>k_1^n$, но ряд $v_n=k_1^n$ расходящийся, следовательне по теореме 1 § 2 ряд $u_n$ — расходящийся.

*Пример 2.* $u_n=x_{2n+1}\cdot e^{-x^2}$, $x>0$. Здесь $\sqrt[n]{u_n}=x^{2+\frac{1}{n}}\cdot e^{-x^2}$, пред. $\sqrt[n]{u_n}=x^2e^{-x^2}=\frac{x^2}{e^{x^2}}$; но дальше увидим, что $e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+\ldots>x^2$, следовательно $\frac{x^2}{e^{x^2}}<1$, и потому ряд $u_n$ — сходящийся при всех $x>0$.

*Признак 3-й* (Рабе). Если пред. $(u_n\cdot n^k)=A$ (конечному числу), то при $k>1$ ряд $u_n$ — сходящийся, при $k\leqq 1$ ряд $u_n$ — расходящийся.

1) При $k>1$ и при $n\geqq n_0$ имеем: $u_n\cdot n^k<A+\varepsilon=A_1$, $u_n<A_1\cdot\frac{1}{n^k}$, но ряд $v_n=\frac{1}{n^k}$ при $k>1$ — сходящийся (§ 1, прим. 2), следовательно по теореме 1 § 2 ряд $u_n$ — сходящийся.

2) При $k\leqq 1$ и при $n\geqq n_0$ имеем $u_n\cdot n^k>A-\varepsilon=A_2$, $u_n>\frac{A_2}{n^k}$, но ряд $v_n=\frac{1}{n^k}$ при $k\leqq 1$ расходящийся, следовательно по теореме 1 § 2 ряд $u_n$ — расходящийся.

*Пример 3.* $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\log^p\left(1+\frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)$, $x>0$.

На основании § 15, пример 2 пред. $\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}=1$, следовательно $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}\right]^p\cdot\left(\frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)^p$, откуда пред. $\left(u_n\cdot n^{\frac{1}{2}+\frac{p}{3}}\right)=x^p$, следовательно при $\frac{1}{2}+\frac{p}{3}>1$, т.-е. при $p>\frac{3}{2}$ ряд $u_n$ — сходящийся, а при $p\leqq\frac{3}{2}$ — расходящийся.

*Пример 4.* $u_n=\left(a^{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}-a^{\sin\frac{1}{n}}\right)^p$, $a>1$.

На основании § 15, пример 3 пред $\left(\frac{a^\alpha-1}{\alpha}\right)=\log a$, следовательно $u_n=a^{p\sin\frac{1}{n}}\cdot\left(\frac{a^\alpha-1}{\alpha}\right)^p\cdot\alpha^p$, где $\alpha=\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}$, но по § 6, пример 1, пред. $\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}\right)=\frac{1}{2}$; поэтому $u_n=a^{p\sin\frac{1}{n}}\cdot\left(\frac{a^\alpha-1}{\alpha}\right)^p\cdot\left(\frac{\alpha}{\frac{1}{n^3}}\right)^p\cdot\frac{1}{n^{3p}}$, пред. $(u_n\cdot n^{3p})=\frac{\log^p a}{2^p}$ и при $3p>1$, т.-е. при $p>\frac{1}{3}$ ряд сходящийся, а при $p\leqq\frac{1}{3}$ — расходящийся.

*Пример 5.* $u_n=\sqrt{n}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)^p$.

На основании примера 4, § 15, $\underset{\alpha=0}{\text{пред.}}\left\{\frac{(1+\alpha)^m-1}{\alpha}\right\}=m$, преобразуем:

$$u_n=\sqrt{n}\cdot n^p\cdot\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\frac{1}{n^3}}\right]^p\cdot\frac{1}{n^{3p}},$$ откуда $\text{пред.}\left(u_n\cdot n^{2p-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{3^p}$, следовательно при $2p-\frac{1}{2}>1$, т.-е. при $p>\frac{3}{4}$, ряд сходящийся и при $p\leqq\frac{3}{4}$ расходящийся.

*Признак 4* (Гаусса). Если $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}=k$, то при $k>1$ ряд $u_n$ сходящийся, при $k<1$ — расходящийся, при $k=1$ также расходящийся, если сверх того пред. $\left\{n\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\right\}=A$ (конечному числу).

1) Возьмем число $k_1$ под условием $k>k_1>1$, и для ряда $v_n=\frac{1}{n^{k_1}}$ найдем $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\left\{n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}-1\right)\right\}=\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k_1}-1}{\frac{1}{n}}\right\}=k_1$ (см. § 15, пр. 4).

Из неравенства $k>k_1$ можно заключить, что при $n\geqq n_0$ $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>$ $>n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}-1\right)$, откуда $\frac{u_n}{u_{n+1}}>\frac{v_n}{v_{n+1}}$, и так как ряд $v_n$ — сходящийся, то по теореме 2, § 2, и ряд $u_n$ — сходящийся.

2) Для ряда $v_n=\frac{1}{n^{k_1}}$, где $k<k_1<1$, имеем пред. $\left\{n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}-1\right)\right\}=k_1$ и из условия $k<k_1$ найдем $\frac{u_n}{u_{n+1}}<\frac{v_n}{v_{n+1}}$, откуда при расходимости ряда $v_n$, по теореме 2 § 2, ряд $u_n$ — расходящийся.

3) Для ряда $v_n=\frac{1}{n-a}$, где $a>A$, имеем:

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\left\{n\left[n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}-1\right)-1\right]\right\}=\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\left\{n\left[\frac{n}{n-a}-1\right]\right\}=a,$$

следовательно из неравенства $A<a$ получим при $n\geqq n_0$ $\frac{u_n}{u_{n+1}}<\frac{v_n}{v_{n+1}}$, и так как ряд $v_n$ — расходящийся, то и ряд $u_n$ (по теореме 2, § 2) расходящийся.

*Пример 6.* $u_n=\left(\frac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-1}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\right)^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

Так как $u_{n+1}=u_n\cdot\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^q$, то $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+q}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^p}$;

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]=\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^p}\cdot\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+q}-\left(1+\frac{1}{2n}\right)^p}{\frac{1}{n}}\right]=$$

$=p+q-\frac{p}{2}$ (см. § 10, пример 3) $=q+\frac{p}{2}$, следовательно при $q+\frac{p}{2}>1$ ряд сходящийся, при $q+\frac{p}{2}<1$ расходящийся; при $q+\frac{p}{2}=1$ ряд расходящийся $\left(\text{здесь } A=-\frac{1}{8}p\right)$.

**§ 4. Ряды с членами различных знаков. Абсолютная и неабсолютная сходимость, знакопеременные ряды.**

*Определение.* Сходящийся ряд $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$, члены которого разных знаков, называется абсолютно или неабсолютно сходящимся, смотря по тому, будет ли ряд абсолютных значений его членов $|u_0|+|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$ сходящимся или расходящимся.

*Пример.* Как увидим ниже, ряд $1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}-\frac{1}{4^k}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^k}+\ldots$ будет сходящимся при всех $k>0$; согласно примеру 2, § 1 он будет абсолютно сходящимся при $k>1$ и неабсолютно сходящимся при $0<k\leqq 1$.

Для рядов с членами разных знаков признаки § 3 дают только возможность сказать, будет ряд абсолютно сходящимся или не будет; но во втором случае остается открытым вопрос, есть ли ряд неабсолютно сходящийся или расходящийся. Один только класс знакопеременных рядов, т.-е. имеющих форму $u_0-u_1+u_2-u_3+\ldots+(-1)^n u_n+\ldots$, где все числа $u_0, u_1, u_2, \ldots$ положительные, обладает простым признаком сходимости.

*Теорема.* Знакопеременный ряд $u_0-u_1+u_2-u_3+\ldots+(-1)^n u_n+\ldots$ будет сходящимся, если 1) его члены убывают по абсолютному значению, т. е. $u_{n-1}>u_n$ и 2) $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\, u_n=0$.

Вывод. Рассмотрим $S_{n+m}-S_n=(-1)^{n+1}u_{n+1}+(-1)^{n+2}u_{n+2}+\ldots+(-1)^{n+m}u_{n+m}=(-1)^{n+1}\{u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\ldots+(-1)^{m-1}u_{n+m}\}$. Назвав выражение в скобках через $T_{n,m}$, представим его двояко:

$$T_{n,m}=(u_{n+1}-u_{n+2})+(u_{n+3}-u_{n+4})+\ldots+\begin{cases} u_{n+m} & \text{при } m \text{ нечети.}\\ (u_{n+m-1}-u_{n+m}) & \text{при } m \text{ четн.}\end{cases}$$

$$T_{n,m}=u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-(u_{n+4}-u_{n+5})-\ldots-\begin{cases} (u_{n+m-1}-u_{n+m}) & \text{при } m \text{ нечетн.}\\ u_{n+m} & \text{при } m \text{ четн.}\end{cases}$$

Из первого выражения в силу условия 1) теоремы, находим: $T_{n,m}>0$, и из второго: $T_{n,m}<u_{n+1}$, ибо все малые скобки представляют числа положительные. Таким образом $T_{n,m}=\vartheta_{n,m}\,u_{n+1}$, где $0<\vartheta_{n,m}<1$, и $S_{n+m}-S_n=(-1)^{n+1}\vartheta_{n,m}\cdot u_{n+1}$; в силу 2) условия теоремы $|S_{n+m}-S_n|<\varepsilon$ при $n\geqq n_0$ и при всяком $m>0$, а потому, по теореме § 1, ряд $u_n$ — сходящийся.

*Замечание 1.* Если в формуле: $S_{n+m}=S_n+(-1)^{n+1}\vartheta_{n,m}\,u_{n+1}$ будем увеличивать $m$ беспредельно, оставляя неизменным $n$, то найдем: $S=S_n+\vartheta\cdot(-1)^{n+1}\cdot u_{n+1}$, где $0<\vartheta<1$; это показывает, что погрешность, которую мы допускаем, заменяя сумму знакопеременного ряда суммою конечного числа членов, по знаку одинакова с первым отброшенным членом, а по абсолютному значению меньше его.

*Замечание 2.* Знакопеременный ряд с общим членом $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^k}$ будет сходящимся, согласно теореме, при всяком $k>0$, как отмечено уже в примере.

## § 5. Ряды, отличающиеся порядком членов. Неизменяемость суммы абсолютно сходящегося ряда.

*Определение.* Ряды $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ и $v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots$ отличаются только порядком членов, если, положив $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$, $T_m=v_0+v_1+\ldots+v_m$, можно утверждать, что при достаточно большом $m$ все члены $u_0, u_1 \ldots u_n$ входят в $T_m$ и обратно: при достаточно большом $n$ все члены $v_0, v_1, \ldots v_m$ входят в $S_n$.

*Теорема.* Сумма абсолютно сходящегося ряда не изменяется при перемене порядка членов.

Пусть $u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$ абсолютно сходящийся ряд, $v_0+v_1\ldots+v_n+\ldots$ — ряд, отличающийся от первого порядком членов. Согласно определению, каково бы ни было $n$, всегда можно выбрать $m$ столь большим, чтобы разность $T_m-S_n$ содержала только члены $u_j$ со значками $j>n$; итак имеем $T_m-S_n=\Sigma u_j$, при $j>n$; отсюда $|T_m-S_n|\leqq\sum\limits_{j>n}|u_j|$, и так как ряд $|u_n|$ сходящийся, то, по теореме § 1, $\sum\limits_{j>n}|u_j|<\varepsilon$ при любом числе членов (ибо $\sum\limits_{j=n+1}^{n+m}|u_j|<\varepsilon$ при всяком $m$). Если же $|T_m-S_n|<\varepsilon$, то пред. $T_m=$ пред. $S_n$ (см. гл. I, § 5, теор. 3).
$m=\infty$ $n=\infty$

*Замечание.* Для ряда неабсолютно сходящегося сумма не только может изменяться при перемене порядка членов, но ряд может из сходящегося обращаться в расходящийся.

*Пример 1.* Рассмотрим два ряда $\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+\left(\frac{1}{3^k}-\frac{1}{4^k}\right)+\ldots$ и $\left(1+\frac{1}{3^k}-\frac{1}{2^k}\right)+\left(\frac{1}{5^k}+\frac{1}{7^k}-\frac{1}{4^k}\right)+\ldots$, отличающиеся порядком членов, и положим: $S_{2n}=\sum\limits_{h=1}^{n}\left(\frac{1}{(2h-1)^k}-\frac{1}{(2h)^k}\right)$, $T_{3n}=\sum\limits_{h=1}^{n}\left(\frac{1}{(4h-3)^k}+\frac{1}{(4h-1)^k}-\frac{1}{(2h)^k}\right)$. Из тожества: $T_{3n}-S_{2n}=\frac{1}{(2n+1)^k}+\frac{1}{(2n+3)^k}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)^k}$ следуют неравенства: $\frac{n}{(4n-1)^k}<T_{3n}-S_{2n}<\frac{n}{(2n+1)^k}$. При $k>1$ имеем: пред. $\frac{n}{(4n-1)^k}=0$ и пред. $\frac{n}{(2n+1)^k}=0$, следовательно, $0\leqq$ пред. $(T_{3n}-S_{2n})\leqq 0$, т.-е. пред. $T_{3n}=$ пред. $S_{2n}$; суммы обоих рядов равны, что согласно с предъидущей теоремой, ибо при $k>1$ ряд $1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}-\ldots$ абсолютно сходящийся. При $k<1$ имеем $T_{3n}<S_{2n}+\frac{n^{1-k}}{\left(4-\frac{1}{n}\right)^k}$, и так как последний член обращается в $\infty$ вместе с $n$, то пред. $T_{3n}=\infty$, т.-е. новый ряд расходящийся, тогда как прежний был неабсолютно сходящийся. Наконец, при $k=1$ имеем: $\frac{1}{4}<$ пред. $(T_{3n}-S_{2n})<\frac{1}{2}$, т.-е. пред. $T_{3n}$ отличается от пред. $S_{2n}$ на конечную величину; из тожества:
$n=\infty$ $n=\infty$ $n=\infty$

$$T_{3n}-S_{4n}=\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{1}{4h-3}+\frac{1}{4h-1}-\frac{1}{2h}\right)-\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{1}{4h-3}-\frac{1}{4h-2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4h-1}-\frac{1}{4h}\right)=\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{1}{2h-1}-\frac{1}{2h}\right)=\frac{1}{2}S_{2n},$$ находим: $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\, T_{3n}=$

$=S+\frac{1}{2}S=\frac{3}{2}S$. Как увидим ниже, $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\log 2$,

следовательно $T=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots=\frac{3}{2}\log 2$.

*Пример 2.* Из неабсолютно сход. ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$ (сумма которого $=\log 2$) путем изменения порядка членов можно вывести новый ряд, сумма которого $\underset{m=\infty}{\text{пред.}}\, T_m$ будет равна любому числу $A$. Для этого нужно так выбирать порядок членов данного ряда, чтобы последовательные значения $T_m$: $T_1$, $T_2$, $T_3$,... были попеременно больше и меньше $A$, отличаясь от $A$ на величину, беспредельно убывающую; тогда $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\, T_n$ будет $=A$. Например, при $A=1$ берем: $T_1=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}>1$, $T_2=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}<1$, $T_3=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}>1$, $T_4=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}=\frac{47}{60}<1$, $T_6=T_4+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{1307}{1260}>1$, $T_7=T_6-\frac{1}{6}=\frac{1097}{1260}<1$, $T_9=T_7+$ $+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}=\frac{187111}{180180}>1$, $T_{10}=T_9-\frac{1}{8}=\frac{329177}{360360}<1$, $T_{12}=T_{10}+$ $+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}>1$, и т. д.

## § 6. Сложение и умножение рядов.

*Теорема 1.* Если ряды с общими членами $u_n$ и $v_n$ сходящиеся, то и ряд с общим членом $w_n=u_n+v_n$ сходящийся и имеет суммою $S+S'$, где $S$ и $S'$ — суммы данных рядов.

Вывод. Полагая $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$, $S_n'=v_0+v_1+\ldots+v_n$, $T_n=w_0+w_1+\ldots+w_n$, имеет при всяком $n$ тожество $T_n=S_n+S_n'$, и так как пред. $S_n=S$, пред. $S_n'=S'$, то по теореме 5, § 5, гл. I, пред. $T_n$ существует и равен $S+S'$.

*Замечание 1.* Если ряды $u_n$ и $v_n$ — абсолютно сходящиеся, то ряд $w_n$ — абсолютно сходящийся, ибо по доказанной теореме ряд $w_n'=|u_n|+|v_n|$ сходящийся, следовательно ряд с общим членом $|w_n|=|u_n+v_n|$ в силу неравенства $|w_n|\leqq w_n'$ и подавно сходящийся (см. § 2, теорему 1).

*Теорема 2.* Если один из сходящихся рядов $u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots=$ $=S$, $v_0+v_1+\ldots+v_n+\ldots=S'$ абсолютно сходящийся, то ряд с общим членом $w_n=u_0v_n+u_1v_{n-1}+u_2v_{n-2}+\ldots+u_{n-1}v_1+u_nv_0$ сходящийся и имеет суммою $S\cdot S'$.

Положив $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$, $S_n'=v_0+v_1+\ldots+v_n$, $T_n=w_0+$ $+w_1+\ldots+w_n$, имеем $T_n=\Sigma\, u_iv_j$ при $i\geqq 0$, $j\geqq 0$, $i+j\leqq n$, или $T_n=$ $=u_0(v_0+v_1+\ldots+v_n)+u_1(v_0+v_1+\ldots+v_{n-1})+u_2(v_0+v_1+\ldots$ $+\ldots+v_{n-2})+\ldots+u_{n-1}(v_0+v_1)+u_nv_0$. Вместе с тем $S_m\cdot S_m'=\Sigma\, u_iv_j$ при $0\leqq i\leqq m$, $0\leqq j\leqq m$ или $S_m\cdot S_m'=u_0(v_0+v_1+\ldots+v_m)+u_1(v_0+$ $+v_1+v_2+\ldots+v_m)+\ldots+u_m(v_0+v_1+\ldots+v_m)$.

Беря $m = \mathrm{E}\frac{n}{2}\left(\text{целой части } \frac{n}{2}\right)$, т.-е. $m = l$ при $n = 2l$ и $m = l$ при $n = 2l + 1$, найдем: $T_n - S_m \cdot S_m' = u_0(v_{m+1} + v_{m+2} + \ldots + v_n) + u_1(v_{m+1} + \ldots + v_{n-1}) + u_2(v_{m+1} + \ldots + v_{n-2}) + \ldots + u_m a + u_{m+1}(v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-m-1}) + u_{m+2}(v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-m-2}) + \ldots + u_n v_0$ (число $a = 0$, если $n = 2l$, и $a = v_{l+1}$, если $n = 2l + 1$, ибо число членов в скобке при $u_m$ равно $n - 2m$).

Предположим теперь, что ряд $u_n$ — абсолютно сходящийся, а ряд $v_n$ — абсолютно или неабсолютно сходящийся.

Из последнего равенства получаем:

$$|T_n - S_m \cdot S_m'| \leqq |u_0| \cdot |v_{m+1} + \ldots + v_n| + |u_1| \cdot |v_{m+1} + \ldots + v_{n-1}| + \ldots + \ldots + |u_m| \cdot |a| + |u_{m+1}| \cdot |v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-m-1}| + |u_{m+2}| \cdot |v_0 + \ldots v_{n-m-2}| + \ldots + |u_n| \cdot |v_0|.$$

Так как ряд $v_n$ сходящийся, то по теореме § 1, при достаточно большом $m$, можно считать все выражения $|v_{m+1} + \ldots + v_n|, |v_{m+1} + \ldots v_{n-1}|, \ldots |a|$ меньше $\varepsilon$, положительного числа сколь угодно малого, а все выражения $|v_0 + v_1 + \ldots v_{n-m-1}|, |v_0 + \ldots + v_{n-m-2}|, \ldots |v_0|$ меньше определенного числа $A$. Тогда $|T_n - S_m \cdot S_m'| < \varepsilon \{|u_0| + |u| + \ldots + |u_m|\} + A\{|u_{m+1}| + \ldots + |u_n|\}$.

Так как ряд $|u_n|$ сходящийся, то по теореме § 1 $|u_{m+1}| + \ldots + |u_n| < \varepsilon$, (положит. числа, сколь угодно малого) при достаточно больших $m$, а $|u_0| + |u_1| + \ldots + |u_m|$ меньше определенного числа $B$ при всех $m$ (ибо сумма $|u_0| + |u_1| + \ldots + |u_n|$ имеет предел при $n = \infty$). Итак, $|T_n - S_m \cdot S_m'| < \varepsilon B + \varepsilon' A$ при достаточно больших значениях $m$ и $n$, а следовательно $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\, T_n = \underset{m=\infty}{\text{пред.}}\, (S_m \cdot S_m') = S \cdot S'$, что и требовалось доказать.

*Замечание 2.* Если оба данные ряда абсолютно сходящиеся, то и ряд $w_n$ будет абсолютно сходящимся, ибо ряд $w_n' = |u_0|\,|v_n| + |u_1|\,|u_{n-1}| + \ldots + |u_n|\,|v_0|$ сходящийся по теореме 2, а $|w_n| \leqq w_n'$, следовательно по теореме 1, § 2 ряд $|w_n|$ и подавно сходящийся.

---

Глава III.

## Непрерывные функции от одной независимой переменной и их свойства.

### § 1. Независимая переменная и функция. Функции однозначные и многозначные, явные и неявные. Графическое представление.

*Определение 1.* Переменная величина называется независимою переменною, если она может принимать любое значение из всей совокупности возможных ее значений, при чем в дифференциальном исчислении рассматриваются лишь такие переменные, которые изменяются непрерывно в некотором интервале $a < x < b$ или $a \leqq x \leqq b$, принимая любое вещественное значение в указанных границах.

*Определение 2.* Если две переменные величины $x$ и $y$, из которых каждая имеет определенную совокупность значений (или область изменения), связаны между собою так, что каждому значению $x$ из его области изменения отвечает одно определенное значение $y$ из его области, то $y$ называется однознач-

ною функциею от $x$. Обыкновенно функция определяется аналитически, т.-е. указанием тех операций, которые нужно выполнить над $x$ для получения значения $y$, например $y=\frac{x^2+1}{x}$, $y=\sqrt[3]{x^2+1}$ суть функции от $x$, определенные: первая для всех вещественных значений $x$, кроме $x=0$, а вторая для всех вещественных значений $x$. Иногда функция может представляться различными аналитическими выражениями для различных интервалов $x$, например: $y=x$ при $0\leqq x<1$, $y=2-x$ при $1<x\leqq 2$ есть функция от $x$, определенная для интервала от $x=0$ до $x=2$, исключая $x=1$.

Если $y=x$ при $x$ целом и $y=0$ при $x$ нецелом, то $y$ есть функция от $x$, определенная для всего промежутка от $-\infty$ до $+\infty$.

*Определение 3.* Переменная $y$ называется $n$-значною функцией от $x$, если $y$ может принимать одно из $n$ определенных значений, когда дано определенное значение $x$. Такие многозначные функции обыкновенно задаются алгебраическими уравнениями, например: уравнение $x^2+y^2=a^2$ определяет двузначную функцию $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ при $-a\leqq x\leqq +a$; уравнение $x^3+y^3-3axy=0$ определяет при $0\leqq x\leqq a\sqrt[3]{2}$ трехзначную функцию от $x$ (при $-\infty<x<0$ и при $a\sqrt[3]{2}<x<+\infty$ эта функция однозначна, см. черт. 1). Могут быть и бесконечно-многозначные функции, например $y=\arcsin x$; если $x_0$ представляет одно из значений $x$ между $-1$ и $+1$, то между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ существует одно значение $y=y_0$, для которого $x_0=\sin y_0$, а общее выражение $y$ будет: $k\pi+(-1)^k\cdot y_0$, где $k$ целое число (черт. 2).

*Определение 4.* Переменная $y$ называется явною функциею от $x$, если $y$ определяется формулой вида: $y=f(x)$, как $y=\frac{x^2+1}{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$; $y$ называется неявною функциею от $x$, если определяется уравнением вида $f(x,y)=0$, например $x^2+2xy+y^2-3x-4y+1=0$. Решив такое уравнение относительно $y$, мы неявную функцию обращаем в явную:

$$y=2-x\pm\sqrt{3-x}.$$

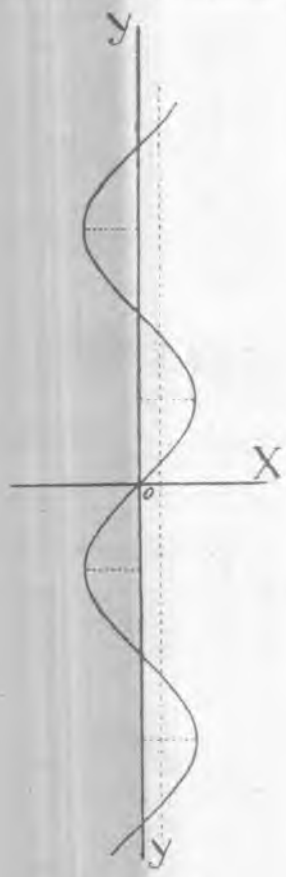
*Замечание 1.* В дифференциальном исчислении рассматриваются однозначные функции, а многозначные лишь в том случае, если при помощи добавочного условия многозначная функция обращается в однозначную; например, добавив к уравнению $x^2+y^2=a^2$ условие $y>0$, получаем однозначную функцию $y=+\sqrt{a^2-x^2}$; добавив к уравнению $y=\arcsin x$ условие $-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq +\frac{\pi}{2}$, получаем однозначную функцию.

*Замечание 2.* Зависимость между независимой переменной $x$, непрерывно изменяющейся в данном интервале, и ее функцией $y$ можно представить графически (чертежом), если, взяв ряд достаточно близких значений $x$: $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$, определить соответственные значения $y$: $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n \ldots$ и построить точки с прямоугольными координатами $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2\, y_2), \ldots (x_n\, y_n), \ldots$ Соединив эти точки непрерывною линией, мы получим график функциональной зависимости между $x$ и $y$. На черт. 1 изображена зависимость, выражаемая уравнением $x^3+y^3-3axy=0$ $(a>0)$, на черт. 2 имеем функцию $y=\arcsin x$, на черт. 3 дан график функции $y=x$ при $0\leqq x\leqq 1$, $y=2-x$ при $1\leqq x\leqq 2$. Если функция определяется при $x\geqq 0$ условием: $y=Ex$ (целой части числа $x$), то графи-

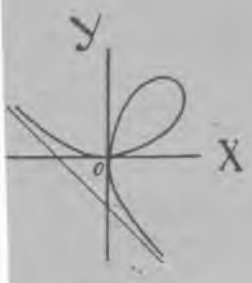
чески она представится (черт. 4) отдельными отрезками прямых: $y=0$ при $0 \leqq x < 1$, $y=1$ при $1 \leqq x < 2$, $y=2$ при $2 \leqq x < 3$ и т. д. Такую функцию $y$, которая определяется условием: $y=1$ при $x$ рациональном, $y=0$ при $x$ иррациональном, нельзя изобразить графически.

## § 2. Классификация функций. Гиперболические функции.

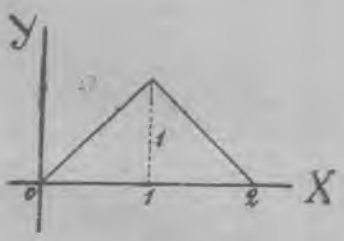
Функция $y$ называется алгебраической функцией от $x$, если она определяется уравнением вида $f(x,y)=0$, где $f$ есть многочлен, содержащий




Черт. 2.




Черт. 1.



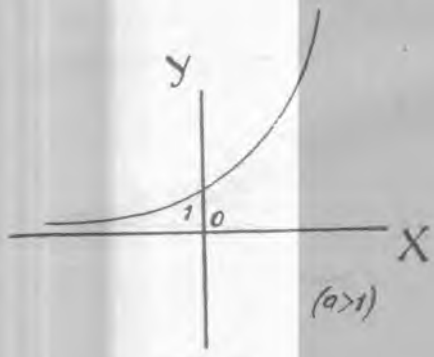

Черт. 3.


Черт. 4.

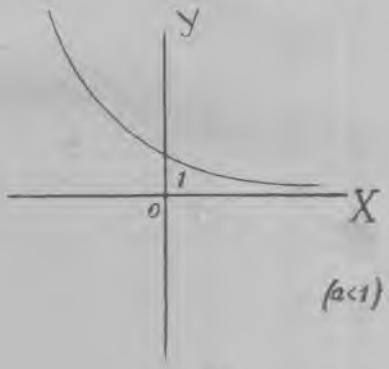
целые положительные степени $x$ и $y$; в развернутом виде это уравнение будет: $y^k \cdot P_0(x) + y^{k-1} \cdot P_1(x) + \ldots + y \cdot P_{k-1}(x) + P_k(x) = 0$, где $P_0$, $P_1, \ldots P_k$ — многочлены, содержащие целые положительные степени $x$.

Частным случаем алгебраической функции (при $k=1$) является дробная рациональная функция от $x$: $y = -\dfrac{P_1(x)}{P_0(x)}$ или при других обозначениях: $y = \dfrac{f(x)}{F(x)}$, где $f(x)$ и $F(x)$ — многочлены, содержащие целые положительные степени $x$. Если $F(x)=1$, то дробная функция обращается в целую алгебраическую функцию: $y=f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$, где коэффициенты $a_0$, $a_1, \ldots, a_m$ — данные постоянные.

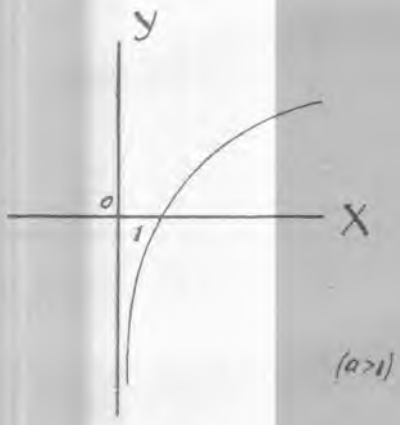
Всякая функция от $x$, не подходящая под определение алгебраической, называется трансцендентной. Таковы: 1) показательная функция $y = a^x$ при $a > 0$ (график на черт. 5); 2) логарифмическая функция $y = \mathrm{Log}_a x$ (график на черт. 6); 3) тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \lg x$,



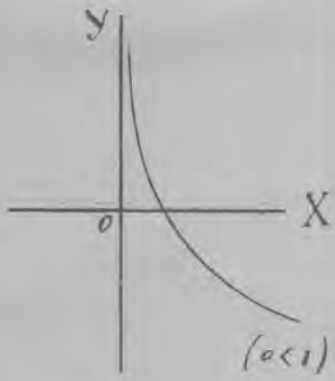

Черт. 5а.




Черт. 5б.




Черт. 6а.



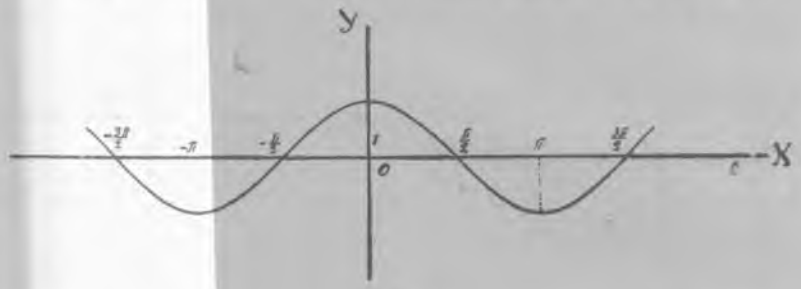

Черт. 6б.


Черт. 7.

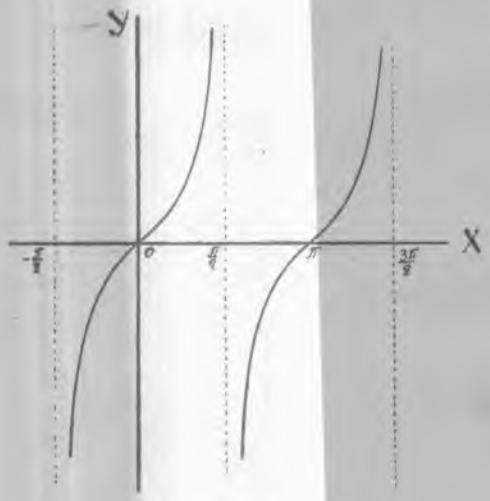
$y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \mathrm{cosec}\, x$ (графики на черт. 7—12); 4) круговые функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arccot}\, x$ (черт. 13—16); 5) степенную функцию $y = x^m$ при иррациональном $m$ также нужно причислить к трансцендентным функциям, ибо она не может определяться урав-

нением $f(x, y) = 0$, где $f$ есть полином, содержащий целые положительные степени $x$ и $y$.

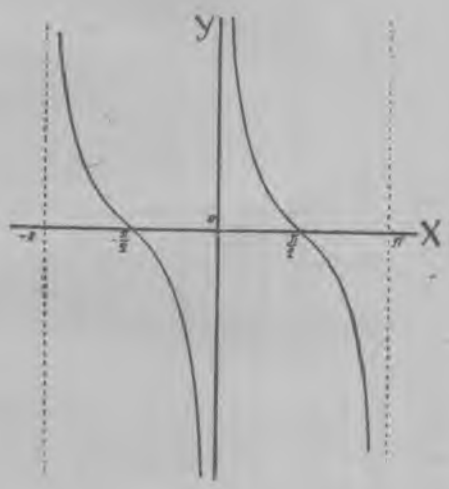
Дополним этот перечень гиперболическими функциями: синусом $\operatorname{sh} x$, косинусом $\operatorname{ch} x$, тангенсом $\operatorname{th} x$ и котангенсом $\coth x$, которые определяются формулами: $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\coth x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (графики их на черт. 17—20). Отметим формулы: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ (ибо




Черт. 8.




Черт. 9.

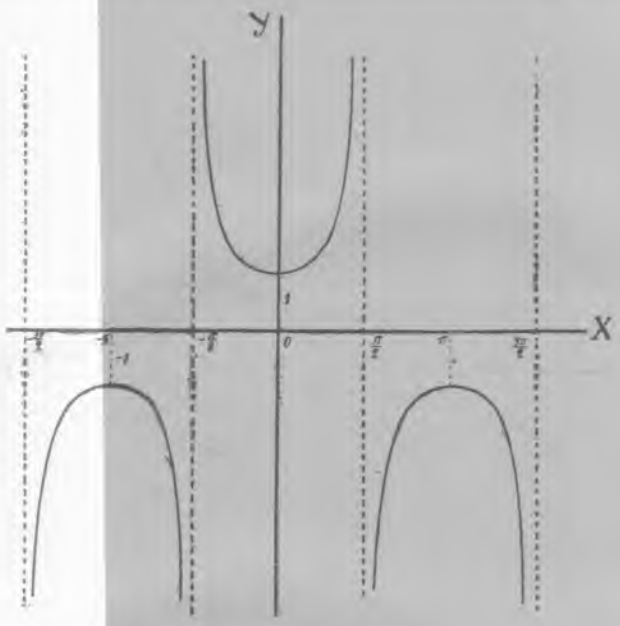



Черт. 10.

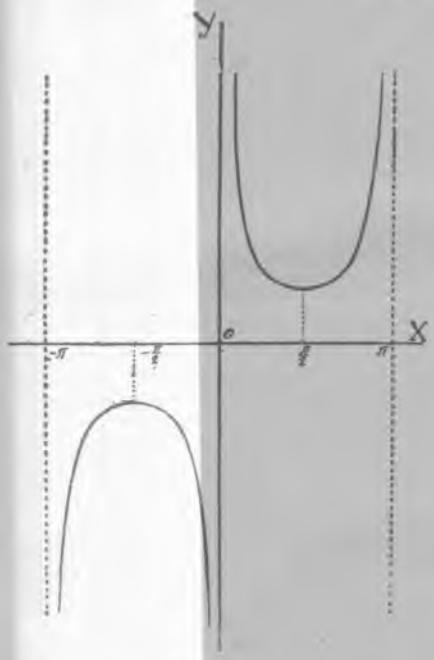
$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$, $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$), $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $\coth^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$; далее: $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$, $\coth(-x) = -\coth x$. Встречаются обратные гиперболические функции: $y = \operatorname{arcsh} x$ при $-\infty < x < +\infty$ и $y = \operatorname{arcth} x$ при $-1 < x < +1$ (графики на черт. 21 и 22). О гиперболических функциях см. ч. 2-ую, отд. I, гл. IV, § 5).

## § 3. Непрерывность функции и разрыв непрерывности.

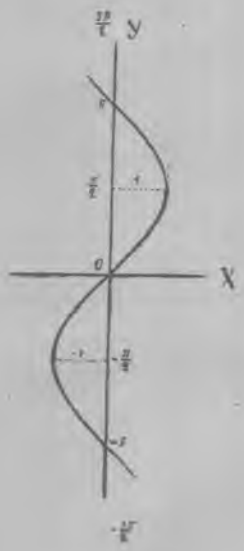
*Определение 1.* Пусть $y = f(x)$ есть функция от непрерывной независимой переменной $x$, определенная для значений $x$, достаточно близких к значению $x = a$; постоянная $L$ называется пределом функции $f(x)$ при $x = a$, если по данному положительному числу $\varepsilon$, сколь угодно малому, можно




Черт. 11.

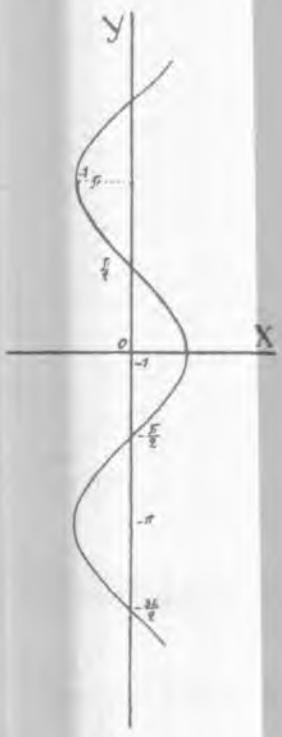



Черт. 12.

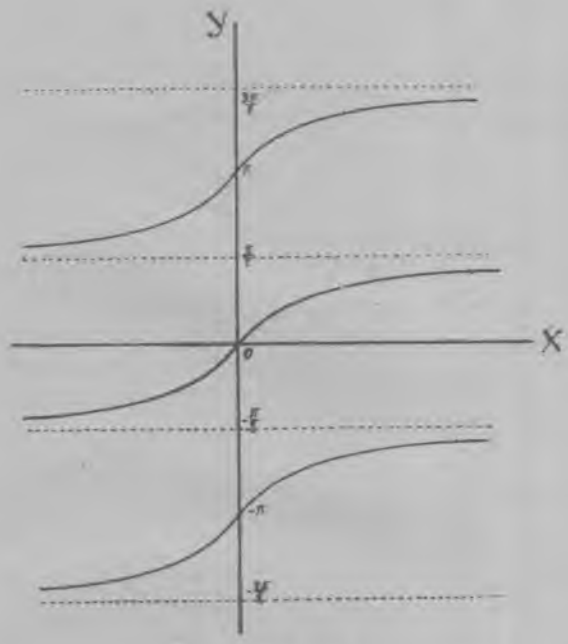



Черт. 13.

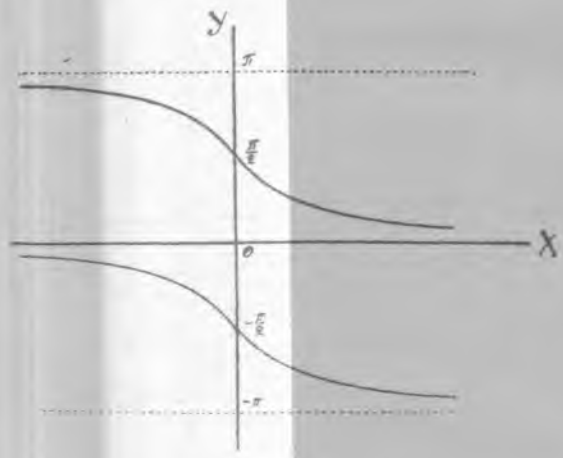
найти достаточно малое положительное $h$ так, чтобы при $|x-a|<h$ выполнялось неравенство $|f(x)-L|<\varepsilon$; тогда пишут: $\underset{x=a}{\text{пред.}}\, f(x)=L$. Может случиться, что существуют два различных предела для $f(x)$, смотря по тому,




Черт. 14.



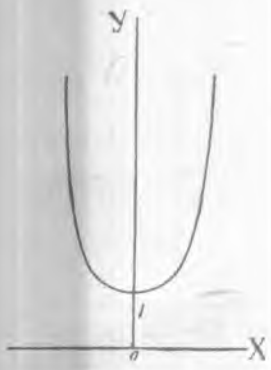

Черт. 15.



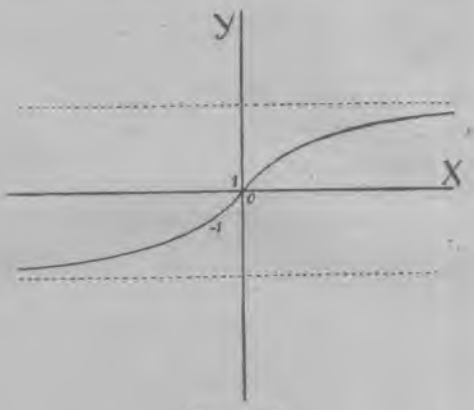

Черт. 16.


Черт. 17.

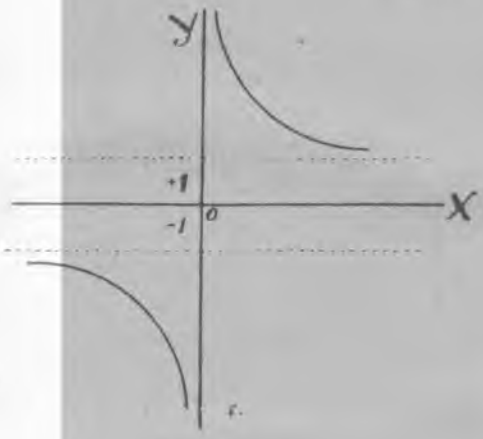
приближается ли $x$ к $a$, оставаясь меньше $a$ (тогда $-h < x - a < 0$) или оставаясь больше $a$ (тогда $0 < x - a < +h$); такие пределы называют иногда левым и правым пределом функции $f(x)$ при $x = a$ и обозначают символами: пред. $f(x)$ и пред. $f(x)$. Отметим, что в определении предела
$x=a-0$ $x=a+0$
$f(x)$ при $x = a$ не играет роли значение функции при $x = a$.



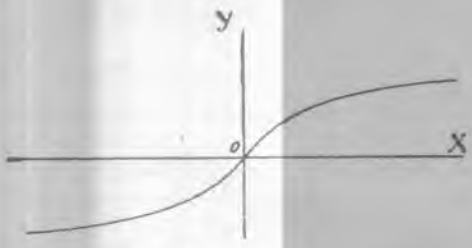

Черт. 18.



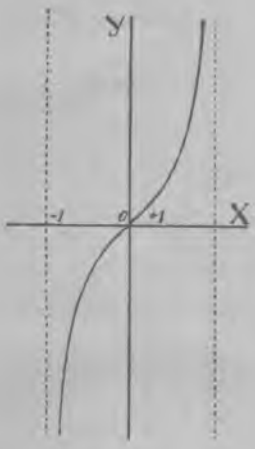

Черт. 19.




Черт. 20.




Черт. 21.



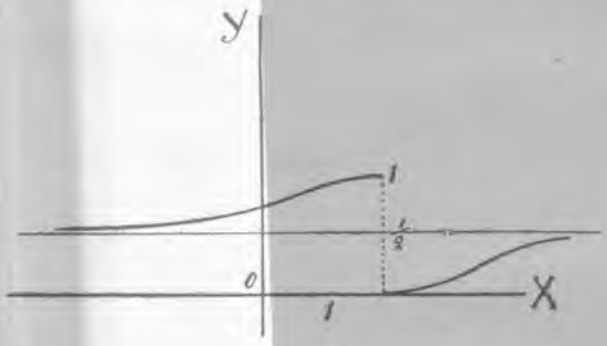

Черт. 22.

*Пример 1.* Найдем $\underset{x=1}{\text{пред.}}\left\{\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}\right\}$. Полагая $x=1-\dfrac{1}{n}$, где $n$ достаточно большое целое положительное число, имеем: $\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$, и так как $\underset{n=+\infty}{\text{пред.}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$, то левый предел нашей функции при $x=1$ есть 1;

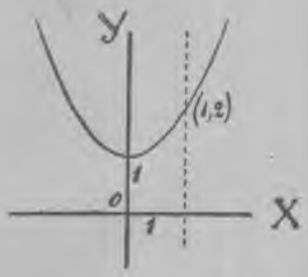
полагая $x=1+\frac{1}{n}$, найдем $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\frac{1}{1+2^n}$, и так как $\underset{n=+\infty}{\text{пред.}}\, 2^n=+\infty$, то правый предел функции при $x=1$ есть 0 (график функции на черт. 23). Здесь не существует значения функции при $x=1$.

*Определение 2.* Функция $y=f(x)$ от непрерывной независимой переменной $x$ называется непрерывною при $x=a$, если 1) символ $f(a)$ имеет определенное значение и 2) $\underset{x=a}{\text{пред.}}\, f(x)=f(a)$. Если одно из этих условий не выполнено, то говорят, что при $x=a$ функция $f(x)$ претерпевает разрыв непрерывности.

*Замечание.* Разрыв можно устранить, если он происходит от того, что символу $f(a)$ приписано значение, не совпадающее с пределом $f(x)$ при $x=a$, тогда нужно только изменить значение символа $f(a)$, приняв его равным $\underset{x=a}{\text{пред.}}\, f(x)$. Разрыв невозможно устранить, если 1) $\underset{x=a}{\text{пред.}}\, f(x)$ имеет различные правое и левое значения (конечный разрыв) и 2) $\underset{x=a}{\text{пред.}}\, f(x)$ (по крайней мере один — правый или левый) не существует, т.-е. равен $\pm\infty$, которая не считается за определенное число (бесконечный разрыв).




Черт. 23.




Черт. 24.

*Пример 2.* Функция $y=\frac{(x^2+1)(x-1)}{x-1}$ определена для всех значений $x$, кроме $x=1$; значение $f(1)$ можно взять совершенно произвольно; если взять $f(1)=\underset{x=1}{\text{пред.}}\left\{\frac{(x^2+1)(x-1)}{x-1}\right\}=2$, то функция будет непрерывна при всех значениях $x$ от $-\infty$ до $+\infty$. Переписав данное уравнение в виде $(x-1)(y-x^2-1)=0$, заключаем, что график данной функции состоит из совокупности параболы $y=x^2+1$ и прямой $x-1=0$ (черт. 24).

*Пример 3.* Функция примера 1 непрерывна при всех значениях $x$, кроме $x=1$, где она имеет конечный разрыв, ибо $\underset{x=1-0}{\text{пред.}}\, f(x)=1$, а $\underset{x=1+0}{\text{пред.}}\, f(x)=0$ (черт. 23), что иногда пишут: $f(1-0)=1$, $f(1+0)=0$.

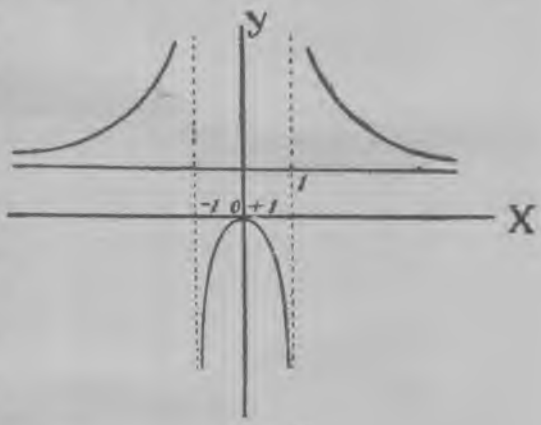
*Пример 4.* Из приведенных выше графиков 5 — 22 видно, что функция $y=\mathrm{Log}_a x$ имеет разрыв при $x=0$, ибо пред. $\mathrm{Log}_a x$ не существует (равен $\pm\infty$); функция $y=\mathrm{tg}\,x$ имеет разрывы при $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, как и $y=\sec x$; функции $y=\cot x$ и $y=\mathrm{cosec}\,x$ имеют разрывы при $x=k\pi$; $y=\coth x$ имеет разрыв при $x=0$ (во всех этих случаях $f(x)$ не имеет ни правого, ни левого предела).

*Определение 3.* Функция $y=f(x)$ называется непрерывною в интервале значений $x$ $a \leqq x \leqq b$, если $f(x)$ непрерывна (в смысле определения 2) для всякого значения $x$ внутри этого интервала; на границах условие непрерывности выражается так: $\underset{x=a+0}{\text{пред.}} f(x)=f(a+0)$ и $\underset{x=b-0}{\text{пред.}} f(x)=f(b-0)$.

Рассмотрим вопрос о непрерывности для функций, перечисленных в § 2.

1) Целая функция $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$ непрерывна при всяком значении $x=a$, ибо 1) значение $f(a)$ всегда конечное и определенное и 2) на основании теорем § 5 гл. I о пределе суммы, произведения и степени имеем: $\underset{x=a}{\text{пред.}} f(x)=a_0a^m+a_1a^{m-1}+\ldots+a_m=f(a)$.

2) Дробная функция $y=\frac{f(x)}{F(x)}$, где $f(x)$ и $F(x)$ — целые функции, имеет конечное и определенное значение при всех $x=c$, кроме тех, при которых знаменатель $F(a)=0$, и если исключить эти значения, то функция непрерывна, ибо по теореме 8 § 5 гл. I $\underset{x=a}{\text{пред.}} \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(a)}{F(a)}$. Что касается исключенных значений, для которых $F(a)=0$, то допустим, что числитель и знаменатель дроби содержат множитель $x-a$ в целой положительной степени: $f(x)=(x-a)^k f_1(x)$, $F(x)=(x-a)^l \cdot F_1(x)$, при чем $f_1(a)$ не $=0$ и $F_1(a)$ не 0. Тогда $\underset{x=a}{\text{пред.}} \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f_1(a)}{F_1(a)} \cdot \underset{x=a}{\text{пред.}} (x-a)^{k-l}$; поэтому, если $k \geqq l$, то $\underset{x=a}{\text{пред.}} \frac{f(x)}{F(x)}$ существует, и можно сделать функцию непрерывной, приняв $f(a)$ равной этому пределу (см. такой случай в примере 2); если же $k<l$, то предела для $(x-a)^{k-l}$ нет (он равен $\infty$), следовательно разрыв дробной функции устранить нельзя (см. пример 5).



Черт. 25.

*Пример 5.* $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ имеет два разрыва: при $x=-1$ и при $x=+1$ (см. черт. 25).

3) Степенная функция $y=x^m$ имеет определенное значение при всех $x \geqq 0$, кроме $x=0$ при $m \leqq 0$; кроме того, по теореме § 10, гл. I, $\underset{x=a}{\text{пред.}} x^m=a^m$, следовательно степенная функция непрерывна при всех $x$, кроме $x=0$ при $m \leqq 0$.

4) Показательная функция $y=A^x$ ($A>0$ и не 1) непрерывна при всех значениях $x$, ибо $A^a$ имеет смысл при всяком $a$ и по теореме § 11, гл. I, $\underset{x=a}{\text{пред.}} A^x=A^a$.

5) Логарифмическая функция $y=\mathrm{Log}_A x$ ($A>0$ и не $=1$) непрерывна при всех $x$, кроме $x=0$, ибо символ $\mathrm{Log}_A a$ имеет смысл и по теореме 3, § 12, гл. I, пред. $\mathrm{Log}_A x=\mathrm{Log}_A a$.

6) Тригонометрические функции $y=\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\cot x$ непрерывны (по § 13, гл. I) для всех значений $x$, кроме значений $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ для $\operatorname{tg} x$ (и $\sec x$) и значений $x=k\pi$ для $\cot x$ (и $\operatorname{cosec} x$).

7) Гиперболические функции $y=\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\coth x$ непрерывны при всех значениях $x$, кроме $\coth x$, имеющей разрыв при $x=0$. Существование предела для $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ при $x=a$ доказывается на основании теоремы о пределе суммы, показательного выражения и обратной величины (теорема 7 § 5 гл. I); например: $\underset{x=a}{\text{пред.}} \operatorname{sh} x = \underset{x=a}{\text{пред.}} \left\{\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}\right\} = \frac{1}{2}e^{a}-\frac{1}{2}e^{-a}=\operatorname{sh} a$ и пр.

8) О непрерывности обратных круговых и обратных гиперболических функций будет сказано ниже, в § 5.

Из теорем 5, 6, 8 § 5 гл. I следуют такие теоремы: I) сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная; II) произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная; III) частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная при всех $x$, кроме тех значений, при которых знаменатель $=0$. Из теорем § 10, 11, 12, 13 можно заключить: IV) если $f(x)$ непрерывная функция, то $A^{f(x)}$ также непрерывная функция ($A>0$); V) если $f(x)$ положительная непрерывная функция, то $\operatorname{Log}_A f(x)$ непрерывная функция, кроме значений, при которых $f(x)=0$; VI) если $f(x)$ положительная непрерывная функция, то $[f(x)]^m$ при всяком показателе $m$ непрерывна, кроме тех значений $x$, при которых $f(x)=0$, если притом $m<0$; VII) если $f(x)$ непрерывная функция, то $\sin f(x)$, $\cos f(x)$ непрерывны при всех $x$, и т. д.

## § 4. Свойства непрерывных функций.

*Теорема 1* (Коши). Если $f(x)$ есть непрерывная функция от $x$ при $a\leqq x\leqq b$ и если числа $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то существует в интервале $a<x<b$ по крайней мере одно число $x=c$ такое, что $f(c)=0$.

Пусть $f(a)<0$, $f(b)>0$. Разобьем интервал $(a, b)$ на два $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$; если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$, то положим $a_1=a$, $b_1=\frac{a+b}{2}$, а если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, то положим $a_1=\frac{a+b}{2}$ и $b_1=b$; тогда в обоих случаях окажется $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$. Интервал $(a_1, b_1)$ опять разобьем на два: $\left(a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right)$, $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right)$ и, если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)>0$, примем $a_2=a_1$, $b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, а если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0$, примем $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2=b_1$; тогда $f(a_2)<0$, $f(b_2)>0$. Продолжая такое рассуждение, мы составим два ряда чисел: $a, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ и $b, b_1, b_2 \ldots b_n, \ldots$, при чем или одно из чисел $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ окажется $=0$ (тогда теорема уже и доказана) или все время будет $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$. Мы видели при доказательстве теоремы Вейерштрасса в § 8 гл. I, что составленные два ряда чисел имеют общий предел: пред. $a_n=$ пред. $b_n=c$.

Докажем, что $f(c)=0$. Так как $f(x)$ непрерывна при $x=c$, то $\underset{n=+\infty}{\text{пред.}} f(a_n)=\underset{n=+\infty}{\text{пред.}} f(b_n)=\underset{x=c}{\text{пред.}} f(x)=f(c)$; но если $f(a_n)<0$ при всех $n$, то

пред. $f(a_n) = f(c) \leqq 0$, а если $f(b_n) > 0$, то пред. $f(b_n) = f(c) \geqq 0$, что приводит к заключению $f(c) = 0$. (Если при $n \geqq n_0$ оказывается $x_n < 0$, то пред. $x_n = Z \leqq 0$, ибо, допустив $Z > 0$, имели бы при $n \geqq n_0$ $x_n > Z - \varepsilon > \frac{1}{2} Z$, т.-е. $x_n > 0$, что противоречит условию; см. также § 5, гл. I, теор. 2.)

*Следствие.* Если $f(x)$ — непрерывная функция от $x$ при $a \leqq x \leqq b$ и если $C$ заключено между $f(a)$ и $f(b)$, то найдется между $a$ и $b$ по крайней мере одно число $x = c$ такое, что $f(c) = C$.

Вывод. Если $f(a) < C < f(b)$, то, составив новую функцию $\varphi(x) = f(x) - C$, убеждаемся, что она непрерывна при $a \leqq x \leqq b$ и что $\varphi(a) < 0$, $\varphi(b) > 0$; поэтому, по теореме 1, существует число $c$ между $a$ и $b$ такое, что $\varphi(c) = 0$, т.-е. $f(c) = C$, что и требовалось доказать.

*Определение.* Точным высшим пределом значений переменной $x$ называется число $M$, удовлетворяющее двум условиям: $M \geqq x$ для всех значений $x$, $M - \varepsilon < x$ для некоторых значений $x$ (хотя бы для одного), как бы ни было мало положительное число $\varepsilon$. Точный низший предел $m$ определяется условиями: $m \leqq x$ для всех значений $x$, $m + \varepsilon > x$ для некоторых $x$.

*Лемма.* Если все значения переменной заключены между конечными числами: $A < x < B$ (такая переменная называется конечною, см. гл. I, § 4), то существует и точный высший и точный низший предел значений такой переменной.

Вывод. Разобьем все рациональные числа на два класса так, чтобы 1) ко 2-му классу относились числа, которые больше всех значений $x$, 2) к 1-му классу — относились числа, которые $\leqq x$ для некоторых значений $x$. Заметим, что все значения $x < B$, следовательно при любом целом положительном $n$ имеем $nx < nB$, и потому $E(nx)$ (целые части чисел $nx$) не превосходят определенного числа; пусть $N$ — наибольшее из $E(nx)$; тогда имеем $nx < N + 1$, $x < \frac{N+1}{n}$ для всех значений $x$, но $nx \geqq N$, $x \geqq \frac{N}{n}$ для некоторых $x$; отсюда видно, что рациональное число $\frac{N+1}{n}$ будет относиться к 2-му классу, а $\frac{N}{n}$ к 1-му, так что в виду произвольности $n$ числа 1-го класса будут сколь угодно близко подходить к числам 2-го класса.

Произведенный нами в области рациональных чисел разрез определяет некоторое вещественное число $M$, рациональное или иррациональное, которое обладает свойством: 3) все рациональные числа $< M$ будут принадлежать к 1-му классу, а все рациональные числа $> M$ — ко 2-му классу.

Докажем от противного, что число M обладает обоими свойствами точного высшего предела.

Именно: не может быть $M < x_j$ для какого-либо значения $x$, ибо все рациональные числа между $M$ и $x_j$ по 3) относятся ко 2-му классу, а по 2) относятся к 1-му классу, что представляет противоречие; не может быть $M - \varepsilon \geqq x$ для всех значений $x$, так как все рациональные числа между $M - \varepsilon$ и $M$ по 3) относятся к 1-му классу, а по 1) относятся ко 2-му классу, ибо все эти числа $> x$ для всех значений; но в этом опять противоречие. Итак, должно быть $M \geqq x$ для всех $x$, $M - \varepsilon < x$ для некоторых значений, т.-е. $M$ есть точный высший предел. Аналогично доказывается существование точного низшего предела $m$.

*Теорема 2.* Если функция $y=f(x)$ непрерывна при $a \leqq x \leqq b$, то она достигает в этом интервале своего точного высшего предела $M$ и точного низшего предела $m$, т.-е. в интервале $a \leqq x \leqq b$ найдутся два числа $x=c$ и $x=c'$, для которых $f(c)=M$ и $f(c')=m$; эти значения представляют наибольшее и наименьшее значения функции в данном интервале. По доказанной лемме для значений $f(x)$ при $a \leqq x \leqq b$ существует точный высший предел $M$ и точный низший предел $m$, ибо, по условию непрерывности, функция будет и конечною в интервале $(a, b)$.

Докажем существование числа $c$, для которого $f(c)=M$. Разобьем интервал $(a, b)$ на два интервала $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ и обозначим через $(a_1, b_1)$ тот из них, для которого точный высший предел равен $M$ (для другого точный высший предел $\leqq M$). Ту же операцию проделаем для интервала $(a_1, b_1)$ и т. д.; это даст нам два ряда чисел $a, a_1, \ldots a_n, \ldots, b, b_1 \ldots b_n \ldots$, при чем пред. $a_n =$ пред. $b_n = c$, и в интервале $(a_n, b_n)$ точный высший предел значений $f(x)$ равен $M$. Докажем, что $f(c)=M$; вообще для всех $x$ в интервале $(a, b)$ должно быть $f(x) \leqq M$, следовательно $f(c) \leqq M$; нужно только доказать невозможность неравенства $f(c) < M$. Допустив его, мы имеем $M - f(c) > 0$, и следовательно, по условию непрерывности $f(x)$ при $x=c$, можно считать при $|x-c| < h$ выполненным неравенство $|f(x)-f(c)| < \frac{M-f(c)}{2}$; с другой стороны, при $n \geqq n_0$, имеем $-h < a_n - c$ и $b_n - c < +h$, где $h$ — любое положительное число; если взять $x$ в интервале $a_n \leqq x \leqq b_n$, то для него $a_n - c \leqq x - c \leqq b_n - c$ и подавно $-h < x - c < +h$, т.-е. $|x-c| < h$ и потому для всякого $x$, взятого в интервале $(a_n, b_n)$, будет $|f(x)-f(c)| < \frac{M-f(c)}{2}$, а так как $f(x) = f(c) + [f(x) - f(c)]$, то $f(x) < f(c) + \frac{M-f(c)}{2} = \frac{M+f(c)}{2}$. Этому результату противоречит то, что $M$ есть точный высший предел значений $f(x)$ в интервале $(a_n, b_n)$, и потому для некоторых значений $x$ в этом интервале должно быть $f(x) > M - \varepsilon$, где $\varepsilon$ любое положительное число; беря $\varepsilon = \frac{M-f(c)}{2}$, находим $f(x) > \frac{M+f(c)}{2}$; из полученного противоречия заключаем, что не может быть $f(c) < M$, следовательно $f(c)=M$.

Аналогично доказывается существование числа $c'$, для которого $f(c')=m$.

*Следствие.* Какое бы число $C$ между наибольшим значением $M$ и наименьшим значением $m$ функции в интервале $a \leqq x \leqq b$ мы ни взяли, всегда найдется в этом интервале по крайней мере одно число $x=x_0$ такое, что $f(x_0)=C$.

Пусть $f(c)=M$ и $f(c')=m$, при чем $c$ и $c'$ заключены в пределах $a \leqq x \leqq b$; так как $f(x)$ непрерывна в интервале между $c$ и $c'$ и на границах интервала имеет значения $M$ и $m$, то по следствию теоремы 1-ой для всякого числа $C$, взятого между $m$ и $M$, найдется такое $x_0$ между $c$ и $c'$, для которого $f(x_0)=C$.

*Теорема 3* (Вейерштрасса). Если при $a \leqq x \leqq b$ функция $f(x)$ непрерывна, то какое бы малое положительное число $\varepsilon$ ни задали, всегда можно найти достаточно малое положительное $h$ так, чтобы для всяких двух значений $x$: $x'$ и $x''$, лежащих в интервале $(a, b)$ и удовлетворяющих условию $|x'-x''| < h$, выполнялось неравенство $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$; иначе: функ-

ция, непрерывная в интервале $a \leqq x \leqq b$, есть и равномерно непрерывная в этом интервале.

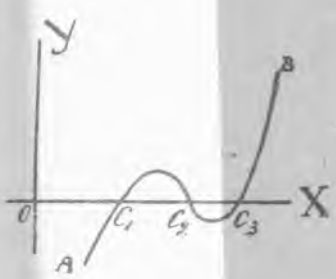
Предположим, что доказана возможность интервал $(a, b)$ разбить на конечное число интервалов так, чтобы для всяких двух значений $x$: $x'$ и $x''$, лежащих в одном и том же интервале, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Тогда будет доказана и теорема 3. В самом деле, если данный интервал $(a, b)$ будет разбит на конечное число $k$ меньших интервалов, то наименьший по величине из этих новых интервалов будет равен некоторому определенному положительному числу $h$. Если мы возьмем два значения $x$: $x'$ и $x''$, лежащие в интервале $a \leqq x \leqq b$ и удовлетворяющие неравенству $|x' - x''| < h$, то или оба они будут лежать в одном и том же из упомянутых интервалов, или в двух соседних; в первом случае будем иметь по предположению $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$; во втором случае, обозначая через $x_j$ значение $x$, лежащее на границе двух интервалов, которые содержат $x'$ и $x''$, будем иметь по предположению $|f(x') - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|f(x_j) - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $|f(x') - f(x'')| \leqq |f(x') - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x'')| < \varepsilon$, что и доказывает теорему. Итак, нам нужно показать, что возможно разбить интервал $(a, b)$ на конечное число интервалов так, чтобы $|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{2}\varepsilon$, если $x'$ и $x''$ лежат внутри одного из новых интервалов. Докажем теорему от противного. Предположим, что интервал $(a, b)$ невозможно разбить на конечное число частей так, чтобы выполнялось неравенство $|f(x') - (f(x'')| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Тогда один, по крайней мере, из двух интервалов $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ должен обладать тем же свойством; его границы обозначим через $a_1$, $b_1$ и разобьем новый интервал на части $\left(a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right)$, $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right)$; для той части, которая не может быть разбита на меньшие интервалы с соблюдением неравенства $|f(x') - (f(x'')| < \frac{1}{2}\varepsilon$, обозначим границы $(a_2, b_2)$ и т. д. Так образуем два ряда чисел $a, a_1, \ldots a_n, \ldots$ и $b, b_1, \ldots b_n, \ldots$, имеющие общий предел $c$; по условию непрерывности функции $f(x)$ при $x = c$ имеем: $|(f(x) - f(c)| < \frac{1}{4}\varepsilon$ при $|x - c| < h$; но при $n \geqq n_0$ имеем $-h < a_n - c < b_n - c < +h$, следовательно любые два значения $x$, взятые между $a_n$ и $b_n$, например $x'$, $x''$, будут удовлетворять неравенству $-h < x - c < +h$, и потому $|f(x') - f(c)| < \frac{1}{4}\varepsilon$, $|f(x'') - f(c)| < \frac{1}{4}\varepsilon$, откуда $|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{2}\varepsilon$; так как по предположению такое неравенство невозможно для чисел $x'$, $x''$, лежащих в интервале $(a_n, b_n)$, то это противоречие и доказывает теорему.

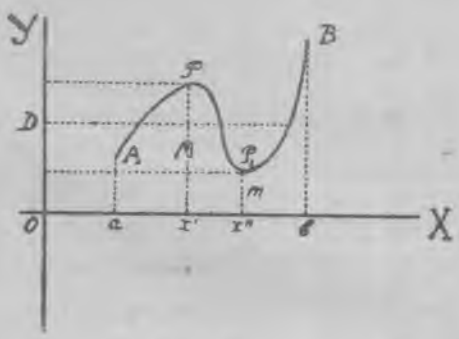
*Замечание.* Если обратиться к геометрическому представлению непрерывной функции при помощи непрерывной линии, то некоторые из предъидущих теорем делаются очевидными. Так, теорема 1 выражает то свойство, что непрерывная линия, соединяющая точку $A(a, f(a))$, лежащую под осью $OX$, с точкою $B(b, f(b))$, лежащею под осью $OX$, должна по крайней

мере один раз (вообще нечетное число раз) пересечь ось $OX$, но в этих точках пересечения $x = c_1, c_2, \ldots$ оказывается $f(c_1) = 0$, $f(c_2) = 0 \ldots$ (черт. 26)

Подобным образом следствие теоремы 2-й доказывается черт. 27, где на оси $OY$ отложен отрезок $OD = C$ и через $D$ проведена прямая $DD'$, пересекающая непрерывную линию $AB$ в нескольких точках с абсциссами $c, c_1, c_2, \ldots$, для которых $f(c) = f(c_1) = f(c_2) = \ldots = C$.



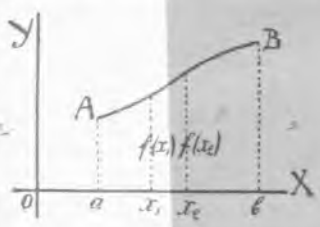

Черт. 26.



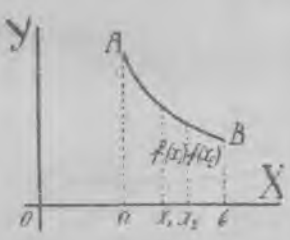

Черт. 27.

## § 5. Обратные функции.

*Определение.* Функция $y = f(x)$ называется возрастающей в данном интервале $a \leqq x \leqq b$, если для любых двух значений $x$ внутри этого интервала: $x_1, x_2$ неравенству $x_1 < x_2$ отвечает неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, и называется убывающею в данном интервале, если неравенству $x_1 < x_2$ отвечает $f(x_1) > f(x_2)$ (черт. 28 и 29). Функция $y = f(x)$ называется монотонною в данном интервале $a \leqq x \leqq b$, если она представляет или возрастающую, или убывающую функцию в этом интервале.




Черт. 28.



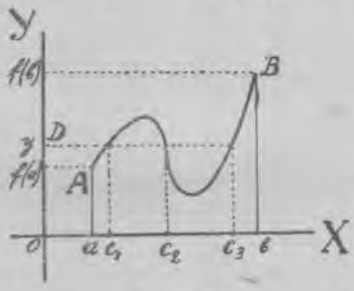

Черт. 29.

*Теорема.* Если $y = f(x)$ есть непрерывная и монотонная функция при $a \leqq x \leqq b$, то полученное из уравнения $y = f(x)$ выражение $x$ через $y$: $x = \varphi(y)$ также представляет непрерывную и монотонную функцию от $y$ при значениях $y$ от $y = f(a)$ до $y = f(b)$.

Пусть для определенности $y = f(x)$ — возрастающая функция при $a \leqq x \leqq b$. Если возьмем какое-нибудь значение $y = C$, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$, то, по следствию теоремы 1, § 4, найдется по крайней мере одно значение $x = c$ между $a$ и $b$, для которого $f(c) = C$; при условии монотонности такое значение $x = c$ может быть только единственным между $a$ и $b$, ибо, допустив существование другого значения $x = c_1$, для которого $f(c_1) = C = f(c)$, приходим к противоречию, так как при $c < c_1$ должно быть $f(c) < f(c_1)$ и при $c_1 < c$ должно быть $f(c_1) < f(c)$.

Итак каждому значению $y$ в интервале: $f(a) \leqq y \leqq f(b)$ отвечает одно значение $x$ в интервале $a \leqq x \leqq b$, т.-е. $x = \varphi(y)$ есть однозначная функция от $y$. Эта функция будет возрастающая, так как неравенству $y_1 < y_2$ может отвечать только $x_1 = \varphi(y_1) < x_2 = \varphi(y_2)$; в самом деле, допустив, что $x_2 \leqq x_1$, мы имели бы $y_2 = f(x_2) \leqq y_1 = f(x_1)$, что противоречит предположению $y_1 < y_2$. Остается доказать непрерывность функции $x = \varphi(y)$; по § 3, определение 2, при существовании значения $f(c)$, непрерывность функции $f(x)$ при $x = c$ заключается в том, чтобы пред. $\{f(x) - f(c)\} = 0$ при пред. $(x - c) = 0$, т.-е. приращение $(x - c)$ независимой переменной и приращение $\{f(x) - f(c)\}$ функции являются одновременно бесконечно-малыми величинами; полагая $C = f(c)$, $c = \varphi(C)$, найдем, что приращения $y - C$ и $\varphi(y) - \varphi(C)$ будут одновременно бесконечно-малыми, т.-е. $x = \varphi(y)$ есть непрерывная функция при $y = C$. Рассмотренные здесь функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ называются обратными функциями.

*Замечание.* Если $y = f(x)$ есть непрерывная, но не монотонная функция от $x$, то $x = \varphi(y)$ будет непрерывная, но не однозначная функция от $y$, ибо данному $y$ может отвечать несколько различных значений $x$ (см. черт. 30, где данному $y = OD$ отвечают три значения $x$: $x = oc_1$, $x = oc_2$, $x = oc_3$).



Черт. 30.

*Пример 1.* Функция $y = x^2$ есть непрерывная и возрастающая при $0 \leqq x < +\infty$; при чем $y$ изменяется в интервале $0 \leqq y < +\infty$. Обратная функция $x = \sqrt{y}$ при $0 \leqq y < +\infty$ будет также непрерывная и возрастающая.

*Пример 2.* Функция $y = a^x$ есть непрерывная и монотонная при $-\infty < x < +\infty$, при чем $y$ возрастает в интервале $0 < y < +\infty$ при $a > 1$, $y$ убывает между границами $+\infty > y > 0$ при $a < 1$; обратная функция $x = \mathrm{Log}_a y$ есть непрерывная и монотонная в интервале значений $y$: $0 < y < +\infty$ (значение 0 исключается, здесь функция $x$ имеет разрыв).

*Пример 3.* Функция $y = \sin x$ есть непрерывная и возрастающая при $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}$, при чем $-1 \leqq y \leqq +1$; отсюда обратная функция $x = \arcsin y$ есть непрерывная и возрастающая в интервале $-1 \leqq y \leqq +1$ при чем значения $x$ изменяются в границах $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}$ (см. черт. 13, где жирной линией обведено однозначное представление функции $y = \arcsin x$).

*Пример 4.* Функция $y = \cos x$ есть непрерывная и убывающая от $y = +1$ до $y = -1$ при $0 \leqq x \leqq \pi$; обратная функция $x = \arccos y$ есть непрерывная и убывающая при $-1 \leqq y \leqq +1$, при чем значения $x$ заключены в интервале $\pi \geqq x \geqq 0$ (на черт. 14 однозначное представление функции $y = \arccos x$ обведено жирною линией).

*Пример 5.* Функция $y = \mathrm{tg}\, x$ — непрерывная и возрастающая от $-\infty$ до $+\infty$ при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (исключая границы, где $y$ терпит разрыв); обратная функция $x = \mathrm{arctg}\, y$ при $-\infty < y < +\infty$ будет непрерывная и возрастающая, при чем значения $x$ заключены в пределах $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (см. черт. 15).

*Пример 6.* Функция $y = \cot x$ — непрерывная и убывающая от $+\infty$ до $-\infty$ при $0 < x < \pi$ (исключая границы); обратная функция $x = \operatorname{arccot} y$ непрерывная и убывающая при $-\infty < y < +\infty$, при чем $x$ заключено в интервале $\pi > x > 0$ (см. черт. 16).

*Пример 7.* Функция $y = \operatorname{sh} x$ при $-\infty < x < +\infty$ непрерывная и возрастающая от $-\infty$ до $+\infty$; обратная функция $x = \operatorname{arcsh} y$ при $-\infty < y < +\infty$ непрерывная и возрастающая от $-\infty$ до $+\infty$ (см. черт. 21).

*Пример 8.* Функция $y = \operatorname{th} x$ при $-\infty < x < +\infty$ непрерывная и возрастающая от $-1$ до $+1$; обратная функция $x = \operatorname{arcth} y$ при $-1 < y < +1$ есть непрерывная и возрастающая от $-\infty$ до $+\infty$ (черт. 22).

ОТДЕЛ II.

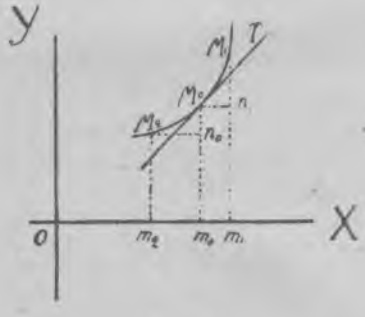
# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

## Глава I.

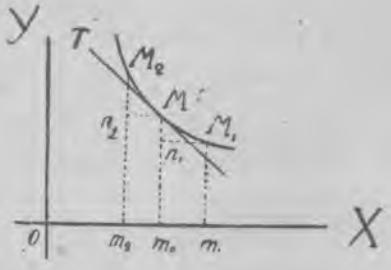
## Дифференцирование явных функций от одной независимой переменной.

### § 1. Значение знака пред. $\frac{f(x+h)-f(h)}{h}$ для суждения о возрастании и убывании функции.

*Определение.* Пусть $y=f(x)$ непрерывная функция при $a \leqq x \leqq b$. Функция называется возрастающей при $x=x_0$ $(a<x_0<b)$, если при достаточно малых $|h|$ приращение функции $f(x_0+h)-f(x_0)$ имеет знак, одинаковый с приращением $h$ независимой переменной, т.-е если $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>0$;




Черт. 31.



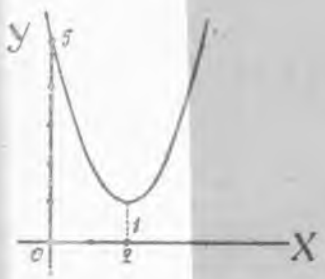

Черт. 32.

функция называется убывающею при $x=x_0$, если при достаточно малых $|h|$ приращение функции $f(x_0+h)-f(x_0)$ имеет знак, обратный знаку $h$, т.-е. если $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}<0$ (см. черт. 31 и 32).

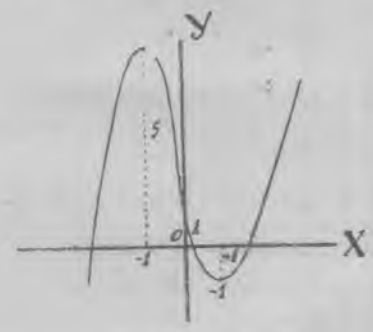
*Замечание.* Функция называется возрастающею (убывающею) во всем интервале $a \leqq x \leqq b$, если она оказывается возрастающею (убывающею) для каждого значения $x$ этого интервала; тогда выйдет $f(x_1)<f(x_2)$ при $x_1<x_2$ (или $f(x_1)>f(x_2)$ при $x_1<x_2$), согласно определению § 5, гл. III, отд. I.

При непрерывности функции $f(x)$ для $x=x_0$ числитель и знаменатель дроби $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ стремятся к нулю при уменьшении $h$, и сама дробь может стремиться к определенному пределу $D$, независящему от закона убывания $h$. Если это число $D$ не равно нулю, то при достаточно малых $|h|$ отношение $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ имеет знак $D$, и потому функция $y=f(x)$ будет возрастающей или убывающей в данной точке, при $x=x_0$, смотря по тому, будет ли $D=\underset{h=0}{\text{пред}}\left\{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right\}$ числом положительным или отрицательным.

Величина $D$ зависит от $x_0$ и представляет некоторую функцию от значений $x$, которая называется производною для функции $y=f(x)$ и обозначается символом $y'=f'(x)$; таким образом $D=f'(x_0)$.




Черт. 33.




Черт. 34.

*Пример 1.* Для функции $y=x^2-4x+5$ находим $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$ $=\frac{1}{h}\left\{(x+h)^2-4(x+h)+5-x^2+4x-5\right\}=2x-4+h$, следовательно, $f'(x)=2x-4$. При $x<2$ оказывается $f'(x)<0$, и следовательно $f(x)$ убывающая функция; при $x>2$ имеем $f'(x)>0$, и следовательно $f(x)$ возрастающая функция; при $x=2$, где убывание функции сменяется возрастанием, получается minimum функции: $y=1$ (черт. 33).

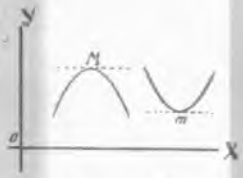
*Пример 2.* $y=x^3-3x+1$. Здесь $y'=\underset{h=0}{\text{пред.}}\frac{1}{h}\left\{(x+h)^3-3(x+h)+\right.$ $\left.+1-x^3+3x-1\right\}=\text{пред.}\left\{3x^2-3+3xh+h^2\right\}=3x^2-3=3(x^2-1)$.

При $-\infty<x<-1$ имеем $y'>0$, функция возрастает от $-\infty$ до $+5$, при $-1<x<+1$ имеем $y'<0$, функция убывает от 5 до $-1$, при $+1<x<+\infty$ $y'>0$, функция возрастает от $-1$ до $+\infty$. Таким образом при $x=-1$ возрастание сменяется убыванием, и функция достигает maximum: $y=+5$, а при $x=+1$ убывание сменяется возрастанием, и функция достигает minimum: $y=-1$ (см. черт. 34).

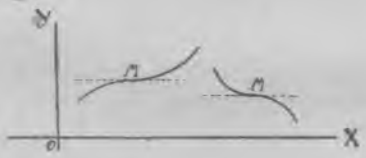
Из этих примеров видно, что, изучая изменение знака производной функции, можно составить понятие о возрастании и убывании функции и определить ее maxima и minima, т.-е. те точки, где возрастание сменяется убыванием, или наоборот (при возрастании независимой переменной).

## § 2. Геометрическое и кинематическое значение производной.

Пусть непрерывная функция $y = f(x)$ изображается непрерывною линией $M_2 M_0 M_1$ (черт. 31 и 32), при чем точка $M_0$ имеет координаты $(x_0, f(x_0))$, а соседние точки, как $M_2$ и $M_1$, имеют координаты $(x_0 + h, f(x_0 + h))$; $h < 0$ для $M_2$ и $h > 0$ для $M_1$. Угловой коэффициент секущей $MM_1$ или $MM_2$ равен $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$; если $h$ будет стремиться к нулю, то секущая, вращаясь около точки $M_0$, будет приближаться к предельному положению, называемому касательною ($M_0T$ на чертежах ) в точке $M_0$ к данной линии. Поэтому угловой коэффициент касательной есть $\underset{h=0}{\text{пред}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, т.-е. равен значению производной функции в точке касания. Замечая, что $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(0x, MT)$, заключаем, что для точки $M_0$, где функция возрастает, угол $\alpha$ острый, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) > 0$; для точки $M_0$, где функция убывает, угол $\alpha$ тупой, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, как уже отмечено в § 1. В точках, где функция достигает maximum или minimum (черт. 35), касательная // оси $OX$, т.-е. угол $\alpha = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = 0$, но так как здесь возрастание функции сме-




Черт. 35.




Черт. 36.

няется убыванием или наоборот, то $f'(x)$ обязательно меняет знак, переходя через 0: с + на — для maximum и с — на + для minimum при переходе $x$ от $x_0 - h$ к $x_0 + h$ $(h > 0)$.

Могут существовать точки (черт. 36), где $\operatorname{tg}\alpha = f'(x) = 0$, но знак $f'(x)$ не меняется, т.-е. функция не перестает быть возрастающею при $f'(x) > 0$ или убывающею при $f'(x) < 0$; такие точки называются точками перегиба.

Пусть при прямолинейном движении зависимость между временем $x$, отсчитываемым от некоторого начального момента, и расстоянием $y$ движущейся точки от определенного положения изображена графически (черт. 31). Тогда отношение $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ представляет среднюю скорость движения точки для промежутка времени $h$, примыкающего к моменту $x_0$, а предел этой средней скорости представляет истинную скорость в данный момент $x_0$, так что истинная скорость $= \text{пред.} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$. Подобным образом, имея графическую зависимость между временем $x$ и скоростью $v = \varphi(x)$ прямолинейного движения, найдем среднее ускорение в промежуток времени от $x_0$ до $x_0 + h$ в виде $\frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}$ и истинное ускорение в момент $x_0$ в виде производной: $\varphi'(x_0) = \underset{h=0}{\text{пред.}} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}$. Лейбниц и Ньютон пришли к понятию производной, исходя — первый из идеи о касательной, второй — из идеи о скорости.

**§ 3. Производная и дифференциал функции. Геометрическое значение дифференциала.**

Как мы уже видели в § 1 и 2, для непрерывной функции $y = f(x)$ производною функцией $y' = f'(x)$ называется $\underset{h=0}{\text{пред.}} \left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$. Непрерывность функции необходима, но недостаточна для существования производной; если бы условие непрерывности не было выполнено, то числитель $f(x+h)-f(x)$ не стремился бы к нулю вместе с знаменателем $h$, и дробь не могла бы стремиться к конечному пределу. Недостаточность непрерывности можно подтвердить частными примерами.

*Пример 1.* Функция, заданная условиями: $y = x$ при $0 \leqq x \leqq 1$ и $y = 2 - x$ при $1 \leqq x \leqq 2$ (см. черт. 3), непрерывна, но при $x = 1$ не имеет определенной производной, так как для всех значений $x$ от 0 до 1 (исключительно)

$$y' = \underset{h=0}{\text{пред.}} \left\{\frac{(x+h)-x}{h}\right\} = +1,$$

$$\text{а при } 1 < x \leqq 2 \quad y' = \text{пред.} \left\{\frac{(2-x-h)-(2-x)}{h}\right\} = -1.$$

*Пример 2.* Функция $y = x^{\frac{1}{3}}$ непрерывна при всех $x$ от $-\infty$ до $+\infty$. Производную ее можно вычислить на основании примера 4 § 15, гл. I, Отд. I:

$$y' = \underset{h=0}{\text{пред.}} \left\{\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h}\right\} = x^{\frac{1}{3}} \cdot \underset{h=0}{\text{пред.}} \left\{\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{h}\right\} =$$

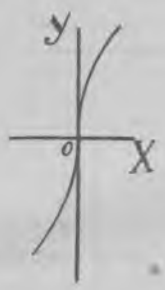
$$x^{\frac{1}{3}} \cdot \underset{\alpha=0}{\text{пред.}} \left\{\frac{(1+\alpha)^{\frac{1}{3}} - 1}{\alpha x}\right\} (\text{при } h = \alpha x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}.$$

Поэтому при $x = 0$ производная не существует ($y' = +\infty$); график функции на черт. 37.

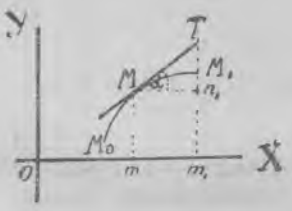
*Замечание.* Функция $y = f(x)$, будучи непрерывной, может не иметь производной или 1) потому, что $\underset{h=0}{\text{пред.}} \left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$ зависит от закона убывания $h$, например: при $h < 0$ получается один предел, при $h > 0$ — другой предел, как в примере 1; тогда на графике получается точка излома или угловая точка, где две дуги пересекаются под углом, отличным от 0 и $\pi$; 2) потому, что $\underset{h=0}{\text{пред.}} \left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$ равен $\infty$, как в примере 2; на графике касательная в такой точке $\parallel$ оси $OY$, ибо, при $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, получаем $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Так как переменная равна сумме предела и бесконечно-малой величины, то $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon$ или $f(x+h) - f(x) = h\{f'(x) + \varepsilon\}$; обозначая приращение функции $f(x+h)) - f(x)$ через $\Delta y$, а приращение независимой переменной $h$ через $\Delta x$, имеем: $\Delta y = \Delta x\{y' + \varepsilon\}$, откуда $\Delta y - y' \cdot \Delta x = \varepsilon \Delta x$.

Произведение производной функции $y'$ на приращение независимой переменной $\Delta x$ называется дифференциалом функции и обозначается через $dy$, так что $y'\cdot\Delta x = dy$, $\Delta y - dy = \varepsilon\cdot\Delta x$, т.-е. разность между приращением и дифференциалом функции есть бесконечно-малая высшего порядка, и потому $\Delta y$ и $dy$ суть эквивалентные бесконечно-малые. Отметим, что при $y = x$, когда $y' = 1$, из формулы $dy = y'\cdot\Delta x$ выходит $\Delta x = dx$, т.-е. для независимой переменной приращение и дифференциал тождественны, а для функции (имеющей производную) эквивалентны. На черт. 38, где $MT$ — касательная и $mm_1 = \Delta x$, имеем: $\Delta y = n_1M_1$, $y'\cdot\Delta x = mm_1\cdot\operatorname{tg}\alpha = n_1T = dy$, так что дифференциал функции изображается отрезком $n_1T$, а приращение функции отрезком $n_1M_1$. Из предыдущего вытекают формулы: $y' = \underset{x=0}{\text{пред.}}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $dy = y'dx$. Разыскание производных или дифференциалов функций составляет ближайшую задачу дифференциального исчисления.




Черт. 37.




Черт. 38.

## § 4. Производные функций: $x^m$, $a^x$, $\operatorname{Log}_a x$, $\sin x$, $\cos x$.

Перечисленные производные находятся непосредственно при помощи примеров 4, 3, 2, § 15, гл. I, отд. I.

$$1)\quad (x^m)' = \underset{h=0}{\text{пред.}}\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = x^m\cdot\underset{h=0}{\text{пред.}}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^m - 1}{h} =$$

$$= x^m\cdot\underset{\alpha=0}{\text{пред.}}\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha\cdot x}\ (\text{при } h = \alpha x) = x^m\cdot\frac{m}{x} = mx^{m-1}.$$

Результат справедлив для всех вещественных $m$; частные случаи: $(x)' = 1$ $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, ... $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1\cdot x^{-2} = \dfrac{-1}{x^2}$, $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = \dfrac{-2}{x^3}$, $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = \dfrac{-3}{x^4}$, ..., $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$, $(\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ $(\sqrt[3]{x^2})' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $(x^2\sqrt[4]{x^3})' = \dfrac{11}{4}x\sqrt[4]{x^3}$...

2) $(a^x)' = \underset{h=0}{\text{пред.}}\left(\dfrac{a^{x+h} - a^x}{h}\right) = a^x\cdot\underset{h=0}{\text{пред.}}\dfrac{a^h - 1}{h} = a^x\cdot\log a$; при $a = e$ имеем $(e^x)' = e^x$, ибо $\log e = 1$.

3) $(\mathrm{Log}_a x)' = (\mathrm{Log}_a e \cdot \log x)' = \underset{h=0}{\text{пред.}}\, \mathrm{Log}_a e \cdot \dfrac{\log(x+h) - \log x}{h} =$

$= \mathrm{Log}_a e \cdot \underset{h=0}{\text{пред.}} \left\{ \dfrac{\log\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h} \right\} = \mathrm{Log}_a e \cdot \underset{\alpha=0}{\text{пред.}} \left\{ \dfrac{\log(1+\alpha)}{\alpha x} \right\}$ (при $h = \alpha x$) $= \mathrm{Log}_a e \cdot \dfrac{1}{x}$.

В частности $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$, ибо $\log e = 1$.

4) $(\sin x)' = \underset{h=0}{\text{пред.}} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \underset{h=0}{\text{пред.}} \dfrac{2\sin\dfrac{h}{2}\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)}{h} =$

$= \underset{h=0}{\text{пред.}} \left( \dfrac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \right) \underset{h=0}{\text{пред.}} \cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right) = \cos x$ (см. § 13, гл. I, отд. I).

5) $(\cos x)' = \underset{h=0}{\text{пред.}} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \underset{h=0}{\text{пред.}} \dfrac{-2\sin\dfrac{h}{2}\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)}{h} =$

$= -\,\text{пред.} \left( \dfrac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \right) \cdot \underset{h=0}{\text{пред.}} \sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right) = -\sin x.$

**§ 5. Производная суммы, произведения, частного. Производная целой функции, рациональной дроби,** $\mathrm{tg}\,x$, $\cot x$, $\sec x$, $\mathrm{cosec}\,x$, **гиперболических функций.**

1) Производная суммы равна сумме производных при конечном числе слагаемых.

Пусть $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_k(x)$; тогда $f(x+h) = \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_k(x+h)$, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$= \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\varphi_k(x+h) - \varphi_k(x)}{h}$; по теореме о пределе суммы находим $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi'_k(x)$.

2) Производная произведения двух функций определяется по формуле:

$$[\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)]' = \varphi_1(x) \cdot \varphi'_2(x) + \varphi'_1(x) \cdot \varphi_2(x).$$

Вывод. Пусть $f(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$; тогда $f(x+h) - f(x) = \varphi_1(x+h) \cdot \varphi_2(x+h) - \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = \varphi_1(x+h)\{\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)\} + \varphi_2(x)\{\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)\}$,

откуда

$f'(x) = \text{пред.}\, \varphi_1(x+h) \cdot \text{пред.} \dfrac{\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)}{h} + \varphi_2(x) \cdot \text{пред.} \dfrac{\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)}{h} =$

$= \varphi_1(x) \cdot \varphi'_2(x) + \varphi_2(x) \cdot \varphi'_1(x).$

Для трех множителей: $(\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3)' = \varphi_1\varphi_2 \cdot \varphi'_3 + (\varphi_1\varphi_2)' \cdot \varphi_3 = \varphi_1\varphi_2\varphi'_3 + \varphi_1\varphi'_2\varphi_3 + \varphi'_1\varphi_2\varphi_3$. Постепенно увеличивая число множителей на 1, можно вывести формулу для произведения $m$ множителей: $(\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_m)' = \varphi'_1\varphi_2 \ldots \varphi_m + \varphi_1\varphi'_2 \ldots \varphi_m + \ldots + \varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi'_m$ ($m$ слагаемых).

3) Производная дроби определяется по формуле:

$$\left[\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\right]' = \frac{\varphi_2(x) \cdot \varphi'_1(x) - \varphi_1(x) \cdot \varphi'_2(x)}{\varphi_2^2(x)}.$$

Вывод.

$$f(x+h)-f(x)=\frac{\varphi_1(x+h)}{\varphi_2(x+h)}-\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=\frac{\varphi_1(x+h)\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\varphi_2(x+h)}{\varphi_2(x+h)\varphi_2(x)}=$$
$$=\frac{[\varphi_1(x+h)-\varphi_1(x)]\cdot\varphi_2(x)-\varphi_1(x)[\varphi_2(x+h)-\varphi_2(x)]}{\varphi_2(x+h)\varphi_2(x)};$$

по теоремам о пределе частного, суммы и произведения отсюда и следует предыдущая формула.

4) Производная от постоянной величины равна 0: $(a)'=0$. Пусть $f(x)=a$; тогда $f(x+h)=a$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$ тождественно, откуда и предел этого отношения при $h=0$ также есть 0, т.-е. $f'(x)=0$.

5) Постоянный множитель выносится за знак производной: $\{a\cdot f(x)\}'=$ $=a\cdot f'(x)$.

Это вытекает из формул 2) и 4).

Полученные общие теоремы 1) — 5) дают возможность составить производные от следующих функций:

6) Производная целой функции: $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\dots+a_{m-1}x+a_m$ находится по теоремам 1), 5) и по формуле § 4 $(x^m)'=mx^{m-1}$; именно: $f'(x)=ma_0x^{m-1}+(m-1)a_1x^{m-2}+\dots+a_{m-1}$.

*Пример 1*: $(5x^4-7x^3+12x^2-11x+4)'=20x^3-21x^2+24x-11$.

7) Производная рациональной дроби: $\frac{f(x)}{F(x)}$ находится по 3) и 6).

*Пример 2*:

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-x+1}\right)'=\frac{(x^2-x+1)\cdot 2x-(x^2+1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}.$$

8) Производные от тригонометрических функций находятся по 3) и по результатам § 4: $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$. Именно:

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$
$$(\cot x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{\sin x(-\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x},$$
$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{+\sin x}{\cos^2 x},\quad (\operatorname{cosec}x)'=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}.$$

9) Производные от гиперболических функций находятся на основании предыдущих теорем и формул: $(e^x)'=e^x$, $(e^{-x})'=\left(\frac{1}{e^x}\right)'=\frac{-e^x}{e^{2x}}=-e^{-x}$. Именно:

$$(\operatorname{sh}x)'=\left(\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}\right)'=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}=\operatorname{ch}x,\ (\operatorname{ch}x)'=\left(\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\right)'=$$
$$=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}=\operatorname{sh}x,\ (\operatorname{th}x)'=\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)'=\frac{\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2 x}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$
$$(\coth x)'=\left(\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\right)'=\frac{\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x}=\frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

## § 6. Производная функции от функции. Производные обратных функций: круговых и гиперболических.

*Определение.* Если $y=f(z)$ и $z=\varphi(x)$, то $y$ относительно $x$ называется функцией от функции, так как каждому $x$ отвечает определенное значение $z$, а этому последнему отвечает определенное значение $y$. Так как для непрерывной функции приращение функции одновременно с приращением независимой переменной стремится к 0, то ясно, что, при непрерывности функций $z=\varphi(x)$ и $y=f(z)$, и функция $y=F(x)=f[\varphi(x)]$ будет непрерывна.

*Теорема.* Производная функции от функции находится по такому правилу: $y'_x=f'(z)\cdot\varphi'(x)=y'_z\cdot z'_x$, т.-е. равна произведению производной от $y$ по $z$, как если бы $z$ была независимой переменной, на производную $z$ по $x$.

Вывод. Дадим независимой переменной $x$ приращение $\Delta x$; тогда $z$ получит приращение $\Delta z=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$ и $y$ получит приращение $\Delta y=f(z+\Delta z)-f(z)$. Из тождества: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}$, при переходе к пределу, и получается предыдущая теорема.

*Следствие.* Умножая обе части формулы $y'_x=y'_z\cdot z'_x$ на $dx$, находим (на основании § 3: $y'_x\cdot dx=dy$, $z'_x\cdot dx=dz$) следующий результат: $dy=y'_z\cdot dz=f'(z)dz$; сопоставляя его с формулой $dy=f'(x)dx$, когда $y=f(x)$, заключаем, что выражение дифференциала функции $y=f(z)$ сохраняет один вид: $dy=f'(z)dz$, независимо от того, будет ли $z$ независимая переменная или функция от независимой переменной.

Это дает возможность переписать все ранее полученные формулы производных в более общем виде: $d(y^m)=my^{m-1}dy$, $d(a^y)=a^y\log a\,dy$, $d\,\mathrm{Log}_a y=\frac{\mathrm{Log}_a e}{y}\,dy$, $d\sin y=\cos y\,dy$, $d\cos y=-\sin y\,dy$ и проч., где $y$ означает любую функцию от $x$, имеющую производную.

Приложим это следствие к обратным функциям (отд. I, гл. III, § 5); пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ — обратные функции; тогда

$dy=f'(x)dx$, $dx=\varphi'(y)dy$, откуда $f'(x)=\frac{dy}{dx}$, $\varphi'(y)=\frac{dx}{dy}$, т.-е. $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ производные обратных функций представляют обратные величины. В частности для обратных круговых и обратных гиперболических функций находим такие результаты.

1) $y=\arcsin x$ при $-1\leqq x\leqq+1$ и $-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$. Здесь $x=\sin y$, $dx=\cos y\,dy$, $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}$; но, при $-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$, должно быть $\cos y>0$, следовательно

$$\cos y=+\sqrt{1-\sin^2 y}=+\sqrt{1-x^2},\text{ и }(\arcsin x)'=\frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}.$$

2) $y=\arccos x$ при $-1\leqq x\leqq+1$ и $\pi\geqq y\geqq 0$. Здесь $x=\cos y$, $dx=-\sin y\,dy$, $y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}$; при $0\leqq y\leqq\pi$ имеем $\sin y>0$, следовательно $\sin y=+\sqrt{1-\cos^2 y}=+\sqrt{1-x^2}$, и $(\arccos x)'=\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$.

3) $y = \operatorname{arctg} x$ при $-\infty < x < +\infty$ и $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$. Здесь $x = \operatorname{tg} y$, $dx = \frac{dy}{\cos^2 y}$, $y' = \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$, следовательно $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

4) $y = \operatorname{arccot} x$ при $-\infty < x < +\infty$ и $\pi > y > 0$. Имеем: $x = \cot y$, $dx = -\frac{dy}{\sin^2 y}$, $y' = \frac{dy}{dx} = -\sin^2 y = \frac{-1}{\operatorname{cosec}^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}$, следовательно $(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$.

5) $y = \operatorname{arcsh} x$ при $-\infty < x < +\infty$ и $-\infty < y < +\infty$. Имеем: $x = \operatorname{sh} y$, $dx = \operatorname{ch} y \cdot dy$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{ch} y}$, но $\operatorname{ch} y > 0$ при всех $y$, следовательно $\operatorname{ch} y = +\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y} = +\sqrt{1+x^2}$ и окончательно $(\operatorname{arcsh} x)' = \frac{1}{+\sqrt{1+x^2}}$.

6) $y = \operatorname{arcth} x$ при $-1 < x < +1$ и $-\infty < y < +\infty$. Здесь $x = \operatorname{th} y$, $dx = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} dy$, $y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{ch}^2 y = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y}$ (смотри отдел I, главу III, § 2 в конце) $= \frac{1}{1-x^2}$, так что $(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$.

*Замечание 1.* При помощи доказанной выше теоремы можно составить производную от показательно-степенной функции: $y = u^v$, где $u$ и $v$ суть функции от $x$. Имеем: $\log y = v \cdot \log u$, $\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} \cdot v + \log u \cdot dv$,

$$dy = u^v \left\{ \frac{v}{u} du + \log u \cdot dv \right\}, \quad y' = u^v \left\{ \frac{v}{u} \cdot u' + \log u \cdot v' \right\}.$$

*Пример 1.* $(x^{\sin x})' = x^{\sin x} \left\{ \frac{\sin x}{x} + \log x \cdot \cos x \right\}$.

*Замечание 2.* Доказанную выше теорему можно обобщить для случая не двух, а нескольких зависимостей вида: $y = f(z)$, $z = \varphi(u)$, $u = \psi(v)$, $v = \omega(w)$, $w = F(x)$. Обозначим приращение независимой переменной $x$ через $\Delta x$; соответственные приращения остальных переменных будут: $\Delta w = F(x + \Delta x) - F(x)$, $\Delta v = \omega(w + \Delta w) - \omega(w)$, $\Delta u = \psi(v + \Delta v) - \psi(v)$, $\Delta z = \varphi(u + \Delta u) - \varphi(u)$, $\Delta y = f(z + \Delta z) - f(z)$.

Из тождества: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta w} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x}$ получаем в пределе, по теореме о пределе произведения: $y'_x = y'_z \cdot z'_u \cdot u'_v \cdot v'_w \cdot w'_x =$
$f'(z) \cdot \varphi'(u) \cdot \psi'(v) \cdot \omega'(w) \cdot F'(x)$.

*Пример 2.* Найти $y'$, если $y = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Пусть $y = \log z$, $z = \operatorname{tg} u$, $u = \frac{x}{2}$; тогда $y'_x = (\log z)' \cdot (\operatorname{tg} u)' \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' =$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}.$$

*Пример 3.* Найти $y'$, если $y=\frac{2}{\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

Полагая $y=\frac{2}{\sqrt{21}}\cdot\operatorname{arctg}z$, $z=\sqrt{\frac{3}{7}}\operatorname{tg}u$, $u=\frac{x}{2}$, имеем:

$$y'_x=\frac{2}{\sqrt{21}}\cdot\frac{1}{1+z^2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\frac{1}{\cos^2u}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{7\cos^2u+3\sin^2u}=\frac{1}{5+2\cos x}.$$

*Пример 4.* Найти $y'$, если $y=\sin^3\log\cos\operatorname{tg}^2(\sqrt[3]{2x^2-1})$.

Полагая $y=z^3$, $z=\sin u$, $u=\log v$, $v=\cos w$, $w=\xi^2$, $\xi=\operatorname{tg}\eta$, $\eta=\zeta^{\frac{1}{3}}$, $\zeta=2x^2-1$, находим: $y'=3z^2\cdot\cos u\cdot\frac{1}{v}\cdot(-\sin w)\cdot 2\xi\cdot\frac{1}{\cos^2\eta}\cdot\frac{1}{3}\zeta^{-\frac{2}{3}}\cdot 4x=$ $-8\sin^2\log\cos\operatorname{tg}^2(\sqrt[3]{2x^2-1})\cdot\cos\log\cos\operatorname{tg}^2\sqrt[3]{2x^2-1}\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{tg}^2\sqrt[3]{2x^2-1})\cdot$ $\cdot\frac{\sin(\sqrt[3]{2x^2-1})}{\cos^3(\sqrt[3]{2x^2-1})}\cdot\frac{x}{\sqrt[3]{(2x^2-1)^2}}$.

*Пример 5.* Найти $y'$, если $y=\arcsin(\sin x)$, при чем по обычному условию однозначности $y$ содержится между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Полагая $y=\arcsin z$, $z=\sin x$, имеем: $y'=\frac{1}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot\cos x=\frac{1}{|\cos x|}\cdot\cos x=\pm 1$, при чем знак $\pm$ одинаков со знаком $\cos x$. Для пояснения результата заметим, что $y=k\pi+(-1)^k.x$, где, по данному $x$, целое число $k$ выбирается так, чтобы $y$ содержалось между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; отсюда $-x=(-1)^k(k\pi-y)$, $\cos x=\cos(k\pi-y)=(-1)^k\cos y$, т.-е. знак $\cos x$ совпадает с $(-1)^k$, ибо $\cos y>0$. Итак, $y'=(-1)^k$; но этот результат непосредственно получается из выражения $y=k\pi+(-1)^k\cdot x$.

*Пример 6.* Найти $y'$, если $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$, при чем $-\frac{\pi}{2}<y<+\frac{\pi}{2}$. Полагая $y=\operatorname{arctg}z$, $z=\operatorname{tg}x$, имеем: $y'=\frac{1}{1+z^2}\cdot\frac{1}{\cos^2x}=1$, что вытекает из выражения: $y=k\pi+x$.

## § 7. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

*Определение.* Если производная от данной функции $y=f(x)$ сама имеет производную, то эта последняя называется второю производною (или производною 2-го порядка) данной функции и обозначается через $y''$ или $f''(x)$: $y''=f''(x)=\frac{dy'}{dx}=[f'(x)]'$.

Подобным образом производная от 2-й производной называется третьей производной и обозначается через $y'''=f'''(x)$. Вообще $n$-я производная определяется как производная от $(n-1)$-й производной:

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{dy^{(n-1)}}{dx}.$$

Произведение $n$-й производной на $n$-ю степень дифференциала независимой переменной называется $n$-м дифференциалом (или дифференциалом

$n$-го порядка) данной функции и обозначается через $d^n y$. Итак, $d^2y = y''\cdot dx^2$, $d^3y = y'''\cdot dx^3 \ldots$, $d^n y = y^{(n)}\cdot dx^n$, откуда $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$.

Составим $n$-е производные некоторых функций.

1) $y = x^m$, $y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$; если $m$ целое положительное, то $m$-я производная выходит постоянною, а все высшие производные равны 0; этот результат справедлив и для полной целой функции $m$-й степени: $y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$; именно:

$$y^{(m)} = m(m-1)\ldots 2\cdot 1a_0, \quad y^{(m+1)} = 0, \quad y^{(m+2)} = 0\ldots$$

При $y = (ax+b)^m$ имеем $y^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)(ax+b)^{m-n}\cdot a^n$.

2) $y = \log(ax+b)$. Здесь $y' = \frac{a}{ax+b} = a(ax+b)^{-1}$ и по предыдущему результату: $y^{(n)} = \frac{(-1)(-2)\ldots(-n+1)a^n}{(ax+b)^n} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1.2.3\ldots(n-1)a^n}{(ax+b)^n}$.

3) $y = e^{kx}$ дает: $y^{(n)} = e^{kx}\cdot k^n$; $y = a^{kx} = e^{k\log a.x}$ дает
$y^{(n)} = e^{k\log a.x}.(k\log a)^n = a^{kx}\cdot(k\log a)^n$.

4) $y = \sin x$ дает $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$;

$y = \sin(ax+b)$ дает $y^{(n)} = a^n\cdot\sin\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right)$.

5) $y = \cos x$ дает $y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

$y = \cos(ax+b)$ дает $y^{(n)} = a^n\cdot\cos\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right)$.

6) $y = \operatorname{sh} x$ дает $y^{(2k)} = \operatorname{sh} x$, $y^{(2k+1)} = \operatorname{ch} x$.

7) $y = \operatorname{ch} x$ дает $y^{(2k)} = \operatorname{ch} x$, $y^{(2k+1)} = \operatorname{sh} x$.

В более сложных случаях можно пользоваться: 1) разложением данной функции на сумму нескольких слагаемых и применением очевидной теоремы: производная любого порядка от суммы конечного числа слагаемых равна сумме производных того же порядка от всех слагаемых, и 2) формулой Лейбница для производной любого порядка от произведения двух функций.

*Пример 1.* $y = \frac{7+x}{6+x-x^2}$. Найти $y^{(n)}$.

Пользуясь тождеством $y = \frac{2}{3-x} + \frac{1}{2+x}$, находим по 1)

$$y^{(n)} = \frac{2.(-1)^n.1.2.3\ldots n.(-1)^n}{(3-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n.1.2.3\ldots n}{(2+x)^{n+1}} =$$
$$= \frac{(-1)^n.1.2.3\ldots n}{(6+x-x^2)^{n+1}}\left\{(-1)^n.2.(2+x)^{n+1} + (3-x)^{n+1}\right\}.$$

*Пример 2.* $y = \cos^3 x$. Найти $y^{(n)}$.

Из тождества $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$ находим:

$$y^{(n)} = \frac{1}{4}\left\{3^n\cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

Формула Лейбница для $(uv)^{(n)}$ имеет вид: $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots$ $\ldots + \frac{n}{1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$, представляя аналогию с разложением $(u+v)^n$ с тою разницею, что в первом и последнем членах появляются множители $v$ и $u$.

Выводится эта формула при $n=2$ непосредственно и далее переходом от $n$ к $n+1$, при чем надо воспользоваться тождеством

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k, \text{ где } C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}.$$

*Пример 3.* $y = e^{2x}\cdot x^2$. Найти $y^{(n)}$.

Имеем: $y^{(n)} = e^{2x}\cdot 2^n\cdot x^2 + \frac{n}{1}e^{2x}\cdot 2^{n-1}\cdot 2x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}e^{2x}\cdot 2^{n-2}\cdot 2 =$

$$= e^{2x}\cdot 2^n\left[x^2 + nx + \frac{1}{4}n(n-1)\right].$$

*Пример 4.* Найти значение $(\operatorname{arctg} x)^{(n)}$ при $x=0$.

Имеем: $y'(1+x^2)=1$; беря от обеих частей $(n-1)$-ю производную, получаем: $y^{(n)}\cdot(1+x^2) + \frac{n-1}{1}\cdot y^{(n-1)}\cdot 2x + \frac{(n-1)\ (n-2)}{1\cdot 2}y^{(n-2)}\cdot 2 = 0$. При $x=0$ находим: $y_0^{(n)} = -(n-1)\ (n-2)\,y_0^{(n-2)}$; непосредственно находим $y_0'' = \left[\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right]_{x=0} = 0$ и отсюда $y_0^{\text{IV}} = y_0^{\text{VI}} = \ldots = y_0^{(2n)} = 0$; далее, $y_0' = 1$, следовательно $y_0''' = -1\cdot 2$, $y_0^{\text{V}} = +1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$, $y_0^{\text{VII}} = -1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$, $y_0^{(2n+1)} = (-1)^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots n$.

---

## Глава II.

## Формулы, на которых основано приложение дифференциального исчисления к вопросам анализа.

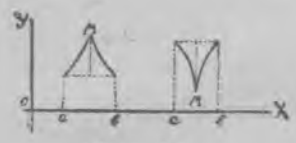
### § 1. Теорема Ролля.

Если при $a \leqq x \leqq b$ функция $y = f(x)$ имеет производную и если $f(a) = f(b)$, то существует в интервале $(a, b)$ по крайней мере одно значение $x = c$ такое, при котором производная $f'(x)$ обращается в нуль, так что $f'(c) = 0$. В частности числа $a$ и $b$ могут быть корнями функции $f(x)$, ибо тогда $f(a) = f(b) = 0$.

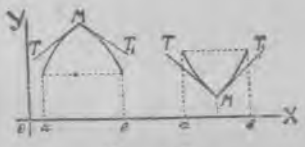
При существовании производной функция $f(x)$ должна быть непрерывной при $a \leqq x \leqq b$ и по теореме 2 § 4, главы III, отдела I, достигает в этом интервале своего наибольшего значения $M$ и наименьшего $m$; по крайней мере одно из них не совпадает с пограничными значениями $f(a) = f(b)$, ибо иначе выходило бы $M = m$, т.-е. функция $f(x)$ была бы постоянною в интервале $(a, b)$ и производная $f'(x)$ была бы $= 0$ тождественно. Отбрасывая этот случай, предположим для определенности, что для некоторого $c$, лежащего между $a$ и $b$, оказывается $f(c) = M$. Докажем, что $f'(c) = 0$. Взяв

столь малое положительное $h$, чтобы числа $c-h$ и $c+h$ лежали между $a$ и $b$, имеем тогда $f(c-h)-f(c)<0$ и $f(c+h)-f(c)<0$, следовательно $\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}>0$ и $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0$; но оба отношения имеют пределом одно и то же число $f'(c)$, следовательно по первому представлению должно быть $f'(c)\geqq 0$, по второму $f'(c)\leqq 0$, так что $f'(c)=0$. Если бы существование производной не было известно, то отсюда следовало бы только, что $f'(c-0)>0$, а $f'(c+0)<0$.

*Замечание 1.* Если функция $y=f(x)$ непрерывна при $a\leqq x\leqq b$, но не дано, что производная существует при всех $x$ в интервале $(a, b)$, то из равенства $f(a)=f(b)$ может следовать не только обращение производной в нуль, но также 1) обращение производной в $\pm\infty$ с переменою знака при некотором $c$ в интервале $(a, b)$ или 2) конечный разрыв производной при некотором $c$, так что $f'(c-0)$ и $f'(c+0)$ оба конечны, но различных знаков. В первом из этих случаев график линии $y=f(x)$ получает острие (точку возврата 1-го рода), во втором — точку излома (угловую точку); смотри чертеж 39 и 40.




Черт. 39.




Черт. 40.

*Пример 1.* Функция $y=x^{\frac{2}{3}}$ непрерывна при $-1\leqq x\leqq +1$ и на границах имеет равные значения: $+1$; при $x=0$ ее производная $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ обращается в $\infty$ (острие), при чем при $x=-0$ $y'=-\infty$ и при $x=+0$ $y'=+\infty$.

*Пример 2.* Функция: $y=x$ при $0\leqq x\leqq 1$, $y=2-x$ при $1\leqq x\leqq 2$ непрерывна в интервале $(0, 2)$ и на границах имеет равные значения: 0: при $x=1$ ее производная терпит разрыв: $f'(1-0)=+1$, $f'(1+0)=-1$ (точка излома).

*Замечание 2.* Если дано, что в интервале $a\leqq x\leqq b$ функция $y=f(x)$ имеет все производные до $(n-1)$-го порядка включительно; если сверх того в интервале $(a, b)$ функция $f(x)$ имеет $n$ различных корней, то в том же интервале первая производная $f'(x)$ имеет по крайней мере $(n-1)$ различных корней, $f''(x)$ — по крайней мере $(n-2)$ различных корня и т. д., $f^{(n-1)}(x)$ — по крайней мере 1 корень $x=c$, так что $f^{(n-1)}(c)=0$.

Вывод. По теореме Ролля, если $c_1, c_2, \ldots c_n$ суть $n$ корней функции $f(x)$ в интервале $(a, b)$, то производная $f'(x)$ должна по крайней мере по одному разу обращаться в нуль в каждом из $(n-1)$ интервалов $(c_1, c_2)$, $(c_2, c_3)$, $\ldots (c_{n-1}, c_n)$, т.-е. имеет по крайней мере $(n-1)$ корней между $a$ и $b$ и т. д.

## § 2. Формулы Коши и Лагранжа. Приложения.

*Формула Коши.* Если при $a\leqq x\leqq b$ две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные, из которых $\varphi'(x)$ не обращается в нуль при $a\leqq x\leqq b$, то $\frac{(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, где $c$ некоторое число, заключенное между $a$ и $b$.

Вывод. Рассмотрим функцию $F(x)=f(x)-f(a)-P\{\varphi(x)-\varphi(a)\}$, для которой $F(a)=0$, и подберем постоянное $P$ так, чтобы $F(b)=0$; это дает $P=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ (здесь знаменатель не нуль, ибо иначе, по теореме Ролля, $\varphi'(x)$ обращалось бы в 0 между $a$ и $b$, что противоречит условию теоремы).

Так как функция $F(x)$ имеет производную и удовлетворяет условию $F(b)=F(a)=0$, то по теореме Ролля должно быть $F'(c)=0$ при некотором $c$, взятом между $a$ и $b$. Но $F'(x)=f'(x)-P\cdot\varphi'(x)$, следовательно $f'(c)-P\varphi'(c)=0$, откуда $P=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ ($\varphi'(c)$ не нуль). Приравнивая два значения $P$, получаем формулу Коши.

Полагая $b=a+h$ и обозначая число $c$, заключенное между $a$ и $a+h$ через $a+\vartheta h$, где $0<\vartheta<1$, перепишем формулу Коши так:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\vartheta h)}{\varphi'(a+\vartheta h)}.$$

*Формула Лагранжа.* Если при $a\leqq x\leqq b$ функция $f(x)$ имеет производную, то $f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(c)$, где $c$ лежит между $a$ и $b$.

Вывод. Положим в формуле Коши $\varphi(x)=x$, $\varphi'(x)=1$; тогда условие необращения в нуль функции $\varphi'(x)$ выполнено, и мы находим $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=$ $=\frac{f'(c)}{1}$, т.-е. формулу Лагранжа.

*Следствие 1.* Если в интервале $a\leqq x\leqq b$ оказывается $f'(x)=0$ тождественно, то функция $f(x)$ приводится к постоянной, так как для всяких двух значений $x$: $x_1$ и $x_2$, взятых между $a$ и $b$, выходит: $f(x_2)-f(x_1)=$ $=(x_2-x_1)\cdot f'(c)=0$, т.-е. $f(x_2)=f(x_1)$.

*Следствие 2.* Если в интервале $a\leqq x\leqq b$ производная функция $f'(x)$ остается положительною (отрицательною), то функция $f(x)$ будет возрастающею (убывающею) в этом интервале, так как для всяких двух значений $x_1$ и $x_2>x_1$, взятых между $a$ и $b$, имеем: $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\ f'(c)$, т.-е. разность $f(x_2)-f(x_1)$ имеет знак производной; таким образом $f(x_2)>f(x_1)$ при $f'(x)>0$ и $f(x_2)<f(x_1)$ при $f'(x)<0$ (см. отд. II, гл. I, § 1).

*Приложение 1.* Доказать тождества: $\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$ (1),

$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\operatorname{arctg}x$ (2), $\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=2\operatorname{arctg}x$ (3),

$\log(x+\sqrt{1+x^2})=\operatorname{arcsh}x$ (4), $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\operatorname{arcth}x$ (5).

(В (1), (3), (5) считается $-1<x<+1$).

Проверяем, что производные от обеих частей тождества равны; если же $f'(x)=\varphi'(x)$, то $[f(x)-\varphi(x)]'=0$ и по 1-му следствию имеем $f(x)-\varphi(x)=C$; для определения постоянной $C$ во всех примерах полагаем $x=0$, и так как $f(0)=0$, $\varphi(0)=0$, то $C=0$ и окончательно $f(x)=\varphi(x)$.

*Приложение 2.* Доказать, что при $x>0$ имеют место неравенства: $e^x>1+x$ (1), $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$ (2), $x-\frac{1}{2}x^2<\log(1+x)<x$ (3), $x-\frac{1}{3}x^3<\operatorname{arctg} x<x$ (4).

Для вывода неравенства (1) положим $f(x)=e^x-1-x$; так как $f'(x)=e^x-1>0$ при $x>0$, то $f(x)$ возрастающая функция при $x>0$, но $f(0)=0$, следовательно $f(x)>0$ при $x>0$; для вывода неравенства (2) положим $f(x)=e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2$; так как $f'(x)=e^x-1-x>0$ при $x>0$ в силу (1), то $f(x)$ возрастающая функция и при $f(0)=0$ выходит $f(x)>0$ при $x>0$. Для вывода (3) берем две функции: $f(x)=\log(1+x)-x$, $\varphi(x)=\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$; так как $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0$ при $x>0$, а $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}>0$ при $x>0$, то $f(x)$ убывающая функция, а $\varphi(x)$ возрастающая функция при $x>0$; теперь из равенств $f(0)=0$, $\varphi(0)=0$ следует, что при $x>0$ должно быть $f(x)<0$, $\varphi(x)>0$ это и доказывает неравенство (3).

## § 3. Формула Тэйлора с дополнительным членом.

Поставим задачу о разложении целой функции $n$-й степени $f(x)$ по целым положительным степеням бинома $x-a$, т.-е. найдем выражения коэффициентов $A_0, A_1, \ldots A_n$ в формуле:

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+A_3(x-a)^3+\ldots+A_n(x-a)^n.$$

Составляя $n$ последовательных производных от $f(x)$, найдем [см. гл. I, § 7, 1)]:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=A_1 1+2A_2(x-a)+3A_3(x-a)^2+\ldots+nA_n(x-a)^{n-1}\\
f''(x)&=2\cdot1\cdot A_2+3\cdot2A_3(x-a)+\ldots+n(n-1)A_n(x-a)^{n-2}\\
f'''(x)&=3\cdot2\cdot1A_3+\ldots+n(n-1)(n-2)A_n(x-a)^{n-3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n)}(x)&=n(n-1)(n-2)\ldots2\cdot1\,A_n.
\end{aligned}$$

Полагая во всех тождествах $x=a$, найдем $A_0=f(a)$, $A_1=\frac{f'(a)}{1}$, $A_2=\frac{f''(a)}{1\cdot2}$, $A_3=\frac{f'''(a)}{1\cdot2\cdot3}$, $\ldots A_n=\frac{f^{(n)}(a)}{1\cdot2\cdot3\ldots n}$, что и приводит к формуле Тэйлора для целой функции $n$-й степени:

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1}+(x-a)^2\cdot\frac{f''(a)}{1\cdot2}+(x-a)^3\frac{f'''(a)}{1\cdot2\cdot3}+\ldots$$
$$\ldots+(x-a)^n\cdot\frac{f^{(n)}(a)}{1\cdot2\ldots n}.$$

Возьмем теперь какую-нибудь функцию от $x$, непрерывную вместе с $n$ первыми производными и имеющую $(n+1)$-ю производную для всех значений от $a$ до $x$. Предыдущая формула не верна для всякой функции, кроме целой степени $\leqq n$; поэтому мы прибавим в разложении еще один не вполне определенный член вида $P\cdot(x-a)^p$, где $p$ целое положительное число и $P$

некоторое неизвестное число (такой член называется дополнительным или остаточным и обыкновенно обозначается символом $R_{n+1}$); итак, положим

$$(*)\ f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+P\cdot(x-a)^p\quad (k!=1\cdot 2\ldots k)$$

и рассмотрим функцию от $z$:

$$F(z)=f(x)-f(z)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(x-z)^k}{k!}f^{(k)}(z)-P(x-z)^p,$$ где $P$ будем считать независящим от $z$.

Тогда $F(a)=0$ в силу формулы (*), $F(x)=0$ тождественно; сверх того функция $F(z)$ имеет производную:

$$F'(z)=-f'(z)+\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(x-z)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(z)-\frac{(x-z)^k}{k!}f^{(k+1)}(z)\right\}+$$

$$+Pp(x-z)^{p-1}=-\frac{(x-z)^n}{n!}f^{(n+1)}(z)+Pp(x-z)^{p-1},$$

существующую по предположению для всех значений $z$ от $a$ до $x$. По теореме Ролля заключаем, что между $a$ и $x$ существует число $\xi$ такое, для которого

$$F'(\xi)=-\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)+Pp(x-\xi)^{p-1}=0;$$

отсюда

$$P=\frac{(x-\xi)^{n-p+1}f^{(n+1)}(\xi)}{n!\cdot p}.$$

Так как $\xi$ есть число, заключенное между $a$ и $x$, то можно положить $\xi=a+\vartheta(x-a)$, где $0<\vartheta<1$; тогда $x-\xi=(x-a)(1-\vartheta)$, и дополнительный член формулы (*) будет:

$$R_{n+1}=P\cdot(x-a)^p=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\vartheta)^{n-p+1}}{n!\cdot p}f^{(n+1)}[a+\vartheta(x-a)],$$

где $p$ любое целое положительное число от 1 до $n+1$ (показатель при $1-\vartheta$ должен быть $\geqq 0$). В такой форме дополнительный член был указан Шлёмильхом; при $p=n+1$ получается форма, указанная Лагранжем:

$$R_{n+1}=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\vartheta(x-a)],$$

и при $p=1$ — форма, указанная Коши:

$$R_{n+1}=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\vartheta)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}[a+\vartheta(x-a)].$$

Итак, мы получили формулу Тэйлора с дополнительным членом:

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+R_{n+1}:$$

ее вывод основан был на предположении, что в интервале значений $z$ от $a$ до $x$ существуют все производные функции $f(z)$ от первой до $(n+1)$-й (существование $k$-й производной необходимо предполагает непрерывность всех предшествующих производных и самой функции).

Полагая $x=a+h$, получаем другой вид формулы Тэйлора:

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a)+R_{n+1},$$

где

$$R_{n+1}=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\vartheta h) \quad \text{или} \quad R_{n+1}=\frac{h^{n+1}(1-\vartheta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\vartheta h).$$

Если в последней формуле Тэйлора заменить $a$ на $x$, $h$ на $dx$, $f(x+dx)-f(x)$ на $\Delta y$, $f^{(k)}(x)dx^k$ на $d^ky$, то получится разложение приращения функции по дифференциалам ее 1-го, 2-го, ... $n$-го порядка:

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^ky+R_{n+1}, \quad \text{где} \quad R_{n+1}=\frac{dx^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\vartheta dx).$$

Наконец, если в первоначальной формуле Тэйлора сделать $a=0$, то получится формула Маклорена с дополнительным членом:

$$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+R_{n+1},$$

где

$$R_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\vartheta x) \quad \text{или} \quad R_{n+1}=\frac{x^{n+1}(1-\vartheta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\vartheta x)$$

при $0<\vartheta<1$. Вывод формулы предполагает, что при $0<z<x$ (или при $0>z>x$) существуют все производные данной функции от $f'(x)$ до $f^{(n+1)}(z)$.

---

Глава III.

# Дифференцирование явных функций от нескольких независимых переменных и неявных функций от одной и нескольких независимых переменных.

## § 1. Непрерывность функции от нескольких независимых переменных.

*Определение 1.* Переменные $x$, $y$, $z$ называются независимыми, если, после задания одной из них определенного значения каждая из остальных может принимать любое значение из своей области изменения. Напротив, переменная $V$ называется функцией от независимых переменных $x$, $y$, $z$,... — что обозначается символом $V=f(x, y, z,\ldots)$, — если, после задания определенных значений переменным $x$, $y$, $z$, ... переменная $V$ получает определенное значение. Например, если точка $M(x, y, z)$ может занимать любое положение в пространстве, то три ее координаты будут независимыми переменными; если точка $M$ должна оставаться на некоторой поверхности, то две ее координаты $x$ и $y$ будут независимыми переменными, а третья $z$, как их функция, определяется из уравнения поверхности: $z=f(x, y)$. Если точка $M$ должна находиться на некоторой линии, то одна ее координата $x$ будет независимой переменной, а две другие $y$ и $z$ будут функциями от $x$, определяемыми из двух уравнений данной линии.

*Определение 2.* Функция $V=f(x, y, z\ldots)$ называется непрерывною для данной системы значений $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0\ldots$, если 1) существует определенное значение $f(x_0, y_0, z_0\ldots)$ и 2) пред. $f(x, y, z\ldots)=$ $=f(x_0, y_0, z_0\ldots)$, если $x, y, z\ldots$ приближаются по любому закону к $x_0, y_0, z_0\ldots$, т.-е. если можно сделать $|f(x, y, z\ldots)-f(x_0, y_0, z_0\ldots)|<\varepsilon$ при достаточно малых значениях $|x-x_0|$, $|y-y_0|$, $|z-z_0|\ldots$

Если одно из этих условий не выполнено, то функция имеет разрыв для данной системы значений $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0\ldots$

*Пример.* $V(x, y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ имеет разрыв при $x=0, y=0$, ибо символ $V(0, 0)$ не имеет определенного значения; полагая, например, $y=kx$, где $k$ постоянное, получим $\underset{x=0,\,y=0}{\text{пред.}}\, V(x, y)=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$, что может быть любым числом между $-1$ и $+1$. Но если рассматривать $V$ как функцию от одного $x$, считая $y$ за постоянное, то эта функция от $x$ непрерывна, не исключая $x=0$, где она имеет значение $-1$; так же, если считать $V$ функцией от $y$ (при постоянном $x$), то $V$ непрерывная функция, не исключая значения $y=0$, когда она обращается в $+1$.

## § 2. Частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал. Сравнение полного дифференциала с приращением функции.

*Определение.* Если функцию от нескольких независимых переменных $V=f(x, y, z)$ рассматривать как функцию от одной переменной $x$, считая две другие $y$ и $z$ за постоянные, то составленная в этом предположении производная и дифференциал функции $V$ называются частною производною и частным дифференциалом по $x$ и обозначаются символами:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=V'_x=f'_x(x, y, z)=\underset{\Delta x=0}{\text{пред.}}\left\{\frac{f(x+\Delta x, y, z)-f(x, y, z)}{\Delta x}\right\},$$

$$d_xV=d_xf(x, y, z)=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot dx=f'_x(x, y, z)\cdot dx.$$

Сумма частных дифференциалов по всем независимым переменным называется полным дифференциалом функции и обозначается символом $dV$:

$$dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz=f'_x\cdot dx+f'_y\cdot dy+f'_z\cdot dz.$$

*Пример.* $V=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{z}$. Здесь $\dfrac{\partial V}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\frac{x-y}{z}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{z}=\dfrac{z}{z^2+(x-y)^2}$,

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{z}\right)^2}\cdot\frac{-1}{z}=\frac{-z}{z^2+(x-y)^2},\quad \frac{\partial V}{\partial z}=\frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{z}\right)^2}\cdot\frac{-(x-y)}{z^2}=-\frac{x-y}{z^2+(x-y)^2},$$

$$dV=\frac{1}{z^2+(x-y)^2}\{z\,dx-z\,dy-(x-y)dz\}.$$

*Теорема.* Если при данной системе значений $x, y, z$ все частные производные $\dfrac{\partial V}{\partial x}$, $\dfrac{\partial V}{\partial y}$, $\dfrac{\partial V}{\partial z}$ функции $V=f(x, y, z)$ существуют и непрерывны, то полное приращение функции: $\Delta V=f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x, y, z)$ отличается от полного дифференциала $dV$ на бесконечно-малую порядка выше 1-го, когда $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ приняты за бесконечно-малые 1-го порядка.

Вывод. Представим $\Delta V$ как сумму трех разностей: $\Delta V = \Delta_x V + \Delta_y V + \Delta_z V$, где положено: $\Delta_x V = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$, $\Delta_y V = f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z)$, $\Delta_z V = f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)$.

Пользуясь формулой Лагранжа, можем написать: $\Delta_x V = \Delta x . f'_x(x+\vartheta\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ и, по непрерывности частной производной $f'_x(x, y, z)$, принять: $f'_x(x+\vartheta\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) = f'_x(x, y, z) + \alpha$, где $|\alpha|$ можно считать сколь угодно малым при достаточно малых $|\Delta x|$, $|\Delta y|$, $|\Delta z|$; итак, $\Delta_x V = \Delta x \{ f'_x(x, y, z) + \alpha \}$. На тех же основаниях найдем:

$$\Delta_y V = \Delta y \,.\, f'_y(x,\ y+\vartheta_1\Delta y,\ z+\Delta z) = \Delta y \{ f'_y(x,\ y,\ z) + \beta \},$$

$\Delta_z V = \Delta z \,.\, f'_z(x, y, z+\vartheta_2\Delta z) = \Delta z \{ f'_z(x, y, z) + \gamma \}$, где $\beta$, $\gamma$, как и $\alpha$, суть бесконечно-малые одновременно с $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$.

Замечая, что для независимой переменной приращение $\Delta x$ и дифференциал $dx$ торжественны (см. гл. I, § 3), находим: $\Delta V = dV + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z$, что и требовалось доказать.

## § 3. Дифференцирование сложных функций от одной или от нескольких независимых переменных. Однородные функции.

*Определение.* Если $V = f(x, y, z)$ есть функция от нескольких аргументов $x$, $y$, $z$, которые сами являются функциями от независимых переменных, то $V$ называется сложной функцией от этих независимых переменных.

*Теорема. 1.* Для сложной функции от одной независимой переменной $t$: $V = f(x, y, z)$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \omega(t)$, производная по $t$ составляется по формуле: $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$, т.-е. равна сумме произведений из частных производных по каждому аргументу на производные аргумента по независимой переменной, а дифференциал $dV$ имеет выражение: $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$, т.-е. по виду совпадает с полным дифференциалом функции $V$ от независимых переменных $x$, $y$, $z$.

Вывод. Когда независимая переменная $t$ получает приращение $\Delta t$, то аргументы $x$, $y$, $z$ получают приращения $\Delta x = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$, $\Delta y = \psi(t+\Delta t) - \psi(t)$, $\Delta z = \omega(t+\Delta t) - \omega(t)$, а $V$, как функция от $t$, получает приращение $\Delta V = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x, y, z)$. Искомая производная $\frac{dV}{dt} = \underset{\Delta t = 0}{\text{пред.}} \frac{\Delta V}{\Delta t}$. Преобразуя $\Delta V$, как показано при доказательстве теоремы § 2, найдем:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma \frac{\Delta z}{\Delta t},$$

при чем предполагается непрерывность частных производных $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$; замечая, что при $\Delta t = 0$ оказывается пред. $\Delta x = 0$, пред. $\Delta y = 0$, пред. $\Delta z = 0$: а вместе с тем пред. $\alpha = 0$, пред. $\beta = 0$, пред. $\gamma = 0$, получаем в пределе, $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$, что и требовалось доказать.

Умножая все члены на $dt$ и заменяя произведение производной на $dt$ дифференциалом функции, получаем $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{dV}{dy} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$. Это выражение по виду совпадает с полным дифференциалом функции $V$ от неза-

висимых переменных $x, y, z$, но по существу отличается тем, что при независимых переменных $x, y, z$ дифференциалы их $dx, dy, dz$ суть постоянные произвольные, а при $x, y, z$ — функциях от $t$ — их дифференциалы суть функции от $t$: $dx = \varphi'(t)dt$ и пр.

*Замечание.* Если в общей формуле для $\frac{dV}{dt}$ предположим $x = \varphi(t) = t$ то $\frac{dx}{dt} = 1$. и формула принимает вид:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

В нее входят две производные по $t$: полная производная $\frac{dV}{dt}$ и частная производная $\frac{\partial V}{\partial t}$, вычисленная по аргументу $t$, явно входящему в выражение $V$; для отличия этих двух неравных производных полная производная обозначается прямыми буквами $d$, а частная — круглыми $\partial$.

*Пример 1.* $V = \sqrt{t - y} + t \sin \frac{\pi y}{t}$, где $t$—независимая переменная, $y$ — функция от $t$.

Здесь $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{t - y}} + \sin\frac{\pi y}{t} - \frac{\pi y}{t} \cos \frac{\pi y}{t}$, $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{t - y}} + \pi \cos \frac{\pi y}{t}$, $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$. Рассмотрим частный случай: $y = -t$, $\frac{dy}{dt} = -1$: тогда $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{2t}} - \pi$, $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{2t}} - \pi$ и по общей формуле $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2t}}$; тот же результат получится, если до дифференцирования подставить $y = -t$ в выражение $V$: тогда $V = \sqrt{2t}$ и $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2t}}$.

*Теорема 2.* Если $V = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, при чем $x_1, x_2, \ldots x_n$ сами являются функциями от независимых переменных $y_1, y_2, \ldots y_m$: $x_j = \varphi_j(y_1, y_2, \ldots y_m)$ $(j = 1, 2, \ldots n)$, то полный дифференциал сложной функции $V$ от $y_1, y_2, \ldots y_m$ будет иметь выражение $dV = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} dx_j$ — по виду такое же, как при независимых переменных $x_j$.

Вывод. Полный дифференциал $dV$ как функции от независимых переменных $y_k$ $(k = 1, 2, \ldots m)$ будет: $dV = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial y_k} dy_k$, где $\frac{\partial V}{\partial y_k}$ составится по теореме 1, как полная производная сложной функции $V$, зависящей от аргументов $x_j$, представляющих функции от $y_k$. Итак $\frac{\partial V}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial y_k}$; следовательно $dV$ представится двойной суммой: $dV = \sum_{k=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial y_k} \right) dy_k$;

переменяя порядок суммирования, найдем: $dV=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x_j}{\partial y_k}\,dy_k\right)$; но $dx_j=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x_j}{\partial y_k}\,dy_k$, следовательно, $dV=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_j}dx_j$, что и требовалось доказать.

*Пример 2.* $V=x-y+z+\Phi\left(x+y+z,\ \frac{xy}{z}\right)$. Показать, что, независимо от вида функции $\Phi$, частные производные функции $V$ удовлетворяют условию $x(z+y)\frac{\partial V}{\partial x}-y(x+z)\frac{\partial V}{\partial y}+z(y-x)\frac{\partial V}{\partial z}=2y(z+x)$.

Называя аргументы функции $\Phi$ через $u$ и $v$: $u=x+y+z$, $v=\frac{xy}{z}$, находим: $\frac{\partial V}{\partial x}=1+\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\cdot\frac{y}{z}$, $\frac{\partial V}{\partial y}=-1+\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\cdot\frac{x}{z}$, $\frac{\partial V}{\partial z}=1+\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\frac{\partial\Phi}{\partial v}\cdot\frac{xy}{z^2}$, после чего проверяется указанное соотношение. Произведенная операция называется исключением произвольной функции $\Phi$ из выражения $V$.

*Пример 3.* Функция $V=f(x,\ y,\ z)$ называется однородною функцией $m$-й степени, если удовлетворяет условию: $f(tx,\ ty,\ tz)=t^m\cdot f(x,\ y,\ z)$, где $t$ произвольная величина; например $V=x^2-y^2+z^2$ есть однородная функция 2-й степени, $V=\frac{x+y}{x-z}\,e^{-\frac{y}{z}}$ есть однородная функция нулевой степени.

Однородная функция $m$-й степени удовлетворяет уравнению:

$$x\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}+z\frac{\partial V}{\partial z}=m\cdot V\quad\text{(Эйлер).}$$

В самом деле, принимая $t=\frac{1}{x}$, имеем

$$V=f(x,\ y,\ z)=x^m f\left(1,\ \frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)=x^m\cdot F(u,\ v),$$

где $u=\frac{y}{x}$, $v=\frac{z}{x}$. Исключая отсюда произвольную функцию $F$, имеем: $\frac{\partial V}{\partial x}=mx^{m-1}\cdot F(u,\ v)+x^m\left\{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{-y}{x^2}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{-z}{x^2}\right\}$, $\frac{\partial V}{\partial y}=x^m\cdot\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{1}{x}$,

$$\frac{\partial V}{\partial z}=x^m\cdot\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{1}{x},\ \text{откуда}\ x\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}+z\frac{\partial V}{\partial z}=m\cdot V.$$

**§ 4. Частные производные высших порядков. Их независимость от порядка дифференцирования.**

*Определение.* Частные производные от первых частных производных $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ называются частными производными 2-го порядка и обозначаются так: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$ и т. п.

Составляя производные от частных производных 2-го порядка, получаем частные производные 3-го порядка:

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right),\quad \frac{\partial^3 V}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right),\quad \frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right) \text{ и т. п.}$$

*Пример.* $V=x^3-3x^2y+3xz^2-3y^2z+6xyz.$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=3x^2-6xy+3z^2+6yz,\ \frac{\partial V}{\partial y}=-3x^2-6yz+6xz,\ \frac{\partial V}{\partial z}=6xz-3y^2+6xy,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=6x-6y,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=-6x+6z,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}=6z+6y,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}=-6x+6z,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-6z,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}=-6y+6x,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial x}=6z+6y,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial y}=-6y+6x,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=6x \text{ и т. д.}$$

*Теорема.* Частные производные высших порядков, отличающиеся только порядком дифференцирования, равны, если они непрерывны.

Начнем с производных 2-го порядка и докажем, что для функции $V=f(x, y)$ должно быть $\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}$ или $f''_{yx}(x, y)=f''_{xy}(x, y)$. Рассмотрим выражение $D=f(x+h, y+k)-f(x+h, y)-f(x, y+k)+f(x, y)$, где $h$ и $k$ произвольные приращения независимых переменных.

Введя функции

$$\varphi(X)=f(X, y+k)-f(X, y) \text{ и } \psi(Y)=f(x+h, Y)-f(x, Y),$$

можем представить $D$ двумя способами:

$$D=\varphi(x+h)-\varphi(x) \text{ и } D=\psi(y+k)-\psi(y).$$

По формуле Лагранжа имеем:

$$D=h\varphi'_x(x+\vartheta h) \text{ и } D=k\cdot\psi'_y(y+\vartheta_1 k),$$

где $0<\vartheta<1$ и $0<\vartheta_1<1$; но по той же формуле находим:

$$\varphi(X)=k\cdot f'_y(X, y+\vartheta_2 k) \quad \text{и} \quad \psi(Y)=h\cdot f'_x(x+\vartheta_3 h, Y),$$

следовательно два выражения $D$ будут:

$$D=h\cdot k\cdot f''_{yx}(x+\vartheta h, y+\vartheta_2 k) \text{ и } D=k\cdot h\cdot f''_{xy}(x+\vartheta_3 h, y+\vartheta_1 k).$$

Приравнивая их, получаем, при всех значениях $h$ и $k$, равенство:

$$f''_{yx}(x+\vartheta h, y+\vartheta_2 k)=f''_{xy}(x+\vartheta_3 h, y+\vartheta_1 k),$$

где $\vartheta$, $\vartheta_1$, $\vartheta_2$, $\vartheta_3$ заключены между 0 и 1. Переходя к пределу, при $h=0$ и при $k=0$, найдем, по условию непрерывности обеих производных, что $f''_{yx}(x, y)=f''_{xy}(x,y)$, что и требуется доказать.

От производных 2-го порядка перейдем к производным 3-го порядка и докажем, что для функции $V=f(x, y, z)$ шесть производных, отличающихся только порядком: (1) $\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y\partial z}$, (2) $\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial z\partial y}$, (3) $\frac{\partial^3 V}{\partial y\partial x\partial z}$, (4) $\frac{\partial^3 V}{\partial y\partial z\partial x}$, (5) $\frac{\partial^3 V}{\partial z\partial x\partial y}$, (6) $\frac{\partial^3 V}{\partial z\partial y\partial x}$, равны, если они непрерывны.

Вывод. Представив (1) в виде $\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$ и (2) в виде $\frac{\partial^2}{\partial z \partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, заключаем о их равенстве, так как они отличаются изменением порядка дифференцирования по $y$ и по $z$. Представив (1) в виде $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)$ и (3) в виде $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}\right)$, заключаем о их равенстве. Беря для (3) представление $\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ и для (4) $\frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$, приходим к их равенству. Беря (5) в форме $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}\right)$ и (2) в форме $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\right)$, заключаем о их равенстве. Беря (6) в виде $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$ и (5) в виде $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, убеждаемся в их равенстве. От производных 3-го порядка можно перейти к производным 4-го порядка и т. д.

## § 5. Полные дифференциалы высших порядков. Символическая формула.

*Определение.* Полный дифференциал от первого полного дифференциала $dV$ называется вторым полным дифференциалом, или полным дифференциалом 2-го порядка, и обозначается символом $d^2V$: $d^2V = d(dV)$. Подобным образом полный дифференциал от второго полного дифференциала называется полным дифференциалом 3-го порядка: $d^3V = d(d^2V)$ и т. д. Вообще $d^nV = d(d^{n-1}V)$.

В § 3 мы видели, что выражение первого полного дифференциала $dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}\partial y + \frac{\partial V}{\partial z}dz$ имеет один и тот же вид, будут ли буквы $x$, $y$, $z$ независимые переменные или функции от других независимых переменных. Но уже для высших дифференциалов формулы будут отличаться по той причине, что при независимых переменных $x$, $y$, $z$ их дифференциалы $dx$, $dy$, $dz$ — постоянные величины, и потому высшие дифференциалы их равны 0: $d^2x = 0$, $d^2y = 0$, $d^2z = 0$, $d^3x = 0$, $d^3y = 0$, $d^3z = 0$ и т. д.; если же $x$, $y$, $z$ функции, то (за исключением случая, когда $x$, $y$, $z$ представляются линейными функциями от независимых переменных, т.-е. когда $x = \alpha + \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$, $y = \beta + \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w$, $z = \gamma + \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w$), их дифференциалы не будут постоянными и потому в формулу для $d^2V$ войдут $d^2x$, $d^2y$, $d^2z$, в формулу для $d^3V$ войдут вторые и третьи дифференциалы $x$, $y$, $z$ и т. д. Поэтому отличим два случая:

1) $x$, $y$, $z$ независимые переменные или линейные функции от независимых переменных; тогда $dx$, $dy$, $dz$ постоянны и полный дифференциал $n$-го порядка определяется символической формулой:

$$d^nV = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n V,$$

в которой, после возвышения трехчлена в степень $n$, каждый член вида

$$A\frac{\partial^n}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \cdot dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma \cdot V$$

нужно понимать как частный дифференциал:

$$A \cdot \frac{\partial^n V}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \cdot dx^\alpha \cdot dy^\beta \cdot dz^\gamma \quad (\alpha + \beta + \gamma = n).$$

Вывод. Первый дифференциал $dV$ подчиняется символической формуле:

$$dV=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)V.$$

Второй полный дифференциал $d^2V=d(dV)=d_x(dV)+d_y(dV)+d_z(dV)$; но $d_x(dV)=\frac{\partial}{\partial x}(dV)\cdot dx=$ символическому произведению $dV\cdot\frac{\partial}{\partial x}dx$,

$$d_y(dV)=\text{символическому произведению } dV\cdot\frac{\partial}{\partial y}dy,$$

$$d_z(dV)=\text{символическому произведению } dV\cdot\frac{\partial}{\partial z}dz,$$

откуда

$$d^2V=d\,(dV)=dV\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2V=$$

$$=\frac{\partial^2V}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2V}{\partial y\partial z}dxdz.$$

Вообще составление полного дифференциала от выражения

$$\sum A\frac{\partial^nV}{\partial x^\alpha\partial y^\beta\partial z^\gamma}dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma\quad(\alpha+\beta+\gamma=n)$$

равносильно символическому умножению этого выражения на

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right),$$

и потому, если символическая формула доказана для $d^nV$, то она будет верна и для $d^{n+1}V$; так как она доказана у нас при $n=2$, то она верна для всякого $n$.

2) $x$, $y$, $z$—функции от независимых переменных и притом не линейные. Тогда к символическому выражению присоединятся еще члены, содержащие дифференциалы высших порядков от $x$, $y$, $z$. Ограничимся функцией от 2 аргументов: $V=f(x, y)$. Тогда

$$d^2V=\frac{\partial^2V}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial V}{\partial x}d^2x+\frac{\partial V}{\partial y}d^2y,$$

$$d^3V=\frac{\partial^3V}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3V}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3V}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3V}{\partial y^3}dy^3+$$

$$+\frac{\partial^2V}{\partial x^2}\cdot 2dxd^2x+2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\cdot(dxd^2y+dyd^2x)+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}\cdot 2dyd^2y+$$

$$+\left(\frac{\partial^2V}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}dy\right)\cdot d^2x+\left(\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}dy\right)d^2y+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial x}d^3x+\frac{\partial V}{\partial y}d^3y=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3V+$$

$$+3\frac{\partial^2V}{\partial x^2}dxd^2x+3\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}(dxd^2y+dyd^2x)+3\frac{\partial^2V}{\partial y^2}\cdot dyd^2y+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial x}d^3x+\frac{\partial V}{\partial y}d^3y.$$

## § 6. Дифференцирование неявных функций.

1) Уравнение $f(x, y)=0$ определяет $y$ как неявную функцию от $x$. Рассматривая $f(x, y)$ как сложную функцию от $x$, которая сохраняет постоянное значение 0, приравниваем нулю ее полные дифференциалы 1-го, 2-го, 3-го... порядка, имея в виду, что $dx$ постоянное и $dy$ — функция от $x$ (см. § 5, 2). Имеем:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0, d^2f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0,$$

$$d^3f=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxd^2y+$$
$$+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dyd^2y+\frac{\partial f}{\partial y}d^3y=0.$$

Разделяя первое уравнение на $dx$, находим: $\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{f'_x}{f'_y}$. Разделяя второе уравнение на $dx^2$, получаем:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{f'_y}\{f''_{xx}+2f''_{xy}y'+f''_{yy}y'^2\}=-\frac{1}{(f'_y)^3}\{f''_{xx}\cdot f'^2_y-$$
$$-2f''_{xy}\cdot f'_x\cdot f'_y+f''_{yy}\cdot f'^2_x\}.$$

Разделяя третье уравнение на $dx^3$, можем найти $y'''$ и т. д.

*Пример 1.* Из уравнения $x^3+y^3-3axy=0$ определить значения $y'$, $y''$, $y'''$ при $x=y=\frac{3}{2}a$.

Составляем: $f'_x=3x^2-3ay$, $f'_y=3y^2-3ax$, $f''_{xx}=6x$, $f''_{xy}=-3a$, $f''_{yy}=6y$, $f'''_{xxx}=6$, $f'''_{xxy}=0$, $f'''_{xyy}=0$, $f'''_{yyy}=6$; находим их значения в данной точке: $f'_x=f'_y=\frac{9}{4}a^2$, $f''_{xx}=f''_{yy}=9a$ и прочие и по общим формулам, выше установленным, определяем $y'=-1$, $y''=-\frac{32}{3a}$, $y'''=-\frac{512}{3a^2}$.

*Пример 2.* Из уравнения $x\cos y+y\sin x=\frac{\pi}{2}$ находим: $\cos y+$ $+y\cos x+y'(-x\sin y+\sin x)=0$, $-y\sin x+2y'(-\sin y+\cos x)-$ $-x\cos y\cdot y'^2+y''(-x\sin y+\sin x)=0$. В точке $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$ получаем $y'=-1$, $y''=\frac{\pi}{2}$.

2) Система уравнений $f(x, y, z)=0$, $\varphi(x, y, z)=0$ определяет две переменных $y$ и $z$ как функции от третьей: $x$. Приравнивая нулю полные производные функций $f$ и $\varphi$ по $x$, получаем систему: $f'_x+f'_y\cdot y'+f'_z\cdot z'=0$, $\varphi'_x+\varphi'_y\cdot y'+\varphi'_z\cdot z'=0$, из которой находим $y'$ и $z'$. Производные $y''$ и $z''$ определятся из системы: $f''_{xx}+2f''_{xy}\cdot y'+f''_{yy}\cdot y'^2+2f''_{xz}\cdot z'+2f''_{yz}\cdot y'z'+$ $+f''_{zz}\cdot z'^2+f'_y\cdot y''+f'_z\cdot z''=0$ и подобного же уравнения для $\varphi$, и т. д.

*Пример 3.* Определить из системы: $x^2-y^2+2z^2=2$, $x^2-3y+$ $+5z=3$ значения $y'$, $z'$, $y''$, $z''$, $y'''$, $z'''$ в точке (1, 1, 1). Первое дифференцирование дает $x-yy'+2zz'=0$, $2x-3y'+5z'=0$ и в данной точке: $-y'+2z'=-1$, $-3y'+5z'=-2$, откуда $y'=-1$, $z'=-1$. Второе дифференцирование общей системы дает: $1-y'^2-yy''+2z'^2+2zz''=0$, $2-3y''+5z''=0$ и в данной точке: $-y''+2z''=-2$, $-3y''+5z''=-2$,

откуда $y''=-6$, $z''=-4$. Третье дифференцирование общей системы дает: $-3y'y''-yy'''+6z'z''+2zz'''=0$, $-3y'''+5z'''=0$, в данной точке: $-y'''+2z'''=-6$, $-3y'''+5z'''=0$, откуда $y'''=-30$, $z'''=-18$.

3) Уравнение $f(x, y, z)=0$ определяет $z$ как функцию от двух независимых переменных $x$ и $y$. Положим $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=s$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t$. Приравнивая нулю частные производные функции $f(x, y, z)$,—по $x$ и по $y$, находим уравнения: $f'_x+f'_z\cdot p=0$, $f'_y+f'_z\cdot q=0$, откуда $p=-\frac{f'_x}{f'_z}$, $q=-\frac{f'_y}{f'_z}$. Дифференцируя предыдущие уравнения сперва оба по $x$, потом оба по $y$, находим: $f''_{xx}+2f''_{xz}\cdot p+f''_{zz}\cdot p^2+f'_z\cdot r=0$, $f''_{xy}+f''_{yz}\cdot p+f''_{xz}\cdot q+f''_{zz}\cdot pq+f'_z\cdot s=0$, $f''_{xy}+f''_{xz}\cdot q+f''_{yz}\cdot p+f''_{zz}\cdot pq+f'_z\cdot s=0$, $f''_{yy}+2f''_{yz}\cdot q+f''_{zz}q^2+f'_z\cdot t=0$ (средние уравнения совпадают), и отсюда получаем $r$, $s$, $t$. Можно иначе получить значения $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, составляя полные дифференциалы сложной функции от двух независимых переменных $f(x, y, z)$ и приравнивая их нулю; именно $df=f'_x\,dx+f'_y\,dy+f'_z\,dz$, $d^2f=f''_{xx}\,dx^2+2f''_{xy}\,dxdy+f''_{yy}\,dy^2+2f''_{xz}\,dxdz+2f''_{yz}\,dydz+f''_{zz}\,dz^2+f'_z\,d^2z$; внося сюда $dz=pdx+qdy$, $d^2z=rdx^2+2s\,dxdy+t\,dy^2$ (по символической формуле § 5) найдем из 1-го уравнения $(f'_x+pf'_z)\,dx+(f'_y+qf'_z)\,dy=0$, из 2-го уравнения: $(f''_{xx}+2f''_{xz}\,p+f''_{zz}\,p^2+f'_z\cdot r)\,dx^2+2\,(f''_{xy}+f''_{xz}\cdot q+f''_{yz}\cdot p+f''_{zz}\cdot pq+f'_z\cdot s)\,dxdy+(f''_{yy}+2f''_{yz}\,q+f''_{zz}\,q^2+f'_z\cdot t)\,dy^2=0$, откуда, в виду произвольности чисел $dx$, $dy$, следует, что два коэффициента 1-го уравнения и три коэффициента 2-го уравнения каждый в отдельности равны нулю; это дает нам 5 уравнений, установленных выше.

*Пример 4.* Из уравнения $x^2+3y^2+5z^2=9$ вычислить $p$, $q$, $r$, $s$, , в точке $x=1$, $y=1$, $z=1$. Имеем (по сокращении на 2): $x+5zp=0$, $3y+5zq=0$ и далее: $1+5p^2+5zr=0$, $pq+zs=0$, $3+5q^2+5zt=0$, откуда $p=-\frac{1}{5}$, $q=-\frac{3}{5}$, $r=-\frac{6}{25}$, $s=-\frac{3}{25}$, $t=-\frac{24}{25}$.

4) Вообще, если имеется $m$ уравнений между $n$ переменными ($n>m$), то $n-m$ из них можно принять за независимые переменные, остальные $m$ за их неявные функции, определенные данной системой. Дифференцируя каждое уравнение по каждой из независимых переменных, получим $m(n-m)$ новых уравнений, из которых найдутся частные производные от каждой из $m$ функций по каждой из $(n-m)$ независимых переменных и т. д.

## § 7. Замена переменных в выражениях, содержащих производные.

1) Случай одной независимой переменной. Дано выражение $V=\Phi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})$, где $x$ независимая переменная, $y$ ее неизвестная функция, $y', y'' \ldots y^{(n)}$ производные этой функции по $x$. Полагая $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ и принимая $u$ за новую независимую переменную и $v$ — за ее неизвестную функцию, преобразовать данное выражение $V$ в

$$F\left(u, v, \frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}, \ldots \frac{d^nv}{du^n}\right).$$

Решение. В главе I, § 6, следствие, показано, что выражение $y'=\frac{dy}{dx}$ сохраняет вид, какая бы буква ни считалась за переменную независимую, но

следующие производные $y''$, $y'''$,...составлены в предположении, что $d^2x=0$, $d^3x=0\ldots$; поэтому нужно составить для $y''$, $y'''$,.. такие выражения, которые бы существовали при любой независимой переменной. Это будут:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}$$

(по формуле 3, § 5 глава I),

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{dx(dxd^3y-dyd^3x)-3d^2x(dxd^2y-dyd^2x)}{dx^5} \text{ и т. д.}$$

Сюда надо внести значения: $dx=\varphi'_u\,du+\varphi'_v\,dv$, $d^2x=\varphi''_{uu}\,du^2+2\varphi''_{uv}\,dudv+\varphi''_{vv}\,dv^2+\varphi'_v\,d^2v$, $d^3x=\varphi'''_{uuu}\,du^3+3\varphi'''_{uuv}\,du^2dv+3\varphi'''_{uvv}\,dudv^2+\varphi'''_{vvv}\,dv^3+3\varphi''_{uv}\,dud^2v+3\varphi''_{vv}\,dvd^2v+\varphi'_v\,d^3v$ [см. выражение $df$, $d^2f\ldots$ в § 6, 1)] и подобные выражения для $dy$, $d^2y$, $d^3y$ (с заменою $\varphi$ на $\psi$). По разделении числителя и знаменателя полученных дробей на $du$, $du^3$, $du^5\ldots$ соответственно, найдем выражения: $y'$ через $u$, $v$, $\frac{dv}{du}$, $y''$ через $u$, $v$, $\frac{dv}{du}$, $\frac{d^2v}{du^2}$ и т. д., которые и подставим в данную функцию $V=\Phi(x, y, y', \ldots y^{(n)})$; после этого она обратится в $F\left(u, v, \frac{dv}{du}, \ldots \frac{d^nv}{du^n}\right)$.

*Пример 1.* Преобразовать уравнение $x^4y''-a^2y=0$, вводя новую независимую переменную $u=\frac{1}{x}$ и новую функцию $v=\frac{y}{x}$. Имеем: $x=\frac{1}{u}$, $y=\frac{v}{u}$, $dx=-\frac{du}{u^2}$, $dy=-\frac{vdu}{u^2}+\frac{1}{u}dv$, $d^2x=\frac{2du^2}{u^3}$, $d^2y=\frac{2vdu^2}{u^3}-2\frac{dudv}{u^2}+\frac{1}{u}d^2v$, откуда $y''=\frac{1}{dx^3}(dxd^2y-dyd^2x)=u^3\frac{d^2v}{du^2}$; данное уравнение принимает вид: $\frac{d^2v}{du^2}-a^2v=0$.

*Замечание.* Если изменяется только независимая переменная, при чем полагается $x=\varphi(t)$, то можно поступить проще. Так как $dx=\varphi'(t)dt$, то $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}=\psi(t)$; рассматривая $y$ как функцию от функции относительно $t$, имеем (глава II, § 6): $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\psi(t)\cdot\frac{dy}{dt}$, $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\psi(t)\cdot\frac{d}{dt}\left\{\psi(t)\frac{dy}{dt}\right\}=\psi(t)\left\{\psi(t)\frac{d^2y}{dt^2}+\psi'(t)\frac{dy}{dt}\right\}$ и т. д.

*Пример 2.* $(2x-1)^3y'''+6(2x-1)^2y''+4(2x-1)y'+8y=\frac{\log(2x-1)}{2x-1}$, преобразовать уравнение, вводя новую независимую переменную $t$ уравнением: $2x-1=e^t$. Имеем: $2dx=e^tdt$, $\frac{dt}{dx}=2e^{-t}$.

Отсюда:

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=2e^{-t}\cdot\frac{dy}{dt},$$

$$y''=2e^{-t}\frac{d}{dt}\left\{2e^{-t}\frac{dy}{dt}\right\}=4e^{-2t}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right\},$$

$$y'''=2e^{-t}\frac{d}{dt}\left[4e^{-2t}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right\}\right]=8e^{-3t}\left\{\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right\}.$$

Подставляем в данное уравнение и, после сокращений и деления на 8, находим преобразованное уравнение $\frac{d^3y}{dt^3}+y=\frac{1}{8}te^{-t}$.

2) Случай нескольких независимых переменных. Дано выражение $\left(f(x, y, z, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cdots\right)$, содержащее независимые переменные $x, y, z$, их неизвестную функцию $V$ и частные производные различных порядков от этой функции. Полагая $x=\varphi(u, v, w)$, $y=\psi(u, v, w)$, $z=\omega(u, v, w)$ и принимая $u, v, w$ за новые независимые переменные, преобразовать данное выражение к виду

$$F\left(u, v, w, V, \frac{\partial V}{\partial u}, \frac{\partial V}{\partial v}, \frac{\partial V}{\partial w}, \frac{\partial^2 V}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v}, \cdots\right).$$

Решение. На основании формулы для дифференцирования сложной функции (§ 3) имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial u \partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial v \partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial u \partial w}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial v \partial w}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial w^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial w}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+$$

$$+2\frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial u \partial w}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+2\frac{\partial^2 V}{\partial v \partial w}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial^2 V}{\partial w^2}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial w}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ и т. п.}$$

Чтобы получить значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и т. д., нужно данную систему $x=\varphi(u, v, w)$, $y=\psi(u, v, w)$, $z=\omega(u, v, w)$ решить относительно $u, v, w$, что даст $u=\Phi(x, y, z)$, $v=\Psi(x, y, z)$, $w=\Omega(x, y, z)$; отсюда и найдутся упомянутые выше производные.

*Пример 3.* Полагая $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, выразить

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \text{ и } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

через производные $\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$. Из данных уравнений находим:

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ dr=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=\cos\theta dx+$$

$$+\sin\theta\cdot dy,\ d\theta=\frac{-ydx}{x^2+y^2}+\frac{xdy}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\theta}{r}dx+\frac{\cos\theta}{r}dy,$$

$$d^2r=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx^2-2\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy^2=$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{r}dx^2-2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}dxdy+\frac{\cos^2\theta}{r}dy^2.$$

$$d^2\theta = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left\{2xydx^2 + 2(y^2-x^2)dxdy - 2xydy^2\right\} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}dx^2 + \frac{2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}{r^2}dxdy - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}dy^2.$$

Таким образом

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta,\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta,\quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r},\quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\sin^2\theta}{r},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y} = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{r},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\cos^2\theta}{r},\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2},\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = \frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = -\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

Теперь находим:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\cos\theta + \frac{\partial V}{\partial\theta}\cdot\frac{-\sin\theta}{r},\quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{\partial V}{\partial\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{r},$$

откуда

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\cdot\cos^2\theta - 2\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{r^2} + \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{\sin^2\theta}{r} + \frac{\partial V}{\partial\theta}\cdot\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\cdot\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{r^2} + \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{\cos^2\theta}{r} + \frac{\partial V}{\partial\theta}\cdot\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{r^2},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

## § 8. Формула Тэйлора для функции от нескольких независимых переменных.

*Теорема.* Если функция $V = f(x, y, z)$ от трех независимых переменных $x, y, z$ имеет все частные производные до $(n+1)$ порядка включительно в интервалах значений переменных от $x$ до $x+h$, от $y$ до $y+k$, от $z$ до $z+l$, то справедлива формула Тэйлора:

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l) - f(x, y, z) = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}\cdot k + \frac{\partial}{\partial z}\cdot l\right)^p\cdot f(x, y, z) + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}k + \frac{\partial}{\partial z}\cdot l\right)^{n+1}\cdot f(x+\vartheta h,\ y+\vartheta k,\ z+\vartheta l) \text{ при } 0<\vartheta<1,$$

и в частности:

$$f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz) - f(x,\ y,\ z) = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}d^p f(x,\ y,\ z) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x+\vartheta dx,\ y+\vartheta dy,\ z+\vartheta dz).$$

(Символические выражения $\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot h+\frac{\partial}{\partial y}\cdot k+\frac{\partial}{\partial z}\cdot l\right)^{p}\cdot f(x, y, z)$ нужно понимать, как в § 5.)

Вывод. Положим, при данных значениях $x, y, z$: $\xi=x+ht$, $\eta=y+kt$, $\zeta=z+lt$, $f(\xi, \eta, \zeta)=F(t)$, где $t$ новая независимая переменная; тогда разность $\delta=F(x+h, y+k, z+l)-f(x, y, z)$ обратится в $\delta=F(1)-F(0)$ и по формуле Маклорена (гл. II, § 3) найдем:

$$\delta=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}\cdot F^{p)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\vartheta) \text{ при } 0<\vartheta<1.$$

Так как $\xi, \eta, \zeta$ являются линейными функциями от $t$, то (§ 5, 1) $d^pF(t)$ определяется по символической формуле: $d^pF(t)=d^pf(\xi, \eta, \zeta)=$ $=\left(\frac{\partial}{d\xi}d\xi+\frac{\partial}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial}{\partial\zeta}d\zeta\right)^{p}\cdot f(\xi, \eta, \zeta)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\cdot h+\frac{\partial}{\partial\eta}\cdot k+\frac{\partial}{\partial\zeta}\cdot l\right)^{p}\cdot f(\xi, \eta, \zeta)dt^p$, ибо

$$d\xi=h\cdot dt,\ d\eta=k\cdot dt,\ d\zeta=l\cdot dt;$$

отсюда $F^p(t)=\frac{d^pF(t)}{dt^p}=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}h+\frac{\partial}{\partial\eta}k+\frac{\partial}{\partial\zeta}l\right)^{p}\cdot f(\xi, \eta, \zeta)$,

$$F^p(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot h+\frac{\partial}{\partial y}\cdot k+\frac{\partial}{\partial z}\cdot l\right)^{p}\cdot f(x, y, z)$$

и $F^{n+1}(\vartheta)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot h+\frac{\partial}{\partial y}\cdot k+\frac{\partial}{\partial z}\cdot l\right)^{n+1}\cdot f(x+\vartheta h, y+\vartheta k, z+\vartheta l)$

(существование всех частных производных функции $f(\xi, \eta, \zeta)$ до $(n+1)$-го порядка включительно обеспечивает существование производных $F^p(t)$ до $(n+1)$-го порядка, и приложение формулы Маклорена законно). Внося в выражение $\delta=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}F^p(0)+\ldots$ найденные значения $F^p(0)$ и $F^{n+1}(\vartheta)$, получаем формулу Тэйлора. Второй вид ее получается при $h=dx$, $k=dy$, $l=dz$, когда $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^{p}f(x, y, z)=d^pf(x, y, z)$ по § 5.

ОТДЕЛ III.

# ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ВОПРОСАМ АНАЛИЗА.

## Глава I.

## Наибольшее и наименьшее значение функций.

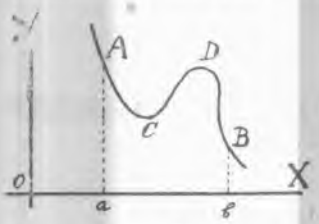
### § 1. Maxima и minima явных функций от одной независимой переменной.

*Теорема 1.* Функция $y=f(x)$, имеющая производную для всех значений $x$ в интервале $a \leqq x \leqq b$, достигает при $x=x_0$ своего maximum (сравнительно со смежными значениями), если производная $f'(x)$ обращается в 0 при $x=x_0$, при чем $f'(x_0-h)>0$, $f'(x_0+h)<0$ при достаточно малом положительном $h$; функция достигает minimum при $x=x_0$, если $f'(x_0)=0$, при чем $f'(x_0-h)<0$, $f'(x_0+h)>0$ при $h>0$.

Вывод. В гл. I, § 1 мы определили maximum функции как такое значение, в котором возрастание функции сменяется убыванием (при возрастании $x$), т.-е. должно быть $\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}>0$ и $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{+h}<0$ при достаточно малых положительных $h$. Отсюда следует, что предел первого отношения; $f'(x_0-0) \geqq 0$, а предел второго отношения: $f'(x_0+0) \leqq 0$; если же известно, что производная $f'(x_0)$ существует, то оба предела должны быть равны $f'(x_0)$, и потому $f'(x_0)=0$. Аналогично разбирается случай minimum.

*Замечание 1.* Если $y=f(x)$ есть непрерывная функция, но существование производной в интервале $(a, b)$ не обеспечено, то при достижении maximum или minimum производная может менять знак не только обращаясь в нуль, но также 1) обращаясь в $\infty$ с переменою знака, так что для maximum $f'(x_0-0)=+\infty$, $f'(x_0+0)=-\infty$ и 2) претерпевая конечный разрыв с переменою знака, так что числа $f'(x_0-0)$ и $f'(x_0+0)$ оба конечные и разных знаков (для maximum $f'(x_0-0)>0$, $f'(x_0+0)<0$). В первом случае на графике функции получается острие (черт. 39), во втором — точка излома (черт. 40). В гл. II, § 1, отд. II были приведены два примера: 1) $y=x^{\frac{2}{3}}$, где достигается minimum $y=0$ при $x=0$ образованием острия и 2) $y=x$ при $0 \leqq x \leqq 1$, $y=2-x$ при $1 \leqq x \leqq 2$, где достигается maximum $y=1$ при $x=1$ образованием излома.

*Замечание 2.* Для разыскания наибольшего и наименьшего значения функции $y=f(x)$ нужно определить по теореме 1 и замечанию 1 все ее maxima и minima сравнительно со смежными значениями, и выбрать наибольший из maximum и наименьший из minimum: это и будут наибольшее и наименьшее значение функции. При этом, если функция изучается в границах $a \leqq x \leqq b$, то нужно присоединить значения $f(a)$ и $f(b)$, которые могут представить наибольшее или наименьшее значение (или оба крайние значения), не являясь maximum или minimum сравнительно со смежными значениями. На чертеже 41 представлен случай, когда в интервале $a \leqq x \leqq b$ наименьшее значение будет $f(b)$, наибольшее $f(a)$, при чем они не представляют minimum или maximum сравнительно со смежными, если откинуть ограничивающее неравенство: $a \leqq x \leqq b$.



Черт. 41.

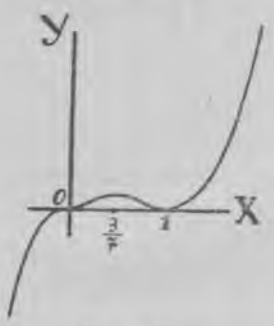
*Замечание 3.* Если при $x=x_0$ производная $f'(x)$ обращается в 0 или в $\infty$ или претерпевает конечный разрыв, но знака не меняет, то значение $f(x_0)$ не представляет ни maximum ни minimum функции. При $f'(x_0)=0$ или при $f'(x_0)=\infty$ получается тогда так называемая точка перегиба. Например, для функции $y=1+(x-1)^3$ имеем $y'=3(x-1)^2$; при $x=1$, $y'=0$ без перемены знака, точка $(1, 1)$ (черт. 36) представляет точку перегиба. Также для функции $y=x^{\frac{2}{3}}$ имеем $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; при $x=\pm 0$, $y'=+\infty$, следовательно, точка (0,0) представляет точку перегиба (черт. 37).

*Теорема 2.* Если функция $f(x)$ имеет высшие производные и если $f'(x_0)=0$, то для суждения о том, будет ли $f(x_0)$ maximum или minimum функции, можно пользоваться следующим правилом: если в ряду чисел $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, ... $f^{(k)}(x_0)$ ... первое неравное нулю будет $f^{(k)}(x_0)$, то при $k$ четном $f(x_0)$ представляет maximum при условии $f^{(k)}(x_0)<0$ и minimum при $f^{(k)}(x_0)>0$; при $k$ нечетном $f(x_0)$ не представляет ни maximum, ни minimum (тогда имеем перегиб).

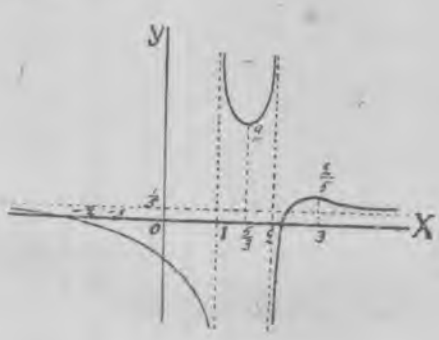
**Вывод.** По формуле Тэйлора (§ 3, гл. II, отд. II) имеем $f(x_0+h)-$ $-f(x_0)=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}h^p\cdot f^{(p)}(x_0)+R_{n+1}$; если $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0$, но $f^{(k)}(x_0)$ не $=0$, то найдем: $f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{1}{k!}h^k f^{(k)}(x_0)+$ $+\frac{1}{(k+1)!}h^{k+1}f^{k+1}(x_0+\vartheta h)=\frac{h^k}{k!}\left\{f^{(k)}(x_0)+\frac{h}{k+1}f^{(k+1)}(x_0+\vartheta h)\right\}$; при достаточно малых $|h|$ скобка $\{\ldots\}$ имеет знак, одинаковый с $f^{(k)}(x_0)$; поэтому, если $k$ четное, то $h^k>0$ при $h \lessgtr 0$ и $f(x_0+h)-f(x_0)$ имеет знак $f^{(k)}(x_0)$ при $h \lessgtr 0$, т.-е. отношение $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ меняет знак вместе с $h$, именно с $+$ на $-$ (при переходе $h$ от отрицательного к положительному) при $f^k(x_0)<0$ или с $-$ на $+$ при $f^k(x_0)>0$; первый случай отвечает maximum, второй minimum (см. теорему 1). Если же $k$ нечетное, то $h^k$ меняет знак вместе с $h$, разность $f(x_0+h)-f(x_0)$ также меняет знак вместе с $h$, а отношение $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ имеет постоянный знак при $h \lessgtr 0$, одинаковый

со знаком $f^k(x_0)$, т.-е. функция будет возрастающей при $f^k(x_0) > 0$ и убывающей при $f(x_0) < 0$; тогда имеем так называемый восходящий или нисходящий перегиб.

*Пример 1.* Вычертить график функции $y = x^3(x-1)^4$. Имеем $y' = x^2(x-1)^3 \cdot (7x-3)$; $x = 0$ не дает ни maximum ни minimum, $x = \frac{3}{7}$ дает maximum $y = \left(\frac{3}{7}\right)^3\left(\frac{4}{7}\right)^4 = 0{,}01$ (ибо $f'\left(\frac{3}{7}-0\right) > 0$, $f'\left(\frac{3}{7}+0\right) < 0$), $x = 1$ дает minimum: $y = 0$ (у непрерывной функции maximum и minimum должны чередоваться). График на чертеже 42.




Черт. 42.




Черт. 43.

*Пример 2.* То же для $y = \frac{x^2-5}{5(x^2-3x+2)}$. Здесь $y' = \frac{-3(x-3)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{5(x-1)^2(x-2)^2}$ при $x = \frac{5}{3}$ $y_{\min} = 2$, при $x = 3$ $y_{\max} = \frac{2}{5}$; при $x = \pm\sqrt{5}$ $y$ обращается в 0; при $x = 1$ и при $x = 2$ $y$ обращается в $\infty$; при $x = \pm\infty$ пред. $y = \frac{1}{5}$. Ход функции представим таблицею:

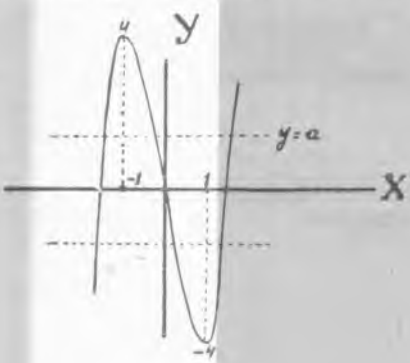
| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{5}$ | | $0$ | | $1$ | | $\frac{5}{3}$ | | $2$ | | $\sqrt{5}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{5}$ | $-0$ | | $0$ | | $-\frac{1}{2}$ | $-\infty \mid +\infty$ | | min $2$ | | $+\infty \mid -\infty$ | | $0$ | | max $\frac{2}{5}$ | | $\frac{1}{5}$ $+0$ |
| | | | | | убывает | | | | | | возрастает | | | | | | убывает |

(см. черт. 43).

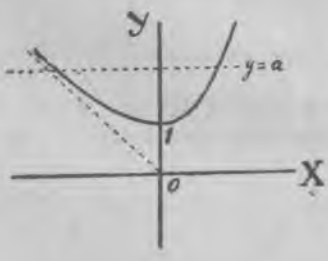
*Пример 3.* Сколько вещественных корней имеет уравнение $x^5 - 5x = a$ при различных значениях $a$?

Искомые корни являются абсциссами точек пересечения прямой $y = a$ и линии $y = x^5 - 5x$, график которой нужно построить. Так как $y' = 5(x^4-1) = 5(x+1)(x-1)(x^2+1)$, то $y_{\max} = +4$ при $x = -1$, $y_{\min} = -4$ при $x = +1$ (граф. на черт. 44). Проводя прямые $y = a$ при различных $a$, получаем три точки пересечения при $-4 < a < 4$ и одну при $a > 4$ и при $a < -4$; при $a = \pm 4$ два корня $x = \mp 1$ сливаются в один.

*Пример 4.* Тот же вопрос для уравнения $e^x - x = a$. Для функции $y = e^x - x$ имеем $y' = e^x - 1$; при $x = 0$ $y_{\min} = 1$ (черт. 45); при $a > 1$ уравнение имеет два корня, при $a < 1$ ни одного.



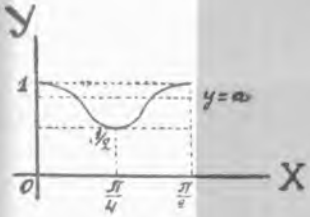

Черт. 44.



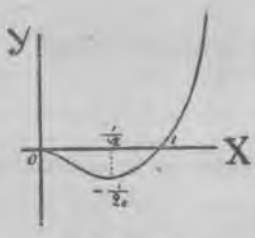

Черт. 45.

*Пример 5.* Тот же вопрос для уравнения $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ при $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{левая часть имеет период } \frac{\pi}{2}\right)$.

Здесь $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, $y' = -2\sin 4x$, $y'' = -8\cos 4x$; при $x = 0$ $y_{\max} = 1$, при $x = \frac{\pi}{4}$ $y_{\min} = \frac{1}{2}$, при $x = \frac{\pi}{2}$ $y_{\max} = 1$ (граф. на черт. 46). При $\frac{1}{2} < a < 1$ уравнение имеет два корня, при $a < \frac{1}{2}$ и при $a > 1$ — ни одного.




Черт. 46.




Черт. 47.

*Пример 6.* Тот же вопрос для уравнения $x^2 \log x = a$. Здесь $y = x^2 \log x$, $y' = 2x\left(\log x + \frac{1}{2}\right)$, $y'' = 2\log x + 3$. При $x = 0$ $y_{\max} = 0$, при $x = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0{,}61$ $y_{\min} = -\frac{1}{2e} = -0{,}18$ (граф. на черт. 47). При $0 > a > -\frac{1}{2e}$ уравнение имеет 2 корня, при $a > 0$ один, при $a < -\frac{1}{2e}$ ни одного.

*Пример 7.* Число $a\,(a > 0)$ разбить на два слагаемых так, чтобы сумма их $k$-ых степеней $(k > 0)$ была наибольшая или наименьшая.

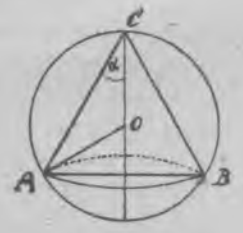
Здесь $y = x^k + (a-x)^k$ при $0 \leqq x \leqq a$; составив $y' = k\{x^{k-1} - (a-x)^{k-1}\}$, $y'' = k(k-1)\{x^{k-2} + (a-x)^{k-2}\}$, заключаем, что $y' = 0$ при $x = \frac{a}{2}$, при

чем $y''<0$ при $0<k<1$ и $y''>0$ при $k>1$. Таким образом при $0<k<1$ $y_{\max}=2^{1-k}\cdot a^k$, и наименьшее $y=a^k$ получается на границах, при $x=0$ и $x=a$.

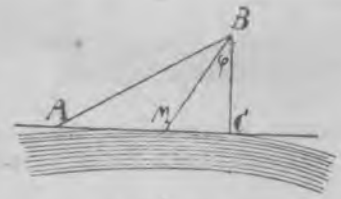
Если же $k>1$, то $y_{\min}=\frac{a}{2^{k-1}}\left(\text{при } x=\frac{a}{2}\right)$ и наибольшее $y=a^k$ на границах, при $x=0$ и $x=a$.

*Пример* 8. В данный шар радиуса $R$ вписать конус наибольшего объема.

Обозначая через $\alpha$ угол между осью и образующею конуса (черт. 48), получаем для объема конуса выражение $V=\frac{8}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos^4\alpha$ при $0\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}$; так как $\frac{dV}{d\alpha}=\frac{32}{3}\pi R^3\sin\alpha\cos^3\alpha\left(\frac{1}{2}-\operatorname{tg}^2\alpha\right)$, то при $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\alpha=35^\circ15'51''$) получается $V_{\max}=\frac{32}{81}\pi R^3=\frac{8}{27}$ объема шара (высота конуса $H=\frac{4}{3}R$); при $\alpha=0$ $V_{\min}=0$.




Черт. 48.




Черт. 49.

*Пример 9.* Пункт $A$ находится на берегу реки, пункт $B$ в расстоянии $CB=h$ от берега, при чем длина $AC=a$. Путешественник, желая из $A$ доставиться в $B$, может часть пути $AM$ проехать в лодке со скоростью $v_0$, а остальную часть $MB$ пройти пешком со скоростью $v_1$. Как должен он выбрать точку $M$ выхода на берег, чтобы доставиться из $A$ в $B$ в возможно короткий срок ($v_0>v_1$)? (черт. 49).

Называя угол $CBM$ через $\varphi$, находим $AM=a-h\operatorname{tg}\varphi$, $MB=h\sec\varphi$, и время $y$, потребное для совершения пути $AM+MB$, будет $y=\frac{a-h\operatorname{tg}\varphi}{v_0}+\frac{h\sec\varphi}{v_1}$. Так как $y'=\frac{h}{v_1\cos^2\varphi}\left(\sin\varphi-\frac{v_1}{v_0}\right)$, то $y'=0$ при $\sin\varphi=\frac{v_1}{v_0}$, где достигается minimum; однако нужно иметь в виду, что угол $\varphi$ должен изменяться лишь в пределах от 0 до $\angle CBA=\arcsin\frac{AC}{AB}=\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$, так что $0\leqq\sin\varphi\leqq\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$. Поэтому, если $\frac{v_1}{v_0}<\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$, то $y_{\min}=\frac{a}{v_0}+\frac{h\sqrt{v_0^2-v_1^2}}{v_0v_1}$ отвечает значению $\sin\varphi=\frac{v_1}{v_0}$, если же $\frac{v_1}{v_0}\geqq\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$, то наименьшее значение $y$ отвечает пограничному значению $\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$

и тогда наименьшее $y=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{v_1}$, т.-е. получается при движении по прямой $AB$.

## § 2. Maxima и minima неявной функции от одной независимой переменной.

*Теорема.* Maxima и minima неявной функции $y$, определяемой уравнением $f(x, y)=0$, находятся среди решений системы: $f(x, y)=0$, $f'_x(x, y)=0$, не удовлетворяющих уравнению $f'_y(x, y)=0$. Чтобы узнать, отвечает ли одной такой паре решений $x=x_0$, $y=y_0$ — maximum или minimum функции $y$, нужно составить ряд производных: $f''_{xx}(x_0, y_0)$, $f'''_{xxx}(x_0, y_0)$, ... $f^{(k)}_{x^k}(x_0, y_0)$, ...; если первая неравная нулю производная в этом ряду будет $f^{(k)}_{x^k}(x_0, y_0)$, то при $k$ нечетном $y_0$ не представляет ни maximum ни minimum $y$, а при $k$ четном будет maximum, когда $f^{(k)}_{x^k}(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$ имеют одинаковые знаки, и minimum, когда они имеют разные знаки.

Вывод. Значение $y'$, как известно из гл. III, § 6 отд. II, определяется уравнением $y'=-\frac{f'_x}{f'_y}$ и так как, по теореме 1 § 1, при достижении maximum или minimum должно быть $y'=0$, то $f'_x(x, y)=0$ при $f'_y(x, y)$ не $=0$; таким образом maxima и minima функции $y$ нужно искать среди решений системы: $f(x, y)=0$, $f'_x(x, y)=0$, не обращающих в 0 $f'_y(x, y)$. Чтобы отличить maximum от minimum, воспользуемся теоремой 2, § 1; справляясь с выражениями полных дифференциалов функции $f(x, y)$ в § 6, гл. III, отд. II, можем заключить, что при $y'=0$ выходит $y''=-\frac{f''_{xx}}{f'_y}$; при $y'=0$, $y''=0$ выходит $y'''=-\frac{f'''_{xxx}}{f'_y}$, и вообще при $y'=0$, $y''=0$,... ... $y^{(k-1)}=0$ выходит $y^{(k)}=-\frac{f^{(k)}_{x^k}}{f'_y}$. Поэтому, если для системы значений $x=x_0$, $y=y_0$ оказывается $f(x_0, y_0)=0$, $f'_x(x_0, y_0)=0$, $f'_y(x_0, y_0)$ не $=0$, то $y'=0$ и $y''=-\frac{f''_{xx}(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$; если $f''_{xx}(x_0, y_0)=0$, то $y''=0$, и тогда $y'''=-\frac{f'''_{xxx}(x_0\ y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$ и т. д.: вообще, если $f''_{xx}(x_0, y_0)=0$, $f'''_{xxx}(x_0, y_0)=0$, $f^{(k-1)}_{x^{k-1}}(x_0, y_0)=0$, но $f^{(k)}_{x^k}(x_0, y_0)$ не $=0$, то $y'_0=0$, $y''_0=0$, $y^{(k-1)}_0=0$, $y^{(k)}_0=-\frac{f^{(k)}_{x^k}(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$ не равно 0; тогда, по теореме 2, § 1, при $k$ нечетном нет ни maximum ни minimum, при $k$ четном будет maximum при $y^{(k)}_0<0$, т.-е. при одинаковых знаках $f^{(k)}_{x^k}(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, и будет minimum при $y^{(k)}_0>0$, т.-е. при различных знаках тех же частных производных.

*Пример.* Найти maximum и minimum $y$, определенного уравнением $x^2+xy+3y^2-3x+5y-7=0$.

Здесь $f'_x=2x+y-3$; решая систему $f=0$, $f'_x=0$, приходим к уравнению $11x^2-46x+35=0$, откуда две пары решений: $x_1=1$, $y_1=1$;

$x_2=\frac{35}{11}$, $y_2=-\frac{37}{11}$. Для первой пары $f'_y=x+6y+5>0$, для второй $f'_y<0$; для обоих $f''_{xx}=2>0$, следовательно, по теореме, первая пара определяет $y_{\max}=1$ при $x=1$, а вторая $y_{\min}=-\frac{37}{11}$ при $x=\frac{35}{11}$.

## § 3. Абсолютные maxima и minima функции от нескольких независимых переменных.

*Определение.* Функция $V=f(x, y, z)$ от 3 независимых переменных достигает maximum при системе значений $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, если $f(x_0+h, y_0+k, z_0+l)-f(x_0, y_0, z_0)<0$ при всех достаточно малых $|h|$, $|k|$, $|l|$, какого бы знака ни были приращения $h$, $k$, $l$, и достигает minimum, если та же разность остается $>0$ при всех достаточно малых $|h|$, $|k|$, $|l|$.

*Теорема 1.* Maxima и minima функции $V=f(x, y, z)$ нужно искать среди решений системы: $f'_x=0$, $f'_y=0$, $f'_z=0$ (обращающих в нуль полный дифференциал $dV=f'_x\cdot dx+f'_y\cdot dy+f'_z\cdot dz$), если все три частные производные существуют.

Вывод. Беря приращения $k$ и $l$ равными нулю, имеем, при достижении maximum, $f(x_0+h, y_0, z_0)-f(x_0, y_0, z_0)<0$ при всех достаточно малых $|h|$, откуда по теореме 1, § 1, следует, что $f'_x(x_0, y_0, z_0)=0$ с переменою знака при переходе через $x=x_0$. Подобным образом, беря $h=0$, $l=0$ или $h=0$, $k=0$, придем к условиям $f'_y(x_0, y_0, z_0)=0$, $f'_z(x_0, y_0, z_0)=0$, что и доказывает теорему.

*Замечание.* Согласно замечанию 1, § 1, если существование всех частных производных не обусловлено, maxima и minima функции $f(x, y, z)$ могут соответствовать значениям $x, y, z$, при которых все частные производные претерпевают конечный или бесконечный разрыв с переменою знака.

*Теорема 2.* Если функция $V=f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка для значений $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, при которых $dV=df(x_0, y_0, z_0)=0$, то значение $f(x_0, y_0, z_0)$ представляет maximum функции, если второй полный дифференциал $d^2V=d^2f(x_0, y_0, z_0)$ остается $<0$ для всех достаточно малых по абсолютной величине значений $dx$, $dy$, $dz$, и $f(x_0, y_0, z_0)$ представляет minimum функции, если при тех же условиях $d^2f(x_0, y_0, z_0)>0$.

Вывод. По формуле Тэйлора (отд. II, гл. III, § 8) имеем, полагая $h=dx$, $k=dy$, $l=dz$, следующее выражение: $f(x_0+h, y_0+k, z_0+l)-f(x_0, y_0, z_0)=$ $=df(x_0, y_0, z_0)+\frac{1}{1\cdot 2}d^2f(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k, z_0+\vartheta l)$, и так как предполагается $df(x_0, y_0, z_0)=0$ и по непрерывности вторых частных производных $d^2f(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k, z_0+\vartheta l)$ имеет одинаковый знак с $d^2f(x_0, y_0, z_0)$ при всех достаточно малых $|h|$, $|k|$, $|l|$, то знак разности $f(x_0+h, y_0+k, z_0+l)-$ $-f(x_0, y_0, z_0)$ совпадает со знаком $d^2f(x_0, y_0, z_0)$, что и доказывает теорему.

*Теорема 3.* Если функция $V=f(x, y)$ от двух независимых переменных имеет непрерывные частные производные 2-го порядка при системе значений $x=x_0$, $y=y_0$, обращающей в нуль $dV=df(x_0, y_0)$, то, назвав $A=f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0, y_0)$, получаем при $x=x_0$, $y=y_0$ maximum функции, если при $AC-B^2>0$ будет $A<0$, или minimum, если при $AC-B^2>0$ будет $A>0$; напротив, $f(x_0, y_0)$ не представляет ни maximum ни minimum, если $AC-B^2<0$.

Вывод. Согласно теор. 2, нужно изучить знак $d^2f(x_0, y_0) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ при всех достаточно малых $|h|$, $|k|$. Если $AC - B^2 > 0$, то $A$ не $= 0$, и можно написать $d^2f(x_0, y_0) = \frac{1}{A}\left\{(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2\right\}$; так как в скобке имеем число положительное при всех $h$ и $k$, то знак $d^2f(x_0, y_0)$ совпадает со знаком $A$, что и доказывает теорему для случая $AC - B^2 > 0$. Если же $AC - B^2 < 0$, то при $A$ не $= 0$ из предыдущего выражения $d^2f(x_0, y_0)$ заключаем, что при $h = -\frac{B}{A}k$ знак $d^2f(x_0, y_0)$ противоположен знаку $A$, а при $k = 0$ одинаков со знаком $A$ при всех $h \gtrless 0$, так что $f(x_0, y_0)$ не представляет ни maximum ни minimum функции. Если при $AC - B^2 < 0$ будет $A = 0$, но $C$ не $= 0$, то можно написать: $d^2f(x_0, y_0) = C\left\{\left(k + \frac{B}{C}h\right)^2 - \frac{B^2}{C^2}h^2\right\}$; при $h = 0$ и $k \gtrless 0$ выходит $d^2f$ одного знака с $C$, при $h \gtrless 0$, $k = -\frac{B}{C}h$ выходит $d^2f$ обратного знака с $C$, и нет ни maximum ни minimum. Наконец, если при $AC - B^2 < 0$ будет $A = 0$ и $C = 0$, то $d^2f(x_0, y_0) = 2Bhk$ имеет одинаковый знак с $B$ при $hk > 0$ и противоположный знак с $B$ при $hk < 0$, т.-е. $f(x_0, y_0)$ ни maximum ни minimum функции.

*Пример.* $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Для определения maximum и minimum этой функции решаем систему: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + 2by = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2bx + 2cy = 0$, которая имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$ при $ac - b^2$ не $= 0$. Составляя $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2b$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2c$, находим $AC - B^2 = 4(ac - b^2)$. Согласно теореме 3, если $ac - b^2 > 0$ имеем: при $a < 0$ $z_{\max} = 0$, при $a > 0$ $z_{\min} = 0$; если же $ac - b^2 < 0$, то $z = 0$ не дает ни maximum ни minimum функции. Если $ac - b^2 = 0$, то $z = \frac{1}{a}(ax + by)^2$ и для всех значений $y = -\frac{a}{b}x$ получается $z_{\max} = 0$ при $a < 0$ и $z_{\min} = 0$ при $a > 0$. Результат исследования подтверждается геометрически: при $ac - b^2 > 0$ поверхность $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$ представляет эллиптический параболоид, касающийся плоскости $XOY$ в точке (0,0) и расположенный всеми точками над плоскостью при $a > 0$ и под плоскостью при $a < 0$; при $ac - b^2 < 0$ поверхность представляет гиперболический параболоид, пересекающий плоскость $XOY$ по двум прямым: $ax + by \pm \sqrt{b^2 - ac}\,y = 0$; при $ac - b^2 = 0$ поверхность представляет параболический цилиндр, касающийся плоскости $XOY$ вдоль образующей

$$ax + by = 0, \quad z = 0.$$

## § 4. Относительные maxima и minima функции от нескольких аргументов.

*Определение.* Maxima и minima функции $V = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ от $n$ аргументов называются относительными, если аргументы не будут все независимыми переменными, а связаны $m$ уравнениями $(m < n)$ вида $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ при $k = 1, 2, \ldots m$.

В этом случае можно поступить двояко: 1) из данных $m$ уравнений $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ выразить $m$ переменных $x_1, x_2, \ldots x_m$ через остальные $(n - m)$ переменных $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$ и внести эти значения в выражение $V = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$; тогда $V$ обратится в функцию от $n - m$ независимых переменных, и задача приведется к § 3; 2) не отличая независимых пере-

менных от функций, можно применить способ неопределенных множителей Лагранжа, выражаемый следующей теоремой.

*Теорема.* Разыскание относительных maxima и minima функции $V=f(x_1, x_2, \dots x_n)$ при соблюдении $m$ условий $\varphi_k(x_1, x_2, \dots x_n)=0$ $(k=1, 2, \dots m)$ приводится к разысканию абсолютных maxima и minima функции

$$W=f(x_1, x_2, \dots x_n)+\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \dots x_n),$$

т.-е. к решению системы из $n$ уравнений: $\frac{\partial W}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}=0$ при $j=1, 2, \dots n$, которая вместе с $m$ уравнениями $\varphi_k=0$ $(k=1, 2, \dots m)$ определит $m$ постоянных $\lambda_k (k=1, 2, \dots m)$ и $n$ значений $x_i$ $(j=1, 2, \dots n)$, которым могут отвечать maximum или minimum функции $V$.

Вывод. Так как функции $\varphi_k$ сохраняют значение $=0$, то функция $W=V$ тождественно и $dW=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_j}dx_j=\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\right\}dx_j$. Подберем $m$ чисел $\lambda_k$ так, чтобы коэффициенты при дифференциалах $m$ функций из числа $n$ переменных $x_j$ были нулями: $\frac{\partial W}{\partial x_j}=0$ для некоторых $m$ значений $j$ из числа $1, 2, 3, \dots n$; тогда, согласно § 3, теоремы 1, maxima и minima функции $W$ от $(n-m)$ независимых переменных найдутся среди решений системы $(n-m)$ уравнений $\frac{\partial W}{\partial x_j}=0$, где $j$ имеют остальные (за исключением взятых выше $m$ значений) $(n-m)$ значений из числа $1, 2, 3 \dots n$. В общем получается, независимо от выбора независимых переменных среди $x_1, x_2, \dots x_n$, всегда одна и та же система $\frac{\partial W}{\partial x_j}=0$ при $j=1, 2, \dots n$, что и требовалось доказать.

*Пример 1.* Из всех прямых круговых конусов, имеющих данную полную поверхность $=S$, найти тот, который имеет наибольший объем.

Называя через $x$ радиус основания конуса и через $\alpha$ угол между осью и образующею, находим $S=\pi x^2(1+\operatorname{cosec}\alpha)$, $V=\frac{1}{3}\pi x^3\cot\alpha$.

Составив функцию $W=x^3\cot\alpha-\lambda x^2(1+\operatorname{cosec}\alpha)$, решаем систему: $\frac{\partial W}{\partial x}=3x^2\cot\alpha-2\lambda x(1+\operatorname{cosec}\alpha)=0$, $\frac{\partial W}{\partial \alpha}=-\frac{x^3}{\sin^2\alpha}+\lambda x^2\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=0$; из второго уравнения $\lambda\cos\alpha=x$, после чего

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{x^2}{\sin\alpha\cos\alpha}(1+\sin\alpha)(1-3\sin\alpha)=0$$

дает решение $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha=19°28'17''$, $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}$, $V_{\max}=\frac{S}{12}\sqrt{\frac{2S}{\pi}}$ (наименьшее $V=0$ отвечает предельному значению $\alpha=\frac{\pi}{2}$, когда полная поверхность конуса обращается в удвоенную площадь основания $S=2\pi x^2$)

Чтобы проверить аналитически, что решение $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ отвечает maximum, замечаем связь между $d\alpha$ и $dx$, выводимую из уравнения $S=\pi x^2(1+\operatorname{cosec}\alpha)$:

$$d\alpha=\frac{2}{x}\frac{\sin\alpha\,(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}\,dx;$$

при исследуемом значении $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ это дает $d\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3x_0}dx$, где $x_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Далее, при $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и при $\lambda=\frac{3x_0}{2\sqrt{2}}$ получаем: $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=6x_0\sqrt{2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial\alpha}=-9x_0^2$, $\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}=-\frac{9x_0^3}{2\sqrt{2}}$, $d^2W=6x_0\sqrt{2}\,dx^2-18x_0^2dxd\alpha-\frac{9x_0^3}{2\sqrt{2}}d\alpha^2$ (член с $d^2\alpha$ имеет коэффициент $\frac{\partial W}{\partial\alpha}=0$) и, при замене $d\alpha$ на $\frac{2\sqrt{2}}{3x_0}dx$,

$$d^2W=-8\sqrt{2}x_0dx^2<0,$$

откуда и следует, что найденное решение дает maximum $V$.

*Пример 2.* Найти площадь сечения эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ плоскостью $lx+my+nz=0$.

Сечение представляет собою эллипс, площадь которого равна $\pi$, умноженному на произведение полуосей; полуоси же представляют наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до точек $M$ $(x, y, z)$ сечения. Задача приводится к разысканию абсолютных maximum и minimum функции

$$W=x^2+y^2+z^2-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-2\mu(lx+my+nz);$$

составляем систему:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial x}=x-\lambda\frac{x}{a^2}-\mu l=0,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial y}=y-\lambda\frac{y}{b^2}-\mu m=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial z}=z-\lambda\frac{z}{c^2}-\mu n=0.$$

Умножая уравнения на $x$, $y$, $z$ и складывая, находим $x^2+y^2+z^2-\lambda=0$; если окажется, что $\lambda$ имеет два значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$, то искомые полуоси и равны $\sqrt{\lambda_1}$ и $\sqrt{\lambda_2}$. Из системы получаем: $x=\frac{\mu l}{1-\frac{\lambda}{a^2}}$, $y=\frac{\mu m}{1-\frac{\lambda}{b^2}}$, $z=\frac{\mu n}{1-\frac{\lambda}{c^2}}$; умножая эти уравнения на $l$, $m$, $n$ и складывая, получаем: $\frac{l^2}{1-\frac{\lambda}{a^2}}+\frac{m^2}{1-\frac{\lambda}{b^2}}+\frac{n^2}{1-\frac{\lambda}{c^2}}=0$ квадратное уравнение для $\lambda$; переписав его в виде $l^2+m^2+n^2-\mathrm{P}\cdot\lambda+\frac{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}{a^2b^2c^2}\lambda^2=0$, находим произведение корней: $\lambda_1\lambda_2=\frac{a^2b^2c^2(l^2+m^2+n^2)}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}$, откуда площадь сечения $=\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}=$ $=\pi abc\sqrt{\frac{l^2+m^2+n^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}$.

## Глава II.

## Разложение функций в степенные ряды.

**§ 1. Разложение в ряды функций** $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\log(1 \pm x)$, $(1+x)^m$, $\operatorname{arctg} x$.

В отд. II, гл. II, § 3 была выведена формула Маклорена $f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1}$, где $R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta x)$ (форма Лагранжа), $R_{n+1} = \frac{x^{n+1}(1-\vartheta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\vartheta x)$ (форма Коши) при $0 < \vartheta < 1$; формула справедлива для всякой функции $f(x)$, имеющей производные до порядка $(n+1)$ включительно для значений аргумента от 0 до $x$. Если для некоторого интервала значений $x$ удается доказать, что $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} R_{n+1} = 0$, то получается $f(x) = f(0) + \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$, т.-е. $f(x)$ оказывается суммою бесконечного ряда: $f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots$ Приложим этот результат к частным случаям (см. отд. II, гл. I, § 7).

1) $f(x) = e^x$, $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$, $R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta x}$; так как $e^{\vartheta x}$ есть величина конечная при всяком конечном $x$ ($e^{\vartheta x} < 1$ при $x < 0$ и $e^{\vartheta x} < e^x$ при $x > 0$), а $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ есть величина, имеющая пределом 0 (см. отд. I, гл. I, § 4, пример 3), то $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} R_{n+1} = 0$ при всяком $x$, и потому

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} + \ldots \text{ при } -\infty < x < +\infty.$$

2) $f(x) = \sin x$, $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(k)}(0) = \sin\frac{k\pi}{2}$, откуда

$$f^{(2l)}(0) = \sin l\pi = 0,\ f^{(2l+1)}(0) = \sin\frac{2l+1}{2}\pi = (-1)^l.$$

Далее, $R_{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin\left\{\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2} + \vartheta x\right\}$, и так как $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$, а $\sin z$ остается всегда конечным, то $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} R_{2n+1} = 0$ при всяком $x$, откуда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-1)} + \ldots$$

при $-\infty < x < +\infty$.

3) $f(x) = \cos x$, $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(k)}(0) = \cos k\frac{\pi}{2}$, откуда

$$f^{(2l)}(0) = (-1)^l,\ f^{(2l+1)}(0) = 0,\ R_{2n+2} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\left\{\left(n+1\right)\pi + \vartheta x\right\};$$

при всех значениях $x$ $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} R_{2n+2}=0$, и следовательно

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + \ldots \text{ при } -\infty < x < +\infty.$$

4) $f(x) = \operatorname{sh} x$, $f^{(2k)}(x) = \operatorname{sh} x$, $f^{(2k+1)}(x) = \operatorname{ch} x$, $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = 1$,

$$R_{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \operatorname{ch}\vartheta x, \quad \underset{n=\infty}{\text{пред.}} R_{2n+1} = 0 \text{ при всяком } x,$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \text{ при } -\infty < x < +\infty.$$

5) $f(x) = \operatorname{ch} x$, $f^{(2k)}(x) = \operatorname{ch} x$, $f^{(2k+1)}(x) = \operatorname{sh} x$, $f^{(2k)}(0) = 1$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$,

$$R_{2n+2} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \operatorname{ch}\vartheta x, \quad \underset{n=\infty}{\text{пред.}} R_{2n+2} = 0 \text{ при всяком } x,$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots \text{ при } -\infty < x < +\infty.$$

6) $f(x) = \log(1+x)$, $f(0) = 0$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$, $f^{(k)}(0) =$

$= (-1)^{k-1}(k-1)!$, $R_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\vartheta x)^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n}{n+1} \cdot \left(\dfrac{x}{1+\vartheta x}\right)^{n+1}$

и $R'_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{n!}(1-\vartheta)^n \cdot \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\vartheta x)^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n}{1+\vartheta x} \cdot x^{n+1} \cdot \left(\dfrac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^n$. При $0 < x \leqq 1$

имеем: $0 < \dfrac{x}{1+\vartheta x} < 1$, следовательно $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \left(\dfrac{x}{1+\vartheta x}\right)^n = 0$ и $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} R_{n+1} = 0$;

при $-1 < x < 0$ имеем $1 - \vartheta < 1 + \vartheta x$, $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \left(\dfrac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^n = 0$, $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} x^{n+1} = 0$,

следовательно $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} R'_{n+1} = 0$.

Отсюда

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \ldots$$

при $-1 < x \leqq +1$. Заменяя здесь $x$ на $-x$, имеем:

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ при } -1 \leqq x < +1.$$

Отсюда сложением находим (по теореме сложения рядов, отд. I, гл. II, § 6):

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots \text{ при } -1 < x < +1.$$

7) $f(x) = (1 + x)^m$ ($m$ любое вещественное число), $f^{(k)}(x) = m(m-1)\ldots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$, $f^{(k)}(0) = m(m-1)\ldots(m-k+1)$,

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} m(m-1)\ldots(m-n)(1+\vartheta x)^{m-n-1} = \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1-m}} \cdot u_{n+1}^{(m)},$$

$$R'_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}(1-\vartheta)^n \cdot m(m-1)\ldots(m-n)(1+\vartheta x)^{m-n-1} =$$

$$= \frac{mx}{(1+\vartheta x)^{1-m}} \cdot \left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^n \cdot u_n^{(m-1)},$$

где обозначено $u_n^{(m)} = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n} x^n$; применяя признак д'Аламбера (отд. I, гл. II, § 3) к ряду $|u_n^{(m)}|$, находим $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \left|\dfrac{u_{n+1}^{(m)}}{u_n^{(m)}}\right| = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \left(\dfrac{n-m}{n+1}\right) \cdot |x| = |x|$, откуда следует, что при $|x| < 1$ ряд $|u_n^{(m)}|$ сходящийся, и потому (I, гл. II, § 1, следствие) $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} u_n^{(m)} = 0$ при всяком $m$. Это дает пред. $R_{n+1}(x) = 0$, при $0 < x < 1$, так как $1 + \vartheta x > 1$. В выражении $R'_{n+1}(x)$ дробь $\dfrac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}$ заключена между 0 и 1 при $-1 < x < +1$, поэтому $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} R'_{n+1} = 0$ при $-1 < x < +1$. Итак,

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1(}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n + \ldots$$

при $-1 < x < +1$ и при всяком вещественном $m$.

8) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(0) = 0$, $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cdot 2k!$

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Здесь мы не рассматриваем дополнительного члена и, чтобы сделать вывод строгим, составим две функции: $\varphi(x) = \operatorname{arctg} x - \left(x - \dfrac{1}{3}x^3 + \ldots - \dfrac{1}{4n-1}x^{4n-1}\right)$ и $\psi(x) = \operatorname{arctg} x - \left(x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 \ldots + \dfrac{1}{4n+1}x^{4n+1}\right)$; их производные будут: $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1-x^{4n-2}}{1+x^2} > 0$ и $\psi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1+x^{4n}}{1+x^2} < 0$, и так как $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, то при $x > 0$ должно быть $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) < 0$, т.-е. $x - \dfrac{x^3}{3} + \ldots - \dfrac{x^{4n-1}}{4n-1} < \operatorname{arctg} x < x - \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{1}{4n+1}x^{4n+1}$; отсюда $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \ldots - \dfrac{x^{4n-1}}{4n-1} + \vartheta \cdot \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$, где $0 < \vartheta < 1$; при $0 < x \leqq 1$ $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1} = 0$, поэтому $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots - \dfrac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots$ при $0 < x \leqq 1$.

Формула верна и при $0 > x \geqslant -1$.

## § 2. Численные примеры. Способ сокращенного умножения.

Если при умножении двух десятичных чисел, имеющих справа от запятой $m$ и $n$ цифр, в произведении нужно знать менее $m+n$ цифр справа от запятой, то, во избежание лишних выкладок, применяется способ сокращенного умножения. Пусть, например, требуется перемножить $a=25{,}37158$ на $b=3{,}719468$ с удержанием в произведении пяти цифр справа от запятой (точно: $ab=94{,}36877991944$).

Замечая, что $a\times b=a\times 3+a\times 0{,}7+a\times 0{,}01+a\times 0{,}009+\ldots$, будем при составлении частных произведений постепенно укорачивать $a$ так, чтобы общее число цифр справа от запятой в числе $a$ и в частном множителе было 5; таким образом находим:

$$
\begin{array}{rl}
25{,}37158\times 3= & 76{,}11474\\
25{,}3715\times 0{,}7= & 17{,}76005\\
25{,}371\times 0{,}01= & 25371\\
25{,}37\times 0{,}009= & 22833\\
25{,}3\times 0{,}0004= & 1012\\
25\times 0{,}00006= & 150\\
20\times 0{,}000008= & 16\\
\hline
 & 94{,}36861
\end{array}
$$

Полученное произведение содержит погрешность; именно, каждое укороченное множимое содержит погрешность меньше 1 последней цифры, а ошибка в каждом частном произведении будет меньше стольких единиц последнего (5-го) знака, сколько единиц в цифре множителя; суммарная ошибка будет меньше $N$ единиц 5-го знака, где $N$ сумма цифр множителя; здесь $N=38$. Однако, ошибку при сокращенном умножении можно значительно уменьшить, если вычислять каждое частное произведение с точностью до 1 пятого знака; для этого нужно прибавлять к последнему знаку его цифру, накопляющуюся от перемножения отброшенных знаков множимого на частный множитель. Внося такую поправку, мы прибавим ко 2-му, 3-му, ... 7-му частному произведению соответственные цифры 6, 1, 1, 3, 2, 4, после чего произведение будет 94,36878; теперь погрешность меньше единицы 5-го знака, умноженной на число цифр множителя, т.-е. на 6 (первое произведение $a\times 3$ точное), или даже на половину этого числа — на 3, если при отбрасывании 6-й цифры мы увеличиваем 5-ю на 1, когда 6-я была не меньше 5. Сокращенное умножение располагают так, что цифры множителя подписываются под множимым в обратном порядке, и каждая цифра множителя умножается лишь на те цифры множимого, которые стоят над нею и левее, при чем последние цифры частных произведений пишутся в один столбец

*Пример 1.*

$$
\begin{array}{r}
2537158\\
8649173\\
\hline
7611474\\
1776011\\
25372\\
22834\\
1015\\
152\\
20\\
\hline
94{,}36878
\end{array}
$$

Ошибка $<3\cdot 10^{-5}$

*Пример 2.* Перемножить 4801,357 на 0,0098732 с удержанием 5 знаков после запятой в произведении:

$$\begin{array}{r} 4801{,}357 \\ 23789 \\ \hline 4321221 \\ 384109 \\ 33609 \\ 1440 \\ 96 \\ \hline 47{,}40475 \end{array}$$

Ошибка произведения меньше $\frac{5}{2}\cdot 10^{-5} < 3\cdot 10^{-5}$.

Точное значение произведения: 47,4047579324.

*Пример 1.* Вычислить $\sqrt[3]{e}$ с точностью до $\frac{1}{10^5}$.

Положив $e^x - \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = R_{n+1}$, имеем:

$$R_{n+1} = \frac{x^n}{n!}\left\{\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)\,(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} + \ldots\right\} <$$
$$< \frac{x^n}{n!}\left\{\frac{x}{n+1} + \left(\frac{x}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{n+1}\right)^3 + \ldots\right\} = \frac{x^n}{n!}\cdot\frac{x}{n+1-x}.$$

При $x = \frac{1}{3}$ путем последовательных испытаний находим $R_5 = \frac{1}{3^5\cdot 120\cdot\frac{17}{3}} = \frac{1}{165240} < \frac{7}{10^6}$. Вычисляя $1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1 + 0{,}333333 + 0{,}055556 + 0{,}006173 + 0{,}000514 = 1{,}395576$ с погрешностью $< \frac{2}{10^6}$, получаем с погрешностью $< \frac{7}{10^6} + \frac{2}{10^6} < \frac{1}{10^5}$ результат: $\sqrt[3]{e} = 1{,}39558$.

*Пример 2.* Вычислить $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ с точностью до $\frac{1}{10^5}$.

По свойству знакопеременного ряда имеем:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = e^{-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2\cdot 1\cdot 2} - \frac{1}{4^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4^4\cdot 4!} - \frac{\theta}{4^5\cdot 5!}, \text{ при } 0 < \theta < 1;$$

(см. Отд. I, гл. II, § 4). Здесь $\frac{1}{4^5\cdot 5!} = \frac{1}{122880} < \frac{9}{10^6}$; погрешности при вычислении суммы:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2\cdot 2!} - \frac{1}{4^3\cdot 3!} + \frac{1}{4^4\cdot 4!} = 1 - 0{,}25 + 0{,}031250 - 0{,}002604 + 0{,}000163 = 0{,}778809$$

не превосходят $\frac{1}{10^6}$, следовательно, $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = 0{,}77881$ с точностью до $\frac{1}{10^5}$.

*Пример 3.* Вычислить $\sin 5^\circ$ и $\cos 5^\circ$ с точностью до $\frac{1}{10^7}$.

Здесь $x = \frac{\pi}{36} = 0{,}0872665$; по сокращенному способу

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,0872665 | 0,0872665 | 0,0872665 | 0,087... |
| 566278 | 45167 | 2466 | 975 |
| 69813 | 6109 | 524 | 43 |
| 6109 | 524 | 52 | 6 |
| 175 | 9 | 3 | |
| 52 | | | |
| 5 | $0{,}0006642 = x^3$ | $0{,}0000579 = x^4$ | $0{,}0000049 = x^5$ |
| $x^2 = 0{,}0076154$ | $0{,}0001107 = \frac{x^3}{6}$ | $0{,}0000024 = \frac{x^4}{24}$ | $0{,}0000000 = \frac{x^5}{120}$ |
| $\frac{x^2}{2} = 0{,}0038077.$ | | | |

Вычисляя по формулам:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \vartheta \cdot \frac{x^5}{120}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \vartheta \cdot \frac{x^6}{720}$$

(основанным на свойствах знакопеременных рядов, отд. I, гл. II, § 4), находим: $\sin 5^0 = 0{,}0871558$, $\cos 5^0 = 0{,}9961947$ с погрешностью меньше $\frac{1}{10^7}$ $\left(\text{ошибка каждого слагаемого} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^7}\right)$; по 7-значным логарифмическим таблицам оказывается $\sin 5^0 = 0{,}08715574$, $\cos 5^0 = 0{,}9961947$.

*Пример 4.* Вычислить $\log 2$ с точностью до $\frac{1}{10^6}$.

Берем формулу $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$ и, полагая $\frac{1+x}{1-x} = 2$, находим $x = \frac{1}{3}$; погрешность

$$R_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \ldots = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\left\{1 + \frac{2n+1}{2n+3}x^2 + \frac{2n+1}{2n+5}x^4 + \ldots\right\} <$$
$$< \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\left\{1 + x^2 + x^4 + \ldots\right\} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{1-x^2};$$

вычисляем по формуле:

$$\frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} \ldots + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \vartheta \frac{1}{13 \cdot 3^{11} \cdot 8} = 0{,}3333333 +$$
$$0{,}0123457 + 0{,}0008230 + 0{,}0000653 + 0{,}0000057 + 0{,}0000005 + \frac{\vartheta \cdot 6}{10^8} = 0{,}3465735$$

с погрешностью $< 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^7} + \frac{6}{10^8} = \frac{36}{10^8}$, и $\log 2 = 0{,}6931470$ с погрешностью $< \frac{72}{10^8} < \frac{1}{10^6}$. Итак, $\log 2 = 0{,}693147$.

Формула, определяющая $\log(1+x)$, может служить для вычисления логарифма числа $N+1$, когда логарифм числа $N$ известен $\left(\text{при } x=\frac{1}{N}\right)$, например: при $x=0{,}01$ имеем $\log 101 = \lg 100 + 0{,}01 - \frac{1}{2\cdot 10^4} + \frac{\vartheta}{3\cdot 10^6} = 4{,}605170 + 0{,}01 - 0{,}0005 = 4{,}615120$ с погрешностью $< \frac{1}{10^6}$.

*Пример 5.* Вычислить $\sqrt[3]{121}$ с точностью до $\frac{1}{10^6}$. Имеем $\sqrt[3]{121} = \sqrt[3]{125-4} = 5\left(1-\frac{4}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = 5\left(1-0{,}032\right)^{\frac{1}{3}} = 5\left\{1-\frac{1}{3}\cdot 0{,}032 - \frac{1}{9}\cdot(0{,}032)^2 - \frac{5}{81}\cdot(0{,}032)^3 - \vartheta\cdot\frac{10}{243}\cdot(0{,}032)^4\cdot\frac{1}{1-0{,}032}\right\} = 5\left(1 - -0{,}0106667 - 0{,}0001138 - 0{,}0000020 - \vartheta'\cdot\frac{2}{10^7}\right) = 4{,}946088$ с погрешностью $< \frac{1}{10^6}$ (ошибка $\vartheta'\cdot\frac{2}{10^7}$ составляется из ошибок трех членов разложения, из коих каждая меньше $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^7}$, и из ошибки дополнительного члена, которая также меньше $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^7}$, что и дает суммарную ошибку $\vartheta'\cdot\frac{2}{10^7}$).

*Пример 6.* Вычислить $\sqrt[4]{83}$ с точностью до $\frac{1}{10^7}$.

Имеем: $\sqrt[4]{83} = \sqrt[4]{81+2} = 3\left(1+\frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = 3\left(1+\frac{1}{162}-\frac{1}{162\cdot 108}+\frac{7}{162\cdot 108\cdot 486}-\vartheta\cdot\frac{7}{162\cdot 108\cdot 486\cdot 54}\right) = 3\left(1+0{,}00617284-0{,}00005716+0{,}00000083-\vartheta'\frac{31}{10^9}\right) = 3{,}0183495$ с точностью до $\frac{1}{10^7}$ (ошибка $\vartheta'\cdot\frac{31}{10^9}$ составляется из ошибок трех членов, из коих каждая меньше $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^8}$, и из ошибки дополнительного члена, меньшей $\frac{16}{10^9}$, что дает суммарную ошибку $< \frac{31}{10^9}$, а после умножения на 3 — ошибку $< \frac{93}{10^9} < \frac{1}{10^7}$).

## Глава III.

## Истинное значение неопределенных выражений.

### § 1. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

*Определение.* Если при $x=a$ числитель и знаменатель дроби $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ обращаются в 0, так что $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$, то дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x=a$ принимает неопределенную форму $\frac{0}{0}$. Истинным значением такой неопределенности, что обозначается символом $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}$, называется

$$\underset{x=a}{\text{пред.}}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]=\underset{h=0}{\text{пред.}}\left[\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}\right].$$

*Теорема* (правило l'Hôpital'я). Если отношение производных функций $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ непрерывно при $x=a$, то истинное значение $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$.

Вывод. По свойству непрерывности (отд. I, гл. III, § 3) существует $\underset{h_1=0}{\text{пред.}}\frac{f'(a+h_1)}{\varphi'(a+h_1)}$, равный $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$. Но по теореме Коши (отд. II, гл. II, § 2) можем написать [так как $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$]: $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+h_1)}{\varphi'(a+h_1)}$, при чем $h_1$ заключено между 0 и $h$, так что $h_1$ вместе с $h$ стремится к нулю. Переходя к пределу, получаем $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$.

*Пример 1.* $\left[\frac{e^{-x}-1}{\sin 2x}\right]_{x=0}=\left[\frac{-e^{-x}}{2\cos 2x}\right]_{x=0}=-\frac{1}{2}$.

*Следствие.* Если $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ представляется в неопределенной форме $\frac{0}{0}$, но существует $\underset{h=0}{\text{пред.}}\frac{f''(a+h)}{\varphi''(a+h)}$, равный $\frac{f''(a)}{\varphi''(a)}$, то $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{f''(a)}{\varphi''(a)}$. В более общем случае, если все дроби $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$, $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$, ... $\frac{f^{(k-1)}(a)}{\varphi^{(k-1)}(a)}$ представляются в неопределенной форме $\frac{0}{0}$, но существует $\underset{h=0}{\text{пред.}}\left\{\frac{f^{(k)}(a+h)}{\varphi^{(k)}(a+h)}\right\}$ равный $\frac{f^{(k)}(a)}{\varphi^{(k)}(a)}$, то истинное значение $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{f^{(k)}(a)}{\varphi^{(k)}(a)}$.

Действительно, при условиях

$$f(a)=0,\quad f'(a)=0,\ \ldots f^{k-1}(a)=0,\quad \varphi(a)=0,\quad \varphi'(a)=0,\ \ldots \varphi^{k-1}(a)=0,$$

имеем по теореме Коши:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+h_1)-f'(a)}{\varphi'(a+h_1)-\varphi'(a)}=\frac{f''(a+h_2)-f''(a)}{\varphi''(a+h_2)-\varphi''(a)}=\ldots=$$

$$\ldots=\frac{f^{(k-1)}(a+h_{k-1})-f^{(k-1)}(a)}{\varphi^{(k-1)}(a+h_{k-1})-\varphi^{(k-1)}(a)}=\frac{f^{(k)}(a+h_k)}{\varphi^{(k)}(a+h_k)},$$

при чем числа $h$, $h_1, \ldots h_k$ располагаются по порядку абсолютной величины так: 0, $h_k$, $h_{k-1}, \ldots h_2$, $h_1$, $h$ и, следовательно, с приближением $h$ к нулю число $h_k$ также стремится к нулю.

Переходя к пределу, получаем: $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{f^{(k)}(a)}{\varphi^{(k)}(a)}$.

*Пример 2.*

$$\left[\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x-\sin x}\right]_{x=0}=\left[\frac{e^x-1-x}{1-\cos x}\right]_{x=0}=\left[\frac{e^x-1}{\sin x}\right]_{x=0}=\left[\frac{e^x}{\cos x}\right]_{x=0}=1.$$

*Замечание.* Правило l'Hôpital'я остается верным и тогда, когда $a=\infty$; именно, полагая $x=\frac{1}{y}$, при чем при $x=\infty$ оказывается $y=0$, имеем:

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}\right]_{y=0}=\left[\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{-1}{y^2}}{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{-1}{y^2}}\right]_{y=0}=\left[\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}\right]_{y=0}=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=\infty}.$$

*Пример 3.* $$\left[\frac{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{-\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right]_{x=\infty}=1.$$

## § 2. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

*Теорема.* Правило l'Hôpital'я остается справедливым и для неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, т.-е. если $f(a)=\infty$ и $\varphi(a)=\infty$, но отношение производных существует при $x=a$, то $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$.

*Пример 1.* $\left[\frac{\log x}{x}\right]_{x=+\infty}=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=\infty}=0.$

*Пример 2.* $\left[\frac{x^n}{e^x}\right]_{x=+\infty}$ ($n$ целое положительное число). Применяя правило l'Hôpital'я $n$ раз подряд, находим:

$$\left[\frac{x^n}{e^x}\right]_{x=+\infty}=\left[\frac{1.2.3\ldots n}{e^x}\right]_{x=+\infty}=0.$$

Для вывода теоремы замечаем, что $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$, и так как при $f(a)=\infty$,

$\varphi(a)=\infty$ выходит $\frac{1}{\varphi(a)}=0$, $\frac{1}{f(a)}=0$, то приходим к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, которую и раскрываем по § 1. Итак,

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\right]_{x=a}=\left[\frac{-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}}\right]_{x=a}=\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2_{x=a}:\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}.$$

Если истинное значение $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}$ представляет число $A$, неравное 0, то отсюда $A=A^2:\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$, т.-е. $A=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$, что и требуется доказать. Если же $A=0$, то берем дробь $\left[\frac{f(x)+C\varphi(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}$, где $C$ некоторая постоянная; так как истинное значение новой дроби равно $C$, то, прилагая предыдущий вывод, получим: $\left[\frac{f(x)+C\varphi(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{f'(a)+C\varphi'(a)}{\varphi'(a)}$, или $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}+C=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}+C$, откуда, по сокращении $C$, получается желаемый результат.

*Замечание.* Обыкновенно при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ отношение всех одноименных производных оказывается также вида $\frac{\infty}{\infty}$, и для достижения результата нужно преобразовывать получаемое выражение к виду $\frac{0}{0}$.

*Пример 3.* Не следует писать: $\left[\frac{\log x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]_{x=0}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}}\right]_{x=0}=\left[\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}}}\right]_{x=0}=\ldots,$

а должно вторую дробь преобразовать в форму $\left[-2\sqrt{x}\right]_{x=0}$, что и определит истинное значение: 0.

*Пример 4.*

$$\left[\frac{\log \operatorname{tg} ax}{\log \operatorname{tg} bx}\right]_{x=0}=\left[\frac{\frac{2a}{\sin 2ax}}{\frac{2b}{\sin 2bx}}\right]_{x=0}=\frac{a}{b}\left[\frac{\sin 2bx}{\sin 2ax}\right]_{x=0}=\frac{a}{b}\cdot\left[\frac{2b\cos 2bx}{2a\cos 2ax}\right]_{x=0}=1.$$

**§ 3. Неопределенности вида: $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ и показательные неопределенности: $0^0$, $\infty^0$, $1^{\pm\infty}$.**

Все эти виды приводятся к двум предыдущим:

1) Если $f(a)=\infty$ и $\varphi(a)=\infty$, то, положив $f(x)=\frac{1}{f_1(x)}$, $\varphi(x)=\frac{1}{\varphi_1(x)}$, будем иметь $f_1(a)=0$, $\varphi_1(a)=0$.

Тогда $\left[f(x)-\varphi(x)\right]_{x=a}=\left[\frac{1}{f_1(x)}-\frac{1}{\varphi_1(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{\varphi_1(x)-f_1(x)}{f_1(x)\cdot\varphi_1(x)}\right]_{x=a}$, т.-е. приходим к неопределенности $\frac{0}{0}$.

*Пример 1.*

$$\left[\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right]_{x=0}=\left[\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right]_{x=0}=\left[\frac{x-\sin x}{x^3}\right]_{x=0}\cdot\left[\frac{x}{\sin x}\right]_{x=0}\cdot\left[\frac{x+\sin x}{\sin x}\right]_{x=0}$$

(по теореме о пределе произведения).

Но $\left[\frac{x-\sin x}{x^3}\right]_{x=0}=\left[\frac{1-\cos x}{3x^2}\right]_{x=0}=\left[\frac{\sin x}{6x}\right]_{x=0}=\left[\frac{\cos x}{6}\right]_{x=0}=\frac{1}{6}$,

$$\left[\frac{x}{\sin x}\right]_{x=0}=\left[\frac{1}{\cos x}\right]_{x=0}=1,\quad \left[\frac{x+\sin x}{\sin x}\right]_{x=0}=\left[\frac{1+\cos x}{\cos x}\right]_{x=0}=2,$$

следовательно искомый предел равен $\frac{1}{3}$.

2) Если $f(a)=0$ и $\varphi(a)=\infty$, то, положив $f(x)=\frac{1}{f_1(x)}$ и $\varphi(x)=\frac{1}{\varphi_1(x)}$, будем иметь: $f_1(a)=\infty$, $\varphi_1(a)=0$, и потому $[f(x)\cdot\varphi(x)]_{x=a}=\left[\frac{f(x)}{\varphi_1(x)}\right]_{x=a}=$ $=\left[\frac{\varphi(x)}{f_1(x)}\right]_{x=a}$, что дает форму $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

*Пример 2.* $\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\right]_{x=a}=\left[\frac{1-\frac{x}{a}}{\cot\frac{\pi x}{2a}}\right]_{x=a}=\left[\frac{-\frac{1}{a}}{-\frac{\pi}{2a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}\right]_{x=a}=\frac{2}{\pi}$.

3) Показательные неопределенности $0^0$, $\infty^0$, $1^{\pm\infty}$ представляют частные случаи выражения $\left[f(x)^{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\left[e^{\varphi(x)\cdot\log f(x)}\right]_{x=a}$, при чем показатель представляется в неопределенной форме $0\cdot\infty$.

Раскрывая эту неопределенность по 2) и называя через $A$ ее истинное значение, находим $\left[f(x)^{\varphi(x)}\right]_{x=a}=e^A$.

*Пример 3.* $\left[\left(\log x\right)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=+\infty}=e^A$, где $A=\left[\frac{\lg\lg x}{x}\right]_{x=+\infty}=\left[\frac{1}{x\log x}\right]_{x=+\infty}=0$, откуда $e^A=1$.

*Пример 4.*

$$\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]_{x=0}=e^A,\text{ где } A=\left[\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}\right]_{x=0}=\left[\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}\right]_{x=0}=\left[\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}\right]_{x=0}=$$

$$=\left[\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}\right]_{x=0}\cdot\left[\frac{x}{\sin x}\right]_{x=0},\text{ но }\left[\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}\right]_{x=0}=\left[\frac{-x\sin x}{6x^2}\right]_{x=0}=-\frac{1}{6},$$

следовательно $A=-\frac{1}{6}$, искомое выражение $=e^{-\frac{1}{6}}$.

## § 4. Раскрытие неопределенностей с помощью разложения функций в бесконечные ряды.

В некоторых случаях при раскрытии неопределенностей удобно применять разложения функций в бесконечные ряды, выведенные в отд. III, гл. II, § 1.

*Пример 1.* $\left[\frac{\operatorname{arcth}x-\operatorname{arctg}x}{x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}\right]_{x=0}$.

Пользуясь разложениями $\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ (см. отд. II, гл. II, § 2), $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots$, $x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = x\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right) - \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right) = \frac{1}{3}x^3 + \cdots$, находим для данной дроби выражение: $\dfrac{\frac{2}{3}x^3 + \alpha x^5 + \cdots}{\frac{1}{3}x^3 + \beta x^5 + \cdots}$, коего предел при $x = 0$ есть 2.

*Пример 2.* $\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}\right]_{x=0} = e \cdot \left[\dfrac{e^{\varphi(x)} - 1}{\varphi(x)}\right]_{x=0} \cdot \left[\dfrac{\varphi(x)}{x}\right]_{x=0}$, где $\varphi(x) = \frac{1}{x}\log(1+x) - 1 = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots$; поэтому $\varphi(0) = 0$, $\left[\dfrac{\varphi(x)}{x}\right]_{x=0} = -\frac{1}{2}$, $\left[\dfrac{e^y - 1}{y}\right]_{y=0} = 1$, искомый предел $= -\frac{e}{2}$.

ОТДЕЛ IV.

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

## Глава I.

## Плоские линии.

### § 1. Уравнение плоской линии.

Плоская линия задается или одним уравнением вида: $y = f(x)$, $F(x, y) = 0$, связывающим координаты любой точки $M(x, y)$ этой линии, или двумя уравнениями вида: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, выражающими координаты любой точки в виде функций от независимой переменной $t$ (параметрическое задание). Кроме прямолинейных координат, употребляются полярные $r$, $\theta$ ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$), при чем уравнение имеет вид $r = f(\theta)$, $F(r, \theta) = 0$ или определяется параметрически: $r = \varphi(u)$, $\theta = \psi(u)$.

*Пример 1.* Окружность радиуса $a$ с центром в начале можно задать параметрическими уравнениями $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, так как при этом $x^2 + y^2 = a^2$. Точки, лежащие на осях координат, отвечают значениям $t$: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

*Пример 2.* Эллипс с полуосями $a$ и $b$ и с центром в начале задается уравнениями: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, так как $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; вершины эллипса отвечают значениям $t$: $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

*Пример 3.* Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ задается параметрически: $x = a\operatorname{ch} t$, $= b\operatorname{sh} t$.

*Пример 4.* Циклоида есть линия, описываемая определенною точкою окружности радиуса $a$, которая не скользя катится по данной прямой $OX$ (черт. 50).

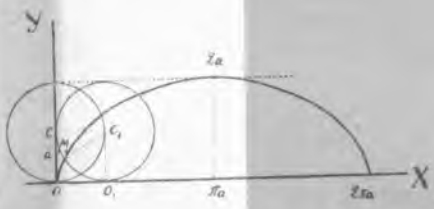
Полагая $\angle O_1C_1M = t$, имеем $OO_1 = \smile O_1M = at$; проектируя на оси координат $\triangle OC_1M$, в котором пр. $OM$ = пр. $OC_1$ + пр. $C_1M$, находим:

$$x = at + a\cos\left[2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right] = a(t - \sin t),$$

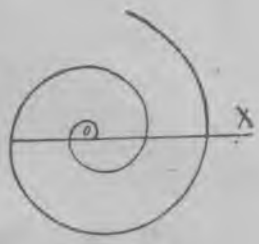
$$y = a + a\sin\left[2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right] = a(1 - \cos t).$$

*Пример 5.* Спираль Архимеда: $r = a\theta$ (черт. 51).

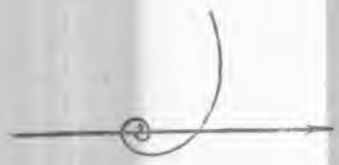
*Пример 6.* Логарифмическая спираль $r = ae^{m\theta}$ (черт. 52); когда $\theta$ стремится к $-\infty$, $r$ приближается к 0.



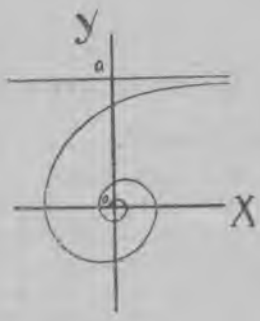

Черт. 50.



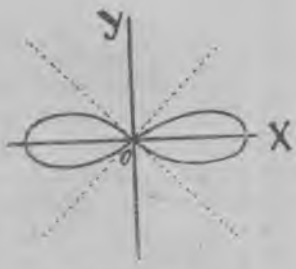

Черт. 51.



Черт. 52.

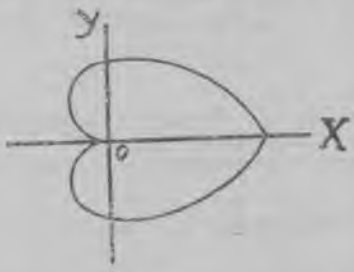



Черт. 53.




Черт. 54.


Черт. 55.




Черт. 56.

*Пример 7.* Гиперболическая спираль $r\theta = a$. При $\theta = 0$ оказывается $r = \infty$, но $r\sin\theta = a \cdot \frac{\sin\theta}{\theta}$ имеет пределом $a$, т.-е. спираль приближается к прямой $y = a$, никогда ее не достигая (черт. 53).

*Пример 8.* Лемниската Бернулли имеет уравнение $r^2 = a^2\cos 2\theta$ (черт. 54), или $r^2 = a^2\sin 2\theta$ (черт. 55).

*Пример 9.* Кардиоида $r = a(1 + \cos\theta)$ (черт. 56) представляет частный случай Улитки Паскаля $r = a + b\cos\theta$.

## § 2. Дифференциал дуги.

В отд. II, гл. I, § 3 (черт. 38), показано, что отрезок $n_1M_1=\Delta y$, $n_1T=dy$ и что $M_1T=\Delta y-dy=\varepsilon\Delta x$ есть бесконечно-малая высшего порядка относительно $\Delta x$ (или $dx$). Предполагая, что длину дуги можно измерить при помощи гибкой нерастяжимой нити, обозначим длину дуги линии $M_0MM_1$ от некоторого начала $M_0$ до точки $M(x, y)$ через $s=F(x)$ и будем рассматривать дугу $MM_1$ как приращение этой функции: $\Delta s$, отвечающее приращению $\Delta x=Mn_1$ независимой переменной $x$; при этом $|\Delta x|$ будем считать достаточно малым для того, чтобы между $M$ и $M_1$ $\operatorname{tg}\alpha=y'$ изменялся монотонно. Принимая очевидным, что объемлющая ломаная $|MT|+|TM_1|$ больше выпуклой объемлемой $\smile MM_1=\Delta s$, а эта последняя больше хорды $|MM_1|$, получаем неравенства: $\sqrt{\Delta x^2+dy^2}+\varepsilon\Delta x>\Delta s>$ $>\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$; разделяя на $\Delta x>0$ (если $\Delta x<0$, то знаки неравенства нужно при этом изменить на обратные), получаем при переходе к пределу, когда $\Delta x=0$, результат: $\sqrt{1+y'^2}\geqq$ пред. $\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)\geqq\sqrt{1+y'^2}$, т.-е. $\frac{ds}{dx}=$ $=\sqrt{1+y'^2}$, откуда $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Другой вывод этого результата, связанный с понятием определенного интеграла, дан во II части отд. IV, гл. I, § 3, замечание 1. Таким образом доказана *теорема:* если длину дуги плоской линии, отсчитываемую от определенного начала, рассматривать как функцию от абсциссы конца дуги, то производная этой функции будет: $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'^2}$, где $y$ есть выражение ординаты конца дуги, как функции от абсциссы; отсюда $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, т.-е. дифференциал дуги равен корню квадратному из суммы квадратов дифференциалов координат конца дуги.

*Замечание.* В полярных координатах $ds=\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}$, так как $dx=d(r\cos\theta)=\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta$, $dy=d(r\sin\theta)=\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta$, откуда $dx^2+dy^2=dr^2+r^2d\theta^2$.

## § 3. Касательная, нормаль, подкасательная, поднормаль в прямоугольной системе координат.

В отд. II, гл. I, § 2 было дано определение касательной к плоской линии и выражение углового коэффициента касательной: $\operatorname{tg}\alpha=y'$. Поэтому уравнение касательной в точке $M(x, y)$ плоской линии будет $Y-y=y'(X-x)$, где $X$, $Y$ координаты точек касательной. Здесь $y'$ берется из уравнения данной линии, и если последнее дано в виде: $f(x, y)=0$, то $y'=-\frac{f'_x}{f'_y}$ (Отд. II, гл. III, § 6), и уравнение касательной будет:

$$(X-x)f'_x(x, y)+(Y-y)f'_y(x, y)=0.$$

*Пример 1.* Показать, что для астроиды, определяемой уравнением $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, отрезок касательной между осями координат имеет постоянную длину $a$.

Вывод. Уравнение касательной в точке $(x, y)$ будет: $(X-x)x^{-\frac{1}{3}}+$ $+(Y-y)y^{-\frac{1}{3}}=0$, или $Xx^{-\frac{1}{3}}+Yy^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, откуда отрезки, отсекаемые

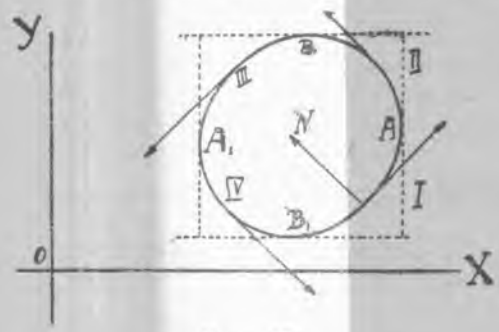
касательною на осях координат, будут: $\alpha = x^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}, \beta = y^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}$; отрезок касательной между осями $l = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{a^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)} = a$.

*Замечание 1.* Из формулы $\operatorname{tg}\alpha = y'$ следует, что косинусы углов, составляемых направлением касательной $MT$ с осями координат, будут:

$$\cos(X, MT) = \cos\alpha = \pm\frac{dx}{ds}, \quad \cos(Y, MT) = \sin\alpha = \pm\frac{dy}{ds},$$

при чем $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (по § 2), и в обеих формулах одновременно берутся верхние или нижние знаки.

Выясним, что знаку $+$ отвечает то направление касательной $T$, которое идет в сторону возрастания дуги $s$. На черт. 57 замкнутый выпуклый контур делится на 4 части—I, II, III, IV—точками прикосновения касательных, параллельных осям координат. Беря направление возрастающих дуг против часовой стрелки, назовем положительным то направление $T$ касательной, которое идет в сторону возрастания дуг; тогда угол $\alpha$ между $OX$ и положительным направлением касательной будет содержаться между 0 и $\frac{\pi}{2}$ на I участке контура, между $\frac{\pi}{2}$ и $\pi$ на II, между $\pi$ и $\frac{3\pi}{2}$ на III, между $\frac{3\pi}{2}$ и $2\pi$ на IV. Поэтому, оказывается, $\cos\alpha > 0$ на участках I и IV и $\cos\alpha < 0$ на II и III.



Черт. 57.

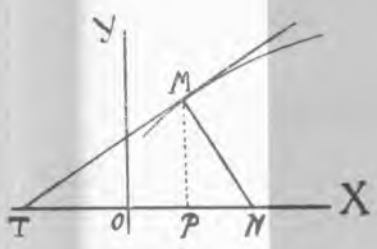
Вместе с тем при движении по дуге $A_1B_1A$ оказывается $dx > 0$, $ds > 0$, следовательно $\frac{dx}{ds} > 0$, а при движении по дуге $ABA_1$ $dx < 0$, $ds > 0$ и $\frac{dx}{ds} < 0$; так как вопрос идет только о знаке, какой нужно взять в формуле $\cos\alpha = \pm\frac{dx}{ds}$ то из сказанного следует, что $\cos\alpha = +\frac{dx}{ds}$ для положительного направления касательной; отсюда $\sin\alpha = +\frac{dy}{ds}$, ибо знак $\pm$ берется одинаковый в обеих формулах. Результат остается верным и при отсчете дуг по часовой стрелке.

*Замечание 2.* Прямая, проведенная через точку $M$ перпендикулярно к касательной $MT$, называется нормалью и определяется уравнением $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$ или $(X - x)dx + (Y - y)dy = 0$, так как из условия перпендикулярности с $MT$ угловой коэффициент $a$ нормали определится формулой: $a \cdot y' + 1 = 0$, откуда $a = -\frac{1}{y'}$. Положительною нормалью $N$ будем называть то направление, которое получится при повороте положительного напра-

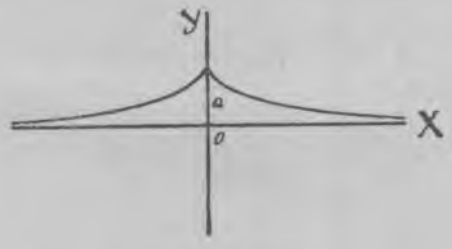
вления $T$ касательной на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Тогда $(X, N) = \alpha + \frac{\pi}{2}$, и следовательно $\cos(X, N) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha = -\frac{dy}{ds}$, $\cos(Y, N) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = +\cos\alpha = +\frac{dx}{ds}$.

При отсчете возрастающих дуг против часовой стрелки положительная нормаль $N$ (черт. 57) направлена в вогнутую сторону линии, а при отсчете возрастающих дуг по часовой стрелке положительная нормаль $N$ направлена в выпуклую сторону.

*Замечание 3.* Если в точке $M$ построить касательную $MT$ и нормаль $MN$, то на оси $OX$ (черт. 58) определятся отрезки: поднормаль $PN = S_n$, подкасательная $PT = S_t$; кроме того, $|MT| = T$ называется длиной касательной и $|MN| = N$ называется длиною нормали. Отрезки эти имеют следующие выражения: $S_n = yy' = y\,\mathrm{tg}\alpha$, $S_t = -\frac{y}{y'} = -y\cot\alpha$, $N = |y\sqrt{1+y'^2}| = \left|\frac{y}{\cos\alpha}\right|$, $T = \left|\frac{y}{y'}\cdot\sqrt{1+y'^2}\right| = \left|\frac{y}{\sin\alpha}\right|$. Действительно, из уравнения касательной $Y - y = y'(X - x)$ при $Y = 0$ получается отрезок $OT = X = x - \frac{y}{y'}$, откуда $PT = PO + OT = -x + \left(x - \frac{y}{y'}\right) = -\frac{y}{y'}$; из уравнения нормали $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$ при $Y = 0$ получается отрезок $ON = yy' + x$, откуда $PN = ON - OP = ON - x = yy'$; после этого из $\triangle PMT$ находим $T = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}}$, а из $\triangle PMN$ $N = \sqrt{y^2 + (yy')^2}$.




Черт. 58.



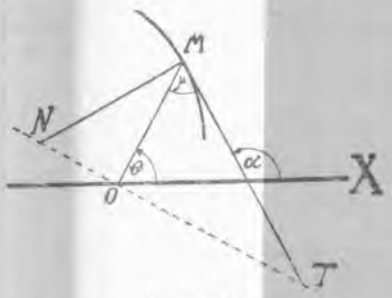

Черт. 59.

*Пример 2.* Парабола $y^2 = 2px$ имеет постоянную поднормаль $S_n = yy' = p$; логарифмическая линия $y = be^{-\frac{x}{a}}$ имеет постоянную подкасательную $S_t = -\frac{y}{y'} = a$; окружность $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ имеет постоянную длину нормали $N = a$ (ибо $y' = -\cot t$); трактрисса $x = a\left(\cos t + \log\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ имеет постоянную длину касательной $T = a$, ибо $y' = \mathrm{tg}\,t$ (черт. 59).

## § 4. Касательная в полярных координатах.

В полярных координатах положение касательной в точке $M$ определяется углом $\mu$ между радиусом-вектором $OM$ и касательною $MT$ (черт. 60). По свойству внешнего угла треугольника, имеем $\alpha = \mu + \theta$, откуда $\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx}{\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy}$ (ибо $\operatorname{tg}\alpha = y'$); принимая во внимание выражения $dx$, $dy$, приведенные в § 2 (замечание), находим $\operatorname{tg}\mu = \frac{r d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{d\log r}$. Проведя через полюс $O$ прямую $\perp$ к радиусу-вектору $OM$ и продолжив касательную $MT$ и нормаль $MN$ до пересечения с этою прямою, получаем отрезки: $OT = S_t$ (полярная подкасательная), $ON = S_n$ (полярная поднормаль); кроме того, $|MT| = T$ называется полярною длиною касательной и $|MN| = N$ — полярною длиною нормали.

Перечисленные отрезки имеют следующие выражения: $S_t = r\operatorname{tg}\mu = \frac{r^2}{r'}$, $S_n = r\cot\mu = r'$, $T = \left|\frac{r}{\cos\mu}\right| = \left|\frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + r'^2}\right|$, $N = \left|\frac{r}{\sin\mu}\right| = \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{ds}{d\theta}$, где $r' = \frac{dr}{d\theta}$; формулы следуют из черт. 60.




Черт. 60.


Черт. 61.

*Примеры:* 1) Логарифмическая спираль $r = ae^{m\theta}$ имеет постоянный угол $\mu = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{m}$ между радиусом-вектором и касательной; этот угол будет прямой при $m = 0$, когда спираль обращается в окружность $r = a$. 2) Линии $r^k = a^k \sin k\theta$ имеют угол $\mu = k\theta$. 3) Спираль Архимеда $r = a\theta$ имеет постоянную полярную поднормаль $S_n = a$. 4) Гиперболическая спираль $r = \frac{a}{\theta}$ имеет постоянную подкасательную $S_t = a$. 5) Окружность $r = a\sin\theta$ имеет постоянную длину нормали $N = a$. 6) Спираль, заданная параметрическими уравнениями $r = a\cos\mu$, $\theta = \mu - \operatorname{tg}\mu$, имеет постоянную длину касательной $T = a$.

## § 5. Кривизна. Радиус кривизны. Центр кривизны.

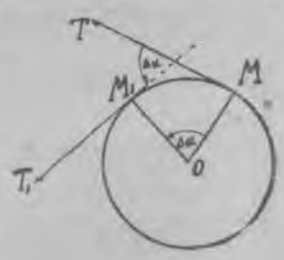
Кривизна есть величина, характеризующая быстроту поворота касательной при перемещении точки по кривой, и равна нулю только для прямой, где касательная не меняет направления. Среднею кривизною на дуге $MM_1$ называется отношение $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ угла поворота касательной $\Delta\alpha$ к длине дуги $MM_1$ (черт. 61); предел этого отношения при $\Delta s = 0$ называется кривизною в данной точке $M$.

*Теорема.* Если плоская линия задана уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то кривизна в данной точке равна $\frac{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}{(\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}$; при задании линии уравнением $y=f(x)$ кривизна равна $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$; в полярных координатах кривизна $=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Вывод. По определению, кривизна $=$ пред. $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=$ пред.$_{\Delta t=0}\left\{\frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}}\right\}=\frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{d\alpha}{ds}$; но $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}$, $d\alpha=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^2+dy^2}$ и $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, следовательно $\frac{d\alpha}{ds}=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\varphi'\psi''-\varphi'\psi''}{(\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}$. Если $x$ независимая переменная, то $d^2x=0$ и $\frac{d\alpha}{ds}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. В полярных координатах, по § 4, $\alpha=\mu+\theta$, $d\alpha=d\mu+d\theta=d\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{r'}\right)+d\theta=\left[\frac{r'^2-rr''}{r^2+r'^2}+1\right]d\theta=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{r^2+r'^2}\cdot d\theta$, $ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$ (по § 2) и $\frac{d\alpha}{ds}=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

*Замечание 1.* Кривизна окружности радиуса $R$ постоянна во всех точках и равна $\pm\frac{1}{R}$.

На черт. 62 угол $(MT, M_1T)=\Delta\alpha$ равен центральному углу $MOM_1$ вследствие перпендикулярности сторон; поэтому $\Delta s=\smile MM_1=R\Delta\alpha$, откуда $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{1}{R}$ и пред.$_{\Delta s=0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{1}{R}$. При отсчете дуг по часовой стрелке выходит $\frac{d\alpha}{ds}=-\frac{1}{R}$.



Черт. 62.

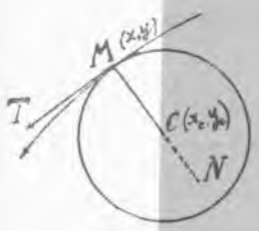
*Замечание 2.* Радиусом кривизны в данной точке $M$ плоской линии называется радиус той окружности, кривизна которой равна кривизне данной линии в точке $M$. Отсюда следует, что радиус кривизны

$$R=\pm\frac{ds}{d\alpha}=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \text{ и пр.}$$

Вывод. Так как кривизна данной кривой равна $\frac{d\alpha}{ds}$, а кривизна окружности $\pm\frac{1}{R}$, то $R=\pm\frac{ds}{d\alpha}$, при чем $+$ берется, если дуга возрастает против часовой стрелки, и $-$ берется, если дуга возрастает по часовой стрелке; в первом случае (§ 3, замечание 2) положительная нормаль направлена в сторону вогнутости линии, во втором — в сторону выпуклости.

*Замечание 3.* Если построить окружность (черт. 63), которая касается данной кривой в точке $M$ и центр которой лежит (на нормали) с вогнутой стороны кривой в расстоянии $CM = R$ (радиусу кривизны), то эта окружность называется кругом кривизны данной кривой в точке $M$, ее центр $C$ называется центром кривизны и ее радиус — радиусом кривизны кривой в точке $M$. Покажем, что координаты центра кривизны определяются формулами: $x_c = x - \frac{ds}{d\alpha} \cdot \sin\alpha = x - \frac{dy}{d\alpha}$, $y_c = y + \frac{ds}{d\alpha} \cos\alpha = y + \frac{dx}{d\alpha}$.

Вывод. Проекции отрезка $MC$ на оси координат равны, с одной стороны, $x_c - x$, $y_c - y$, а с другой стороны $R\cos(X, MC)$, $R\cos(Y, MC)$; но $R = \pm\frac{ds}{d\alpha}$, при чем $+$ берется при отсчете дуги против часовой стрелки и $-$ при отсчете дуги по часовой стрелке; в первом случае $MC$ совпадает с положительною нормалью $N$ и $\cos(X, MC) = -\sin\alpha$, $\cos(Y, MC) = +\cos\alpha$ (§ 3, замечание 2), во втором случае $MC$ совпадает с отрицательною нормалью.




Черт. 63.


Черт. 63а.

и предыдущие выражения косинусов меняют знаки. В обоих случаях выходит: $x_c - x = -\frac{ds}{d\alpha} \cdot \sin\alpha = -\frac{dy}{d\alpha}$, $y_c - y = +\frac{ds}{d\alpha} \cdot \cos\alpha = +\frac{dx}{d\alpha}$, ибо $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$ (§ 3, замечание 1).

По теореме § 5 $d\alpha = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^2 + dy^2} = \frac{y'' dx}{1 + y'^2}$, так что $x_c - x = -\frac{y'(1 + y'^2)}{y''}$, $y_c - y = \frac{1 + y'^2}{y''}$.

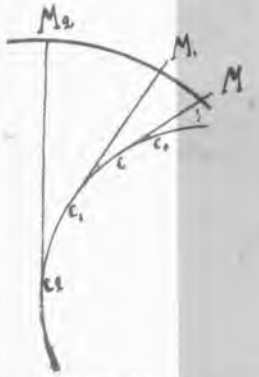
*Пример 1.* Цепная линия $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ имеет радиус кривизны $R$, равный длине нормали $N$: $R = N = a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}$ $\left(\text{так как } \sqrt{1 + y'^2} = \frac{y}{a}, y'' = \frac{y}{a^2}\right)$. Таким же свойством обладает окружность: $x = \sin t$, $y = a\cos t$, где $R = N = a$.

*Пример 2.* Циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ имеет $R = 2N = 4a\sin\frac{t}{2}$ $\left(\text{здесь } y' = \cot\frac{t}{2},\ y'' = -\frac{a}{y^2}\right)$. Таким же свойством обладает парабола $x^2 = 4a(y - a)$: $R = 2N = 2y\sqrt{\frac{y}{a}}$.

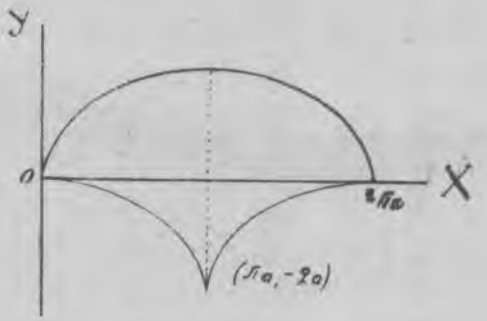
*Пример 3.* Для линии $r^{k-1} = a^{k-1}\sin(k-1)\theta$ оказывается $R = \frac{1}{k}\cdot N$, так как по § 4, примеру 2, $\mu = (k-1)\theta$, $\alpha = k\theta$, $d\alpha = kd\theta$, $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{k}\frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{k}N$.

## § 6. Эволюта как общее место центров кривизны. Свойства эволюты.

*Определение.* Общее место центров кривизны $C(x_c, y_c)$, построенных для всех точек $M(x, y)$ данной линии, называется эволютою этой линии, которая относительно эволюты называется эвольвентой (черт. 64). Из выражений координат $x_c, y_c$, данных в § 5, следует, что параметрические уравнения эволюты будут: $x_c = x - \frac{dy}{d\alpha}$, $y_c = y + \frac{dx}{d\alpha}$, где $x, y, \alpha$ выражены в функции независимой переменной ($t$ или $x$).




Черт. 64.




Черт. 65.

*Пример 1.* Для циклоиды $x = (t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \cot\frac{t}{2},\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2},\ d\alpha = -\frac{1}{2}\,dt,\ x_c = x + 2\frac{dy}{dt} = a(t + \sin t),$$

$$y_c = y - 2\frac{dx}{dt} = -a(1 - \cos t).$$

Перенося начало в точку $(\pi a, -2a)$ по формулам $x_c = \pi a + x_c'$, $y_c = -2a + y_c'$ и полагая $t - \pi = t'$, получаем: $x_c' = a(t' - \sin t')$, $y_c' = a(1 - \cos t')$, т.-е. эволюта циклоиды есть та же циклоида, перенесенная в иное место плоскости (черт. 65).

*Пример 2.* Для логарифмической спирали $r = ae^{m\theta}$ имеем:

$$\mu = \operatorname{arctg}\frac{1}{m}\ (\S\ 4,\ \text{пример } 1),\ d\mu = 0,\ d\alpha = d\theta,$$

следовательно,

$$x_c = x - \frac{dy}{d\theta} = -mae^{m\theta}\sin\theta,\quad y_c = y + \frac{dx}{d\theta} = mae^{m\theta}\cos\theta,$$

откуда

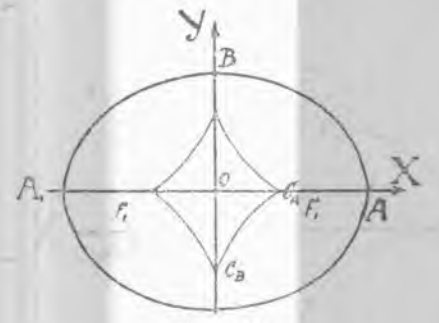
$$r_c = mae^{m\theta},\ \operatorname{tg}\theta_c = -\cot\theta,\ \theta_c = \frac{\pi}{2} + \theta.$$

Исключая $\theta$, находим: $r_c = ae^m(\theta_c - \theta_0)$, где $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\log m}{m}$; повернув полярную ось на угол $\theta_0$ и положив для новой оси $(\theta_1)_c = \theta_c - \theta_0$, находим $r_c = ae^m(\theta_1)_c$, т.-е. эволюта логарифмической спирали есть та же спираль, повернутая на определенный угол около полюса.

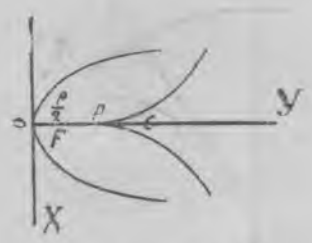
*Пример 3.* Для эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ находим:

$$\frac{da}{dt} = \frac{ab}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}, \quad x_c = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \quad y_c = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t;$$

по исключении $t$ получаем уравнение эволюты в виде $\left(\frac{x_c}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_c}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, где $a_1 = \frac{a^2 - b^2}{a}$, $b_1 = \frac{a^2 - b^2}{b}$.




Черт. 66.




Черт. 67.

Вершине $A$ эллипса ($t = 0$) отвечает (черт. 66) центр кривизны $C_A$ $(a_1, 0)$ и радиус кривизны $= |AC_A| = a - a_1 = \frac{b^2}{a}$, при чем $C_A$ лежит между O и фокусом $F(c, 0)$, ибо $a_1 = k^2 a = kc < c$ $\left(k = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\right.$ есть эксцентриситет эллипса$\left.\right)$; вершине $B$ эллипса $\left(t = \frac{\pi}{2}\right)$ отвечает центр кривизны $C_B(0, -b_1)$ и радиус кривизны $|BC_B| = b + b_1 = \frac{a^2}{b}$, при чем точка $C_B$ может лежать внутри эллипса $\left(\text{при } k < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, совпадать с $B_1$ $\left(\text{при } k = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ или быть вне эллипса $\left(1 > k > \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

*Пример 4.* Для параболы $x = \frac{y^2}{2p}$ исключение $y$ из системы: $x_c = x + \frac{x'^2 + 1}{x''} = p + \frac{3y^2}{2p}$, $y_c = y - \frac{x'(x'^2 + 1)}{x''} = -\frac{y^3}{p^2}$ дает уравнение эволюты $y_c^2 = \frac{8}{27p}(x_c - p)^3$ (полукубическая парабола, черт. 67).

Свойства эволюты: 1) касательная к эволюте в точке $C(x_c, y_c)$ совпадает с нормалью к эвольвенте в точке $M(x, y)$; 2) длина дуги эволюты $C_1C_2$ (черт. 64) равна разности радиусов кривизны соответственных точек эвольвенты $M_2C_2 - M_1C_1$, если между точками $M_1, M_2$ радиус кривизны изменяется монотонно; 3) все параллельные или равноотстоящие кривые имеют общую эволюту.

Из формул § 5: $x_c = x - \frac{ds}{d\alpha}\cdot\sin\alpha$, $y_c = y + \frac{ds}{d\alpha}\cos\alpha$ следует:

$$dx_c = dx - ds\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot d\left(\frac{ds}{d\alpha}\right) = -\sin\alpha\cdot d\left(\frac{ds}{d\alpha}\right), \quad \text{ибо} \quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds},$$

$$dy_c = dy - ds\cdot\sin\alpha + \cos\alpha\cdot d\left(\frac{ds}{d\alpha}\right) = \cos\alpha\cdot d\left(\frac{ds}{d\alpha}\right), \text{ ибо } \sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

Отсюда $\frac{dy_c}{dx_c} = -\frac{1}{y'} = \frac{y_c - y}{x_c - x}$, т.-е. касательная к эволюте в точке $C(x_c, y_c)$ и нормаль к эвольвенте в точке $M(x, y)$ обе параллельны прямой $MC$, иначе сказать — прямая $MC$ является одновременно касательной к эволюте и нормалью к эвольвенте. Далее, называя через $\sigma$ длину дуги эволюты от некоторой точки $C_0$ до точки $C$ (черт. 64) и через $R = \pm\frac{ds}{d\alpha}$ радиус кривизны эвольвенты $MC$, имеем: $d\sigma^2 = dx_c^2 + dy_c^2 = dR^2$, откуда $d\sigma = +dR$, если $R$ растет вместе с $\sigma$ (как на чертеже 64), или $d\sigma = -dR$, если $R$ убывает при возрастании $\sigma$; в первом случае получаем; $d(\sigma - R) = 0$, т.-е. $\sigma - R = h$ — числу постоянному для любой пары точек $M$ и $C$; беря две пары таких точек: $M_1$ и $C_1$, $M_2$ и $C_2$, находим: $\smile C_0C_1 - M_1C_1 = \smile C_0C_2 - M_2C_2$, откуда $\smile C_0C_2 - \smile C_0C_1 = \smile C_1C_2 = M_2C_2 - M_1C_1$. Наконец, замечая, что точке $M(x, y)$ данной кривой отвечает точка $M_1(x_1, y_1)$ параллельной кривой с координатами: $x_1 = x - k\sin\alpha$, $y_1 = y + k\cos\alpha$ (где $k$ постоянное число, положительное или отрицательное, смотря по тому, откладывается ли $k = MM_1$ по положительной или отрицательной нормали), находим: $dx_1 = dx - k\cos\alpha\, d\alpha = dx\left(1 - k\frac{d\alpha}{ds}\right)$, $dy_1 = dy - k\sin\alpha\, d\alpha = dy\left(1 - k\frac{d\alpha}{ds}\right)$, откуда $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$, т.-е. $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha$ ($\alpha$ — угол между осью $OX$ и касательной для данной кривой, $\alpha_1$ — для параллельной), $\alpha_1 = \alpha$, $d\alpha_1 = d\alpha$. Для параллельной кривой центр кривизны будет: $(x_c)_1 = x_1 - \frac{dy_1}{d\alpha} = x - \frac{dy}{d\alpha} = x_c$, $(y_c)_1 = y_1 + \frac{dx_1}{d\alpha} = y + \frac{dx}{d\alpha} = y_c$, т.-е. совпадает с центром кривизны соответственной точки $M$ данной кривой, независимо от $k$; этим и доказано, что параллельные кривые имеют общую эволюту.

*Замечание 1.* Из 2-го свойства эволюты вытекает, что если нить $C_2C_1CM$, навитая на эволюту, будет развиваться, сходя с эволюты по касательной, то свободный конец нити вычертит эвольвенту или развертку (evolvere = развертывать).

*Замечание 2.* Из 2-го свойства, представленного в виде $R = \sigma + k$, вытекает, что, строя эволюту по данной эвольвенте (т.-е. находя $R$ по данному значению $\sigma$), мы получаем, в виду произвольности $k$, бесчисленное множество эвольвент, представляющих параллельные кривые (теорема обратная 3-му свойству).

*Замечание 3.* Принимая во внимание пример 3, заключаем, что длина дуги $\frac{1}{4}$ эволюты эллипса (черт. 66) $\smile C_A C_B = \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab}$.

## § 7. Огибающие кривые (обвертки).

*Определение 1.* Если дана система плоских линий $f(x, y, \alpha) = 0$, зависящих от одного параметра $\alpha$, то характеристической точкой линии $\alpha = \alpha_0$ называется предельное положение точки пересечения двух линий системы: $\alpha = \alpha_0$ и $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha_0$ при $\Delta\alpha_0 = 0$. Отсюда следует, что характеристическая точка линии $\alpha = \alpha_0$ определяется системою $f(x, y, \alpha_0) = 0$, $f'_\alpha(x, y, \alpha_0) = 0$, так как система уравнений $f(x, y, \alpha_0) = 0$, $f(x, y, \alpha_0 + \Delta\alpha_0) = 0$ может быть заменена равносильною системою:

$$f(x, y, \alpha_0) = 0, \quad \frac{f(x, y, \alpha_0 + \Delta\alpha_0) - f(x, y, \alpha_0)}{\Delta\alpha_0} = 0,$$

которая в пределе, при $\Delta\alpha_0 = 0$, обратится в систему $f(x, y, \alpha_0) = 0$, $f'_\alpha(x, y, \alpha_0) = 0$.

*Определение 2.* Общее место характеристических точек всех линий системы $f(x, y, \alpha) = 0$, если оно существует, называется огибающею или обверткой для данной системы линий — огибаемых. Из определения 1-го следует, что огибающая определяется параметрическими уравнениями $f(x, y, \alpha) = 0$, $f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$, из которых, по исключении $\alpha$, можно найти уравнение огибающей в виде: $F(x, y) = 0$.

Название огибающей или обвертки оправдывается следующим ее свойством.

*Теорема.* Огибающая касается каждой из огибаемых в характеристической ее точке.

Вывод. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ характеристическая точка огибаемой $\alpha = \alpha_0$, так что должно быть $f(x_0, y_0, \alpha_0) = 0$, $f'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0$ (*). Угловой коэффициент касательной в точке $M_0$ к линии $f(x, y, \alpha_0) = 0$ будет $y'_0 = \frac{-f'_x(x_0, y_0, \alpha_0)}{f'_y(x_0, y_0, \alpha_0)}$. Чтобы найти угловой коэффициент касательной к огибающей в точке $M_0$ (назовем его $\bar{y}'_0$), нужно дифференцировать уравнение $f(x, y, \alpha) = 0$, считая $\alpha$ функцией от $x$, определяемой уравнением $f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$. Тогда получаем $f'_x + f'_y \cdot \bar{y}' + f'_\alpha \cdot \alpha' = 0$, или, в силу уравнения $f'_\alpha = 0$, получаем в точке $M_0$: $\bar{y}'_0 = \frac{-f'_x(x_0, y_0, \alpha)}{f'_y(x_0, y_0, \alpha)}$; здесь $\alpha$ не произвольно, так как принадлежность $M_0$ к точкам огибающей дает два уравнения для $\alpha$: $f(x_0, y_0, \alpha) = 0$, $f'_\alpha(x_0, y_0, \alpha) = 0$, для которых [как видно из сравнения с тождествами (*)] одно из решений будет $\alpha = \alpha_0$. Но при $\alpha = \alpha_0$ оказывается $\bar{y}'_0 = y'_0$, т.-е. касательная к огибающей и к огибаемой в точке $M_0$ будет общая, что и требовалось доказать.

*Замечание 1.* Результат исключения $\alpha$ из системы $f(x, y, \alpha) = 0$, $f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$ может определять не только огибающую кривую, но также и общее место особенных точек линий $f(x, y, \alpha) = 0$ (т.-е. таких точек, для которых одновременно $f'_x = 0$, $f'_y = 0$), так как при выполнении системы $f = 0$, $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ уравнение $f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_\alpha\,d\alpha = 0$, получаемое дифференцированием уравнения $f = 0$, обращается в $f'_\alpha = 0$.

*Замечание 2.* Если огибаемые линии $f(x, y, \alpha)=0$ суть прямые, то они образуют систему касательных к своей огибающей, ибо касательная к прямой есть эта же прямая. Поэтому задача о нахождении кривой, коей касательные $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ обладают геометрическим свойством: $\varphi(\alpha, \beta)=0$, равносильна задаче об огибающей системы этих касательных, при чем $\alpha$ есть независимый параметр, а $\beta$ — функция от $\alpha$, определяемая из уравнения $\varphi(\alpha, \beta)=0$.

*Замечание 3.* Так как по свойству 1-му эволюты (§ 6) нормали к эвольвенте образуют систему касательных к эволюте, то эволюту, согласно замечания 2, можно определить как огибающую нормалей эвольвенты. Легко и прямо доказать, что характеристической точкой нормали $X-x+y'(Y-y)=0$ (где $x$ независимый параметр, $y$ и $y'$ — его функции) является центр кривизны, ибо дифференцирование по $x$ дает: $-1+y''(Y-y)-y'^2=0$, откуда $Y-y=\frac{1+y'^2}{y''}$, $X-x=-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}$, т.-е. по § 5 (перед примерами) $X=x_c$, $Y=y_c$.

*Пример 1.* Найти огибающую окружностей, которые построены, как на диаметрах, на хордах эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, параллельных малой оси. Если уравнение хорды будет $x=\alpha$, то уравнение огибаемой будет $f(x, y, \alpha)=(x-\alpha)^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha^2)=0$; отсюда $f'_\alpha=-2(x-\alpha)+2\frac{b^2}{a^2}\alpha=0$. Исключение $\alpha$ из двух уравнений дает: $\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

*Пример 2.* Найти кривую, коей касательные обладают тем свойством, что отрезок касательной между осями координат имеет постоянную длину $a$.

Здесь огибаемые суть прямые $f(x, y, \alpha)=\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1=0$ при условии $\varphi(\alpha, \beta)=\alpha^2+\beta^2-a^2=0$. Имеем: $f'_\alpha=-\frac{x}{\alpha^2}-\frac{y}{\beta^2}\cdot\beta'=0$, при чем $2\alpha+2\beta\beta'=0$, откуда $\beta'=-\frac{\alpha}{\beta}$ и, следовательно, уравнение $f'_\alpha=0$ дает: $\frac{x}{\alpha^3}=\frac{y}{\beta^3}$. Исключая $\alpha$ и $\beta$ из уравнений $f=0$, $\varphi=0$ и $f'_\alpha=0$, имеем: $\Delta=\frac{x}{\alpha^3}=\frac{y}{\beta^3}=\frac{\frac{x}{\alpha}}{\alpha^2}=\frac{\frac{y}{\beta}}{\beta^2}=\frac{\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{a^2}$ (по свойству производных отношений); отсюда $\alpha^3=a^2x$, $\beta^3=a^2y$, и уравнение $\varphi=0$ дает: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (астроида).

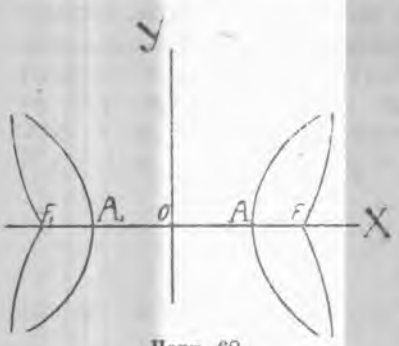
*Пример 3.* Найти эволюту гиперболы как огибающую ее нормалей. Беря уравнение гиперболы $x=a\,\mathrm{ch}t$, $y=b\,\mathrm{sh}t$, получаем уравнение нор-

мали: $X \cdot a \operatorname{sh} t + Y \cdot b \operatorname{ch} t = (a^2 + b^2) \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$; дифференцируя его по $t$, имеем: $X \cdot a \operatorname{ch} t + Y \cdot b \operatorname{sh} t = (a^2 + b^2)(\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t)$. Из этой системы:

$$X = \frac{a^2 + b^2}{a} \operatorname{ch}^3 t, \quad Y = -\frac{a^2 + b^2}{b} \operatorname{sh}^3 t \quad \text{или} \quad \left(\frac{X}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{Y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \text{ (черт. 68).}$$

## § 8. Направление вогнутости. Точки перегиба и сплющенности.

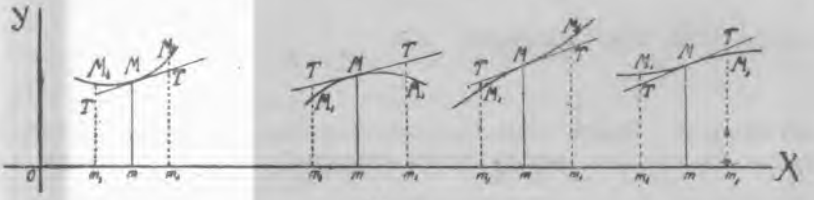
Если в данной точке $M(x, y)$ плоская кривая имеет одну касательную, не параллельную оси $OY$, при чем кривая идет в обе стороны от $M$, то возможны лишь 4 расположения точек кривой относительно касательной (см. черт. 69); в первом случае вогнутость направлена в сторону положительных ординат, во 2-м — в сторону отрицательных ординат, в 3-м образуется восходящий перегиб, в 4-м — нисходящий перегиб.



Черт. 68.

*Теорема.* Если для данной точки $M(x, y)$ в ряду производных $y''$, $y'''$, $y^{IV}$, ... первая неравная нулю будет $y^{(k)}$, то при четном имеем расположение 1-е или 2-е (1-е при $y^{(k)} > 0$, 2-е при $y^{(k)} < 0$), при $k$ нечетном имеем расположение 3-е при $y^{(k)} > 0$ и 4-е при $y^{(k)} < 0$.

Вывод. Составим выражение отрезка $\delta = TM_1 = m_1M_1 - m_1T$, т.-е. разности ординат точки кривой $M_1$ и точки касательной $T$ при абсциссе $x + \Delta x$. Из уравнения касательной $Y - y = y'(X - x)$ при $X = x + \Delta x$



Черт. 69.

находим: $m_1T = y + y' \cdot \Delta x$; из уравнения кривой $m_1M_1 = y + \Delta y$; отсюда $\delta = \Delta y - y'\Delta x$. По формуле Тэйлора (отд. II, глава II, § 3) имеем:

$$\delta = \frac{1}{1 \cdot 2} y'' \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} y''' \cdot \Delta x^3 + \ldots$$

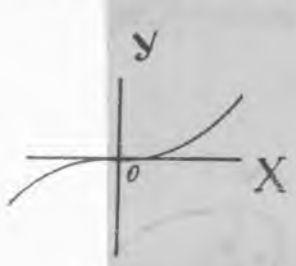
Поэтому, если $y'' = y''' = \ldots = y^{(k-1)} = 0$, но $y^{(k)}$ не $= 0$, то $\delta = \frac{1}{k!} y^{(k)} \cdot \Delta x^k + \frac{1}{(k+1)!} y_\theta^{(k+1)} \cdot \Delta x^{k+1}$, при чем при достаточно малых $|\Delta x|$ знак $\delta$ одинаков с $y^{(k)} \Delta x^k$.

При $k$ четном знак $\delta$ одинаков с $y^{(k)}$, что и дает случай 1 и 2; при $k$ нечетном $\delta$ меняет знак вместе с $\Delta x$, что приводит к перегибам.

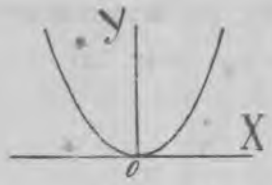
*Замечание 1.* Если в данной точке $y'' = 0$ и первая из дальнейших производных, неравная нулю, будет $y^{(2k)}$, то точка называется точкою сплющенности.

*Пример 1.* Для параболы $y=x^3$ имеем в точке $x=0$: $y''=6x=0$, $y'''=6>0$, следовательно, в точке (0,0) восходящий перегиб; для параболы $y=x^4$ имеем при $x=0$: $y''=12x^2=0$, $y'''=24x=0$, $y^{IV}=24>0$, следовательно, точка (0,0) есть точка сплющенности (черт. 70 и 71).

*Замечание 2.* Если в данной точке $y''$ не $=0$, то, согласно теореме, знак $y''$ определяет направление вогнутости; поэтому в точке перегиба, где направление вогнутости изменяется, функция $y''$ должна менять знак: с — на + (при возрастании $x$) в восходящем перегибе и с + на — в нисходящем. Это изменение знака может происходить не только при обращении $y''$ в 0, но также и при обращении в $\infty$. В точке же сплющенности, если $y''$ обращается в 0, то знака не меняет.




Черт. 70.




Черт. 71.

*Пример 2.* Для линии $y=x^{\frac{5}{3}}$ имеем $y''=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$, следовательно при $x=0$ $y''$ обращается в $\infty$ с переменою знака с — на +, и потому точка (0,0) представляет восходящий перегиб. Напротив, для линии $y=x^{\frac{4}{3}}$ имеем $y''=\frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}$, следовательно при $x=0$ $y''$ обращается в $\infty$, но без перемены знака, и в точке (0,0) вогнутость направлена в сторону положительных ординат.

*Замечание 3.* В теореме предполагалось, что $y'$ конечно. Если же $y'=\infty$, т.-е. если касательная к кривой $\parallel OY$, то нужно рассматривать направление вогнутости относительно оси $OX$ и из данного уравнения кривой $y=f(x)$ определить $x$ как функцию от $y$: $x=\varphi(y)$. Тогда $x'=\frac{1}{y'}=0$ и можно приложить все предыдущие результаты. В частности, в точках перегиба $x''$ должно менять знак.

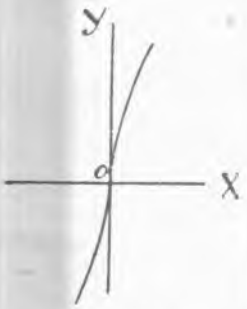
*Пример 3.* Для линии $y=x^{\frac{1}{3}}$ имеем, при $x=0$, $y'=\infty$. Определив $x=y^3$, находим $x''=6y$, следовательно при $y=0$ будет перегиб (черт. 72).

*Замечание 4.* Так как в точках перегиба выражение радиуса кривизны $R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ обращается в $\infty$ с переменою знака, то, беря $R$ в полярных координатах $R=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}$, заключаем, что в полярных координатах точки перегиба отвечают тем значениям $\theta$, где $F=r^2+2r'^2-rr''$

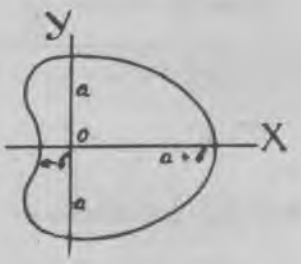
обращается в 0 с переменою знака. Замечая, что $\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{r}\right)''=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{r^3}$, можем сказать, что в точках перегиба выражение $\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{r}\right)''$ обращается в 0 с переменою знака.

*Пример 4.* Для Улитки Паскаля $r=a+b\cos\theta$ ($a$ и $b>0$) $F=a^2+2b^2+3ab\cos\theta$, следовательно точки перегиба могут отвечать значениям $\theta$, при которых $\cos\theta=-\frac{a^2+2b^2}{3ab}$.

Решение существует, если $a^2+2b^2-3ab<0$ или $(2b-a)(b-a)<0$ т.-е. если $b<a<2b$; при этом $\theta$ имеет два значения $\pm\theta_0$, из коих $\theta_0$ содержится между $\frac{\pi}{2}$ и $\pi$ (черт. 73).




Черт. 72.




Черт. 73.

## § 9. Порядок касания плоских кривых.

*Определение.* Две плоские кривые $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$, имеющие в точке $M(x, y)$ общую касательную [при этом $f(x)=\varphi(x)$, $f'(x)=\varphi'(x)$], образуют касание $n$-го порядка, если разность $\delta=f(x+\Delta x)-\varphi(x+\Delta x)$ между ординатами точек, отвечающих бесконечно-близкому значению абсциссы $x+\Delta x$, представляет бесконечно-малую $(n+1)$-го порядка относительно $\Delta x$.

*Теорема.* Чтобы в точке $M(x, y)$ существовало касание $n$-го порядка, необходимо и достаточно выполнение условий: $f(x)=\varphi(x)$, $f'(x)=\varphi'(x)$, $f''(x)=\varphi''(x)$, ... $f^{(n)}(x)=\varphi^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)\gtrless\varphi^{(n+1)}(x)$.

Вывод. Разлагая функции $f(x+\Delta x)$ и $\varphi(x+\Delta x)$ по формуле Тэйлора, имеем:

$$\delta=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta x^k}{k!}\left\{f^{(k)}(x)-\varphi^{(k)}(x)\right\}+\frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!}\left\{f^{(n+1)}(x+\vartheta\Delta x)-\varphi^{(n+1)}(x+\vartheta\Delta x)\right\}.$$

При условиях теоремы имеем $\underset{\Delta x=0}{\text{пред.}}\frac{\delta}{(\Delta x)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}\left\{f^{(n+1)}(x)-\varphi^{(n+1)}(x)\right\}$, т.-е. $\delta$ есть бесконечно-малая $(n+1)$-го порядка относительно $\Delta x$. Добавим, что при $n$ четном $\delta$ меняет знак вместе с $\Delta x$, т.-е. одна кривая пересекает другую, а при $n$ нечетном $\delta$ не меняет знака, т.-е. одна кривая всеми точками (близкими к $M$) лежит с одной стороны относительно другой кривой.

*Замечание 1.* Если линия $y=\varphi(x)$ будет касательною к кривой $y=f(x)$ в точке $(x, y)$, то $\varphi(X)=f'(x)\cdot X+b$, следовательно $\varphi''(x)=0$, $\varphi'''(x)=0$ и пр.

Поэтому кривая образует со своей касательною касание $n$-го порядка, если в данной точке оказывается $y''=0$, $y'''=0$, ... $y^{(n)}\gtrless 0$. В точке перегиба (см. теорему § 8) касание будет четного порядка, а в точках сплющенности ( § 8, замечание 1) — нечетного.

*Замечание 2.* Если имеется уравнение плоской линии

$$\Phi(x, y, a_1, a_2, \ldots a_{n+1})=0,$$

содержащее $(n+1)$ произвольных параметров, то можно ими распорядиться так, чтобы получилось касание по крайней мере $n$-го порядка с данною линией $y=f(x)$ в данной ее точке $(x, y)$; для этого значения $y$, $y'$, ... $y^{(n)}$ из уравнения $\Phi=0$ должно приравнять $f(x)$, $f'(x)$, ... $f^{(n)}(x)$, что даст $(n+1)$ уравнений для определения $n+1$ параметров. Такая линия $\Phi=0$ называется соприкасающеюся с данною кривою $y=f(x)$. В частности, соприкасающаяся окружность $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$ содержит три параметра, которые должны удовлетворять уравнениям: $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$, $x-a+(y-b)y'=0$, $1+y'^2+(y-b)y''=0$, где $y, y', y''$ взяты из уравнения данной кривой $y=f(x)$. Эти уравнения дают:

$$b-y=\frac{1+y'^2}{y''},\quad a-x=-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\quad R=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

т.-е. (см. § 5) соприкасающаяся окружность совпадает с кругом кривизны. Таким образом круг кривизны образует с кривою вообще касание 2-го порядка и пересекает кривую. В отдельных точках порядок касания может повышаться; для этого должно выполняться еще уравнение: $3y'y''+(y-b)y'''=0$ (получаемое при 3-м дифференцировании уравнения окружности); внося в него значение $y-b$, получаем условие $3y'y''^2-(1+y'^2)\cdot y'''=0$, равносильное уравнению $\frac{dR}{dx}=0$; отсюда следует, что порядок касания кривой с ее кругом кривизны повышается до 3-го (по крайней мере) в тех точках, где радиус кривизны достигает maximum или minimum.

*Пример.* Показать, что касание параболы $y^2=2px$ с ее кругом кривизны $x^2-2px+y^2=0$ в вершине (0,0) будет 3-го порядка. Из уравнения параболы, при независимой переменной $y$, находим в точке (0,0): $x'=0$, $x''=\frac{1}{p}$, $x'''=0$, $x^{\mathrm{IV}}=0$, из уравнения круга кривизны получаем:

$$xx'-px'+y=0,\quad x'^2+xx''-px''+1=0,\quad 3x'x''+xx'''-px'''=0,$$
$$3x''^2+4x'x'''+xx^{\mathrm{IV}}-px^{\mathrm{IV}}=0,$$

откуда

$$x'=0,\ x''=\frac{1}{p},\ x'''=0,\ x^{\mathrm{IV}}=\frac{3}{p^3}.$$

Согласно теореме, порядок касания $n=3$.

*Замечание 3.* Можно доказать, что порядок касания не изменяется при перемене координатных осей.

## § 10. Особенные точки плоских кривых.

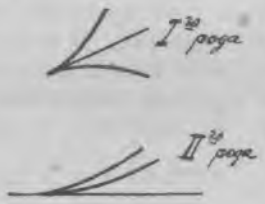
*Определение.* Для алгебраической кривой (уравнение которой имеет вид $f(x, y)=0$, где $f$ — многочлен, содержащий целые положительные степени $x$ и $y$) точка $M(x, y)$ называется особенною или кратною, если одновременно $f'_x=0$, $f'_y=0$.

В частности, точка называется $n$-кратною, если все частные производные функции $f(x, y)$ до $(n-1)$-го порядка включительно равны нулю, а из частных производных $n$-го порядка одна, по крайней мере, не нуль.

*Теорема.* В $n$-кратной точке алгебраической кривой угловой коэффициент касательной $y'$ определяется уравнением $n$-й степени, так что вообще в $n$-кратной точке кривая имеет $n$ касательных.

Вывод. В отд. II, гл. III, § 6 приведены выражения полных дифференциалов функции $f(x, y)=0$; из них очевидно, что при равенстве нулю всех частных производных до $(n-1)$-го порядка включительно, полный дифференциал $d^n f(x, y)$ будет выражаться символическою формулой: $d^n f=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x, y)=0$, так что $y'$ определится из уравнения $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot y'\right)^n f=0$. В частности, при $n=2$ получаем уравнение $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot y'^2=0$. Если здесь $D=f''_{xy}{}^2-f''_{xx}\cdot f''_{yy}>0$, то $y'$ имеет 2 вещественных различных значения, и точка называется узловою (черт. 74); при $D=0$ $y'$ имеет 2 равных вещественных значения, что

Черт. 74.




Черт. 75.

отвечает точке возврата 1-го или 2-го рода (черт. 75); при $D<0$ $y'$ имеет комплексные значения, и точка называется изолированною.

*Замечание 1.* Определив все особенные точки алгебраической кривой решением системы: $f=0$, $f'_x=0$, $f'_y=0$, можно в каждую такую точку перенести начало координат и для исследования фигуры кривой вблизи этой точки применить теорему:

*Теорема.* Если начало (0, 0) является кратной точкой алгебраической кривой, то, приравняв нулю однородную совокупность членов низшей степени уравнения кривой и разложив ее на линейные множители, получим все касательные к кривой в точке (0,0).

Вывод. Так как секущая, проведенная через начало и через точку $(x, y)$ данной кривой, имеет угловой коэффициент $t=\frac{y}{x}$, то угловой коэффициент касательной в точке (0,0) будет $\underset{x=0}{\text{пред}}\frac{y}{x}=\alpha$. Если уравнение дан-

ной кривой написать в виде: $\varphi_n(x, y)+\varphi_{n-1}(x, y)+\ldots+\varphi_p(x, y)=0$, разбив на однородные группы членов степеней $n$, $n-1, \ldots p$, то по свойству однородных функций можно положить $\varphi_j(x, y)=x^j\cdot\varphi_j(1, t)$; по сокращении на $x^p$ уравнение кривой тогда примет вид:

$$x^{n-p}\varphi_n(1, t)+x^{n-p-1}\varphi_{n-1}(1, t)+\ldots+x\cdot\varphi_{p+1}(1, t)+\varphi_p(1, t)=0.$$

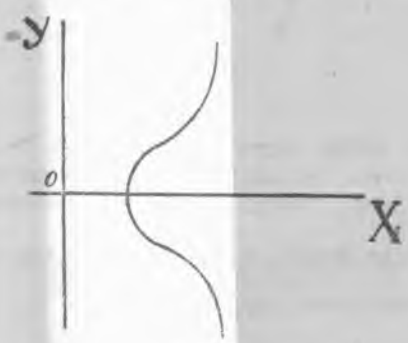
В пределе, когда $x$ обратится в 0 и $t$ в $\alpha$, получим $\varphi_p(1, \alpha)=0$; пусть $p$ корней этого уравнения будут $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ (это будут $p$ значений углового коэффициента касательной в точке (0, 0), так что $Y-\alpha_j X=0$ будут уравнения этих касательных); по свойству целой функции имеем:

$$\varphi_p(1, \alpha)=A(\alpha-\alpha_1)\ (\alpha-\alpha_2)\ldots(\alpha-\alpha_p),$$

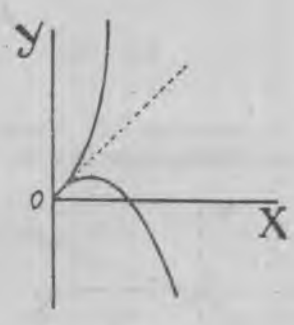
$$\varphi_p\left(1, \frac{Y}{X}\right)=A\left(\frac{Y}{X}-\alpha_1\right)\ldots\left(\frac{Y}{X}-\alpha_p\right),\quad \varphi_p(X, Y)=X^p\,\varphi_p\left(1, \frac{Y}{X}\right)=$$

$$=A(Y-\alpha_1 X)\ldots(Y-\alpha_p X),$$

так что уравнение $\varphi_p(X, Y)=0$ определяет полную систему касательных $Y=\alpha_j X$, что и требовалось доказать. Может случиться, что $\varphi_p(1, \alpha)$ будет степени $q<p$ относительно $\alpha$; тогда $\varphi_p(X, Y)$ будет содержать множитель $X^{p-q}$, которому отвечает касательная $X=0$ — ось ординат.




Черт. 76.



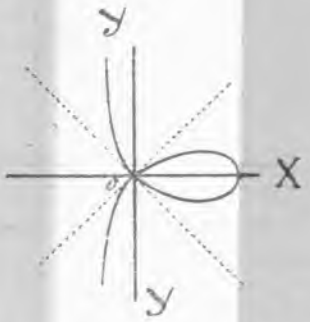

Черт. 77.

*Пример 1.* $x^3-ax^2-ay^2=0$ $(a>0)$. Начало есть двукратная точка с пучком касательных $x^2+y^2=0$; эта функция не раскладывается на вещественные множители, поэтому в начале — изолированная точка (черт. 76).

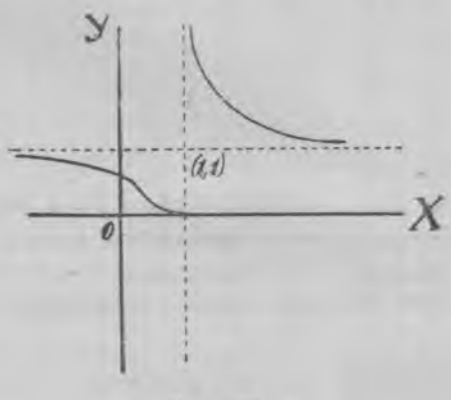
*Пример 2.* $x^3-a(x^2-2xy+y^2)=0$ $(a>0)$. В начале координат точка возврата, ибо уравнение $x^2-2xy+y^2=0$ представляется в виде $(x-y)^2=0$; касательная имеет уравнение $x-y=0$. Для изучения хода кривой, положив $y=tx$ и сократив на $x^2$, находим: $x-a(1-t)^2=0$, откуда $t=1\pm\sqrt{\frac{x}{a}}$, $y=tx=x\pm x\sqrt{\frac{x}{a}}$; отсюда видно, что две ветви кривой касаются прямой $y=x$, при чем обе идут в сторону положительного $x$, и одна выше касательной, другая — ниже (черт. 77).

*Пример 3.* $x^3-a(x^2-y^2)=0$ $(a>0)$. В начале узел с пучком касательных $y^2-x^2=(y-x)\ (y+x)=0$. Полагая $y=tx$ и сокращая

на $x^2$, имеем $\frac{x}{a}=(1-t)(1+t)$. При $t$, близком к 1, приближенно имеем: $t-1=-\frac{x}{2a}$, $y=tx=x-\frac{x^2}{2a}$; при $t$, близком к $-1$, находим $t+1=\frac{x}{2a}$, $y=-x+\frac{x^2}{2a}$. Таким образом ветвь кривой, касающаяся прямой $y=x$, приближенно представляется уравнением $y=x-\frac{x^2}{2a}$ и проходит ниже касательной; другая ветвь $y=-x+\frac{x^2}{2a}$ проходит выше своей касательной $y=-x$ (черт. 78).

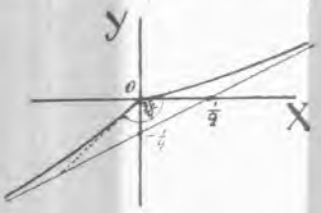



Черт. 78.




Черт. 79.

*Замечание 2.* Кроме указанных выше видов особых точек (узел, возврат, изолированная точка), трансцендентные кривые допускают еще два вида особенных точек: точка прекращения (кривая $y=e^{\frac{1}{x-1}}$ при $x=1$, черт. 79) и угловая или выступающая точка (кривая $y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ при $x=0$, черт. 80).




Черт. 80.

## § 11. Асимптоты.

*Определение 1.* Если из уравнения данной линии $f(x, y)=0$ одно из значений $y$ можно представить в виде: $y=\alpha x+\beta+\Delta$, где $\alpha$ и $\beta$ постоянные числа, а $\Delta$ стремится к 0 (оставаясь вещественным) при беспредельном возрастании $|x|$, то прямая $Y=\alpha X+\beta$ называется асимптотою данной кривой; в таком случае разность $\Delta=y-Y$ между ординатами кривой и прямой приближается к 0 вместе с $\frac{1}{x}$, то-есть кривая подходит к прямой сколь угодно близко, никогда ее не достигая.

*Теорема 1.* Коэффициенты $\alpha$ и $\beta$ в уравнении асимптоты $Y=\alpha X+\beta$ определяются формулами: $\alpha=\underset{x=\infty}{\text{пред.}}\frac{y}{x}$, $\beta=\underset{x=\infty}{\text{пред.}}(y-\alpha x)$.

Вывод. По определению, $\Delta = y - \alpha x - \beta$ имеет пределом 0 при $x = \pm\infty$; поэтому $\frac{y}{x} - \alpha = \frac{\Delta + \beta}{x}$ также имеет пределом 0, то есть пред. $\left(\frac{y}{x} - \alpha\right) = 0$, пред. $\frac{y}{x} = \alpha$; далее, $(y - \alpha x) - \beta = \Delta$ и в пределе пред. $(y - \alpha x) = \beta$ при $x = \pm\infty$, ибо пред. $\Delta = 0$.

*Пример 1.* $y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$. Здесь $\alpha =$ пред. $\frac{y}{x} = \underset{x=\infty}{\text{пред.}} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$;

$$y - \alpha x = \frac{x}{2\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)} \cdot \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{x}{2\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)} \left(1 - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)} \left(-1 - \frac{1}{2x} - \ldots\right),$$ откуда $\underset{x=\infty}{\text{пред.}} (y - \alpha x) = \beta = -\frac{1}{4}$.

Итак, $Y = \frac{1}{2} X - \frac{1}{4}$ есть асимптота данной кривой, при чем

$$\Delta = y - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} = \frac{2x\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right) + 1 + e^{\frac{1}{x}}}{4\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= \frac{2x\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} - \ldots\right) + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ldots}{4\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)} = \frac{\frac{1}{6x^2} + \ldots}{4\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)};$$

отсюда видно, что $\Delta > 0$ при $x = \pm\infty$, т.-е. ордината кривой больше ординаты асимптоты, что приводит к черт. 80.

*Определение 2.* Если из уравнения данной кривой $f(x, y) = 0$ одно из значений $x$ можно представить в виде $x = c + \Delta$, где $c$ постоянное и пред. $\Delta = 0$ при $y = \pm\infty$ (при чем $\Delta$ должно оставаться вещественным), то прямая $X = c$ представляет асимптоту данной кривой, параллельную оси $OY$. Иначе сказать: если при конечном значении $x = c$ одно из значений $y$ обращается в $\infty$, то $X = c$ есть асимптота данной кривой.

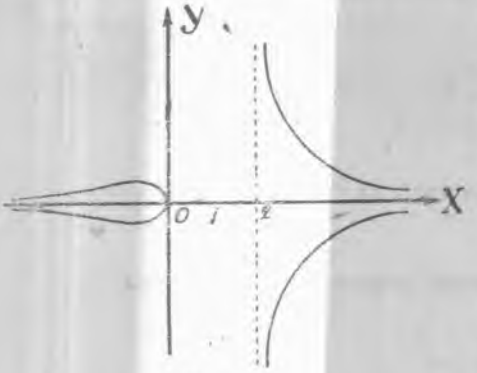
*Пример 2.* $y^2 = \frac{x}{(x-1)^2 (x-2)}$. Здесь $y$ обращается в $\infty$ при $x = 1$ и при $x = 2$. Полагая $x - 1 = \Delta$, находим при $x$, близких к 1, приближенное значение $\Delta^2 = -\frac{1}{y^2}$, откуда видно, что $\Delta$ мнимое, и прямая $x = 1$ не будет асимптотой данной линии. Полагая теперь $x - 2 = \Delta$, находим $\Delta = \frac{2}{y^2}$, так что $\Delta > 0$ при $y = \pm\infty$, т.-е. ветви кривой подходят справа к обоим концам асимптоты $x = 2$. Эта кривая имеет еще асимптоту $y = 0$, при чем из выражения $y = \pm \frac{\frac{1}{x}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$ видно, что при $x = +\infty$ $y = \pm 0$ и при $x = -\infty$ $y = \pm 0$, т.-е. к обоим концам

асимптоты $y=0$ подходят по две ветви кривой (снизу и сверху, см. черт. 81). Для алгебраических кривых существует.

*Теорема 2.* Если совокупность членов высшего измерения в уравнении алгебраической кривой приравнять 0, то получится уравнение пучка асимптотических направлений $Y-\alpha_j X=0$, проведенных через начало.

Вывод. Пусть уравнение алгебраической кривой $n$-го порядка представлено в виде: $\varphi_n(x, y)+\varphi_{n-1}(x, y)+\ldots+\varphi_1(x, y)+\varphi_0=0$, где $\varphi_j$ означает однородную совокупность членов измерения $j$; заменяя $\varphi(x, y)$ на $x^j\varphi_j\left(1, \frac{y}{x}\right)$, разделим все уравнение на $x^n$, что даст:

$$\varphi_n\left(1, \frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\varphi_{n-1}\left(1, \frac{y}{x}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{x^n}\varphi_0=0;$$



Черт. 81.

при беспредельном возрастании $x$ пред. $\frac{y}{x}=\alpha$ — угловому коэффициенту асимптотического направления (согласно теореме 1, § 11), следовательно в пределе $\varphi_n(1, \alpha)=0$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ — $n$ корней этого уравнения; тогда

$$\varphi_n(1, \alpha)=A(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)\ldots(\alpha-\alpha_n),$$

$$X^n\varphi_n\left(1, \frac{Y}{X}\right)=\varphi_n(X, Y)=A(Y-\alpha_1 X)(Y-\alpha_2 X)\ldots(Y-\alpha_n X),$$

и уравнение $\varphi_n(X, Y)=0$ дает полную систему асимптотических направлений $Y-\alpha_j X=0$ при $j=1, 2, \ldots n$, что и требовалось доказать. (Может оказаться, что $\varphi_n(1, \alpha)$ будет степени $p<n$ относительно $\alpha$, тогда в выражение $\varphi_n(X, Y)$ войдет множитель $X^{n-p}$, определяющий асимптотическое направление, параллельное оси $OY$).

*Пример 3.* $x^3+y^3-3axy=0$. Полагая $y=tx$ и деля на $x^3$, получаем $1+t^3-\frac{3at}{x}=0$; при $x=\infty$ имеем $1+\alpha^3=0$, $\alpha=-1$; полагая $t=-1+\frac{\gamma}{x}$ (при чем $y=tx=-x+\gamma$, т.е. $\gamma=\beta+\Delta$ при обозначениях теоремы 1), находим, по сокращении $\frac{1}{x}$, уравнение:

$$\gamma\left(3-3\frac{\gamma}{x}+\frac{\gamma^2}{x^2}\right)-3a\left(-1+\frac{\gamma}{x}\right)=0;$$

так как пред. $\gamma=\beta$ при $\frac{1}{x}=0$, то $3\beta+3a=0$, $\beta=-a$. Полагая

$$\gamma=-a+\Delta,$$

находим

$$\Delta\left[3+\frac{3}{x}(a-\Delta)+\frac{1}{x^2}(a-\Delta)^2\right]-\frac{a(a-\Delta)^2}{x^2}=0,$$

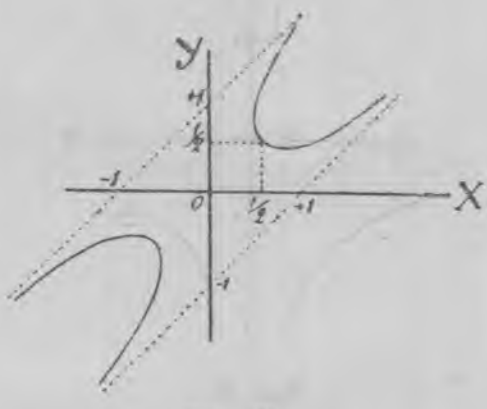
откуда приближенно $\Delta = \frac{a^3}{3x^2}$, т.-е. $\Delta > 0$ при $x = \pm\infty$. Это значит, что ордината кривой больше ординаты асимптоты $Y = -X - a$ на обоих концах (черт. 1).

*Пример 4.* $(y^2 - x^2)^2 - (y + x)^2 + 1 = 0$.

Пучек асимптотических направлений: $(Y^2 - X^2)^2 = 0$, т.-е. два двойных направления: $Y = X$, $Y = -X$ ($\alpha = +1$ и $\alpha = -1$). Положив $y = tx$ и деля на $x^4$, получаем из данного уравнения: $(t^2 - 1)^2 - \frac{1}{x^2}(t + 1)^2 + \frac{1}{x^4} = 0$.

Разберем отдельно случаи: $\alpha = +1$, $\alpha = -1$. В первом, полагая $t = 1 + \frac{\gamma}{x}$, находим, по сокращении на $\frac{1}{x^2}$, уравнение $4\gamma^2 - 4 + \frac{1}{x}(4\gamma^3 - 4\gamma) + \frac{1}{x^2}(\gamma^4 - \gamma^2 + 1) = 0$, откуда пред. $\gamma = \beta$ определяется условием: $4\beta^2 - 4 = 0$, т.-е. $\beta = \pm 1$.

Для асимптоты $Y = X + 1$, делая $\gamma = 1 + \Delta$, получаем: $4\Delta(2 + \Delta) + \frac{4\Delta}{x}(2 + 3\Delta + \Delta^2) + \frac{1}{x^2}(1 + 2\Delta + \ldots) = 0$ или $\Delta(8 + \varepsilon) + \frac{1}{x^2}(1 + \varepsilon') = 0$, откуда приближенно $\Delta = -\frac{1}{8x^2}$, т.-е. $\Delta < 0$ при $x = \pm\infty$, и обе ветви кривой подходят к асимптоте снизу.




Черт. 82.

Для асимптоты $Y = X - 1$, делая $\gamma = -1 + \Delta$, находим приближенно $\Delta = \frac{1}{8x^2}$, т.-е. $\Delta > 0$ при $x = \pm\infty$, и обе ветви кривой подходят к асимптоте сверху.

Обращаясь ко второму значению $\alpha$: $\alpha = -1$, вносим $t = -1 + \frac{\gamma}{x}$ в уравнение кривой и, по сокращении на $\frac{1}{x^2}$, находим: $4\gamma^2 - 4\frac{\gamma^3}{x} + \frac{1}{x^2}(\gamma^4 - \gamma^2 + 1) = 0$, откуда $4\beta^2 = 0$, $\beta = 0$, и асимптота будет $Y = -X$; полагая $\gamma = \beta + \Delta = \Delta$, имеем: $4\Delta^2(1 + \varepsilon) + \frac{1}{x^2}(1 + \varepsilon') = 0$, откуда видно, что $\Delta$ мнимое, так что асимптоту $Y = -X$ должно отбросить (черт. 82).

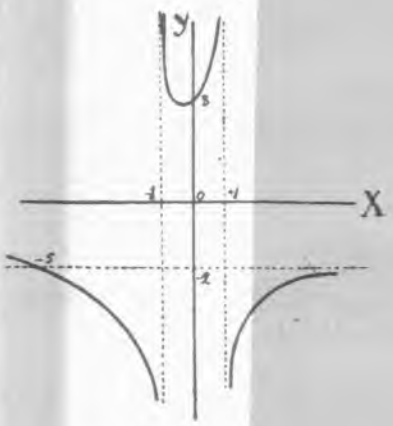
Для асимптот, параллельных $OY$, существует следующая теорема.

*Теорема* 3. Если уравнение алгебраической кривой представлено в виде: $y^m \cdot \varphi_0(x) + y^{m-1} \cdot \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_m(x) = 0$, то асимптоты параллельные оси $OY$, заключены среди решений уравнения $\varphi_0(x) = 0$, при чем надо убедиться, что

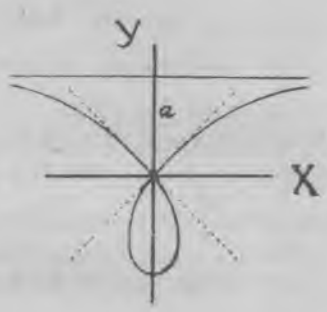
каждая разность $\Delta = x - c_j$ (где $c_j$ решение уравнения $\varphi_0(x) = 0$) стремится к нулю вместе с $\frac{1}{y}$, оставаясь вещественною. (Аналогичную теорему можно установить и для асимптот, параллельных оси $OX$.)

Вывод. Разделив уравнение на $y^m$ и положив $\frac{1}{y} = 0$, найдем уравнение $\varphi_0(x) = 0$; согласно определению 2, всякий корень его $x = c_j$ дает асимптоту $Y = c_j$, если разность $\Delta = x - c_j$ остается вещественною при убывании до 0.

*Пример 5.* $x^2y + 2x^2 - y + x + 3 = 0$. Деля на $y$, получаем: $x^2 - 1 + \frac{2x^2 + x + 3}{y} = 0$, откуда две асимптоты $X^2 - 1 = 0$, $X = \pm 1$.




Черт. 83.




Черт. 84.

Полагая $x - 1 = \Delta$, имеем $\Delta(2 + \varepsilon) + \frac{6 + \varepsilon'}{y} = 0$, откуда $\Delta$ и $y$ разных знаков; при $x + 1 = \Delta$ имеем $\Delta(-2 + \varepsilon) + \frac{4 + \varepsilon'}{y} = 0$, т.-е. $\Delta$ и $y$ одинаковых знаков. Разделяя данное уравнение на $x^2$, имеем: $y + 2 + \frac{1}{x} + \frac{3 - y}{x^2} = 0$; асимптота: $Y + 2 = 0$; при $y + 2 = \Delta$ имеем: $\Delta + \frac{1 + \varepsilon}{x} = 0$, $\Delta$ и $x$ разных знаков (черт. 83).

Асимптоты в полярных координатах определяются на основании *Теоремы 4:* если в полярном уравнении кривой $r = f(\theta)$ оказывается $r = \infty$ при $\theta = \alpha$, при чем $\underset{\theta=\alpha}{\text{пред.}}\, r \sin(\theta - \alpha) = d$, то прямая $\rho \sin(\theta - \alpha) = d$ будет асимптотою (при условии, что разность $\Delta = r \sin(\theta - \alpha) - d$, стремясь к нулю, остается вещественною).

Вывод. Если $r = \infty$ при $\theta = \alpha$, то кривая имеет асимптотическое направление $Y = \operatorname{tg}\alpha \cdot X$ и асимптоту $Y = \operatorname{tg}\alpha \cdot X + b$ или $Y\cos\alpha - X\sin\alpha = b\cos\alpha$, при чем $b = \underset{x=\infty}{\text{пред.}}\,(y - \operatorname{tg}\alpha \cdot x)$ или $b\cos\alpha = \text{пред.}\,(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$. Вводя

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $X = \rho\cos\theta$, $Y = \rho\sin\theta$, получаем асимптоту $\rho\sin(\theta - \alpha) = d$, где $d = b\cos\alpha = \underset{\theta=\alpha}{\text{пред.}}\ r\sin(\theta - \alpha)$.

*Пример 6.* $r = a \cdot \dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$. Здесь $r = \infty$ при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$; при $\theta = 0$ пред. $r\sin\theta =$ пред. $a\cos 2\theta = a$; при $\theta = \pi$ пред. $r\sin\theta =$ пред. $a\cos 2\theta = a$, так что асимптота одна: $\rho\sin\theta = a$ или $Y = a$. Разность $\Delta = r\sin\theta - a = a(\cos 2\theta - 1)$ с приближением $\theta$ к 0 со стороны положительной или отрицательной будет все время $< 0$, т.-е. кривая проходит ниже асимптоты $Y = a$ (черт. 84).

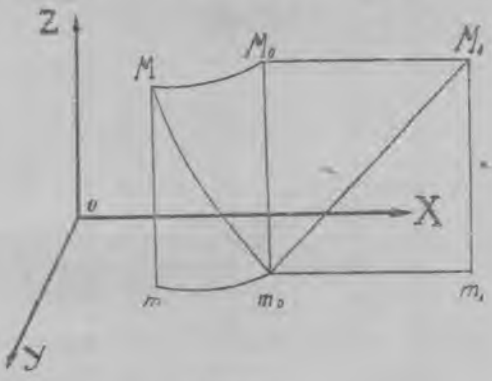
---

## ГЛАВА II.

# ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ.

### § 1. Уравнения линии в пространстве.

Линия в пространстве задается аналитически системою уравнений $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$, изображающих две поверхности, которые своим пересечением образуют эту линию, и так как одну и ту же линию можно представить как пересечение двух поверхностей на бесчисленное множество способов, то и приведенную систему можно заменить бесчисленным множеством других систем, ей равносильных, т.-е. имеющих одинаковые решения. В частности, решив предыдущие уравнения относительно $y$ и $z$, получим систему $y = F(x)$, $z = \Phi(x)$ — двух цилиндрических поверхностей, проектирующих данную линию на плоскости $xOy$ и $xOz$. Полагая $x = \varphi(t)$, получим отсюда $y = \psi(t)$, $z = \omega(t)$, так что линию в пространстве можно задать параметрическими уравнениями, выражающими $x$, $y$, $z$ как функции от одной независимой переменной $t$.




Черт. 85.

*Пример.* Возьмем прямой цилиндр с образующими $\parallel$ оси $OZ$, основанием которого служит некоторая линия $m_0m$, заданная уравнением $x = \varphi(s_1)$ $y = \psi(s_1)$, где $s_1$ означает длину дуги этой линии от начала дуг $m_0$ до точки $m(x, y)$ (черт. 85). Заметим, что функции $\varphi$ и $\psi$ не могут быть совершенно произвольны, так как $ds_1^2 = dx^2 + dy^2$, т.-е. $1 = \varphi'(s_1)^2 + \psi'(s_1)^2$.

Развернув часть боковой поверхности $m_0M_0Mm$ этого цилиндра в виде прямоугольника $m_0M_0M_1m_1$, при чем $m_0m_1 = \smile m_0m = s_1$, проведем диагональ его $m_0M_1$. Если обратно навернем развертку на цилиндр, то диагональ $m_0M$ обратится в винтовую линию $m_0M$ на поверхности этого цилиндра, при чем координаты точки $M$ будут: $x = \varphi(s_1)$, $y = \psi(s_1)$, $z = mM = m_1M_1 = m_0m_1 \cdot k = ks_1$, где $k$ означает $\operatorname{tg} m_1m_0M_1$, т.-е. величину постоянную для всех точек $M$. Итак, винтовая линия на любом прямом цилиндре задается уравнениями $x = \varphi(s_1)$, $y = \psi(s_1)$, $z = ks_1$ ($k$ постоянная), при чем $\varphi'(s_1)^2 + \psi'(s_1)^2 = 1$.

В частности, для кругового цилиндра с радиусом основания $R$ имеем: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, при чем $ds_1 = Rdt$, $s_1 = Rt$, $t = \frac{s_1}{R}$, и потому уравнения винтовой линии на круговом цилиндре будут: $x = R\cos\frac{s_1}{R}$, $y = R\sin\frac{s_1}{R}$, $z = ks_1$.

## § 2. Дифференциал дуги.

В § 2 главы I было приведено выражение дифференциала дуги плоской линии: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; для линии в пространстве дифференциал дуги будет $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, как выведено во 2-й части, отдел IV, глава I, § 3. Если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \omega(t)$, то $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \omega'(t)^2}$.

## § 3. Касательная прямая. Нормальная плоскость.

*Теорема.* Если определить касательную в точке $M$ кривой как предельное положение секущей $MM_1$, проходящей через две точки данной линии $M$, $M_1$, при условии слияния $M_1$ с $M$, а нормальную плоскость — как плоскость, проходящую через точку $M$ перпендикулярно к касательной, то уравнения касательной будут $\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}$ и косинусы углов ее с осями координат:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

где $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, а уравнение нормальной плоскости будет $(X - x)dx + (Y - y)dy + (Z - z)dz = 0$.

Вывод. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \omega(t)$ и если точкам $M$ и $M_1$ отвечают значения параметра $t$ и $t + \Delta t$, то уравнения секущей $MM_1$ можно представить в виде $\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}$, где $\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ и проч.

В пределе, при $\Delta t = 0$, получаются уравнения касательной

$$\frac{X-x}{x'_t} = \frac{Y-y}{y'_t} = \frac{Z-z}{z'_t}, \text{ или } \frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz},$$

откуда и следуют формулы для $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Нормальная плоскость в точке $M$ имеет уравнение $l(X - x) + m(Y - y) + n(Z - z) = 0$, где $l$, $m$, $n$, из условия перпендикулярности с касательною, определяются уравнениями $\frac{l}{dx} = \frac{m}{dy} = \frac{n}{dz} = h$; вводя в предыдущее уравнение $l = h \cdot dx$, $m = h \cdot dy$, $n = h \cdot dz$ и сокращая на $h$, получим уравнение нормальной плоскости $(X - x)dx + (Y - y)dy + (Z - z)dz = 0$.

*Замечание 1.* Если линия задана системою уравнений $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$, то, дифференцируя эти уравнения, находим: $f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy + f'_z \cdot dz = 0$, $\varphi'_x \cdot dx + \varphi'_y\, dy + \varphi'_z \cdot dz = 0$. Заменяя здесь $dx$, $dy$, $dz$ про-

порциональными им разностями $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ из уравнений касательной, заключаем, что касательная прямая в точке $(x, y, z)$ будет в этом случае определяться системою: $(X-x)f'_x+(Y-y)f'_y+(Z-z)f'_z=0$, $(X-x)\varphi'_x+(Y-y)\varphi'_y+(Z-z)\varphi'_z=0$.

*Замечание 2.* Расстояние точки $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ данной кривой до нормальной плоскости в точке $M(x, y, z)$, имеющей уравнение $(X-x)\cos\alpha+(Y-y)\cos\beta+(Z-z)\cos\gamma=0$, будет $\delta=\Delta x\cdot\cos\alpha+\Delta y\cdot\cos\beta+\Delta z\cdot\cos\gamma$. Заменяя $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ разложениями их в ряд Тэйлора по степеням $\Delta s$: $\Delta x=\frac{dx}{ds}\cdot\Delta s+\frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\Delta s^2+\frac{1}{6}\frac{d^3x}{ds^3}\cdot\Delta s^3+\ldots$ и пр., получим: $\delta=\Delta s-\frac{1}{6}\Delta s^3\cdot K+\ldots$, где $K=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2$, ибо коэффициент при $\Delta s$ равен $\cos\alpha\frac{dx}{ds}+\cos\beta\frac{dy}{ds}+\cos\gamma\frac{dz}{ds}=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$, коэффициент при $\Delta s^2$ равен $\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}=0$ (как результат дифференцирования предыдущего тождества), коэффициент при $\Delta s^3$ равен $\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^3x}{ds^3}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^3y}{ds^3}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^3z}{ds^3}=-K$ (как результат дифференцирования предыдущего тождества). Отсюда видно, что $\delta$ всегда 1-го порядка малости относительно $\Delta s$ и меняет знак вместе с $\Delta s$, т.-е. кривая всегда пересекает нормальную плоскость.

## § 4. Плоскость кривизны. Бинормаль.

*Теорема.* Если определить плоскость кривизны (или: соприкасающуюся плоскость) в точке $M$ данной кривой как предельное положение плоскости, проведенной через касательную $MT$ и через бесконечно-близкую точку $M_1$ кривой, а бинормаль $MB$ — как прямую, проведенную через точку $M\perp$ к плоскости кривизны, то уравнение плоскости кривизны будет $A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$, уравнения бинормали: $\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C}$ и косинусы углов ее с осями координат: $\cos\lambda=\frac{A}{D}$, $\cos\mu=\frac{B}{D}$, $\cos\nu=\frac{C}{D}$, где $D=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, $A=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$, $B=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}$, $C=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$ ($t$ — независимая переменная, через которую выражаются координаты точек кривой).

Вывод. Коэффициенты $A, B, C$ плоскости кривизны, проходящей через точку $(x, y, z)$, должны удовлетворять условию параллельности с касательною $\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}$, что дает (1) $A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0$.

Условие прохождения плоскости $A(X-x)+\ldots=0$, через точку $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ дает: $A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z=0$. Заменяя здесь $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ их разложениями по степеням $\Delta t$: $\Delta x=\frac{dx}{dt}\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\Delta t^2+$

$+\frac{1}{6}\frac{d^3x}{dt^3}\cdot\Delta t^3+\ldots$, получаем на основании (1): $\frac{1}{2}\Delta t^2\left(A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+\right.$ $\left.+C\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\frac{1}{6}\Delta t^3\left(A\frac{d^3x}{dt^3}+B\frac{d^3y}{dt^3}+C\frac{d^3z}{dt^3}\right)+\ldots=0$; сокращая на $\frac{1}{2}\Delta t^2$ и затем переходя к пределу при $\Delta t=0$, получим условие (2):

$$A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Из условий (1) и (2) следуют те выражения $A$, $B$, $C$, которые приведены в теореме. В уравнениях бинормали

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n}$$

коэффициенты $l$, $m$, $n$ определяются условиями перпендикулярности с плоскостью кривизны: $\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}$, откуда и можно $l$, $m$, $n$ заменить пропорциональными им числами $A$, $B$, $C$.

*Замечание.* Расстояние точки кривой $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ от плоскости кривизны в точке $M$ будет $\delta=\frac{1}{D}\cdot\left\{A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z\right\}=$ $=\frac{1}{6}\Delta t^3\cdot\frac{1}{D}\left(A\frac{d^3x}{dt^3}+B\frac{d^3y}{dt^3}+C\frac{d^3z}{dt^3}\right)+\ldots$, т.-е. 3-го порядка малости относительно $\Delta t$ (или относительно $\Delta s=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\Delta t$), и $\delta$ меняет знак с $\Delta s$, т.-е. вообще кривая пересекает свою плоскость кривизны (если коэффициент при $\Delta t^3$ не нуль). Отсюда видно еще, что из всех плоскостей, проходящих через точку $M(x,\ y,\ z)$: $a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0$, плоскость кривизны ближе всех подходит к бесконечно-близким к $M$ точкам кривой $M_1$, ибо расстояние $\delta$ от плоскости $a(X-x)+\ldots=0$ до точки $M_1$ будет $\delta=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left\{\Delta t\left(a\frac{dx}{dt}+b\frac{dy}{dt}+c\frac{dz}{dt}\right)+\frac{1}{2}\Delta t^2\left(a\frac{d^2x}{dt^2}+\right.\right.$ $\left.\left.+b\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\ldots\right\}$, и чтобы сделать порядок малости $\delta$ возможно высоким, следует приравнять нулю коэффициенты при $\Delta t$ и при $\Delta t^2$, что и приведет к плоскости кривизны.

## § 5. Главная нормаль и спрямляющая плоскость.

*Теорема.* Если назвать главною нормалью линию пересечения плоскости кривизны и нормальной плоскости, а спрямляющею плоскостью — ту, которая проходит через точку кривой $\perp$ к главной нормали, то уравнение главной нормали можно представить в виде $\frac{X-x}{\cos\xi}=\frac{Y-y}{\cos\eta}=\frac{Z-z}{\cos\zeta}$, а уравнение спрямляющей плоскости в виде: $(X-x)\cos\xi+(Y-y)\cos\eta+$ $+(Z-z)\cos\zeta=0$, где косинусы углов главной нормали с осями имеют одно из трех выражений:

$$\cos\xi=\frac{M}{Q}=\frac{d\cos\alpha}{d\sigma}=\frac{d\cos\lambda}{d\tau},\quad \cos\eta=\frac{N}{Q}=\frac{d\cos\beta}{d\sigma}=\frac{d\cos\mu}{d\tau},$$

$$\cos\zeta=\frac{P}{Q}=\frac{d\cos\gamma}{d\sigma}=\frac{d\cos\nu}{d\tau},\ \text{где}\ M=B\frac{dz}{dt}-C\frac{dy}{dt},$$

$$N = C\frac{dx}{dt} - A\frac{dz}{dt},\ P = A\frac{dy}{dt} - B\frac{dx}{dt},\ Q = \sqrt{M^2 + N^2 + P^2},$$

$$d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2},\ d\tau = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}.$$

Вывод. Согласно определению, главная нормаль определяется системою уравнений: плоскости кривизны $A\cdot(X-x) + B\cdot(Y-y) + C\cdot(Z-z) = 0$ и нормальной плоскости $\frac{dx}{dt}\cdot\left(X-x\right) + \frac{dy}{dt}\cdot\left(Y-y\right) + \frac{dz}{dt}\cdot\left(Z-z\right) = 0$; решая эту систему относительно $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, получаем: $\frac{X-x}{M} = \frac{Y-y}{N} = \frac{Z-z}{P}$, или $\frac{X-x}{\cos\xi} = \frac{Y-y}{\cos\eta} = \frac{Z-z}{\cos\zeta}$, где $\cos\xi = \frac{M}{Q}$ и проч. Для вывода выражений: $\cos\xi = \frac{d\cos\alpha}{dt}$ и проч., преобразуем выражение $M$ (см. § 4, значения $A$, $B$, $C$): $M = B\frac{dz}{dt} - C\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right)\cdot\frac{dz}{dt} - \left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right)\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\left\{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \underline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\right\} - \frac{dx}{dt}\left\{\underline{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right\}$ (подчеркнутые члены, введенные для симметричности, взаимно сокращаются); но $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ (по § 2) и после дифференцирования: $\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$, следовательно $M = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\cdot\frac{d(\cos\alpha)}{dt}$.

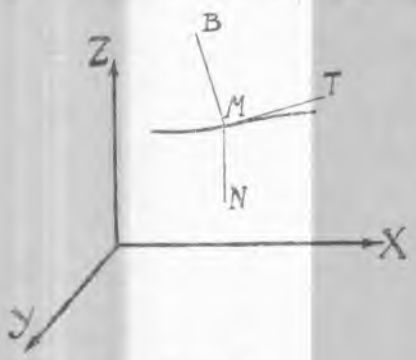
Круговой перестановкой букв $x$, $y$, $z$ отсюда находим:

$$N = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\cdot\frac{d(\cos\beta)}{dt},\quad P = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\cdot\frac{d(\cos\gamma)}{dt},\ \text{следовательно}\ \cos\xi = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma},$$

$\cos\eta = \frac{d\cos\beta}{d\sigma}$, $\cos\zeta = \frac{d\cos\gamma}{d\sigma}$, где $d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}$ означает, согласно § 2, дифференциал дуги кривой, у которой координаты любой точки определяются уравнениями: $x_1 = \cos\alpha$, $y_1 = \cos\beta$, $z_1 = \cos\gamma$. Для вывода выражений $\cos\xi = \frac{d\cos\lambda}{d\tau}$ и проч. возьмем два тождества: $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$, $\cos\alpha\cdot\cos\lambda + \cos\beta\cdot\cos\mu + \cos\gamma\cdot\cos\nu = 0$ [первое очевидно из выражений $\cos\lambda$ и пр., данных в § 3, второе выражает условие $A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds} + C\frac{dz}{ds} = 0$, приведенное в § 4 под (1)] и продифференцируем их: $\cos\lambda\cdot d\cos\lambda + \cos\mu\cdot d\cos\mu + \cos\nu\ d\cos\nu = 0$ (1), $(\cos\alpha\cdot d\cos\lambda + \cos\beta\cdot d\cos\mu + \cos\gamma\cdot d\cos\nu) + (\cos\lambda\cdot d\cos\alpha + \cos\mu\cdot d\cos\beta + \cos\nu\cdot d\cos\gamma) = 0$ (2); но в силу доказанных формул $\cos\xi = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma}$ и пр., последняя скобка обращается в $d\sigma(\cos\lambda\cdot\cos\xi + \cos\mu\cdot\cos\eta + \cos\nu\cdot\cos\zeta) = 0$ (в силу перпендикулярности главной нормали и бинормали, ибо бинормаль $\perp$ к плоскости кривизны, а следовательно и к лежащей в этой плоскости главной нормали); теперь

уравнение (2) обращается в $\cos\alpha \cdot d\cos\lambda + \cos\beta \cdot d\cos\mu + \cos\gamma \cdot d\cos\nu = 0$ (3). Переписывая (1) и (3) в форме: $A \cdot d\cos\lambda + B \cdot d\cos\mu + C \cdot d\cos\nu = 0$, $dx \cdot d\cos\lambda + dy \cdot d\cos\mu + dz \cdot d\cos\nu = 0$, находим $\frac{d\cos\lambda}{M} = \frac{d\cos\mu}{N} = \frac{d\cos\nu}{P} = \frac{d\tau}{Q}$, откуда $\cos\xi = \frac{d\cos\lambda}{d\tau}$ и проч. ($d\tau$ означает дифференциал дуги кривой, определяемой уравнениями: $x_2 = \cos\lambda$, $y_2 = \cos\mu$, $z_2 = \cos\nu$). Уравнение спрямляющей плоскости выводится из уравнений главной нормали на основании условий перпендикулярности.

*Замечание 1.* Касательная $MT$, будучи $\perp$ к нормальной плоскости, $\perp$ к прямым: $MB$ (бинормали) и $MN$ (главной нормали), лежащим в нормальной плоскости. Бинормаль $MB$, будучи $\perp$ к плоскости кривизны, $\perp$ к касательной $MT$ и главной нормали $MN$, лежащим в плоскости кривизны. Таким образом в каждой точке кривой прямые $MT$, $MN$, $MB$ образуют систему трех взаимно-перпендикулярных прямых: плоскость $MNB$ есть нормальная плоскость, $MTN$ — плоскость кривизны, $MTB$ — спрямляющая плоскость (черт. 86).



Черт. 86.

Вследствие такой перпендикулярности 9 косинусов $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ связаны шестью зависимостями: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, $\cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta = 1$, $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$, $\cos\alpha\cos\xi + \cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\zeta = \cos(T, N) = 0$, $\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = \cos(T, B) = 0$, $\cos\xi\cos\lambda + \cos\eta\cos\mu + \cos\zeta\cos\nu = \cos(N, B) = 0$, так что из этих 9 косинусов независимых величин только 3. Можно рассматривать $MT$, $MN$, $MB$ как три оси прямоугольной системы, а $OX$, $OY$, $OZ$ как три взаимно-перпендикулярные направления; тогда получаются 6 соотношений иной формы: $\cos^2\alpha + \cos^2\xi + \cos^2\lambda = 1$, $\cos^2\beta + \cos^2\eta + \cos^2\mu = 1$, $\cos^2\gamma + \cos^2\zeta + \cos^2\nu = 1$, $\cos\alpha\cos\beta + \cos\xi\cos\eta + \cos\lambda\cos\mu = \cos(X, Y) = 0$, $\cos\alpha\cos\gamma + \cos\xi\cos\zeta + \cos\lambda\cos\nu = \cos(X, Z) = 0$, $\cos\beta\cos\gamma + \cos\eta\cos\zeta + \cos\mu\cos\nu = \cos(Y, Z) = 0$.

Из 4-го и 6-го уравнений первой группы находим:

$$\frac{\cos\xi}{\cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu} = \frac{\cos\eta}{\cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu} = \frac{\cos\zeta}{\cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda} = k,$$

при чем $k^2 = 1$ (сумма квадратов числителей $= 1$, сумма квадратов знаменателей, на основании тождества Эйлера, приводится к $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \cdot (\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu) - (\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu)^2 = 1 \cdot 1 - 0^2 = 1$), откуда $k = \pm 1$. Если прямые $MT$, $MN$, $MB$ расположены как оси $OX$, $OY$, $OZ$, то, совместив прямой трегранный угол $TNB$ с $XYZ$, получим $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\xi = \frac{\pi}{2}$, $\eta = 0$, $\zeta = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = \frac{\pi}{2}$, $\mu = \frac{\pi}{2}$, $\nu = 0$, и выйдет $k = \frac{\cos\eta}{\cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu} = \frac{1}{-1} = -1$, так что $\cos\xi = \cos\mu\cos\gamma - \cos\nu\cos\beta$, $\cos\eta = \cos\nu\cos\alpha - \cos\lambda\cos\gamma$, $\cos\zeta = \cos\lambda\cos\beta - \cos\mu\cos\alpha$.

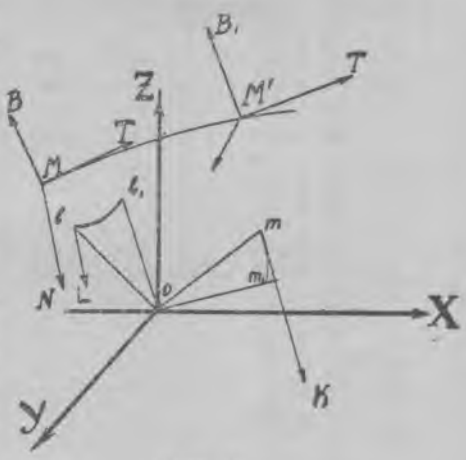
*Замечание 2.* Расстояние спрямляющей плоскости $(X-x)\cos\xi+\ldots=0$, от точки $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ кривой, бесконечно-близкой к точке $M$, будет

$$\delta=\Delta x\cdot\cos\xi+\Delta y\cdot\cos\eta+\Delta z\cdot\cos\zeta=\Delta s\cdot\left\{\frac{dx}{ds}\cdot\cos\xi+\frac{dy}{ds}\cdot\cos\eta+\frac{dz}{ds}\cdot\cos\zeta\right\}+$$

$$\frac{1}{2}\Delta s^2\cdot\left\{\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\cos\xi+\frac{d^2y}{ds^2}\cdot\cos\eta+\frac{d^2z}{ds^2}\cdot\cos\zeta\right\}+\ldots=$$

$$\frac{1}{2}\Delta s^2\cdot\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}+\ldots,$$

так как коэффициент при $\Delta s=0$ в силу перпендикулярности $T$ и $N$, а коэффициент при $\Delta s^2$, на основании формул $\cos\xi=\frac{d\cos\alpha}{d\sigma}=\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}$ и пр., приводится к $\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\ldots}$. Отсюда видно, что $\delta$ второго порядка малости относительно $\Delta s$, так что вообще точки кривой, бесконечно-близкие к $M$, лежат по одну сторону от спрямляющей плоскости. Если кривая плоская, то плоскость кривизны совпадает с плоскостью кривой, а главная нормаль обращается в нормаль кривой.



Черт. 87.

## § 6. Первая и вторая кривизна (гнутие и кручение).

*Определение.* Первая кривизна, как и у плоских кривых, определяет быстроту поворота касательной при перемещении точки по кривой, а вторая кривизна определяет быстроту поворота плоскости кривизны или бинормали (линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями кривизны в точках $M$ и $M_1$, равен, вследствие перпендикулярности сторон, углу между бинормалями в этих точках). Именно, называя через $\Delta s$ длину дуги $MM_1$ данной кривой, через $\varepsilon$ — угол между касательными $MT$, $M_1T_1$ (черт. 87) и через $\omega$ — угол между бинормалями $MB$ и $M_1B_1$, отношения $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ и $\frac{\omega}{\Delta s}$ будем называть среднею 1-ю и среднею 2-ю кривизною данной кривой на участке $MM_1$, а пред. $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ и пред. $\frac{\omega}{\Delta s}$ при $\Delta s=0$ — 1-ю и 2-ю кривизною (гнутием и кручением) кривой в точке $M$. Обратные величины $R_1=$ пред. $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$ и $R_2=$ пред. $\frac{\Delta s}{\omega}$ называются радиусами 1-й и 2-й кривизны.

*Теорема.* Радиусы 1-й и 2-й кривизны имеют следующие выражения:

$$R_1 = \frac{ds}{d\sigma}, \quad R_2 = \frac{ds}{d\tau},$$

где

$d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}$, $d\tau = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}$ ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы касательной, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ — углы бинормали с осями координат) или:

$$R_1 = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad R_2 = -\frac{A^2 + B^2 + C^2}{A\frac{d^3x}{dt^3} + B\frac{d^3y}{dt^3} + C\frac{d^3z}{dt^3}}$$

(относительно $A$, $B$, $C$ см. § 4).

Вывод. Опишем около начала сферу радиусом $= 1$ и проведем через начало прямые, параллельные всем касательным данной кривой в точках участка $MM_1$; эти прямые в пересечении со сферою определяют кривую $mm_1$, которую назовем годографом касательных. Так как длина отрезка $Om$ равна 1, а углы его с осями координат суть $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, то точка $m$ имеет координаты: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, а точка $m_1$ — координаты $\cos\alpha + \Delta\cos\alpha$, $\cos\beta + \Delta\cos\beta$, $\cos\gamma + \Delta\cos\gamma$, где $\Delta\cos\alpha$, $\Delta\cos\beta$, $\Delta\cos\gamma$ суть приращения функций от $t$: $\cos\alpha = \frac{x'_t}{\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}}$ и проч., отвечающие приращению $\Delta t$ независимой переменной $t$ при переходе от точки $M$ к точке $M_1$.

Отсюда длина хорды $|mm_1| = \sqrt{(\Delta\cos\alpha)^2 + (\Delta\cos\beta)^2 + \Delta\cos\gamma)^2}$; с другой стороны, из равнобедренного $\triangle mOm_1$, со сторонами $Om = Om_1 = 1$ и с углом $mOm_1 = \varepsilon$, следует: $|mm_1| = 2\sin\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому выражение $R_1$ можно представить в виде:

$$R_1 = \underset{\Delta t = 0}{\text{пред.}} \frac{\Delta s}{\varepsilon} = \underset{\Delta t = 0}{\text{пред.}} \left[\frac{\Delta s}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\varepsilon}\right] = \text{пред.} \frac{\Delta s}{|mm_1|} \cdot \underset{\varepsilon = 0}{\text{пред.}} \left[\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}\right];$$

так как второй предел равен 1, то $R_1 = \text{пред.} \frac{\Delta s}{|mm_1|} = \text{пред.} \frac{\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)}{\left(\frac{mm_1}{\Delta t}\right)} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\sigma}{dt}} = \frac{ds}{d\sigma}$. Таким же рассуждением, построив годограф бинормалей $bb_1$, где точка $b$ имеет координаты $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, найдем: $R_2 = \frac{ds}{d\tau}$. Добавим, что $d\sigma$ и $d\tau$ суть дифференциалы дуги годографа касательных и бинормалей.

*Замечание 1.* Касательная $mK$ к годографу касательных в точке $m$ и касательная $bL$ к годографу бинормалей в точке $b$ обе параллельны главной нормали $MN$ данной кривой в точке $M$, так как косинусы углов означенных касательных с осями координат будут (по § 3) $\cos\alpha' = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma}$, $\cos\beta' = \frac{d\cos\beta}{d\sigma}$, $\cos\gamma' = \frac{d\cos\gamma}{d\sigma}$ и $\cos\alpha'' = \frac{d\cos\lambda}{d\tau}$, $\cos\beta'' = \frac{d\cos\mu}{d\tau}$,

$\cos\gamma'' = \frac{d\cos\nu}{d\tau}$, но таковы же выражения (см. § 5) $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ — косинусов углов главной нормали $MN$ с осями координат, откуда и следует параллельность.

*Замечание 2.* Косинусы углов главной нормали $MN$ с осями выражаются через $R_1$ и $R_2$ формулами: $\cos\xi = R_1 \cdot \frac{d\cos\alpha}{ds} = R_2 \cdot \frac{d\cos\lambda}{ds}$ и проч.

*Замечание 3.* Первая кривизна тождественно равна нулю только для прямой, а вторая — для всякой плоской кривой. Действительно, $\frac{1}{R_1} = 0$, если $d\sigma = 0$, т.-е. если $d\cos\alpha = 0$, $d\cos\beta = 0$, $d\cos\gamma = 0$, откуда $\cos\alpha = l$, $\cos\beta = m$, $\cos\gamma = n$ ($l, m, n$ — постоянные) или, на основании § 3, $dx - lds = 0$, $dy - mds = 0$, $dz - nds = 0$, что дает $x - ls = x_0$, $y - ms = y_0$, $z - ns = z_0$ ($x_0$, $y_0$, $z_0$ — постоянные) или $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = s$, а это и есть уравнение прямой. Пусть теперь $\frac{1}{R_2} = 0$; тогда $d\tau = 0$ или $d\cos\lambda = 0$, $d\cos\mu = 0$, $d\cos\nu = 0$, откуда $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ — постоянные; поэтому тождество $\cos\alpha \cdot \cos\lambda + \cos\beta \cdot \cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\nu = 0$ можно представить в виде: $d(x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu) = 0$, откуда $x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = D$ (постоянное), т.-е. все точки кривой лежат в одной плоскости.

В силу этого кривые неплоские называют также кривыми двоякой кривизны.

Обращаясь к выводу выражения $R_1$ через $A$, $B$, $C$, возьмем формулы § 5: $B\frac{dz}{dt} - C\frac{dy}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \cdot \frac{d\cos\alpha}{dt}$ и проч., возвысим их в квадрат и сложим; найдем: $\left(\frac{ds}{dt}\right)^6 \cdot \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \left(B\frac{dz}{dt} - C\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(C\frac{dx}{dt} - A\frac{dz}{dt}\right)^2 +$

$$+\left(A\frac{dy}{dt} - B\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(A^2 + B^2 + C^2\right)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] -$$

$$-\left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(A^2 + B^2 + C^2\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \text{ так как}$$

$$A\frac{dx}{dt} + + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} = 0$$

по § 4 (1). Итак,

$$R_1^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 : \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^6 : \left(A^2 + B^2 + C^2\right), \text{ откуда } R_1 = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Для вывода выражения $R_2$ дифференцируем тождество: $\cos^2\alpha + \cos^2\xi + \cos^2\lambda = 1$, что дает: $\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\xi\, d\cos\xi + \cos\lambda\, d\cos\lambda = 0$, откуда $d\cos\xi = -\cos\alpha \cdot \frac{d\cos\alpha}{\cos\xi} - \cos\lambda \cdot \frac{d\cos\lambda}{\cos\xi} = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau$ на основании выражений § 5: $\cos\xi = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma} = \frac{d\cos\lambda}{d\tau}$; присоединяя к полученному тождеству два другие: $d\cos\eta = -\cos\beta\, d\sigma - \cos\mu\, d\tau$, $d\cos\zeta = -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau$, умножим их на $A$, $B$, $C$ и сложим, что даст: $A d\cos\xi + B d\cos\eta + C d\cos\zeta = -(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)\, d\sigma - (A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu) d\tau = -\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d\tau$, ибо $A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$ в силу перпендикуляр-

ности бинормали и касательной, $A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$ по § 4. Далее, из формулы $\cos\xi = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma} = \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{d\sigma} = \frac{ds\cdot d^2x - dx\cdot d^2s}{ds^2\cdot d\sigma}$ находим:

$$\cos\xi\cdot ds^2\,d\sigma = ds\cdot d^2x - dx\,d^2s$$

и после дифференцирования:

$$ds^2\cdot d\sigma\cdot d\cos\xi + \cos\xi\cdot d(ds^2\,d\sigma) = ds\cdot d^3x - dx\cdot d^3s;$$

выписывая два аналогичные тождества

$$ds^2\cdot d\sigma\cdot d\cos\eta + \cos\eta\cdot d(ds^2 d\sigma) = ds\cdot d^3y - dy\,d^3s,$$
$$ds^2\cdot d\sigma\cdot d\cos\zeta + \cos\zeta\cdot d(ds^2\,d\sigma) = ds\,d^3z - dz d^3s$$

и умножив их на $A$, $B$, $C$, сложим, что даст:

$$ds^2\cdot d\sigma\cdot(A\,d\cos\xi + B\,d\cos\eta + C\,d\cos\zeta) + d(ds^2\,d\sigma)\cdot(A\cos\xi + B\cos\eta + C\cos\zeta) =$$
$$= ds(Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z) - d^3s(A\,dx + B\,dy + C\,dz),$$

но $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\cdot\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$ (как показано выше, при выводе $R_1$),

$$A\,d\cos\xi + \ldots = -d\tau\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}, \quad A\cos\xi + \ldots = 0$$

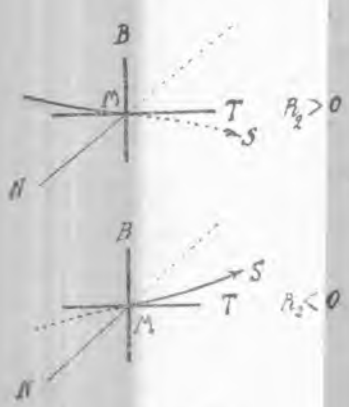
в силу перпендикулярности бинормали и главной нормали, $Adx + \ldots = 0$ в силу перпендикулярности бинормали и касательной. Итак (по разделении на $dt^3$):

$$-d\tau(A^2+B^2+C^2) = ds\left(A\frac{d^3x}{dt^3} + B\frac{d^3y}{dt^3} + C\frac{d^3z}{dt^3}\right),$$

откуда

$$R_2 = \frac{ds}{d\tau} = -\frac{A^2+B^2+C^2}{A\frac{d^3x}{dt^3} + B\frac{d^3y}{dt^3} + C\frac{d^3z}{dt^3}},$$

что и требовалось доказать.




Черт. 88.

*Замечание 4.* Знак $R_2$ противоположен знаку знаменателя $A\frac{d^3x}{dt^3} + \ldots$, а по Замечанию § 4 знак $\delta$ расстояния от точки $M_1$ $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ кривой до плоскости кривизны в точке $M$ одинаков со знаком $\Delta t\left(A\frac{d^3x}{ds^3} + \ldots\right)$; беря $t = s$ (длина дуги), заключаем, что при $R_2 > 0$ знак $\delta$ обратен знаку $\Delta s$, а при $R_2 < 0$ знак $\delta$ одинаков со знаком $\Delta s$, что дает определенное расположение кривой относительно плоскости кривизны (черт. 88).

*Замечание 5.* Необходимое и достаточное условие того, чтобы кривая была плоская, выражается равенством $\frac{1}{R_2} = 0$, или $A\frac{d^3x}{dt^3} + B\frac{d^3y}{dt^3} + C\frac{d^3z}{dt^3} = 0$; принимая во внимание уравнения (1)

и (2) § 4, которому удовлетворяют $A$ и $B$, можем последнее условие переписать в виде:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0.$$

## § 7. Примеры.

*Пример 1.* Вычислить косинусы углов касательной, бинормали и главной нормали, а также радиусы 1-й и 2-й кривизны для кривой: $x^2 - y^2 + 2z^2 = 2$, $x^2 - 3y + 5z = 3$ в точке (1, 1, 1).

В отд. II, гл. III, § 6, пример 3 были вычислены в этой точке 6 производных: $y' = -1$, $z' = -1$, $y'' = -6$, $z'' = -4$, $y''' = -30$, $z''' = -18$ (считая за независимую переменную $x$).

Отсюда находим (см. § 3)

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

Далее, так как при независимой переменной $x$ оказывается $x' = 1, x'' = 0, x''' = 0$, то по § 4 имеем:

$$A = y'z'' - z'y'' = -2, \quad B = z'x'' - x'z'' = 4, \quad C = x'y'' - y'x'' = -6,$$

$$\cos\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{-2}{\sqrt{56}} = \frac{-1}{\sqrt{14}}, \qquad \cos\mu = \frac{2}{\sqrt{14}}, \qquad \cos\nu = \frac{-3}{\sqrt{14}}.$$

Теперь, по формуле § 5 Замеч. 1, вычисляем:

$$\cos\xi = \cos\mu\cos\gamma - \cos\nu\cos\beta = -\frac{5}{\sqrt{42}}, \quad \cos\eta = -\frac{4}{\sqrt{42}}, \quad \cos\zeta = -\frac{1}{\sqrt{42}}.$$

Легко проверить, что найденные 9 косинусов удовлетворяют 6 зависимостям первой или второй группы, указанным в Замеч. 1, § 5. Наконец, находим

$$R_1 = \frac{(\sqrt{1 + y'^2 + z'^2})^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{14}} \text{ (см. § 6)}$$

$$\text{и } R_2 = -\frac{A^2 + B^2 + C^2}{A\dfrac{d^3x}{dt^3} + B\dfrac{d^3y}{dt^3} + C\dfrac{d^3z}{dt^3}} = -\frac{A^2 + B^2 + C^2}{By''' + Cz'''} = \frac{56}{12} = \frac{14}{3}.$$

*Пример 2.* Показать, что для винтовой линии (см. § 1): $x = \varphi(s_1)$, $y = \psi(s_1)$, $z = k \cdot s_1$, где $k = \operatorname{tg}\omega$ ($\omega$ угол наклона диагонали в развертке к основанию) и $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$, выполнены следующие 4 свойства: 1) касательная составляет постоянный угол $\frac{\pi}{2} - \omega$ с осью цилиндра, 2) бинормаль также составляет постоянный угол $\omega$ с осью цилиндра, 3) главная нормаль $\perp$ к оси цилиндра, 4) отношение $\frac{R_1}{R_2}$ постоянно и равно $\operatorname{tg}\omega$.

Имеем: $x' = \varphi'$, $x'' = \varphi''$, $y' = \psi'$, $y'' = \psi''$, $z' = k$, $z'' = 0$. Дифференцируя тождество: $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$, имеем: $\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0$; присоединяя сюда

равенство $-\psi'\varphi''+\varphi'\psi''=C$, находим: $\varphi''=-C\psi'$, $\psi''=C\varphi'$, откуда $\sqrt{\varphi''^2+\psi''^2}=C$. Так как $ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,ds_1=\frac{1}{\cos\omega}\cdot ds_1$, то

$\cos\alpha=\varphi'\cdot\cos\omega$, $\cos\beta=\psi'\cdot\cos\omega$, $\cos\gamma=\sin\omega$ и $\gamma=\frac{\pi}{2}-\omega$ (свойство 1).

Так как $A=-\operatorname{tg}\omega\cdot\psi''$, $B=\operatorname{tg}\omega\cdot\varphi''$, $C=\varphi'\psi''-\psi'\varphi''=\sqrt{\varphi''^2+\psi''^2}$, то $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=C\cdot\sec\omega$, $\cos\lambda=-\sin\omega\cdot\frac{\psi''}{C}=-\sin\omega\cdot\varphi'$, $\cos\mu=\sin\omega\cdot\frac{\varphi''}{C}=$ $=-\sin\omega\cdot\psi'$, $\cos\nu=\cos\omega$ и $\nu=\omega$ (свойство 2).

Из формул $\cos\xi=\cos\mu\cos\gamma-\cos\nu\cos\beta$ и проч. следует: $\cos\xi=-\psi'$, $\cos\eta=\varphi'$, $\cos\zeta=0$ и $\zeta=\frac{\pi}{2}$ (свойство 3).

Отношение $R_1:R_2=\frac{d\tau}{d\sigma}$, но $d\cos\alpha=\varphi''\cos\omega\,ds_1$, $d\cos\beta=\psi''\cos\omega\,ds_1$, $d\cos\gamma=0$, следовательно $d\sigma=\cos\omega\sqrt{\varphi''^2+\psi''^2}\,ds_1$; $d\cos\lambda=-\sin\omega\cdot\varphi''ds_1$, $d\cos\mu=-\sin\omega\cdot\psi''ds_1$, $d\cos\nu=0$, следовательно $d\tau=\sin\omega\cdot\sqrt{\varphi''^2+\psi''^2}\cdot ds_1$, откуда $R_1:R_2=\operatorname{tg}\omega$.

Можно доказать и обратную теорему, т.-е., что кривая, обладающая одним из 4 вышеупомянутых свойств, есть винтовая линия.

*Пример 3.* Показать, что кривая $x=\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2$, $y=-\frac{4}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2$, $z=\frac{1}{3}t^3+t^2$ есть плоская, и найти уравнение плоскости, ее содержащей.

Применяя признак, данный в конце § 6, вычисляем: $A=9t^2$, $B=3t^2$, $C=-6t^2$, $x'''=4$, $y'''=-8$, $z'''=2$ и находим тождество $Ax'''+By'''+$ $+Cz'''=0$ во всех точках $t$. Для точки $t=1$ определяем плоскость кривизны $3\overline{X}+\overline{Y}-2\overline{Z}=0$; она должна быть и плоскостью данной кривой, что и проверяется, ибо $3x+y-2z=0$ тождественно.

*Пример 4.* Найти общее место главных нормалей и общее место касательных к винтовой линии на круговом цилиндре: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=kt$.

Здесь $ds=\sqrt{a^2+k^2}\,dt$, $\cos\alpha=-\frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}\sin t$, $\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}\cos t$, $\cos\gamma=\frac{k}{\sqrt{a^2+k^2}}$, $d\cos\alpha=-\frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}\cos t\,dt$, $d\cos\beta=-\frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}\sin t\,dt$, $d\cos\gamma=0$, $d\sigma=\frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}\,dt$, следовательно, $\cos\xi=-\cos t$, $\cos\eta=-\sin t$, $\cos\zeta=0$. Уравнение главной нормали будет: $\frac{X-a\cos t}{-\cos t}=\frac{Y-a\sin t}{-\sin t}=$ $=\frac{Z-kt}{0}$, откуда $\overline{X}\sin t=Y\cos t$, $t=\operatorname{arctg}\frac{Y}{X}$ и $t=\frac{Z}{k}$, так что общее место главных нормалей представит поверхность $Z=k\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}$ (косой геликоид). Уравнение касательной будет $\frac{X-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{Y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{Z-kt}{k}$,

откуда $X\cos t + Y\sin t = a$ и $(X - a\cos t)^2 + (Y - a\sin t)^2 = \frac{a^2}{k^2}(Z - kt)^2$ или $X^2 + Y^2 - a^2 = \frac{a^2}{k^2}(Z - kt)^2$, что дает: $t = \frac{Z}{k} - \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 - a^2}}{a}$.

Итак уравнение общего места касательных (развертывающийся геликоид) будет $X\cos t + Y\sin t = a$, где $t = \frac{Z}{k} - \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 - a^2}}{a}$.

---

Глава III.

## Поверхности.

### § 1. Уравнение поверхности.

Поверхность задается уравнением $f(x, y, z) = 0$, где одна из переменных $z$ есть функция двух остальных $x$ и $y$; полагая $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ (при чем предполагается возможным выразить отсюда $u$ и $v$ через $x$ и $y$), получим из уравнения поверхности $z = \omega(u, v)$; таким образом поверхность можно задать системою $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \omega(u, v)$, где $u$ и $v$—независимые переменные. Положив $u = u_0$ мы найдем на данной поверхности линию $x = \varphi(u_0, v)$, $y = \psi(u_0, v)$, $z = \omega(u_0, v)$, а положив $v = v_0$, найдем на поверхности другую линию: $x = \varphi(u, v_0)$ и пр.

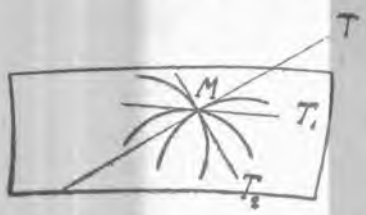
Такие две системы линий называются координатными линиями поверхности. Касательные к линиям $u = u_0$ и $v = v_0$ в точке $M(x, y, z)$ будут соответственно $\frac{X-x}{\varphi'_v} = \frac{Y-y}{\psi'_v} = \frac{Z-z}{\omega'_v}$ и $\frac{X-x}{\varphi'_u} = \frac{Y-y}{\psi'_u} = \frac{Z-z}{\omega'_u}$; при условии $F = \varphi'_u\varphi'_v + \psi'_u\psi'_v + \omega'_u\omega'_v = 0$ эти касательные взаимно-перпендикулярны, и тогда координатные линии образуют ортогональную систему. Бесконечно-малый элемент дуги линии $u = u_0$ будет $ds_2 = \sqrt{\varphi'^2_v + \psi'^2_v + \omega'^2_v}\,dv = \sqrt{G}\,dv$ и бесконечно-малый элемент дуги линии $v = v_0$ будет $ds_1 = \sqrt{\varphi'^2_u + \psi'^2_u + \omega'^2_u}\,du = \sqrt{E}\cdot du$; угол между этими элементами (т.-е. угол между касательными к ним в точке пересечения) определяется условием: $\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$, откуда $\sin\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$. Площадь бесконечно-малого параллелограмма, образованного четырьмя координатными линиями $U = u$, $U = u + du$, $V = v$, $V = v + dv$, будет (с точностью до бесконечно-малых высших порядков) $ds_1 \cdot ds_2 \cdot \sin\omega = \sqrt{EG - F^2}\,dudv = \sqrt{D^2(\varphi, \psi) + D^2(\psi, \omega) + D^2(\omega, \varphi)}\cdot dudv$, где положено $D(l, m) = l'_u \cdot m'_v - l'_v \cdot m'_u$ (см. ч. II, отд. IV, гл. II, § 4).

*Пример 1.* Система $x = R\sin u\cos v$, $y = R\sin u\sin v$, $z = R\cos u$ определяет сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Координатные линии $u = u_0$ определяются пересечением этой сферы с конусом $x^2 + y^2 = z^2\operatorname{tg}^2 u_0$, т.-е. это будут географические параллели при широте $90° - u_0$, а координатные линии $v = v_0$ образуются пересечением сферы с плоскостью $y = x\operatorname{tg} v_0$, т.-е. это будут географические меридианы. Система ортогональная, ибо $F = 0$.

*Пример 2.* Система $x = a\sin u\cos v$, $y = b\sin u\sin v$, $z = c\cos u$ определяет эллипсоид с координатными линиями — эллипсами. Ортогональность выполнена только при $a = b$, т.-е. для эллипсоида вращения около $OZ$.

*Пример 3.* Система $x = a\sin u\cos v$, $y = b\sin$ и $\sin v$, $z = c\sin^2 u$ определяет эллиптический параболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$.

*Пример 4.* Уравнения $x = \frac{\sqrt{p}}{2}(v + u)$, $y = \frac{\sqrt{q}}{2}(v - u)$, $z = \frac{1}{2}uv$ определяют гиперболический параболоид, при чем линии $u = u_0$, $v = v_0$ образуют две системы его прямолинейных образующих.




Черт. 89.

## § 2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

*Определение.* Касательною плоскостью к поверхности в ее точке $M$ называется общее место касательных прямых в точке $M$ ко всем кривым, которые можно провести по поверхности через точку $M$. Прямая, проведенная через $M$ перпендикулярно к касательной плоскости, называется нормалью к поверхности в точке $M$ (черт. 89).

*Теорема.* Для поверхности $f(x, y, z) = 0$ уравнение касательной плоскости в точке $M(x, y, z)$ будет: $(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y + (Z - z)f'_z = 0$, уравнение нормали $\frac{X - x}{f'_x} = \frac{Y - y}{f'_y} = \frac{Z - z}{f'_z}$ и косинусы углов нормали с осями координат будут: $\cos(X, N) = \frac{f'_x}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}}$, $\cos(Y, N) = \frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}}$, $\cos(Z, N) = \frac{f'_z}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}}$.

Вывод. Каждую кривую, проведенную по поверхности через точку $M$, можно представить системою $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$, где первое уравнение остается неизменным для всех линий, а второе — меняется.

В § 3, замеч. 1, было дано уравнение касательной прямой к такой линии в точке $M$; именно она определяется пересечением двух плоскостей: $(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y + (Z - z)f'_z = 0$, $(X - x)\varphi'_x + (Y - y)\varphi'_y + (Z - z)\varphi'_z = 0$, и так как первая плоскость остается неизменною для всех касательных $MT_1$, $MT_2$, $MT_3 \ldots$, то все они лежат в этой плоскости, т.-е. это и есть искомая касательная плоскость. Нормаль определяется условием перпендикулярности с касательною плоскостью, а косинусы углов выражаются по общему правилу аналитической геометрии.

*Замечание 1.* Касательная плоскость в данной точке поверхности делается неопределенною, если в этой точке одновременно $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$. Так будет в вершине (0, 0, 0) конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, где, действительно, касательных плоскостей бесчисленное множество.

*Замечание 2.* Если ввести частные производные $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, то касательная плоскость будет: $Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$, нормаль $\frac{X-x}{-p}=\frac{Y-y}{-q}=\frac{Z-z}{1}$, косинусы углов ее с осями:

$$\cos(N,X)=\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad \cos(N,Y)=\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$
$$\cos(N,Z)=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Это непосредственно следует из теоремы и из формул: $p=-\frac{f_x}{f_z}$, $q=-\frac{f_y}{f_z}$.

*Пример 1.* Найти касательные плоскости к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, параллельные плоскости $lX+mY+nZ=0$.

Уравнение касательной плоскости в точке $(x, y, z)$ к эллипсоиду будет $(X-x)\frac{x}{a^2}+(Y-y)\frac{y}{b^2}+(Z-z)\frac{z}{c^2}=0$ или $\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}-1=0$.

Из условия параллельности с данною плоскостью следует:

$\frac{x}{a^2l}=\frac{y}{b^2m}=\frac{z}{c^2n}=\lambda\,(1)$; беря отсюда $\frac{x}{a}=al\lambda$, $\frac{y}{b}=bm\lambda$, $\frac{z}{c}=cn\lambda$ и подставляя в уравнение эллипсоида, находим: $\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}$; этим определяются две точки касания и две касательные плоскости

$$lX+mY+nZ=\pm\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}.$$

*Пример 2.* К эллипсоиду $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ провести касательные плоскости через прямую $\frac{X-3}{6}=\frac{Y-2}{4}=\frac{Z}{3}$.

Касательная плоскость $\frac{Xx}{9}+\frac{Yy}{4}+Zz-1=0$ должна проходить через точку (3, 2, 0) данной прямой и быть параллельною данной прямой, что дает: (1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$, (2) $\frac{2}{3}x+y-3z=0$; присоединяя уравнение эллипсоида, находим две точки касания: $\left(1, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ и две касательные плоскости: $\frac{X}{9}+\frac{Y}{3}+\frac{2Z}{3}=1$, $\frac{2X}{9}+\frac{Y}{6}+\frac{2Z}{3}=1$.

*Пример 3.* Показать, что касательные плоскости поверхности $xyz=a^3$ отсекают от координатного угла тетраэдр постоянного объема.

Касательная плоскость будет $Xyz+Yxz+Zxy=3xyz$ и отсекает на осях отрезки: $\alpha=3x$, $\beta=3y$, $\gamma=3z$; объем тетраэдра

$$V=\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma=\frac{9}{2}xyz=\frac{9}{2}a^3.$$

## § 3. Цилиндрические поверхности.

*Определение.* Цилиндрическою поверхностью называется общее место прямых линий, параллельных данному направлению с проекциями $l$, $m$, $n$ и пересекающих данную линию $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ (направляющую).

Уравнение образующей при таких условиях будет $\frac{X-x}{l} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-z}{n}$, при чем $x, y, z$ связаны уравнениями $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$. Исключая из 4 уравнений буквы $x$, $y$, $z$, получим в результате исключения уравнение цилиндрической поверхности в виде $F(X, Y, Z) = 0$.

Переписав уравнения образующей в виде: $nX - lZ = \alpha$, $nY - mZ = \beta$, где $\alpha = nx - lz$, $\beta = ny - mz$, найдем, в результате исключения $x$, $y$, $z$ из двух последних уравнений и из двух уравнений направляющей, зависимость $\Phi(\alpha, \beta) = 0$; внося сюда значения $\alpha = nX - lZ$, $\beta = nY - mZ$, найдем общую форму уравнений всех цилиндрических поверхностей с данным направлением образующих в виде: $\Phi(nX - lZ, nY - mZ) = 0$, где $\Phi$ произвольная функция.

Исключив из этого уравнения произвольную функцию $\Phi$ (см. отд. II, гл. III, § 3, пример 2), получим в результате $l\frac{\partial Z}{\partial X} + m\frac{\partial Z}{\partial Y} - n = 0$, что выражает параллельность образующей и касательной плоскости к цилиндрической поверхности, а так как точка касания будет общею для образующей и касательной плоскости, то эта последняя содержит образующую, проходящую через точку касания.

В некоторых случаях около данной поверхности $F(x, y, z) = 0$ можно описать цилиндр с данным направлением образующих $(l, m, n)$, т.-е. найти такой цилиндр, который касается поверхности по некоторой линии, лежащей на этой поверхности. В таком случае линия прикосновения определится системою уравнений $F(x, y, z) = 0$ и $lF'_x + mF'_y + nF'_z = 0$ (последнее выражает совпадение касательной плоскости к данной поверхности с образующею цилиндра); приняв эту линию за направляющую, можем составить уравнение описанного цилиндра.

*Пример.* Около эллипсоида (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ описать цилиндр с направлением образующих $(l, m, n)$.

Линия прикосновения определяется системою уравнений (1) и (2)

$$\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} = 0.$$

Уравнение искомого цилиндра получится исключением $x, y, z$ из уравнений (1) и (2) и двух уравнений образующей

$$\frac{X-x}{l} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-z}{n}.$$

Имеем:

$$\lambda = \frac{\frac{l}{a^2}(X-x)}{\frac{l^2}{a^2}} = \frac{\frac{m}{b^2}(Y-y)}{\frac{m^2}{b^2}} = \frac{\frac{n}{c^2}(Z-z)}{\frac{n^2}{c^2}} = \frac{L}{M}, \text{ где } L = \frac{lX}{a^2} + \frac{mY}{b^2} + \frac{nZ}{c^2}$$

[по (2)] и $M = \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}$. Теперь значения $x = X - l\lambda$, $y = Y - m\lambda$, $z = Z - n\lambda$ подставляем в уравнение (1) и находим

$$M\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1\right) = L^2.$$

## § 4. Конические поверхности.

*Определение.* Коническою поверхностью называется общее место прямых линий, проходящих через постоянную точку $S(x_0, y_0, z_0)$ (вершина конуса) и пересекающих данную направляющую $f(x, y, z)=0$, $\varphi(x, y, z)=0$.

При таких условиях образующая конуса будет определяться уравнениями $\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0}$ или $\frac{X-x_0}{Z-z_0}=\alpha$, $\frac{Y-y_0}{Z-z_0}=\beta$, где $\alpha=\frac{x-x_0}{z-z_0}$, $\beta=\frac{y-y_0}{z-z_0}$; исключение $x$, $y$, $z$ из двух последних уравнений и из уравнений направляющей дает результат $\Phi(\alpha, \beta)=0$, откуда общее уравнение конических поверхностей с данной вершиной будет

$$\Phi\left(\frac{X-x_0}{Z-z_0}, \frac{Y-y_0}{Z-z_0}\right)=0,$$

где $\Phi$ — произвольная функция.

Исключение произвольной функции проводит к уравнению $\frac{\partial Z}{\partial X}(X-x_0)+\frac{\partial Z}{\partial Y}(Y-y_0)=Z-z_0$, выражающему, что касательная плоскость в каждой точке конуса проходит через его вершину и потому содержит образующую конуса, проходящую через точку касания.

В некоторых случаях можно около данной поверхности $F(x, y, z)=0$ из данной вершины $S(x_0, y_0, z_0)$ описать конус, который касался бы поверхности по некоторой линии.

В таком случае линия прикосновения определяется системою уравнений $F(x, y, z)=0$ и $(x_0-x)F'_x+(y_0-y)F'_y+(z_0-z)F'_z=0$, из которых второе выражает, что касательная плоскость в точке $(x, y, z)$ поверхности проходит через вершину конуса. Принимая линию прикосновения за направляющую, составим уравнение самого описанного конуса, как показано в начале параграфа.

*Пример.* Из точки $(x_0, y_0, z_0)$ описать конус около эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$. (1).

Линия прикосновения определяется системою уравнений (1) и (2) $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0$. Нужно исключить $x$, $y$, $z$ из уравнений (1), (2) и из уравнений образующей $\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0}=\lambda$. По свойству производных отношений и по (2), находим:

$$\lambda=\frac{\frac{(X-x_0)x_0}{a^2}+\frac{(Y-y_0)y_0}{b^2}+\frac{(Z-z_0)z_0}{c^2}}{1-\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}}=\frac{L}{M}.$$

Теперь

$$x=x_0+\frac{1}{\lambda}(X-x_0),\quad y=y_0+\frac{1}{\lambda}(Y-y_0)$$

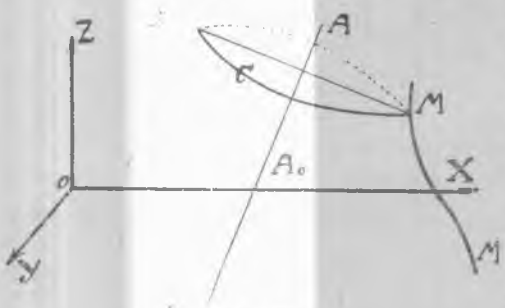
и проч.; внося эти значения в уравнение (1), получим искомый конус:

$$\left[\frac{(X-x_0)x_0}{a^2}+\frac{(Y-y_0)y_0}{b^2}+\frac{(Z-z_0)z_0}{c^2}\right]^2=$$

$$=\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\left[\left(\frac{X-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{Y-y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{Z-z_0}{c}\right)^2\right].$$

## § 5. Поверхности вращения.

Поверхность вращения есть общее место различных положений линии $MM_1$, которая перемещается так, что каждая ее точка $M$ описывает окружность $MC$ (черт. 90), центр которой лежит на данной прямой $A_0A_1$, (ось вращения) и плоскость которой $\perp$ к $AA_1$. Иначе можно определить поверхность вращения как общее место окружностей $C$, которые 1) имеют центр на оси $AA_1$: $\frac{X-x_0}{l}=\frac{Y-y_0}{m}=\frac{Z-z_0}{n}$, 2) лежат в плоскости перпендикулярной к $AA_1$ и 3) проходят через точки $M$ данной линии $MM_1$, заданной системою $f(x, y, z)=0$, $\varphi(x, y, z)=0$. Всякую окружность, удовлетворяющую условиям 1) и 2), можно представить как пересечение плоскости $lX+mY+nZ=\alpha$, перпендикулярной к $AA_1$, и сферы $(X-x_0)^2+(Y-y_0)^2+(Z-z_0)^2=\beta$ с центром в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ оси вращения, при чем условие 3) требует, чтобы $lx+my+nz=\alpha$, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\beta$. Исключая $x$, $y$, $z$ из двух последних уравнений и из уравнений $f=0$, $\varphi=0$, найдем зависимость $\beta=\Phi(\alpha)$, которая и дает общее уравнение всех поверхностей вращения с данною осью в виде: $(X-x_0)^2+(Y-y_0)^2+(Z-z_0)^2=\Phi(X+mY+nZ)$, где $\Phi$—произвольная функция. В частности, если ось вращения совпадает с $OZ$, то $x_0=y_0=z_0=0$, $l=0$, $m=0$, $n=1$ и предыдущее уравнение принимает вид $X^2+Y^2=\Psi(Z)$, где $\Psi(Z)=\Phi(Z)-Z^2$. Исключая произвольную функцию $\Psi$, найдем результат, (*) $\frac{\partial Z}{\partial X}\cdot Y-\frac{\partial Z}{\partial Y}\cdot X=0$, выражающий, что нормаль $\frac{\xi-X}{\frac{\partial Z}{\partial X}}=\frac{\eta-Y}{\frac{\partial Z}{\partial Y}}=\frac{\xi-Z}{-1}$ к поверхности вращения в любой точке ее $(X, Y, Z)$ лежит в одной плоскости с осью вращения, ибо при условии (*) находим $\xi:\frac{\partial Z}{\partial X}=\eta:\frac{\partial Z}{\partial Y}$, т.-е. что нормаль лежит в плоскости, проходящей через $OZ$.



Черт. 90.

*Пример.* Найти поверхность, образованную вращением эллипса $\left(\frac{x-h}{a}\right)^2+\frac{z^2}{b^2}=1$, $y=0$ $(h\geqq a)$ около $OZ$.

Переменная окружность $C$ здесь определяется системою $Z=\alpha$, $X^2+Y^2=\beta$, при чем $z=\alpha$, $x^2+y^2=\beta$. Исключая $\alpha$ и $\beta$ из этих уравнений

и из двух уравнений эллипса, находим: $\left(\frac{\sqrt{\beta}-h}{a}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{b}\right)^2=1$ или $\left(\frac{\beta+h^2}{a^2}+\frac{\alpha^2}{b^2}-1\right)^2=\frac{4h^2}{a^4}\beta$, что дает уравнение искомой поверхности: $\left(\frac{X^2+Y^2+h^2}{a^2}+\frac{Z^2}{b^2}-1\right)^2=\frac{4h^2}{a^4}(X^2+Y^2)$. В частности, при $b=a$ получается уравнение поверхности кругового кольца (тора) $(X^2+Y^2+Z^2+h^2-a^2)^2=4h^2(X^2+Y^2)$.

## § 6. Огибающие поверхности.

*Определение 1.* Если система поверхностей $f(x, y, z, \alpha)=0$ зависит от произвольного параметра $\alpha$, то характеристикой поверхности $\alpha=\alpha_0$ называется линия, которая определяется системою: $f(x, y, z, \alpha_0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x, y, z, \alpha_0)=0$ и представляет предельное положение линии пересечения двух поверхностей системы: $\alpha=\alpha_0$ и $\alpha=\alpha_0+\Delta\alpha$ при $\Delta\alpha=0$ (сравнить гл. I, § 7). Общее место характеристик представляет вообще огибающую поверхность для данной системы огибаемых и определяется уравнениями: $f(x, y, z, \alpha)=0$, $\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x, y, z, \alpha)=0$ при переменном $\alpha$; по исключении $\alpha$ получится уравнение огибающей в виде $F(x, y, z)=0$.

*Теорема 1.* Огибающая поверхность касается каждой из огибаемых вдоль всей характеристики, т.-е. в каждой точке характеристики огибающая и огибаемая поверхности имеют общую касательную плоскость.

Вывод. В точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на характеристике поверхности $\alpha=\alpha_0$, касательная плоскость к огибаемой будет $Z-z_0=p_0(X-x_0)+q_0(Y-y_0)$ (§ 2, замеч. 2), где $p_0=-\frac{f'_x(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)}$, $q_0=-\frac{f'_y(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)}$. В уравнении касательной плоскости в точке $M_0$ к огибающей нужно заменить $p_0$, $q_0$ числами $\overline{p_0}$, $\overline{q_0}$, которые определятся из уравнения $f'_x(x_0, y_0, z_0, \alpha)dx+f'_y\cdot dy+f'_z\,dz+f'_\alpha\,d\alpha=0$ при $dz=\overline{p_0}dx+\overline{q_0}dy$; но так как из уравнений огибающей должно быть $f'_\alpha=0$ и сверх того $\alpha=\alpha_0$ (доказательство аналогично теореме § 7, гл. I), то оказывается $\overline{p_0}=p_0$, $\overline{q_0}=q_0$, т.-е. касательные плоскости к огибаемой и к огибающей в точке $M_0$ совпадают.

*Определение 2.* Предельное положение точки пересечения трех поверхностей системы $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_0+h$, $\alpha=\alpha_0+h_1$ при $h$ и $h_1$ равных 0 (или, что то же, предельное положение двух бесконечно-близких характеристик) определяется системою $f(x, y, z, \alpha)=0$, $\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}=0$ при $\alpha=\alpha_0$; общее место таких точек, если оно существует, представляет линию в пространстве, называемую ребром возврата огибающей поверхности; ребро возврата определяется предыдущею системою при переменном $\alpha$.

*Теорема 2.* В каждой точке ребра возврата касательная будет вместе с тем и касательною к той характеристике, которой принадлежит точка касания.

Вывод. Пусть $M_0(x_0, y_0\, z_0)$—точка, лежащая на характеристике поверхности $\alpha = \alpha_0$; касательная в этой точке к характеристике будет $\frac{X - x_0}{dx} = \frac{Y - y_0}{dy} = \frac{Z - z_0}{dz}$, где $dx$, $dy$, $dz$ находятся (при дифференцировании двух уравнений характеристики) из уравнений: $f'_x(x_0\, y_0, z_0, \alpha_0)dx + f'_y \cdot dy + f'_z \cdot dz = 0$, $f''_{\alpha x}(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)dx + f''_{\alpha y} \cdot dy + f''_{\alpha z} \cdot dz = 0$. Для ребра возврата $dx$, $dy$, $dz$ надо заменить числами $\overline{dx}$, $\overline{dy}$, $\overline{dz}$, определяемыми из системы: $f'_x(x_0, y_0, z_0, \alpha)\overline{dx} + f'_y \cdot \overline{dy} + f'_z \overline{dz} + f'_\alpha d\alpha = 0$, $f''_{\alpha x}\overline{dx} + f''_{\alpha y}\overline{dy} + f''_{\alpha z}\overline{dz} + f''_{\alpha\alpha} d\alpha = 0$; но так как из уравнений ребра возврата должно быть $f'_\alpha = 0$ и $f''_{\alpha\alpha} = 0$ и сверх того $\alpha = \alpha_0$ (из условия, что $M_0$ лежит на ребре возврата, находим $f(x_0, y_0, z_0, \alpha) = 0$, $f'_\alpha = 0$, $f''_{\alpha\alpha} = 0$, т.-е. $\alpha$ не может быть произвольным, и так как принадлежность точки $M_0$ характеристике поверхности $\alpha = \alpha_0$ дает тождества $f(x_0, y_0, z_0, \alpha_0) = 0$, $f'_\alpha = 0$, $f''_{\alpha\alpha} = 0$, то из сравнения предъидущей системы с этими тожествами и выходит $\alpha = \alpha_0$), то обе касательные совпадают.

*Замечание.* Если в уравнение огибаемых поверхностей входят два параметра $\alpha$, $\beta$, независящие один от другого; то огибающая поверхность получается исключением $\alpha$ и $\beta$ из трех уравнений $f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$, ибо при последних двух условиях касательные плоскости для огибающей и огибаемой будут совпадать.

*Пример.* Найти огибающую плоскостей: (1) $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$ при условии: (2) $\alpha\beta\gamma = 6V_0$, т.-е. найти поверхность, касательные плоскости которой отсекают от угла координатных осей тетраэдр постоянного объема $V_0$ (если огибаемые поверхности—плоскости, то они образуют систему касательных плоскостей к огибающей, согласно теореме 1-й). Здесь $\alpha$ и $\beta$ суть независимые параметры, а $\gamma$ их функция.

Поэтому $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -\frac{x}{\alpha^2} - \frac{z}{\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \beta} = -\frac{y}{\beta^2} - \frac{z}{\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = 0$, но из уравнения (2) $\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = -\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = -\frac{\gamma}{\beta}$, следовательно, предыдущие уравнения дают: $\frac{x}{\alpha} = \frac{z}{\gamma}$, $\frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ или (3) $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{3}$ [в силу (1)], откуда $\alpha = 3x$, $\beta = 3y$, $\gamma = 3z$, после чего из (2) находим уравнение искомой поверхности $xyz = \frac{2}{9}V_0$.

## § 7. Развертывающиеся поверхности.

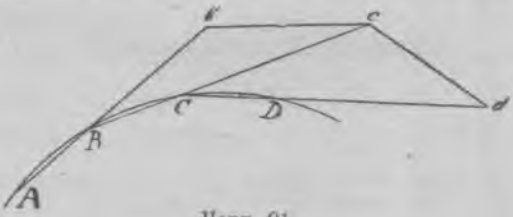
*Определение.* Если огибаемые поверхности суть плоскости: $ax + by + cz - p = 0$, где $a$, $b$, $c$, $p$ суть функции параметра $\alpha$, то огибающая поверхность называется развертывающеюся поверхностью; по теореме 1, § 6, огибаемые плоскости будут ее касательными плоскостями.

*Замечание 1.* Так как характеристиками будут в этом случае прямые линии: $ax + by + cz - p = 0$, $a'_\alpha \cdot x + b'_\alpha \cdot y + c'_\alpha \cdot z - p'_\alpha = 0$, то развертывающаяся поверхность, представляя общее место этих прямых, будет поверхностью линейчатою. Согласно теореме 2, § 6, эти прямые (образующие развертывающейся поверхности) представляют систему касательных к ребру

возврата: $ax+by+cz-p=0$ (1), $a'x+b'y+c'z-p'=0$ (2), $a''x+b''y+c''z-p''=0$ (3) (производные по $\alpha$). В этом свойстве образующих развертывающейся поверхности (быть касательными к некоторой пространственной линии) лежит отличие их от иных линейчатых поверхностей, называемых косыми. Можно добавить, что огибаемые плоскости $aX+bY+cZ-p=0$ являются плоскостями кривизны ребра возврата, так как, дифференцируя уравнение (1) по $\alpha$ и принимая во внимание (2), находим $a\cdot x'+b\cdot y'+c\cdot z'=0$ (4), а дифференцируя (2) по $\alpha$ и принимая во внимание (3), получаем: $a'x'+b'y'+c'z'=0$, что после дифференцирования уравнения (4) по $\alpha$ можно переписать в виде $ax''+by''+cz''=0$; но тогда по главе II, § 4 [уравнения (1), (2)] заключаем, что $a=A$, $b=B$, $c=C$ и, следовательно, плоскость кривизны ребра возврата $A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$ будет $aX+bY+cZ=p$.

*Замечание 2.* Название развертывающейся поверхности обусловлено тем свойством ее, что она без разрыва и складок, с сохранением длины начерченных на ней линий, может быть сложена в любую касательную плоскость.

Пусть (черт. 91) $ABCD\ldots$ ребро возврата равертывающейся поверхности, и $ABCD$ — вписанная в него ломаная линия; на продолжениях ее сторон отложим произвольные отрезки $Bb$, $Cc$, $Dd\ldots$ и соединим точки $b$, $c$, $d$ прямыми. Образовавшаяся многогранная поверхность (с гранями $BbcC$, $CcdD$,...) может быть сложена без разрыва и складок в плоскость любой грани, например $BbcC$. Но станем беспредельно уменьшать все стороны $AB$, $BC$, $CD\ldots$ ломаной линии, беспредельно увеличивая число их; тогда хорды $AB$, $BC$, $CD\ldots$ обратятся в касательные к ребру возврата, т.-е., по замечанию 1, в образующие развертывающейся поверхности, а многогранная поверхность — в часть развертывающейся поверхности, которая без разрыва и складок сложится в предельное положение грани $ABbcC$, представляющее плоскость кривизны ребра возврата в точке $A$, т.-е., по замечанию 1, в касательную плоскость к развертывающейся поверхности в точке $A$.



Черт. 91.

*Замечание 3.* Условие, при котором система прямых

$$\frac{X-x_0}{l}=\frac{Y-y_0}{m}=\frac{Z-z_0}{n} \quad (1)$$

($x_0$, $y_0$, $z_0$, $l$, $m$, $n$ — функции одного параметра $\alpha$) представляет развертывающуюся поверхность, выражается равенством

$$\begin{vmatrix} x_0' & l' & l \\ y_0' & m' & m \\ z_0' & n' & n \end{vmatrix}=0.$$

Вывод. Называя через $u$ общую величину отношений (1), можем представить поверхность, образованную этими прямыми, параметрическими уравнениями: $X=x_0+lu$, $Y=y_0+mu$, $Z=z_0+nu$ (в виде функций двух независимых переменных $\alpha$ и $u$). Беря в этих уравнениях $u=\omega(\alpha)$, полу-

чим на поверхности некоторую линию $L$, для которой косинусы углов касательной с осями координат пропорциональны числам:

$$dX = dx_0 + ldu + udl, \quad dY = dy_0 + mdu + udm, \quad dZ = dz_0 + ndu + udn.$$

Поверхность, образованная данными прямыми (1), будет развертывающаяся, если при некотором выборе функции $\omega(\alpha) = u$ линия $L$, лежащая на этой поверхности, имеет прямые (1) своими касательными. Для этого $dX$, $dY$, $dZ$ должны быть пропорциональны числам $l$, $m$, $n$, т.-е. [по вычитании из всех 3 членов равенства величины $u' = \omega'(\alpha)$] должно быть:

$$\frac{x_0' + ul'}{l} = \frac{y_0' + um'}{m} = \frac{z_0' + un'}{n} = \rho;$$

отсюда получаются 3 линейных уравнения с двумя неизвестными $u$ и $\rho$; для совместности их должен равняться нулю вышеприведенный определитель. В частности, если система прямых задается в виде $X = aZ + a_1$, $Y = bZ + b_1$, должно быть $a_1'b' = b_1'a'$.

Это условие выполняется 1) цилиндрическою поверхностью, где $a$ и $b$ постоянны и 2) коническою поверхностью, где $a_1 = x_0 - az_0$, $b_1 = y_0 - bz_0$ при постоянных $x_0$, $y_0$, $z_0$, и потому те и другие поверхности будут развертывающимися.

*Пример.* Возьмем систему прямых:

$$\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z - kt}{k};$$

для нее предыдущее условие выполняется, и потому данная система образует развертывающуюся поверхность. Ребро возврата ее найдется, если общую величину данных отношений $u$ определим из уравнений $\frac{x' + ul'}{l} = \ldots$, что дает: $\frac{-a\sin t - au\cos t}{-a\sin t} = \frac{a\cos t - au\sin t}{a\cos t} = \frac{k + 0\cdot u}{k}$, т.-е. $u = 0$; поэтому ребро возврата будет $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = kt$, т.-е. винтовая линия на поверхности кругового цилиндра.

Уравнение самой развертывающейся поверхности получено в § 7, примере 4, гл. II.

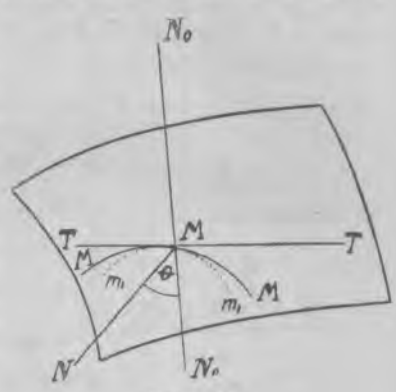
*Замечание 4.* Так как развертывающаяся поверхность определяется системою $ax + by + cz - p = 0$, $a'x + b'y + c'z - p' = 0$, то, дифференцируя 1-е уравнение и принимая во внимание 2-е, найдем $adx + bdy + cdz = 0$, откуда $p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{a}{c} = \varphi(\alpha)$, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{b}{c} = \psi(\alpha)$; по исключении $\alpha$, находим $q = \Phi(p)$.

Отсюда $s = \Phi'(p)\cdot r$, $t = \Phi'(p)\cdot s$ и, следовательно, $rt - s^2 = 0$; таково общее дифференциальное уравнение всех развертывающихся поверхностей.

## § 8. О кривизне линий на данной поверхности. Теоремы Менье и Эйлера.

Возьмем на поверхности $f(x, y, z) = 0$ точку $M(x, y, z)$ и обозначим для этой точки: $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; тогда $dz = pdx + qdy$, $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$.

Через нормаль $MN_0$ поверхности (чертеж 92) проведем плоскость, пересекающую поверхность по плоской линии $MM_1$ (так называемое нормальное сечение), коей касательная $MT$ составляет с осями координат углы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (гл. II, § 3); проведем через $M$ еще другую линию $mm_1$ по той же поверхности, имеющую ту же касательную $MT$; главная нормаль $MN$ линии $mm_1$ составляет с осями углы $\xi$, $\eta$, $\zeta$ (гл. II, § 6, замеч. 2), при чем $\cos\xi = R_1 \frac{d\cos\alpha}{ds}$ и проч., где $R_1$ — радиус 1-й кривизны линии $mm_1$ в точке $M$. Обозначим через $\theta$ угол между нормалью к поверхности $MN_0$ и главною нормалью $MN$ линии $mm_1$ ($\theta$ есть линейный угол двугранного угла между плоскостью нормального сечения $MM_1$ и плоскостью кривизны линии $mm_1$, ибо $MN_0 \perp MT$ и $MN \perp MT$).



Черт. 92.

Так как (по главе III, § 2) $\cos(N_0, X) = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$ и проч., то

$$\cos\theta = \cos\xi\cdot\cos(N_0, X) + \cos\eta\cdot\cos(N_0, Y) + \cos\zeta\cdot\cos(N_0, Z) =$$
$$= \frac{R_1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\left(-p\frac{d\cos\alpha}{ds} - q\frac{d\cos\beta}{ds} + \frac{d\cos\gamma}{ds}\right).$$

Но, деля на $ds$ уравнение $dz = pdx + qdy$, получаем $\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta$, откуда

$$\frac{d\cos\gamma}{ds} - p\frac{d\cos\alpha}{ds} - q\frac{d\cos\beta}{ds} = \cos\alpha\cdot\frac{dp}{ds} + \cos\beta\cdot\frac{dq}{ds} = \cos\alpha(r\cos\alpha + s\cos\beta) +$$
$$+ \cos\beta(s\cos\alpha + t\cos\beta) = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta.$$

Таким образом

$$\cos\theta = \frac{R_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta),$$

т.-е. при выбранной точке $M$, определяющей $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, и при данной касательной $MT$, определяющей

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta,$$

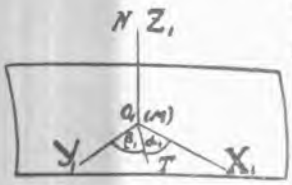
величина $R_1$ зависит только от $\theta$, и при $\theta = 0$ получается наибольшее значение $R_1$, именно — радиус кривизны нормального сечения $MM_1$:

$$R_0 = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

Для всякой другой линии $mm_1$ радиус 1-й кривизны $R_1 = R_0\cos\theta$, т.-е., сравнивая различные линии, проведенные по поверхности через точку $M$ и имеющие одну и ту же касательную, находим наибольший радиус кривизны $R_0$ у нормального сечения; для всякой другой линии радиус кривизны равен проекции $R_0$ на плоскость кривизны этой линии (теорема Мёнье).

Займемся теперь вопросом о зависимости радиуса кривизны нормального сечения $R_0$ от направления касательной, определяемого числами $\cos\alpha$, $\cos\beta$,

при чем $\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta$, и потому (из формулы $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$), следует: $(1+p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1+q^2)\cos^2\beta = 1$ (*). Чтобы упростить исследование $R_0$, перенесем начало в точку $M$, ось $O_1Z_1$ направим по нормали к поверхности $MN_0$, а оси $O_1X_1$, $O_1Y_1$ разместим пока произвольно в касательной плоскости (где будет лежать и $MT$, чертеж 93). Так как в новой системе $\cos(Z_1, N_0) = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + 1}} = 1$, то $p_1 = 0$, $q_1 = 0$; далее из формулы (*) $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 = 1$, т.-е. $\cos\alpha_1 = \sin\beta_1$, и $\frac{1}{R_0} = r_1\cos^2\alpha_1 + 2s_1\cos\alpha_1\sin\alpha_1 + t_1\sin^2\alpha_1$.



Черт. 93.

Для изучения хода функции оставляем $\frac{d\left(\frac{1}{R_0}\right)}{d\alpha_1} = 2s_1\cos 2\alpha_1 - (r_1 - t_1)\sin 2\alpha_1$; это выражение равно 0 при $\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2s_1}{r_1 - t_1}$ (случай $s_1 = 0$, $r_1 = t_1$ исключаем, ибо тогда $\frac{1}{R_0} = r_1 = t_1$ независимо от $\alpha_1$, что отвечает точке закругления, § 9), откуда следуют 2 значения $\alpha_1$: $\alpha_1 = \alpha_0$ и $\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$; из выражения $\frac{d^2\left(\frac{1}{R_0}\right)}{d\alpha_1^2} = -4s_1 \cdot \sin 2\alpha_1 - 2(r_1 - t_1)\cos 2\alpha_1 = \pm\sqrt{4s_1^2 + (r_1 - t_1)^2}$ видно, что одному из решений отвечает maximum, другому — minimum функции $\frac{1}{R_0}$. Зная это, повернем координатный угол $X_1O_1Y_1$ около начала на угол $\alpha_0$, так, чтобы новая ось $O_1X_2$ отвечала направлению $\alpha_1 = \alpha_0$, а новая ось $O_1Y_2$ — направлению $\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$; в новой системе maximum и minimum $\frac{1}{R_0}$ должны отвечать значениям $\alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, то-есть $\operatorname{tg} 2\alpha_2 = \frac{2s_2}{r_2 - t_2} = 0$, откуда $s_2 = 0$, и получается $\frac{1}{R_0} = r_2\cos^2\alpha_2 + t_2\sin^2\alpha_2$. Крайние значения $\frac{1}{R_0}$ будут $\frac{1}{R_1} = t_2$ при $\alpha_2 = 0$ и $\frac{1}{R_2} = r_2$ при $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$; заменяя $\alpha_2$ на $\omega$ и $R_0$ на $R$, получаем весьма простую зависимость кривизны нормального сечения $\frac{1}{R}$ от кривизны так называемых главных нормальных сечений, обладающих наименьшею и наибольшею кривизною $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ (или наоборот), и от угла $\omega$ между плоскостью взятого нормального сечения и того главного сечения, коему отвечает радиус $R_1$: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\cos^2\omega + \frac{1}{R_2}\sin^2\omega$.

Это и есть теорема Эйлера. Отметим два следствия: 1) два нормальных сечения, одинаково наклоненные к главным, имеют одинаковую кривизну, ибо $\frac{1}{R}$ не изменяется от замены $\omega$ на $-\omega$; 2) для двух взаимно перпендикулярных сечений, отвечающих углам $\omega$ и $\omega + \frac{\pi}{2}$, находим $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1}\cos^2\omega + \frac{1}{R_2}\sin^2\omega$, $\frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1}\sin^2\omega + \frac{1}{R_2}\cos^2\omega$, откуда $\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, т.-е. сумма

величин кривизны двух взаимно-перпендикулярных нормальных сечений постоянна в данной точке поверхности и называется среднею кривизною поверхности в этой точке.

## § 9. Точки закругления. Главные радиусы кривизны.

Выше (§ 8) было отмечено, что точкою закругления, или омбилическою, называется такая точка поверхности, в которой кривизна нормального сечения $\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(r\cos^2\alpha+2s\cos\alpha\cos\beta+t\cos^2\beta)$ не зависит от углов $\alpha$ и $\beta$, при чем $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ связаны зависимостью (*) § 8. Полагая $\cos\alpha=u$, $\cos\beta=v$, рассмотрим функции от $u$ и $v$:

$$U=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}=ru^2+2suv+tv^2,$$

$$V=(1+p^2)u^2+2pq\,uv+(1+q^2)\,v^2=1,\quad W=U-\lambda V,$$

где $\lambda$ — неопределенный множитель. Если при всех возможных значениях $u$ и $v$ функция $U$ сохраняет постоянное значение $U_0$, то и функция $W=U-\lambda$ (ибо $V=1$) будет иметь постоянное значение $U_0-\lambda$.

Представив $W$ в виде: $W=[r-\lambda(1+p^2)]\,u^2+2\,[s-\lambda pq]\,uv+$ $+[t-\lambda(1+q^2)]\,v^2$, выберем $\lambda$ так, чтобы коэффициент при $v^2$ обратился в 0: $\lambda=\frac{t}{1+q^2}$; тогда $W=Hu^2+2Kuv$, и так как $W=0$ при $u=0$, то при независимости $W$ от значения $u$ должно быть $W=0$ тождественно, что требует: $H=0$, $K=0$, т.-е. $\lambda=\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}$; в связи с прежним значением $\lambda=\frac{t}{1+q^2}$ получаем условия $\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}$, при которых $W=0$ и $U=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}=\lambda$ независимо от значений $u$ и $v$. Итак, точки закругления найдутся, если к уравнению поверхности $f(x,y,z)=0$ присоединить еще два: $\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}$.

*Пример.* Найти точки закругления эллиптического параболоида: $2z=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}$ $(a>b>0)$. Предыдущая система имеет вид:

$$\lambda=\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{0}{\frac{xy}{ab}}=\frac{\frac{1}{b}}{1+\frac{y^2}{b^2}}=\frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}{R}$$

и дает $xy=0$. Беря $x=0$, находим $y=\pm\sqrt{b(a-b)}$ и $z=\frac{y^2}{2b}=\frac{a-b}{2}$. При $y=0$ $x$ оказывается мнимым. Поверхность имеет 2 точки закругления:

$$\left(0,\pm\sqrt{b(a-b)},\ \frac{a-b}{2}\right)\text{ при }R=a\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Вопрос о разыскании главных радиусов кривизны поверхности в данной точке приводится к определению относительных maximum и minimum функции $U$ (см. выше, § 9) при соблюдении условия $V=1$; для этого (отд. III, гл. I, § 4) составляем функцию $W=U-\lambda V$ и приравниваем нулю ее частные производные: (1) $\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial u}=[r-\lambda(1+p^2)]u+[s-\lambda pq]v=0$, (2) $\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial v}=[s-\lambda pq]u+[t-\lambda(1+q^2)]v=0$.

Так как $u$ и $v$ одновременно не равны 0 (ибо при этом условие $V=1$ не выполняется), то из уравнений (1) и (2) следует пропорциональность коэффициентов при $u$ и $v$, что приводит к квадратному уравнению для $\lambda$: $rt-s^2-\lambda[r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)]+\lambda^2(1+p^2+q^2)=0$. Называя его корни через $\lambda_1$ и $\lambda_2$, имеем: $\lambda_1+\lambda_2=\frac{r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)}{1+p^2+q^2}$, $\lambda_1\cdot\lambda_2=\frac{rt-s^2}{1+p^2+q^2}$. Подставляя эти значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$ в уравнение (1) или (2), найдем отношение $\frac{u}{v}$, после чего из уравнения $V=1$ найдутся две пары значений $(u_1, v_1)$, $(u_2, v_2)$, определяющие положение двух главных нормальных сечений поверхности в данной точке, именно углы $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ касательной сечения с осями будут: $u_1=\cos\alpha_1$, $v_1=\cos\beta_1$, $pu_1+qv_1=\cos\gamma_1$ и $u_2=\cos\alpha_2$, $v_2=\cos\beta_2$, $pu_2+qv_2=\cos\gamma_2$. Что касается величин $R_1$, $R_2$ — радиусов кривизны главных нормальных сечений, — то, умножив уравнения (1) и (2) на $u$ и $v$ и сложив, найдем $U-\lambda V=0$, или $U=\lambda$ (так как $V=1$); таким образом значениям $\lambda_1$, $\lambda_2$ будут отвечать крайние значения $U=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}=\lambda$, откуда следуют формулы $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=$ $=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{1}{R_1R_2}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{1+p^2+q^2}=$ $=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$, определяющие среднюю кривизну поверхности $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ в данной точке и так называемую Гауссову кривизну $\frac{1}{R_1R_2}$, после чего находятся и главные радиусы кривизны $R_1$, $R_2$.

*Пример.* Для поверхности $z^2=2xy$ находим $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{-1}{x+y}$, $\frac{1}{R_1R_2}=0$, откуда $R_1=\infty$, $R_2=-(x+y)$.

*Замечание.* Для развертывающихся поверхностей $rt-s^2=0$ (§ 7, замечание 4), следовательно $\frac{1}{R_1R_2}=0$, т.-е. один из главных радиусов кривизны равен $\infty$, что и понятно, так как одно из нормальных сечений представляет прямолинейную образующую поверхности.

# ОГЛАВЛЕНИЕ.

## Дифференциальное исчисление.

### ОТДЕЛ I. Введение в анализ.

#### Глава I. Теория пределов.



#### Глава II. Бесконечные ряды.



#### Глава III. Непрерывные функции от одной независимой переменной и их свойства.

## ОТДЕЛ II. Дифференциальное исчисление.

### Глава I. Дифференцирование явных функций от одной независимой переменной.



### Глава II. Формулы, на которых основано приложение дифференциального исчисления к вопросам анализа.



### Глава III. Дифференцирование явных функций от нескольких независимых переменных и неявных функций от одной или от нескольких независимых переменных.



## ОТДЕЛ III. Приложения дифференциального исчисления к вопросам анализа.

### Глава I. Наибольшие и наименьшие значения функций.



### Глава II. Разложение функций в степенные ряды.



### Глава III. Истинные значения неопределенных выражений.

## ОТДЕЛ IV. Геометрические приложения дифференциального исчисления.

### Глава I. Плоские линии.



### Глава II. Линии в пространстве.



### Глава III. Поверхности.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД—МОСКВА

## РУКОВОДСТВА И ПОСОБИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ.

**Адамов, А. А., проф.** — Сборник задач по аналитической геометрии и дифференциальному исчислению. Стр. 417. Ц. 4 р. 30 к.

**Богомолов, С. А.** — Основания геометрии. С 42 чертежами в тексте. Стр. 329. Ц. 2 р.

**де-ла Валле-Пуссен, Шарль-Жан.** — Курс анализа бесконечно малых. Т. I. Стр. 485. Ц. 4 р.

**Грэнвиль, В.** — Элементы дифференциального и интегрального исчислений. Для технических учебных заведений и самообразования.

Часть I. Дифференциальное исчисление. Изд. 3-е, исправленное Н. П. Тарасовым. Под ред. проф. Н. Н. Лузина. Стр. 288. Ц. 2 р. 25 к.

Часть II. Интегральное исчисление. Изд. 3-е, исправленное Н. П. Тарасовым. Под редакцией проф. Н. Н. Лузина. С 64 чертежами в тексте. Стр. 173. Ц. 1 р. 20 к.

**Дешевой, М. А., проф.** — Курс начертательной геометрии. С 300 чертежами в тексте. Стр. 370. Ц. 3 р.

**Егоров, Д. Ф.** — Основания вариационного исчисления. Стр. 77. Ц. 1 р.

**Егоров, Д. Ф.** — Элементы теории чисел. Стр. VI + 202. Ц. 1 р. 50 к.

**Коялович, Б. М.** — Аналитическая геометрия. Издание второе, исправленное и дополненное. Стр. 198. Ц. 2 р. 50 к.

**Коялович, Б. М.** — Лекции по высшей математике. Том I. Вып. I. Дифференциальное исчисление с приложением к анализу. Изд. 2-е. Стр. 244. Ц. 1 р. 50 к.

**Коялович, Б. М.** — Лекции по высшей математике. Том I. Вып. 2. Начала интегрального исчисления. Издание 2-е. Стр. 185. Ц. 2 р.

**Коялович, Б. М.** — Лекции по высшей математике. Том II. Вып. 1. Основания высшей алгебры. Интегрирование функций. Стр. 156. Ц. 1 р. 50 к.

**Коялович, Б. М.** — Лекции по высшей математике. Т. II. Вып. 2. Определенные интегралы. Основные сведения из теории дифференциальных уравнений. Стр. 308. Ц. 2 р. 50 к.

**Лахтин, Л. К.** — Курс теории вероятностей. Стр. 275. Ц. 3 р.

**Сборник задач по высшей математике.** — Под ред. профессоров: Н. М. Гюнтера, Я. Д. Тамаркина, Я. В. Успенского и А. А. Фридмана. Стр. 226. Ц. 2 р. 40 к.

**Систематический сборник задач и упражнений по высшей математике.** — Составлен группою профессоров и преподавателей ленинградских высших технических учебных заведений. Под общей редакцией проф. Б. М. Кояловича. Выпуск I. Сост. Л. Г. Малис. Аналитическая геометрия. Стр. 172. Ц. 1 р. 25 к.

**Систематический сборник задач и упражнений по высшей математике.** — Составлен группою профессоров и преподавателей ленинградских высших учебных заведений. Под общей редакцией проф. Б. Кояловича. Вып. II. Дифференциальное исчисление с приложениями к анализу. Сост. Н. С. Михельсон. Стр. 148. Ц. 1 р. 65 к.

**Систематический сборник задач и упражнений по высшей математике.** — Составлен группою профессоров и преподавателей ленинградских высших учебных заведений. Под общей редакцией проф. Б. Кояловича. Выпуск III. Интегрирование функций. Сост. В. В. Болдырев и П. С. Радецкий. Стр. 124. Ц. 1 р. 50 к.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД—МОСКВА

## Руководства и пособия по теоретической и прикладной механике для высших учебных заведений.

**Давиденков, Н. Н., проф.** — Руководство к практическим занятиям в механической лаборатории. Пособие для студентов высших технических учебных заведений. С 36 чертежами в тексте. Стр. 122. Ц. 1 р.

**Зернов, Д. С.** — Прикладная механика. С 489 фиг. в тексте. Стр. 337. Ц. 4 р.

**Кирпичев, В. Л.** — Основания графической статики. 5-е изд., исправленное и дополненное. Стр. 346. Ц. 2 р.

**Кирпичев, В.** — Сопротивление материалов. Часть I. Учение о прочности машин и построек. Посмертное издание, исправленное и дополненное. С 229 рис. в тексте. Стр. 399. Ц. 3 р. 50 к.

**Кирпичев, В.** — Сопротивление материалов. Часть II. Учение о прочности построек и машин. Издание четвертое, перепечатанное со второго исправленного и дополненного. Под редакцией проф. С. П. Тимошенко. С 236 рис. в тексте. Стр. 504. Ц. 4 р. 50 к.

**Межеричер, П. И.** — Машиностроительное черчение с подготовительным курсом начального черчения. Для технических учебных заведений и самообразования. С 312 фиг. в тексте. Изд. 2-е, перераб. и дополн. Стр. XII + 396. Ц. 3 р.

**Мещерский, И. В., проф.** — Курс теоретической механики. Часть I. Стр. 175. Ц. 2 р. 40 к.

**Мещерский, И. В., проф.** — Курс теоретической механики. Часть II. С 84 чертежами. Стр. 256. Ц. 1 р. 75 к.

**Николаи, Е. Л., проф.** — Лекции по теоретической механике. Часть I. Статика. Второе издание.

**Николаи, Е. Л., проф.** — Лекции по теоретической механике. Часть II. Кинематика. Второе издание. Со 105 чертежами в тексте. Стр. 118. Ц. 1 р. 50 к.

**Николаи, Е. Л. проф.** — Лекции по теоретической механике. Часть III. Динамика. Выпуск I. С 76 чертежами в тексте. Стр. 127. Ц. 1 р. 50 к.

**Радциг, А. А.** — Прикладная механика. Стр. 251. Ц. 1 р. 80 к.

**Рузский, Д. П.** — Кинематика машин. Стр. 199. Ц. 1 р. 50 к.

**Рузский, Д. П.** — Общая теория машин. Лекции, читанные в Киевском политехническом институте в 1909—1910 году. Стр. 142. Ц. 1 р. 30 к.

**Тимошенко, С. П.** — Курс сопротивления материалов. 5-е издание. Стр. 524. Ц. 5 р. 50 к.

## Серия „УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ РАБОЧИХ ФАКУЛЬТЕТОВ И ТЕХНИКУМОВ".

**Комарницкий, В. И.** — Основания аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. С 97 чертежами в тексте. Стр. 275. Ц. 1 р. 75 к.

**Кривошеин, Г. Г.** — Сопротивление материалов. С 123 фигур. в тексте. Стр. 164. Ц. 1 р. 30 к.

**Монахов, А. Д., проф.** — Общий курс технологии волокнистых веществ. С 235 чертежами в тексте. Стр. 270. Ц. 1 р. 75 к.

**Новиков, В. и Воскобойников, В.** — Сборник задач по аналитической геометрии на плоскости. С полными решениями и подробными методическими указаниями для каждого типа. Стр. 128. Ц. 90 к.

**Пржеборовский, Я. С., проф.** — Введение в химию. Часть первая. Со 106 рис. в тексте. Стр. 381. Ц. 2 р. 60 к.

**Холуянов, Ф. И., проф.** — Сборник задач по электрическим машинам постоянного и переменного тока. Допущено Научно-Технической Секцией Государственного Ученого Совета. С 5 фигурами в тексте. Стр. 194. Ц. 1 р. 50 к.

РУКОВОДСТВА И НАУЧНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Проф. А. А. АДАМОВ

# АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ

ЧАСТЬ II

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Рекомендовано Научно-Технической Секцией Государственного Ученого Совета*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД — МОСКВА
1925

Государственное
объединение
типография
ПЕЧАТНЫЙ
ДВОР

Газ № 10599 адский гознак № 21002 12 л. Отпеч. 4000 экз.

# ЧАСТЬ II.

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ.

## НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ.

### § 1. Комплексные числа, их происхождение, условия равенства, модуль и аргумент, геометрическое представление.

Если в квадратном уравнении: $x^2+2px+q=0$ оказывается $q-p^2>0$, то, представив его в виде $(x+p)^2+q-p^2=0$, положим $x+p=\pm by$, где $b=\sqrt{q-p^2}$; уравнение примет вид: $b^2y^2+b^2=0$, откуда, так как $b^2>0$, следует: $y^2+1=0$, $y^2=-1$. Корень этого уравнения не может быть вещественным числом, так как квадрат всякого вещественного числа будет $>0$; это есть особое число, которое называется *мнимым* и обозначается буквою $i$ (от слова imaginaire); итак, $i^2=-1$, $i=\sqrt{-1}$. Через это число корни уравнения $x^2+2px+q=0$ при $q-p^2=b^2$ выразятся так: $x=-p\pm bi$; такое соединение двух вещественных чисел при помощи символа $i$ называется *комплексным* числом, при чем два комплексные числа $a\pm bi$ называются комплексными сопряженными.

Два комплексные числа $a+bi$ и $a_1+b_1i$ считаются равными, если отдельно $a=a_1$ и $b=b_1$.

Всякое комплексное число $a+bi$ можно представить в виде: $r\cos\theta+i\cdot r\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, где $r$ есть положительное число, равное $+\sqrt{a^2+b^2}$ и называемое *модулем*, а угол $\theta$, определяемый равенствами: $\cos\theta=\frac{a}{r}$ и si $=\frac{b}{r}$, имеет бесчисленное множество значении вида: $\theta=\theta_0+2k\pi$, где $0\leqq\theta_0<2\pi$ и $k$—целое число, и называется аргументом комплексного числа. Действительно, из равенства чисел $a+bi$ и $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ находим: $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$, откуда $a^2+b^2=r^2$, $r=+\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\theta=\frac{a}{r}$, $\sin\theta=\frac{b}{r}$.

Будем пользоваться сокращенным обозначением: $r_\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$; тогда $1=1_{2k\pi}$, $-1=1_{(2k+1)\pi}$, $i=1_{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$, $-i=1_{\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi}$ и т. д.

Иногда пользуются геометрическим представлением для комплексных чисел, изображая комплексное число $a+bi$ точкою плоскости $M$ с прямоугольными координатами $a$, $b$.

Соединяя начало системы $O$ с точкою $M$, получаем: длина $OM=r$ и угол $OX, \widehat{OM}=\theta_0$.

## § 2. Сложение и вычитание комплексных чисел.

Суммою комплексных чисел $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k i)$ называется комплексное число $A+Bi$, в котором $A=\sum\limits_{k=1} a_k$, $B=\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Представляя слагаемые в виде: $a_k+b_k i=(r_k)_{\theta_k}$ и сумму $A+Bi=(R_\varphi)$, получаем равенства:

$$(*)\quad R\cos\varphi=\Sigma r_k\cos\theta_k,\qquad R\sin\varphi=\Sigma r_k\sin\theta_k=\Sigma r_k\cos\left(\theta_k-\frac{\pi}{2}\right).$$

Если слагаемые комплексные числа $a_k+b_k i$ представлены точками $M_k(a_k, b_k)$, то назовем для краткости отрезок $OM_k$ вектором комплексного числа $a_k+b_k i$ (его длина равна $r_k$ и угол $OX$, $OM_k=\theta_k$).

Построим геометрическую сумму векторов $OM_k$ (т.-е. через $M_1$ проведем прямую $M_1A_2$, равную и $\parallel$ $OM_2$, через $A_2$ прямую $A_2A_3$, равную и $\parallel$ $OM_3$, и т. д., через $A_{n-1}$ прямую $A_{n-1}A_n$, равную и $\parallel$ $OM_n$; вектор $OA_n$ представляет геометрическую сумму); пусть $R'$ — длина вектора $OA_n$ и $\varphi'$ — угол между $OX$ и $OA_n$. Из аналитической геометрии известно, что проекция геометрической суммы $OA_n$ равна сумме проекций слагаемых векторов $OM_1$, $M_1A_2$, $A_2A_3$, ... $A_{n-1}A_n$; беря проекции на $OX$ и на $OY$, получим

$$R'\cos\varphi'=\sum r_k\cos\theta_k,\quad R'\sin\varphi'=\sum r_k\cos\left(\theta_k-\frac{\pi}{2}\right).$$

Из сравнения с формулами (*) вытекает $R\cos\varphi=R'\cos\varphi'$, $R\sin\varphi=R'\sin\varphi'$, т.-е. $R'=R$, $\varphi'=\varphi+2k\pi$; это показывает, что точка $A_n$ представляет сумму комплексных чисел, изображенных точками $M_k$. Так как прямая $OA_n=R$ короче ломаной $OM_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$, проведенной между теми же точками, то $R\leqq r_1+r_2+\ldots+r_n$, т.-е. модуль суммы комплексных чисел не больше суммы их модулей (равенство имеет место только тогда, когда все аргументы $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ равны и точки $O_1$, $M_1$, $M_2$, ... $M_n$ лежат на одной прямой).

Разностью комплексных чисел $(a_1+b_1 i)-(a_2+b_2 i)$ назовем такое число $A+Bi$, которое определяется условием: $A+Bi+(a_2+b_2 i)=a_1+b_1 i$, откуда, по определению сложения, должно быть $A+a_2=a_1$, $B+b_2=b_1$, $A=a_1-a_2$, $B=b_1-b_2$.

Геометрически разность комплексных чисел $(r_1)_{\theta_1}-(r_2)_{\theta_2}$ строится как сумма чисел $(r_1)_{\theta_1}+(r_2)_{\theta_2+\pi}$, ибо $(r_2)_{\theta_2+\pi}=-(r_2)_{\theta_2}$; при этом число $(r_2)_{\theta_2+\pi}$ изобразится точкою, симметричною относительно $O$ с точкою, изображающею число $(r_2)_{\theta_2}$.

## § 3. Умножение и деление комплексных чисел.

Произведением двух комплексных чисел $(a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i)$ называется число $A+Bi$, в котором $A=a_1a_2-b_1b_2$, $B=b_1a_2+a_1b_2$ (сомножители перемножены как двучлены, с заменой $i^2$ на $-1$ по § 1). Вводя $a_1+b_1 i=(r_1)_{\theta_1}$, $a_2+b_2 i=(r_2)_{\theta_2}$ и $A+Bi=(R)_\varphi$, получаем $R\cos\varphi=$ $=r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2)$ и $R\sin\varphi=r_1r_2\sin(\theta_1+\theta_2)$, откуда $R=r_1r_2$, $\varphi=\theta_1+\theta_2$ (прибавка $2k\pi$ опущена), т.-е. модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей. Это свойство распространяется на случай любого числа сомножителей. Например: $(r_1)_{\theta_1}\cdot(r_2)_{\theta_2}\cdot(r_3)_{\theta_3}=(r_1r_2)_{\theta_1+\theta_2}\cdot(r_3)_{\theta_3}=(r_1r_2r_3)_{\theta_1+\theta_2+\theta_3}$,

Частное двух комплексных чисел $\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}$ определяется как такое число $A+Bi$, которое удовлетворяет условию:

$$a_1+b_1i=(a_2+b_2i)\ (A+Bi)=a_2A-b_2B+i(b_2A+a_2B);$$

это даёт:

$$a_2A-b_2B=a_1,\quad b_2A+a_2B=b_1,$$

откуда

$$A=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\quad B=\frac{b_1a-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Результат деления получается быстрее, если дробь преобразовать, умножив числитель и знаменатель на число $a_2-b_2i$, сопряженное со знаменателем:

$$\frac{(a_1+b_2i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+i(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}.$$

Вводя модули и аргументы: $\frac{(r_1)_{\theta_1}}{(r_2)_{\theta_1}}=(R)_\varphi$, получаем: $R=\frac{r_1}{r_2}$, $\varphi=\theta_1-\theta_2$.

**§ 4. Возвышение комплексного числа в целую положительную степень. Формула Моавра и ее приложения.**

В § 1 число $i$ определено условием: $i^2=-1$; отсюда находятся все целые положительные степени $i$ (принимая $i^{k+1}=i^k\cdot i$); $i^3=-i$, $i^4=+1$, $i^5=i$ и т. д., вообще: $i^{4l}=+1$, $i^{4l+1}=i$, $i^{4l+2}=-1$, $i^{4l+3}=-i$ ($l$ — целое число).

Для комплексного числа $a+bi$ степень $(a+bi)^n$ определяется как произведение $n$ множителей, равных $a+bi$. Пользуясь формулой бинома Ньютона, находим $(a+bi)^n=A+Bi$, где

$$A=a^n-\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4-\ldots$$

$$B=\frac{n}{1}a^{n-1}b-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}a^{n-5}b^5-\ldots$$

Полагая $a+bi=(r)_\theta$, находим $[(r)_\theta]^n=(r)_\theta\cdot(r)_\theta\ldots(r)_\theta=(r^n)_{n\theta}$ (по правилу умножения § 3) или

$$r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta),$$

что по сокращении на $r^n$ дает формулу Моавра:

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n.$$

1) Приравнивая в этой формуле вещественные и мнимые части (см. $A$ и $B$, данные выше), находим выражения для $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$ через степени $\sin\theta$ и $\cos\theta$. Например: $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$, $\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$.

2) Полагая $u=\cos\theta+i\sin\theta$, $v=\cos\theta-i\sin\theta$, находим: $2\cos\theta=u+v$, $2i\sin\theta=u-v$, $uv=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$; далее, по формуле Моавра, имеем: $u^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ и (заменою $\theta$ на $-\theta$) $v^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$, откуда $2\cos n\theta=u^n+v^n$, $2i\sin n\theta=u^n-v^n$. Эти результаты дают возможность выразить $\cos^n\theta$ и $\sin^n\theta$ через косинусы или синусы кратных дуг: $n\theta$, $(n-2)\theta$, $(n-4)\theta\ldots$ (синусы появляются только для нечетной степени синуса).

Например: $(2\cos\theta)^5 = (u+v)^5 = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5 = u^5 + v^5 + 5uv(u^3+v^3) + 10u^2v^2(u+v) = 2\cos 5\theta + 5\cdot 2\cos 3\theta + 10\cdot 2\cos\theta$, откуда $\cos^5\theta = \frac{1}{16}[\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta]$; $(2i\sin\theta)^5 = (u-v)^5 = u^5 - v^5 - 5uv(u^3-v^3) + 10u^2v^2(u-v) = 2i\sin 5\theta - 5\cdot 2i\sin 3\theta + 10\cdot 2i\sin\theta$, откуда $\sin^5\theta = \frac{1}{16}[\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta]$.

Если выражение $e^{\theta i}$ определить помощью формулы:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \dots$$

при $z = \theta i$, то получим, отделяя вещественную часть от мнимой:

$$e^{\theta i} = \left(1 - \frac{\theta^2}{1.2} + \frac{\theta^4}{1.2.3.4} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{1.2.3} + \frac{\theta^5}{1.2.3.4.5} - \dots\right)$$

или

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$$

(на основании известных из дифференциального исчисления разложений для $\cos\theta$ и $\sin\theta$). Меняя здесь $i$ на $-i$, получим

$$e^{-\theta i} = \cos\theta - i\sin\theta;$$

из двух последних равенств следуют формулы Эйлера:

$$2\cos\theta = e^{\theta i} + e^{-\theta i}, \quad 2i\sin\theta = e^{\theta i} - e^{-\theta i}.$$

Ими также можно пользоваться для выражения $\cos^n\theta$ и $\sin^n\theta$.

Например:

$$(2i\sin\theta)^6 = (e^{\theta i} - e^{-\theta i})^6 = e^{6\theta i} - 6e^{4\theta i} + 15e^{2\theta i} - 20 + e^{-6\theta i} - 6e^{-4\theta i} + 15e^{-2\theta i}$$

откуда

$$\sin^6\theta = -\frac{1}{32}\left\{\cos 6\theta - 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta - 10\right\}.$$

3) Положив

$$P_n = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos(n-1)\theta,$$
$$Q_n = \sin\theta + \sin 2\theta + \dots + \sin(n-1)\theta,$$

составим:

$$P_n + iQ_n = 1 + u + u^2 + \dots + u^{n-1} = \frac{1-u^n}{1-u} =$$
$$= \frac{1 - \cos n\theta - i\sin n\theta}{1 - \cos\theta - i\sin\theta} \text{ (где } u = \cos\theta + i\sin\theta).$$

Отделяя вещественную часть от мнимой, найдем:

$$P_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos(n-1)\theta = \frac{\sin\frac{2n-1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$Q_n = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n-1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

## § 5. Извлечение корней из комплексных чисел.

Корнем $n$-й степени из числа $(r)_{\theta_0+2k\pi}$ называется такое число $(R)_\varphi$, для которого $[(R)_\varphi]^n=(r)_{\theta_0+2k\pi}$. Отсюда $(R^n)_{n\varphi}=(r)_{\theta_0+2k\pi}$, следовательно $R^n=r$, $n\varphi=\theta_0+2k\pi$, откуда $R=+\sqrt[n]{r}$, $\varphi=\dfrac{\theta_0+2k\pi}{n}$. В последней формуле нужно положить $k=0, 1, 2, \ldots (n-1)$; если же придать числу $k$ значение, отличающееся от одного из выписанных чисел $h$ на кратное $n$ (назовем его $ln$), то для такого $k=h+ln$ получим значение:

$$\varphi=\frac{\theta_0+2h\pi+2\pi ln}{n}=\frac{\theta_0+2h\pi}{n}+2\pi l,$$

при котором значение $\sqrt[n]{(r)_{\theta_0+2k\pi}}$ будет совпадать со значением этого корня, отвечающим значению $k=h$. Из этого видно, что корень $n$-й степени из комплексного числа имеет $n$ различных значений.

*Пример 1.* Корень $\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{(1)_{2k\pi}}=(1)_{\frac{2k\pi}{n}}$.

При $n$ четном среди $n$ значений этого корня будут два вещественные: $+1$ и $-1$ $\left(\text{при } k=0 \text{ и } k=\dfrac{n}{2}\right)$ и остальные $n-2$ будут попарно сопряженные: $(1)_{\pm\frac{2k\pi}{n}}$ при $k=1, 2, \ldots \dfrac{n-2}{2}$. При $n$ нечетном будет один вещественный корень: $+1$ (при $k=0$) и остальные $(n-1)$ будут попарно сопряженные: $(1)_{\pm\frac{2k\pi}{n}}$ при $k=1, 2, \ldots \dfrac{n-1}{2}$.

*Пример 2.* Корень $\sqrt[n]{-1}=\sqrt[n]{(1)_{(2k+1)\pi}}=(1)_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}$.

При $n$ четном все $n$ значений распадаются на $\dfrac{n}{2}$ пар сопряженных чисел: $(1)_{\pm\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ при $k=0, 1, \ldots \dfrac{n}{2}-1$.

При $n$ нечетном одно значение $\sqrt[n]{-1}$ вещественное: $-1\left(\text{при } k=\dfrac{n-1}{2}\right)$ и остальные $(n-1)$ попарно сопряженные:

$$(1)_{\pm\frac{(2k+1)\pi}{n}} \text{ при } k=0, 1, \ldots \frac{n-3}{2}.$$

## § 6. Разложение целой функции на линейные множители.

Докажем *лемму*: необходимое и достаточное условие делимости целой функции $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ на двучлен $x-a$ заключается в равенстве $f(a)=0$.

Действительно, при делении $f(x)$ на $x-a$ частное будет $\varphi(x)$ — целая функция степени $(n-1)$-й и остаток $R$ — постоянный; по свойству деления должно быть: $f(x)=(x-a)\varphi(x)+R$. Полагая в этом тождестве $x=a$, получаем $f(a)=R$, т.-е. остаток от деления $f(x)$ на $(x-a)$ есть $f(a)$, откуда и следует лемма.

Из леммы вытекает *теорема*: если целая функция $n$-й степени $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет $n$ корней $x_1, x_2, \ldots x_n$ [при которых значения $f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n)$ равны 0], то существует тождество:

$$f(x) = a_0(x - x_1)\ (x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Действительно, из условия $f(x_1) = 0$ следует (согласно лемме), что $f(x)$ делится на $x - x_1$ и дает частное $f_1(x)$ степени $(n-1)$-й:

$$f(x) = (x - x_1)\ f_1(x) \ldots (1).$$

Полагая здесь $x = x_j$ $(j = 2, 3, \ldots n)$, находим $f(x_j) = (x_j - x_1) f_1(x_j) = 0$, откуда, так как $x_j - x_1$ не $= 0$, следует, $f_1(x_j) = 0$. Из условия $f_1(x_2) = 0$ заключаем, что $f_1(x)$ делится на $x - x_2$: $f_1(x) = (x - x_2) \cdot f_2(x) \ldots (2)$ и, далее, что $f_2(x_k) = 0$ при $k = 3, 4, \ldots n$.

Из последнего условия следует, что $f_2(x) = (x - x_3) \cdot f_3(x) \ldots (3)$. Продолжаем такое рассуждение до вывода тождества: $f_{n-1}(x) = (x - x_n)\ f_n(x) \ldots (n)$, где $f_n(x)$, как функция нулевой степени [вообще $f_h(x)$ степени $n - h$], равна постоянному $C$. Перемножая $n$ тождеств (1), (2), ... $(n)$, получаем (по сокращении произведения $f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_{n-1}(x)$ в обеих частях):

$$f(x) = C(x - x_1)\ (x - x_2) \ldots (x - x_n);$$

из сравнения коэффициентов при $x^n$ в обеих частях тождества следует, что $C = a_0$, и теорема доказана.

*Пример 1.* Разложить двучлен $x^n - 1$ на вещественные множители. Корни функции $f(x) = x^n - 1$ совпадают с $n$ значениями $\sqrt[n]{1}$ (см. § 5, пример 1). Замечая, что произведение разностей между $x$ и двумя сопряженными корнями $(1)_{\pm\varphi}$ имеет вещественное значение: $[x - (1)_\varphi][x - (1)_{-\varphi}] = (x - \cos\varphi - i\sin\varphi)(x - \cos\varphi + i\sin\varphi) = (x - \cos\varphi)^2 - (i\sin\varphi)^2 = x^2 - 2x\cos\varphi + 1$, получаем:

при $n$ четном:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x + 1) \prod_{k=1}^{k=\frac{n-2}{2}} \left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right),$$

при $n$ нечетном:

$$x^n - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right).$$

*Пример 2.* Разложить $x^n + 1$ на вещественные множители. Пользуясь примером 2 § 5, найдем:

при $n$ четном:

$$x^n + 1 = \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1\right)$$

и при $n$ нечетном:

$$x^n + 1 = (x + 1) \prod_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \left(x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1\right).$$

## § 7. Случай, когда целая функция n-й степени имеет более n корней.

*Теорема.* Если целая функция $n$-й степени $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет более $n$ корней (например $x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}$), то все ее коэффициенты равны 0.

Действительно, по теореме § 6, зная $n$ корней $x_1, x_2, \ldots x_n$ данной функции, можем написать: $f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$.

Так как $f(x_{n+1}) = a_0(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\ldots(x_{n+1}-x_n) = 0$, то $a_0 = 0$, ибо ни одна из разностей $x_{n+1}-x_j$ не $=0$ $(j=1, 2, \ldots n)$. Если $a_0=0$, то $f(x)$ приводится к функции $(n-1)$ степени: $f(x) = a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ и при наличности $(n-1)$ корней $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ может быть по § 6 представлена в виде: $f(x) = a_1(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$; из условия $f(x_{n+1})=0$ получаем $a_1=0$.

Так рассуждая, придем к уравнению $a_{n-1}x+a_n=0$, имеющему два корня: $x_1, x_2$; вычитанием тождеств: $a_{n-1}x_1+a_n=0$, $a_{n-1}x_2+a_n=0$ получаем $a_{n-1}(x_1-x_2)=0$, откуда $a_{n-1}=0$ и, далее, $a_n=0$.

*Следствие.* Если две целые функции степени не выше $n$ каждая:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$
$$\varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$$

равны более чем при $n$ значениях $x$ (например при $x = x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}$), то они тождественны, т.-е. имеют равные коэффициенты при одинаковых степенях $x$.

Действительно, рассмотрим функцию $F(x) = f(x)-\varphi(x) = (a_0-b_0)x^n + (a_1-b_1)x^{n-1}+\ldots+(a_n-b_n)$; по условию $F(x_j) = f(x_j)-\varphi(x_j)=0$ при $j=1, 2, 3, \ldots n+1$, а так как $F(x)$ степени не выше $n$-ой, то по предъидущей теореме все коэффициенты функции $F$ равны нулю: $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $\ldots a_n=b_n$.

## § 8. Формула Лагранжа для интерполирования.

Поставим задачу: найти целую функцию степени не выше 3-й, которая при 4 частных значениях $x$: $x_0, x_1, x_2, x_3$ принимала бы данные значения: $u_0, u_1, u_2, u_3$. Составим целую функцию 3-ей степени:

$$F(x) = u_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + u_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$
$$+ u_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + u_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)},$$

для которой $F(x_0)=u_0$, $F(x_1)=u_1$, $F(x_2)=u_2$, $F(x_3)=u_3$. Таким образом искомая функция $f(x)$ и составленная выше функция $F(x)$, будучи степени не выше 3-й, равны при четырех значениях $x$. По следствию § 7, они тождественны, т.-е. искомая функция:

$$(x) = \sum_{j=0}^{j=3} f(x_j)\cdot\frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)},$$

где $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, ибо легко убедиться, что

$$\omega'(x_0) = (x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3).$$

В общем случае, когда требуется построить целую функцию степени не выше $n$-й по данным $(n+1)$ ее значениям, отвечающим значениям $x$: $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$, решение представляется в виде:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\cdot\frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)},$$

где $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

## § 9. Кратные корни целой функции.

Число $x=a$ называется $k$-кратным корнем функции $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x-a)^k$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$; в таком случае $f(x)=(x-a)^k\cdot\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ целая функция, которая не делится на $x-a$, так что $\varphi(a)$ не $=0$ (по § 6).

*Теорема.* Если $x=a$ служит $k$-кратным корнем функции $f(x)$, то $x=a$ служит $(k-1)$-кратным корнем производной $f'(x)$, $(k-2)$-кратным корнем второй производной $f''(x)$ и т. д., простым корнем для $f^{(k-1)}(x)$ и не служит корнем для $f^{(k)}(x)$.

В самом деле, по определению $k$-кратного корня имеем: $f(x)=(x-a)^k\varphi(x)$ при $\varphi(a)$ не $=0$; отсюда $f'(x)=k(x-a)^{k-1}\varphi(x)+$ $+(x-a)^k\varphi'(x)=(x-a)^{k-1}\cdot\varphi_1(x)$, где $\varphi_1(x)=k\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$; так как $\varphi_1(a)=k\varphi(a)$ не $=0$, то из формулы $f'(x)=(x-a)^{k-1}\varphi_1(x)$ следует, что $f'(x)$ имеет корень $x=a$ $(k-1)$-й кратности. Итак при переходе от функции $f(x)$ к ее производной порядок кратности на единицу понижается. Это дает доказательство теоремы.

*Обратная теорема.* Если дано: $f(a)=0$, $f'(a)=0$, $f''(a)=0,\ldots$ $\ldots f^{(k-1)}(a)=0$, $f^{(k)}(a)$ не$=0$, то $x=a$ является $k$-кратным корнем функции $f(x)$. Доказательство получается из формулы Тэйлора для целой функции (установленной в дифференциальном исчислении):

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(k-1)}(a)}{1\cdot 2\ldots(k-1)}(x-a)^{k-1}+$$
$$+\frac{f^{(k)}(a)}{1\cdot 2\ldots k}(x-a)^k+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{1\cdot 2\ldots n}(x-a)^n$$

(предполагая, что функция $f(x)$ — $n$-й степени). При условиях теоремы находим: $f(x)=(x-a)^k\cdot\varphi(x)$, где

$$\varphi(x)=\frac{f^{(k)}(a)}{1\cdot 2\ldots k}+\frac{f^{(k+1)}(a)}{1\cdot 2\ldots(k+1)}\cdot(x-a)+\ldots,$$

и так как $\varphi(a)=\dfrac{f^{(k)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$ не $=0$, то для $f(x)$ корень $x=a$ служит $k$-кратным.

## § 10. Комплексные сопряженные корни целой функции с вещественными коэффициентами.

*Теорема.* Если целая функция с вещественными коэффициентами имеет $k$-кратный комплексный корень $x=\alpha+i\beta$, то она имеет и сопряженный корень $(\alpha-\beta i)$ также $k$-й кратности.

По условию имеем: $f(x)=(x-\alpha-\beta i)^k\cdot\varphi(x)$, при чем $\varphi(\alpha+\beta i)$ не $=0$; заменим в этом тождестве $i$ на $-i$; тогда $f(x)$ не изменится, так как все коэффициенты ее вещественны, и получится: $f(x)=(x-\alpha+\beta i)^k\cdot\varphi_1(x)$, где $\varphi_1(x)$ выводится из $\varphi(x)$ заменою $i$ на $-i$. Отсюда следует, что $x=\alpha-\beta i$ служит корнем функции $f(x)$ кратности не меньше $k$-й; но нельзя допустить, что эта кратность выше $k$-й, так как, предположив, что $x=\alpha-\beta i$ является $(k+1)$-кратным корнем для $f(x)$, мы имеем:

$$f(x)=(x-\alpha+\beta i)^{k+1}\cdot\psi_1(x),$$

откуда, после замены $i$ на $-i$, получается $f(x)=(x-\alpha-\beta i)^{k+1}\cdot\psi(x)$, т.-е. корень $x=\alpha+\beta i$ оказывается $(k+1)$-кратным для $f(x)$, что противоречит условию теоремы. Итак корень $x=\alpha-\beta i$ является для $f(x)$ $k$-кратным.

*Замечание.* Произведение разностей $[x-(\alpha+\beta i)][x-(\alpha-\beta i)]$, отвечающих двум сопряженным корням целой функции, равно $(x-\alpha)^2-(\beta i)^2=$ $=x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)$ и представляет функцию 2-й степени, которая при всех вещественных $x$ имеет значение положительное (наименьшее ее значение $\beta^2$). Отсюда вытекает самое общее разложение целой функции с вещественными коэффициентами на вещественные множители:

$$f(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda(x^2+2px+q)^m\ldots(x^2+2rx+s)^t,$$

при чем сумма $\alpha+\beta+\ldots+\lambda+2m+\ldots+2t$ равна показателю степени функции $f(x)$ [здесь $\alpha$, $\beta$, ... $\lambda$ означают кратность вещественных корней $a$, $b$, ... $l$, а числа $m$, ... $t$ кратность пар сопряженных корней].

## § 11. Разложение рациональных дробей на простейшие дроби.

Если дана рациональная дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$, где степень целой функции в числителе не ниже степени целой функции в знаменателе, то можно делением исключить из дроби целую часть. Именно, пусть частное от деления $f(x)$ на $F(x)$ равно $\omega(x)$ и остаток $\varphi(x)$; тогда $f(x)=F(x)\cdot\omega(x)+\varphi(x)$, откуда $\frac{f(x)}{F(x)}=\omega(x)+\frac{\varphi(x)}{F(x)}$, т.-е. из данной дроби исключилась целая часть, и получилась дробь $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$, у которой степень числителя ниже степени знаменателя.

*Теорема.* Если в несократимой дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ степень числителя ниже степени знаменателя и знаменатель разложен на вещественные множители: $F(x)=\Pi(x-\alpha)^\alpha\cdot\Pi(x^2+2px+q)^m$ [$\Pi$ есть знак произведения], то существует одна определенная система постоянных чисел $A$, $P$, $Q$ (общее число этих коэффициентов $\Sigma(\alpha+2m)$ равно показателю степени знаменателя), при которых имеет место тождество:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\sum\left[\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_\alpha}{x-a}\right]+$$
$$+\sum\left[\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+2px+q)^m}+\frac{P_2x+Q_2}{(x^2+2px+q)^{m-1}}+\ldots+\frac{P_mx+Q_m}{x^2+2px+q}\right]$$

($\Sigma$ — знак суммирования).

Для доказательства положим $F(x)=(x-a)^\alpha\cdot F_1(x)$, при чем $F_1(a)$ не $=0$, и выясним, что возможно выбрать постоянное $A_1$ и целую функцию $f_1(x)$ так, чтобы существовало тождество:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

В самом деле, отсюда находим:

$$f_1(x)=\frac{f(x)-A_1F_1(x)}{x-a};$$

чтобы $f_1(x)$ была целою функцией, согласно лемме § 6, должно быть:

$$f(a)-A_1F_1(a)=0,$$

откуда $A_1 = \frac{f(a)}{F_1(a)}$ [$A_1$ — число конечное, так как $F_1(a)$ не $= 0$ и $A_1$ не $= 0$, так как для несократимой дроби $f(a)$ не $= 0$]. Подобно тождеству (1) установим:

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}F_1(x)}, \quad \ldots \quad (2)$$

где

$$A_2 = \frac{f_1(a)}{F_1(a)}, \quad f_2(x) = \frac{f_1(x) - A_2F_1(x)}{x-a},$$

и так дойдем до

$$\frac{f_{\alpha-1}(x)}{(x-a)F_1(x)} = \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

Складывая тождества (1) — ($\alpha$), найдем:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}.$$

Возможность определения постоянных $P_j$, $Q_j$ ($j = 1, 2, \ldots m$) доказывается так: пусть знаменатель дроби $\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}$ содержит $(x^2 + 2px + q)^m$, так что $\Phi(x) = (x^2 + 2px + q)^m \cdot \Phi_1(x)$, докажем, что существует тождество:

$$\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} = \frac{P_1x + Q_1}{(x^2 + 2px + q)^m} + \frac{\varphi_1(x)}{(x^2 + 2px + q)^{m-1}\Phi_1(x)},$$

где $P_1$ и $Q_1$ — постоянные и $\varphi_1(x)$ — целая функция. Из этого тождества следует:

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x) - (P_1x + Q_1)\Phi_1(x)}{x^2 + 2px + q};$$

обозначая через $\xi \pm i\eta$ корни трехчлена $x^2 + 2px + q$, составляем условие делимости числителя на $(x - \xi - i\eta)(x - \xi + i\eta)$:

$$\varphi(\xi \pm i\eta) = [P_1(\xi \pm i\eta) + Q_1] \cdot \Phi_1(\xi \pm i\eta);$$

полагая $\frac{\varphi(\xi \pm i\eta)}{\Phi_1(\xi \pm i\eta)} = M \pm Ni$ (что имеем право сделать, так как коэффициенты функций $\varphi(x)$ и $\Phi_1(x)$ предполагаются вещественными), получаем: $M = P_1\xi + Q_1$, $N = P_1\eta$, откуда (так как $\eta$ не $= 0$) находим значения $P_1$ и $Q_1$. Тем же приемом докажется существование коэффициентов $P_2$, $Q_2$, $\ldots P_m$, $Q_m$.

При решении задач применяются различные приемы для нахождения коэффициентов $A$, $P$, $Q$.

*Пример 1.* Разложить на простейшие дроби: $\frac{x}{x^3 + 1}$. Здесь $F(x) = x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, следовательно:

$$\frac{x}{x^3 + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Px + Q}{x^2 - x + 1}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получаем тождество между двумя целыми функциями:

$$x = A(x^2 - x + 1) + (Px + Q)(x + 1).$$

Приравнивая коэффициенты при $x^2$, при $x$ и свободные члены, получим:

$$0 = A + P,\ 1 = -A + P + Q,\ 0 = A + Q,$$

откуда

$$A = -\frac{1}{3},\ P = \frac{1}{3},\ Q = \frac{1}{3}.$$

*Пример 2.* $$\frac{x^2+1}{(x+1)^2\,(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{Px+Q}{x^2+x+1}.$$

Освобождаясь от знаменателей, имеем:

$$x^2+1 = A_1(x^2+x+1) + A_2(x+1)(x^2+x+1) + (Px+Q)\,(x+1)^2.$$

Так как это равенство справедливо при всяком $x$, то положим: 1) $x=-1$, что дает: $2=A_1$ и 2) $x=\alpha$, где $\alpha$ есть один из двух корней уравнения $\alpha^2+\alpha+1=0$; тогда $\alpha^2+1=(P\alpha+Q)(\alpha+1)^2$; в полученном равенстве нужно исключить степени $\alpha^2$, $\alpha^3$.... при помощи уравнения $\alpha^2+\alpha+1=0$, именно: $\alpha^2=-\alpha-1$, $\alpha^3=-\alpha^2-\alpha=1$, $\alpha^4=\alpha$ и т. д., тогда останется уравнение 1-й степени относительно $\alpha$: $M\alpha+N=M_1\alpha+N_1$; и так как оно справедливо при двух значениях $\alpha$, то должно быть $M=M_1$, $N=N_1$, откуда найдутся $P$ и $Q$. В данном примере: $\alpha^2+1=-\alpha$, $(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1=\alpha$, следовательно, получаем: $-\alpha=(P\alpha+Q)\alpha$; сокращая на $\alpha$, имеем: $-1=P\alpha+Q$, откуда $P=0$, $Q=-1$.

Последний коэффициент $A_2$ определяем из сравнения членов при $x^2$ в обеих частях начального тождества, что дает: $0=A_2+P$, $A_2=0$.

Итак $$\frac{x^2+1}{(x+1)^2\,(x^2+x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2+x+1}.$$

*Пример 3.*

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^3(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{(x+1)^3} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{x+1} + \frac{Px+Q}{x^2+2x+2}.$$

Можно определить сразу все неизвестные $A_j$ способом деления. Положив $x+1=y$, перепишем предыдущее равенство так:

$$\frac{1-y+y^2}{y^3(y^2+1)} = \frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y^2} + \frac{A_3}{y} + \frac{Py+Q-P}{y^2+1}.$$

Теперь разделим $1-y+y^2$ на $1+y^2$, располагая деление по возрастающим степеням $y$ и выписывая в частном три члена (свободный, с $y$ и с $y^2$) — по числу неизвестных $A_j$. Имеем:

$$\begin{array}{l|l} 1-y+y^2 & 1+y^2 \\ \underline{1\qquad\ +y^2} & \overline{1-y+0\cdot y^2} \\ \quad -y & \\ \quad \underline{-y-y^3} & \\ \qquad\quad y^3 & \end{array}$$

По свойству деления получается тождество:

$$1-y+y^2 = (1+y^2)(1-y+0\cdot y^2)+y^3,$$

откуда

$$\frac{1-y+y^2}{y^3(1+y^2)} = \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^2} + \frac{0}{y} + \frac{1}{1+y^2};$$

это дает: $A_1=1$, $A_2=-1$, $A_3=0$, $P=0$, $Q=1$.

*Пример 4.* $$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)^4}=\frac{A}{x-1}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+x+1)^4}+$$
$$+\frac{P_2x+Q_2}{(x^2+x+1)^3}+\frac{P_3x+Q_3}{(x^2+x+1)^2}+\frac{P_4x+Q_4}{x^2+x+1}.$$

Умножив тождество на $x-1$ и положив затем $x=1$, находим: $A=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$. Далее составим разность

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)^4}-\frac{1}{81(x-1)}=$$
$$=\frac{-1}{81(x^2+x+1)^4}\{x^8+4x^7+10x^6+15x^5+19x^4+16x^3+10x^2+4x-80\}:(x-1)=$$
$$=-\frac{1}{81(x^2+x+1)^4}\cdot\{x^7+5x^6+15x^5+31x^4+50x^3+66x^2+76x+80\}$$

Обозначив функцию в скобках $\{\ldots\}$ через $f(x)$ и положив $x^2+x+1=R$, делаем три деления, расположенные по убывающим степеням $x$.

При делении $f(x)$ на $R$ получаем $f(x)=R\cdot f_1(x)+(27x+54)$, где
$$f_1(x)=x^5+4x^4+10x^3+17x^2+23x+26;$$
при делении $f_1(x)$ на $R$ получаем:
$$f_1(x)=R\cdot f_2(x)+(9x+18),$$
где
$$f_2(x)=x^3+3x^2+6x+8;$$
при делении $f_2(x)$ на $R$ получаем:
$$f_2(x)=R\cdot f_3(x)+3x+6,$$
где
$$f_3(x)=x+2.$$

В результате делений получаем разложение функции $f(x)$ по степеням $R$:
$$f(x)=27x+54+R(9x+18)+R^2(3x+6)+R^3(x+2),$$
откуда
$$\frac{f(x)}{R^4}=\frac{27x+54}{R^4}+\frac{9x+18}{R^3}+\frac{3x+6}{R^2}+\frac{x+2}{R},$$
и окончательно $\left(\text{умножая на}-\frac{1}{81}\right)$ получаем: $P_1=-\frac{1}{3}$, $Q_1=-\frac{2}{3}$, $P_2=-\frac{1}{9}$, $Q_2=-\frac{2}{9}$, $P_3=-\frac{1}{27}$, $Q_3=-\frac{2}{27}$, $P_4=-\frac{1}{81}$, $Q_4=-\frac{2}{81}$.

## § 12. Соотношения между коэффициентами и корнями целой функции. Формулы Ньютона.

Пусть $n$ корней целой функции:
$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$
равны $x_1, x_2, \ldots x_n$. По § 6 имеем:
$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=x^n-x^{n-1}\Sigma x_1+$$
$$x^{n-2}\Sigma x_1x_2-x^{n-3}\Sigma x_1x_2x_3+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\Sigma x_1x_2\ldots x_{n-1}+(-1)^n x_1x_2\ldots x_n,$$
где $\Sigma x_1$ (число слагаемых $n$) означает сумму всех корней, $\Sigma x_1x_2$ (число слагаемых $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$) означает сумму произведений корней по два и т. д.

Приравнивая коэффициенты в обеих частях тождества, получаем:

$$\Sigma x_1 = -a_1,\ \Sigma x_1x_2 = a_2,\ \Sigma x_1x_2x_3 = -a_3, \ldots$$
$$\ldots \Sigma x_1x_2\ldots x_{n-1} = (-1)^{n-1}a_{n-1},\quad x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_n.$$

Выведем формулы для выражения сумм одинаковых степеней корней уравнения: $S_j = x_1^j + x_2^j + x_3^j + \ldots + x_n^j$ через коэффициенты его. Взяв логарифмические производные от обеих частей тождества:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

получим:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k},\quad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x)}{x - x_k}.$$

Выполнив деление $f(x)$ на $x - x_k$, при чем остаток от деления $f(x_k) = 0$, получим:

$$\frac{f(x)}{x - x_k} = x^{n-1} + (a_1 + x_k)x^{n-2} + (a_2 + a_1x_k + x_k^2)x^{n-3} +$$
$$+ (a_3 + a_2x_k + a_1x_k^2 + x_k^3)x^{n-4} + \ldots + (a_{n-1} + a_{n-2}x_k + \ldots + x_k^{n-1}),$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x)}{x - x_k} = nx^{n-1} + (na_1 + S_1)x^{n-2} + (na_2 + a_1S_1 + S_2)x^{n-3} +$$
$$+ (na_3 + a_2S_1 + a_1S_2 + S_3)x^{n-4} + \ldots + (na_{n-1} + a_{n-2}S_1 + \ldots + S_{n-1}).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в последнем выражении и у функции

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots + a_{n-1},$$

получаем формулы:

$$S_1 + a_1 = 0,\quad S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0,\quad S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0,$$
$$\ldots S_{n-1} + a_1S_{n-2} + a_2S_{n-3} + \ldots + (n-1)a_{n-1} = 0.$$

Из них: $S_1 = -a_1$, $S_2 = a_1^2 - 2a_2$, $S_3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3$ и т. д.

Чтобы продолжить ряд формул Ньютона и вычислить $S_n$, $S_{n+1}, \ldots$, выпишем тождества:

$$x_k^m f(x_k) = x_k^{n+m} + a_1x_k^{n+m-1} + \ldots + a_{n-1}x_k^{m+1} + a_nx_k^m = 0$$

и просуммируем от $k = 1$ до $k = n$.

Это даст: $S_{n+m} + a_1S_{n+m-1} + \ldots + a_{n-1}S_{m+1} + a_nS_m = 0$.

Беря $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, можем вычислить $S_n$, $S_{n+1}$, $S_{n+2}\ldots$

При $m = -1$, замечая, что $S_0 = n$, находим: $S_{-1} = \sum_{k=1} \frac{1}{x_k} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

[Быстрее получается деление выражений:

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}\Sigma x_1x_2\ldots x_{n-1} \quad \text{и} \quad a^n = (-1)^n \cdot x_1x_2\ldots x_n].$$

## § 13. Общий наибольший делитель целой функции и ее производной.

Пусть $f(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \ldots (x - l)^\lambda$, где $a, b, \ldots l$ корни функции $f(x)$ [вещественные или мнимые] кратности $\alpha, \beta, \ldots \lambda$. Беря логарифмические производные от обеих частей, найдем:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x - a} + \frac{\beta}{x - b} + \ldots + \frac{\lambda}{x - l}.$$

Положим:

$$D(x)=(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots(x-l)^{\lambda-1},\ Q(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$
$$Q_1(x)=\alpha(x-b)\ldots(x-l)+\beta(x-a)\ldots(x-l)+\ldots+\lambda(x-a)(x-b)\ldots(x-k).$$

Тогда $f(x)=D(x)\cdot Q(x)$ и $f'(x)=D(x)\cdot Q_1(x)$; отсюда видно, что $D(x)$ есть общий наибольший делитель функций $f(x)$ и $f'(x)$, так как функции $Q(x)$ и $Q_1(x)$ не имеют общих делителей [$Q(x)$ делится только на $x-a$, $x-b,\ldots x-l$, а $Q_1(x)$ не делится ни на один из этих множителей, ибо $Q_1(a)=\alpha(a-b)\ldots(a-l)$, $Q_1(b)=\beta(b-a)\ldots(b-l)$ и проч. не равны нулю]. Итак, если целая функция разложена на линейные множители: $f(x)=\Pi(x-a)^{\alpha}$, то общий наибольший делитель функции и ее производной равен $\Pi(x-a)^{\alpha-1}$. Отсюда следует, что при отсутствии у функции $f(x)$ кратных корней (тогда все показатели $\alpha$ равны 1) общий наибольший делитель функции и ее производной равен 1 (или любой постоянной). Отметим, что этот общий наибольший делитель можно найти последовательным делением функций так же, как находится он в арифметике для целых чисел; поэтому при помощи одних делений многочленов можно узнать, имеет ли данное уравнение $f(x)=0$ кратные корни или нет.

Например, при $f(x)=x^3-x^2-x+1$ имеем: $f'(x)=3x^2-2x-1$; общий наибольший делитель функций $f(x)$ и $f'(x)$ находим последовательным делением. Оказывается $D(x)=x-1$; отсюда $f(x)$ делится на $(x-1)^2$; и действительно $f(x)=(x-1)^2(x+1)$.

## § 14. Определители 3-го порядка.

Решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$a_1x+b_1y+c_1z=p_1,\quad a_2x+b_2y+c_2z=p_2,\quad a_3x+b_3y+c_3z=p_3$$

можно быстро составить помощью особых символов — определителей.

Выпишем в таблицу 9 коэффициентов данного уравнения:

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right|\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array},$$

припишем справа еще раз два первые столбца и составим шесть произведений из членов, стоящих на диагоналях, при чем 3 произведения берем с + (диагонали идут $\| a_1b_2c_3$) и 3 произведения с — (диагонали $\| c_1b_2a_3$). Получим шестичлен:

$$\Delta=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3,$$

который называется определителем данной системы. Представив его в виде:

$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3,$$

где $$A_1=b_2c_3-c_2b_3,\quad A_2=c_1b_3-b_1c_3,\quad A_3=b_1c_2-c_1b_2,$$

умножим данные уравнения на $A_1$, $A_2$, $A_3$ и сложим; получим:

$$x\cdot\Delta=p_1A_1+p_2A_2+p_3A_3$$

(коэффициенты при $y$ и $z$ будут нули); отсюда находим выражение $x$ в виде отношения определителей:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

В выражениях для $y$ и $z$ знаменатель будет также $\Delta$, а числители получаются из знаменателя заменою коэффициентов при определяемом неизвестном свободными членами.

Шестичлен $\Delta$ можно разложить по элементам любого столбца или строки (например $\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$, где $B_1 = c_2a_3 - a_2c_3$, $C_1 = a_2b_3 - b_2a_3$), и из таких разложений вытекают следующие свойства:

1) Определитель равен нулю, если все элементы какой-нибудь строки или столбца равны нулю.

2) Определитель равен нулю, если соответственные элементы двух строк или двух столбцов пропорциональны.

3) Определитель меняет знак, если переставить две строки или два столбца (например $A_1$, $A_2$, $A_3$ меняют знак при перестановке букв $b$ и $c$).

4) Если все члены какой-нибудь строки (столбца) определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

5) Чтобы сложить два определителя, имеющие по два тождественных столбца (на одинаковых местах), нужно сложить элементы третьих столбцов.

6) Определитель не меняется, если к элементам какого-нибудь столбца придать соответственные элементы другого столбца, умноженные на одно и то же число.

Докажем следующую теорему: необходимое и достаточное условие совместности системы трех линейных уравнений с двумя неизвестными: $a_1X + b_1Y + c_1 = 0$, $a_2X + b_2Y + c_2 = 0$, $a_3X + b_3Y + c_3 = 0$ заключается в равенстве нулю определителя этой системы.

В самом деле, положив $X = \frac{x}{z}$, $Y = \frac{y}{z}$, будем иметь $z$ не $= 0$ при конечных значениях $X$, $Y$; поэтому можем данные уравнения умножить на $z$, и тогда получим систему, рассмотренную в начале параграфа, при $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. Определяя из этой системы $z$, получим: $\Delta \cdot z = 0$, так как определитель, содержащий столбцы $a$, $b$, $p$, будет нуль; отсюда при $z$ не $= 0$ находим $\Delta = 0$. Эту теорему можно формулировать еще так: чтобы система трех линейных однородных уравнений $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ и пр. имела решения, отличные от решений $x = y = z = 0$, необходимо и достаточно условие: $\Delta = 0$.

*Пример.* При каком значении $k$ система:

$$2x + 3y - 7 = 0, \quad 5x - 4y - 6 = 0, \quad x + ky - 8 = 0$$

будет совместною. Приравнивая нулю определитель, находим $138 - 23k = 0$, $k = 6$.

ОТДЕЛ I.

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ.

## Глава I.

## Общие приемы интегрирования.

### § 1. Предмет интегрирования функций.

Интегрирование функций есть действие, обратное дифференцированию, т.-е. восстановление первообразной функции $F(x)$ по данному ее дифференциалу: $f(x)\,dx = dF(x)$; эта первообразная функция называется неопределенным интегралом функции $f(x)\,dx$, что обозначается символом:

$$\int f(x)\,dx = F(x).$$

Название «неопределенный» присоединяется потому, что данному дифференциалу $f(x)\,dx$ отвечает бесчисленное множество интегралов, отличающихся один от другого прибавочной постоянной; действительно, допустив, что $\int f(x)\,dx$ имеет два значения: $F(x)$ и $F_1(x)$, имеем: $dF_1(x) = dF(x) = f(x)dx$, откуда $d\{F_1(x) - F(x)\} = 0$, следовательно $F_1(x) - F(x) = C$ (постоянной произвольной), $F_1(x) = F(x) + C$.

Поэтому формулы интегрирования функций пишутся всегда в виде

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Интегрирование функций обычно имеет предметом перечисление таких классов функций $f(x)\,dx$, которые интегрируются «в конечном виде», т.-е. для которых $F(x)$ выражается конечным числом операций через функции алгебраические, показательные, логарифмические, тригонометрические и круговые. Часто очень простые по виду интегралы не берутся в конечном виде, например: $\int \frac{e^x}{x}\,dx$, $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$, $\int \sqrt{\sin x}\cdot dx$, $\int e^{x^2}dx$ и т. д.

### § 2. Таблица основных формул.

Согласно определению § 1, каждой формуле дифференциального исчисления $dF(x) = f(x)dx$ отвечает формула интегрирования функций:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Поэтому из таблицы основных формул дифференцирования функций:

$$d\left(\frac{y^{m+1}}{m+1}\right)=y^m dy\ (m \gtrless -1),\ d(\log y)=\frac{dy}{y},$$
$$d\left(\frac{a^y}{\log a}\right)=a^y dy,\ d(e^y)=e^y dy,$$
$$d(\sin y)\ =\cos y\,dy,\ d(-\cos y)=\sin y\,dy,$$
$$d(\operatorname{tg} y)\ =\frac{dy}{\cos^2 y},\ d(-\cot y)=\frac{dy}{\sin^2 y},$$

$$d(\arcsin y)=d(-\arccos y)=\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},\ d(\operatorname{arctg} y)=d(-\operatorname{arccot} y)=\frac{dy}{1+y^2}$$

выводится основная таблица интегрирования функций:

$$(1)\int y^m dy=\frac{y^{m+1}}{m+1}+C(m \gtrless -1),\ (2)\int\frac{dy}{y}=\log y+C,$$
$$(3)\int a^y dy=\frac{a^y}{\log a}+C,\ (4)\int e^y dy=e^y+C,$$
$$(5)\int\cos y\,dy=\sin y+C,\ (6)\int\sin y\,dy=-\cos y+C,$$
$$(7)\int\frac{dy}{\cos^2 y}=\operatorname{tg} y+C,\ (8)\int\frac{dy}{\sin^2 y}=-\cot y+C,$$
$$(9)\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\arcsin y+C=-\arccos y+C_1,$$
$$(10)\int\frac{dy}{1+y^2}=\operatorname{arctg} y+C=-\operatorname{arccot} y+C_1.$$

Здесь $y$ означает любую функцию от $x$, допускающую дифференцирование.

Двойственный результат в формулах (9) и (10) находится в согласии с § 1, ибо $\arcsin y-(-\arccos y)=\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{arctg} y-(-\operatorname{arccot} y)=\frac{\pi}{2}$. К приведенным формулам присоединяем:

$$(11)\int af(x)dx=a\cdot\int f(x)dx$$
$$(12)\int[f(x)\pm f_1(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int f_1(x)dx,$$

вытекающие из результатов дифференциального исчисления:

$$d[aF(x)]=a\cdot dF(x),$$
$$d[F(x)\pm F_1(x)]=dF(x)\pm dF_1(x).$$

Из предыдущих 12 формул выводятся все результаты интегрирования функций при помощи одного из трех основных приемов интегрирования, излагаемых в следующих §§.

### § 3. Способ подстановки или введения новой переменной.

Пусть переменные $x$ и $y$ связаны уравнением: $y=\varphi(x)$, из которого $x=\psi(y)$; тогда $dx=\psi'(y)dy$, и $f(x)dx=f[\psi(y)]\cdot\psi'(y)dy=\omega(y)dy$. При надлежащем выборе функции $\varphi(x)$ может случиться, что $\int\omega(y)dy$ заключается

среди 10 основных формул § 2, тогда как $\int f(x)dx$ не обладает этим свойством. В этом случае мы найдем: $\int \omega(y)dy = F(y) + C$, и отсюда

$$\int f(x)dx = F[\varphi(x)] + C, \text{ ибо } dF[\varphi(x)] = dF(y) = \omega(y)dy = f(x)dx.$$

*Пример 1.* $\int f(ax+b)\cdot dx$, где $a$ и $b$ — постоянные.

Подстановкою $y = ax + b$, $dx = \frac{1}{a}\,dy$ находим:

$$\int f(ax+b)\cdot dx = \frac{1}{a}\cdot\int f(y)dy = \frac{1}{a}F(y) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Частные случаи:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{a}\int\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{a}\int y^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{1}{a}\cdot 2y^{\frac{1}{2}} + C\,[\text{ф. } (1), \S\,2] =$$

$$= \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C; \int \sin(ax+b)\cdot dx = \frac{1}{a}\int \sin y\,dy = -\frac{1}{a}\cos y +$$

$$+ C\,[\text{ф. } (6), \S\,2] = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C; \int\frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int\frac{dy}{y} =$$

$$= \frac{1}{a}\log y + C\,[\text{ф. } (2), \S\,2] = \frac{1}{a}\log(ax+b) + C.$$

Последнюю формулу иногда пишут в виде $\frac{1}{a}\log|ax+b| + C$, где знак $|\ldots|$ выражает абсолютное значение; делают это во избежание мнимого результата при $ax+b$ отрицательном, когда имеем: $\log(ax+b) = \log\{-|ax+b|\} = \log|ax+b| + \log(-1)$, при чем $\log(-1)$, как постоянное, присоединяется к $C$.

*Пример 2.* $\int f(ax^2+b)\cdot x dx$.

Подстановка $y = ax^2 + b$, $xdx = \frac{1}{2a}\,dy$ дает:

$$\int f(ax^2+b)\cdot xdx = \frac{1}{2a}\int f(y)dy = \frac{1}{2a}F(y) + C = \frac{1}{2a}F(ax^2+b) + C.$$

Частные случаи:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{ax^2+b}} = \frac{1}{2a}\int\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{a}\sqrt{y} + C = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+b} + C;$$

$$\int\frac{xdx}{ax^2+b} = \frac{1}{2a}\int\frac{dy}{y} = \frac{1}{2a}\log y + C = \frac{1}{2a}\log(ax^2+b) + C.$$

$$\int\frac{xdx}{(ax^2+b)^2} = \frac{1}{2a}\int\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2a}\int y^{-2}dy = \frac{1}{2a}\cdot\frac{y^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{2a(ax^2+b)} + C.$$

*Пример 3.* $\int\frac{dx}{a^2x^2+b^2}$.

Подстановка $ax = by$, $dx = \frac{b}{a}dy$ дает:

$$\int \frac{dx}{a^2x^2 + b^2} = \frac{b}{a}\int \frac{dy}{b^2(y^2+1)} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg} y + C\,[\text{ф. (10), §2}] =$$
$$= \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{ax}{b}\right) + C.$$

*Пример 4.* $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - a^2x^2}}$.

Та же подстановка дает:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - a^2x^2}} = \frac{b}{a}\int \frac{dy}{\sqrt{b^2(1-y^2)}} = \frac{1}{a}\arcsin y + C\,[\text{ф. (9), §2}] =$$
$$= \frac{1}{a}\cdot\arcsin\left(\frac{ax}{b}\right) + C.$$

*Пример 5.* $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2 \pm b^2}}$.

Подстановка Эйлера $ax + \sqrt{a^2x^2 \pm b^2} = y$ дает:

$$a^2x^2 \pm b^2 = y^2 - 2axy + a^2x^2;$$

сокращая $a^2x^2$ и дифференцируя, находим:

$$0 = 2ydy - 2axdy - 2aydx, \text{ откуда } \frac{dx}{y - ax} = \frac{dy}{ay}$$

или

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2 \pm b^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{a}\log y + C = \frac{1}{a}\log(ax + \sqrt{a^2x^2 \pm b^2}) + C.$$

**§ 4. Способ интегрирования по частям.**

Из формулы дифференциального исчисления: $d(uv) = udv + vdu$ следует, согласно определению §1 и формуле (12), §2, что $uv = \int udv + \int vdu$, откуда $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int vdu$. Это есть формула интегрирования по частям; она приводит $\int u \cdot dv$ к интегралу $\int v \cdot du$, который при надлежащем выборе множителей $u$ и $dv$ может оказаться проще, чем $\int u \cdot dv$.

При этом при вычислении $\int dv$ можно взять любое из его значений $v + C$, без влияния на результат, ибо $\int u \cdot dv = u \cdot (v + C) - \int (v + C)du =$ $= uv + Cu - \int vdu - C\int du = uv - \int vdu$.

*Пример 1.* $\int xe^x dx$.

Полагая $u = x$, $dv = e^x dx$, находим: $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$ [ф. (4), §2]; по формуле интегрирования по частям имеем:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Беря в данном интеграле $u=e^x$, $dv=xdx$, $du=e^xdx$, $v=\frac{1}{2}x^2$, получаем другой результат: $\int xe^xdx=\frac{1}{2}x^2e^x-\frac{1}{2}\int x^2e^xdx$, который непригоден для вычисления $\int xe^xdx$, но может дать значение интеграла $\int x^2e^xdx$, когда уже $\int xe^xdx$ известен:

Сходным приемом найдем:

$$\int x\cos x dx=x\sin x+\cos x+C,$$
$$\int x\sin x dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

*Пример* 2. $\int\frac{x^2dx}{(ax^2+b)^n}$ $(n=2,3,4\ldots)$ полагая $u=x$, $dv=\frac{xdx}{(ax^2+b)^n}$, находим $du=dx$, $v=\int\frac{xdx}{(ax^2+b)^n}=\frac{-1}{2a(n-1)\ (ax^2+b)^{n-1}}$ (см. пример 2, §3); отсюда $\int\frac{x^2dx}{(ax^2+b)^n}=-\frac{x}{2a(n-1)\ (ax^2+b)^{n-1}}+\frac{1}{2a(n-1)}\int\frac{dx}{(ax^2+b)^{n-1}}$; формула приводит данный интеграл к более простому и в частности, при $n=2$ и при $a>0$, $b>0$, дает окончательный результат, ибо

$$\int\frac{dx}{ax^2+b}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+C \text{ (формула примера 3, §3).}$$

*Пример* 3. $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\cdot dx$, $I_1=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; полагаем в интеграле $I$: $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $dv=dx$, $du=\frac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $v=x$, откуда

$$I=x\cdot\sqrt{a^2-x^2}+I_1;$$

кроме того,

$$I=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-I_1=a^2\cdot\arcsin\frac{x}{a}-I_1$$

(см. пример 4, §3). Из двух уравнений находим значения $I$ и $I_1$:

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,$$
$$I_1=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Сходным приемом, на основании примера 5, §3, найдем:

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$$
$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$$

*Пример* 4. $I=\int e^{ax}\cos bx dx$, $I_1=\int e^{ax}\sin bx dx$. В интеграле $I$ полагаем:

$$u=e^{ax},\quad dv=\cos bx dx,\quad du=ae^{ax}dx,\quad v=\frac{1}{b}\sin bx.$$

откуда
$$I=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}I_1;$$
сходным приемом получаем:
$$I_1=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\ I$$
и из двух уравнений находим:
$$I=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C,\ I_1=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

**§ 5. Интегрирование через разложение подынтегральной функции на сумму нескольких слагаемых.**

Иногда интеграл $\int f(x)dx$ берется, если заменить $f(x)$ алгебраической суммою нескольких слагаемых и применить формулу (12), §2.

*Пример 1.* На основании примеров 2 и 3 §3 имеем:
$$\int\frac{Px+Q}{a^2x^2+b^2}dx=P\int\frac{xdx}{a^2x^2+b^2}+Q\int\frac{dx}{a^2x^2+b^2}=$$
$$=\frac{P}{2a^2}\log(a^2x^2+b^2)+\frac{Q}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{ax}{b}\right)+C.$$

*Пример 2.* На основании примеров 2 и 4 §3:
$$\int\frac{Px+Q}{\sqrt{b^2-a^2x^2}}dx=-\frac{P}{a^2}\sqrt{b^2-a^2x^2}+\frac{Q}{a}\arcsin\left(\frac{ax}{b}\right)+C.$$

*Пример 3.* На основании примеров 2 и 5 §3:
$$\int\frac{Px+Q}{\sqrt{\pm b^2+a^2x^2}}dx=\frac{P}{a^2}\sqrt{\pm b^2+a^2x^2}+\frac{Q}{a}\log(ax+\sqrt{\pm b^2+a^2x^2})+C.$$

*Пример 4.* $I=\int\frac{dx}{a^2x^2-b^2}$.

Делаем преобразование:
$$I=\frac{1}{2b}\int\frac{(ax+b)-(ax-b)}{(ax-b)\ (ax+b)}dx=\frac{1}{2b}\left[\int\frac{dx}{ax-b}-\int\frac{dx}{ax+b}\right];$$
применяя результат примера 1 §3, получаем:
$$I=\frac{1}{2ab}\log\left(\frac{ax-b}{ax+b}\right)+C.$$

*Пример 5.* На основании примера 2 §3 и примера 4 §5:
$$\int\frac{Px+Q}{a^2x^2-b^2}\cdot dx=\frac{P}{2a^2}\log(a^2x^2-b^2)+\frac{Q}{2ab}\log\left(\frac{ax-b}{ax+b}\right)+C.$$

*Пример 6.* $I_n=\int\frac{dx}{(ax^2+b)^n}$ $(n=2,\ 3,\ 4\ldots)$

преобразуем:
$$I_n=\frac{1}{b}\int\frac{(ax^2+b)-ax^2}{(ax^2+b)^n}dx=\frac{1}{b}I_{n-1}-\frac{a}{b}\int\frac{x^2dx}{(ax^2+b)^n}$$

и применяем результат примера 2 §4; находим:

$$I_n = \frac{x}{b(2n-2)\,(ax^2+b)^{n-1}} + \frac{1}{b}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}$$

— формулу приведения для интегралов $I_n$.

*Пример 7.* $I = \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

Преобразуем: $I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin x} =$

$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos x} + \int \frac{d\sin x}{\sin x} = -\log\cos x + \log\sin x + C = \log\operatorname{tg} x + C.$$

Отсюда находим:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}};$$

именно, подстановка $y = \frac{x}{2}$, $dx = 2dy$ дает

$$I_1 = \int \frac{dy}{\sin y \cos y} = \log\operatorname{tg} y + C = \log\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Далее получаем:

$$I_2 = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)};$$

именно, подстановка $z = x + \frac{\pi}{2}$, $dx = dz$ дает:

$$I_2 = \int \frac{dz}{\sin z} = \log\operatorname{tg}\frac{z}{2} + C = \log\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

---

## Глава II.

## Интегрирование рациональных функций.

### § 1. Интегрирование через разложение дроби на простейшие.

Из высшей алгебры известно следующее: если знаменатель несократимой рациональной дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ разложен на вещественные множители:

$$F(x) = \Pi(x-a)^\alpha \cdot \Pi(x^2 + 2px + q)^m$$

($\Pi$ есть знак произведения), то дробь может быть разложена на простейшие дроби по формуле:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \omega(x) + \sum\left[\frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_\alpha}{x-a}\right] +$$

$$+ \sum\left[\frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+2px+q)^m} + \frac{P_2 x + Q_2}{(x^2+2px+q)^{m-1}} + \ldots + \frac{P_m x + Q_m}{x^2+2px+q}\right],$$

где $\omega(x)$ — целая часть дроби — появляется лишь тогда, когда степень числителя дроби $f(x)$ не ниже степени знаменателя $F(x)$, а коэффициенты $A$, $P$, $Q$ суть постоянные.

Когда разложение данной дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ на простейшие выполнено, то $\int \frac{f(x)}{F(x)} dx$ приводится к сумме интегралов трех типов:

$$\int \omega(x)dx, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n}, \quad \int \frac{Px+Q}{(x^2+2px+q)^n} dx$$

($n$ — целое положительное число), которые берутся так:

I. По формуле (12), (11) и (1) §2 имеем:

$$\int \omega(x)dx = \int (a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k)dx =$$
$$= a_0 \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} + a_1 \cdot \frac{x^k}{k} + \ldots + a_{k-1}\frac{x^2}{2} + a_kx + C.$$

II. Полагая (см. пример 1 §3) $x-a=y$, найдем:

$$\text{при } n>1: \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{dy}{y^n} = \frac{-1}{(n-1)y^{n-1}} + C = \frac{-1}{(n-1)\ (x-a)^{n-1}} + C,$$

$$\text{при } n=1: \int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y} = \log y + C = \log(x-a) + C.$$

III. Полагая $x+p=y$, имеем: $x^2+2px+q=y^2+h$ (где $h=q-p^2$), $Px+Q=Py+Q_1$ (где $Q_1=Q-Pp$), $dx=dy$, следовательно:

$$\int \frac{Px+Q}{(x^2+2px+q)^n} dx = \int \frac{Py+Q_1}{(y^2+h)^n} dy = P\int \frac{ydy}{(y^2+h)^n} + Q_1 \int \frac{dy}{(y^2+h)^n}.$$

Первый из полученных интегралов $\int \frac{ydy}{(y^2+h)^n}$ вычисляется подстановкою $y^2+h=z$ (см. пример 2 §3);

при $n>1$:

$$\int \frac{ydy}{(y^2+h)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^n} = \frac{-1}{2(n-1)z^{n-1}} + C = \frac{-1}{2(n-1)\ (x^2+2px+q)^{n-1}} + C,$$

при $n=1$:

$$\int \frac{ydy}{y^2+h} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\log z + C = \frac{1}{2}\log(x^2+2px+q) + C.$$

Второй интеграл $\int \frac{dy}{(y^2+h)^n}$ вычисляется помощью формулы приведения (см. пример 6 §5):

$$\int \frac{dy}{(y^2+h)^n} = \frac{y}{h(2n-2)\ (y^2+h)^{n-1}} + \frac{1}{h} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \int \frac{dy}{(y^2+h)^{n-1}};$$

прилагая ее $(n-1)$ раз, приходим к интегралу

$$\int \frac{dy}{y^2+h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{\sqrt{h}}\right) + C \text{ при } h>0.$$

(Если трехчлен $x^2+2px+q$ не имеет вещественных корней, как обыкновенно предполагается, то $h>0$; но все предыдущие рассуждения годятся и при $h<0$, кроме последнего результата, который заменяется при $h<0$ иным:

$$\int\frac{dy}{y^2+h}=\frac{1}{2\sqrt{-h}}\log\left(\frac{y-\sqrt{-h}}{y+\sqrt{-h}}\right)+C.)$$

В окончательном выражении интеграла $\int\frac{dy}{(y^2+h)^n}$ нужно заменить $y$ на $x+p$, $y^2+h$ на $x^2+2px+q$.

*Пример 1.* $I=\int\frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^3(x^2+2x+2)}$.

Для разложения дроби на простейшие полагаем:

$$x-1=y,\quad x^2+1=2+2y+y^2,\quad x^2+2x+2=5+4y+y^2$$

и делим $2+2y+y^2$ на $5+4y+y^2$, выписывая в частном три члена; по свойству деления получаем тождество:

$$2+2y+y^2=(5+4y+y^2)\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{25}y+\frac{7}{125}y^2\right)-\frac{1}{125}y^3(38+7y),$$

из которого

$$\frac{2+2y+y^2}{y^3(5+4y+y^2)}=\frac{\frac{2}{5}}{y^3}+\frac{\frac{2}{25}}{y^2}+\frac{\frac{7}{125}}{y}-\frac{\frac{1}{125}(38+7y)}{5+4y+y^2}$$

или

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x^2+2x+2)}=\frac{\frac{2}{5}}{(x-1)^3}+\frac{\frac{2}{25}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{7}{125}}{x-1}-\frac{\frac{1}{125}(7x+31)}{x^2+2x+2};$$

отсюда

$$I=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{7}{125}\log(x-1)-\frac{1}{125}I_1,$$

при чем

$$I_1=\int\frac{7z+24}{z^2+1}dz\ \text{(при } z=x+1)=\frac{7}{2}\log(z^2+1)+24\operatorname{arc\,tg}z+C=$$
$$=\frac{7}{2}\log(x^2+2x+2)+24\operatorname{arc\,tg}(x+1)+C.$$

*Пример 2.* $I=\int\frac{xdx}{(x^2-x+1)^2}$.

Подынтегральная функция уже есть простейшая дробь; подстановка $x-\frac{1}{2}=y$ дает:

$$I=\int\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)dy}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^2}=I_1+\frac{1}{2}I_2,\ \text{где}\ I_1=\int\frac{y\,dy}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{1}{2\left(y^2+\frac{3}{4}\right)}$$

$$I_2=\int\frac{dy}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{y}{\frac{3}{4}\cdot2\cdot\left(y^2+\frac{3}{4}\right)}+\frac{1}{\frac{3}{4}\cdot2}\int\frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}}$$

(по формуле приведения). Окончательно

$$I=\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

**§ 2. Некоторые случаи интегрирования дробей, допускающие упрощение общего приема.**

1°. Интеграл вида $\int \frac{f(x)}{(x-a)^k}dx$, где $f(x)$ целая функция, берется подстановкою $x-a=y$, при которой он обращается в

$$\int \frac{f(a+y)\cdot dy}{y^k} = f(a)\int \frac{dy}{y^k} + \frac{f'(a)}{1}\int \frac{dy}{y^{k-1}} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}\int \frac{dy}{y^{k-n}}.$$

2°. Интеграл вида $\int \frac{f(x)dx}{(x-a)^m(x-b)^n}$, где $f(x)$ целая функция, берется подстановкою $y=\frac{x-a}{x-b}$, обращающей его в

$$\frac{1}{(a-b)^{m+n-1}}\int f\left(\frac{a-by}{1-y}\right)\cdot\frac{(1-y)^{m+n-2}dy}{y^m}.$$

Например:

$$\int \frac{(x^2+x+1)dx}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{1}{16}\int \frac{(1-y)(3+y^2)}{y^3}dy = \frac{1}{16}\left\{-\frac{3}{2y^2}+\frac{3}{y}+\log y - y\right\}+C$$

при $y=\frac{x-1}{x+1}$.

3°. Интеграл вида $\int \frac{x^k dx}{(a+bx^n)^p}$ при $k \geqq n$ приводится интегрированием по частям $\left(\text{при } u=x^{k-n+1} \text{ и } dv=\frac{x^{n-1}dx}{(a+bx^n)^p}\right)$ к интегралу $\int \frac{x^{k-n}dx}{(a+bx^n)^{p-1}}$, и если $k-n \geqq n$, то та же операция повторяется, и т. д.

Например:

$$\int \frac{x^7 dx}{(x^3+1)^3} = -\frac{x^5}{6(x^3+1)^2} + \frac{5}{6}\int \frac{x^4 dx}{(x^3+1)^2},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^3+1)^2} = -\frac{x^2}{3(x^3+1)} + \frac{2}{3}\int \frac{x\,dx}{x^3+1};$$

последний интеграл приводится к сумме

$$A\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{(Px+Q)dx}{x^2-x+1}.$$

4°. Интеграл вида $\int \frac{x^k dx}{(a+bx^n)^p}$, при существовании общего наибольшего делителя $l$ у чисел $(k+1)$ и $n$, подстановкою $y=x^l$ приводится к более простому $\frac{1}{l}\int \frac{y^{k_1-1}dy}{(a+by^{n_1})^p}$, где $k_1=\frac{k+1}{l}$, $n_1=\frac{n}{l}$. Если же $k+1$ и $n$ — числа взаимно-простые, то сперва подстановкою $x=z\sqrt[n]{\pm\frac{a}{}}$

интеграл приводится к виду $A\cdot\int\frac{z^k dz}{(z^n\pm 1)^p}$, а затем решается разложением на простейшие дроби, при чем знаменатель разлагается по формулам:

$$z^{2m}-1=(z^2-1)\prod_{k=1}^{m-1}\left(z^2-2z\cos\frac{k\pi}{m}+1\right),$$

$$z^{2m+1}-1=(z-1)\prod_{k=1}^{m}\left(z^2-2z\cos\frac{2k\pi}{2m+1}+1\right)$$

$$z^{2m}+1=\prod_{k=0}^{m-1}\left(z^2-2z\cos\frac{(2k+1)\pi}{2m}+1\right),$$

$$z^{2m+1}+1=(z+1)\prod_{k=0}^{m-1}\left(z^2-2z\cos\frac{(2k+1)\pi}{2m+1}+1\right).$$

*Пример:* $\int\frac{x^k dx}{1+x^{12}}$ не упрощается, если $k=0,\ 4,\ 6,\ 10,\ldots -2,$ $-6,\ -8,\ldots$, и берется разложением на простейшие дроби; при $k=1,\ 9\ldots -3,\ -11\ldots$ подстановкою $y=x^2$ приходим к $\frac{1}{2}\int\frac{y^{k_1-1}}{1+y^6}dy$ $\left(k_1=\frac{k+1}{2}\right)$; при $k=2,\ 8,\ldots -4, -10, -\ldots$ подстановкою $y=x^3$ получаем $\frac{1}{3}\int\frac{y^{k_1-1}}{1+y^4}dy$; при $k=3,\ 7,\ldots\ -5,\ -9$ подстановка $y=x^4$ дает $\frac{1}{4}\int\frac{y^{k_1-1}dy}{1+y^3}$; при $k=5,\ \ldots -7$, подстановка $y=x^6$ дает $\frac{1}{6}\int\frac{y^{k_1-1}dy}{1+y^2}$; при $k=11,\ldots -1$ подстановка $y=x^{12}$ дает $\frac{1}{12}\int\frac{y^{k_1-1}dy}{1+y}$.

5°. $$\int\frac{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a^3}{x^4+2px^2+q}dx=\int\frac{(a_0x^2+a_2)xdx}{x^4+2px^2+q}+\int\frac{a_1x^2+a_3}{x^4+2px^2+q}dx.$$

Первый интеграл подстановкою $y=x^2$ приводится к $\frac{1}{2}\int\frac{(a_0y+a_2)dy}{y^2+2py+q}$, второй находится разложением на простейшие дроби, при чем при $p^2-q>0$ $x^4+2px^2+q=(x^2-\alpha)(x^2-\beta)$, а при $p^2-q<0$ $x^4+2px^2+q=$ $=(x^2+\sqrt{q})^2-2(\sqrt{q}-p)x^2=(x^2-gx+\sqrt{q})\ (x^2+gx+\sqrt{q})$, где $g^2=2(\sqrt{q}-p)$. В последнем случае дробь $\frac{a_1x^2+a_3}{x^4+2px^2+q}$ разлагается на сумму дробей $\frac{Px+Q}{x^2-gx+\sqrt{q}}+\frac{Rx+S}{x^2-gx+\sqrt{q}}$, при чем $P=-R$ и $Q=S$, как убеждаемся, заменяя в разложении $x$ на $-x$.

*Пример.*

$$\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1}dx+\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{x+\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1}dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}\log\left(\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)+C.$$

6°. Интеграл от рациональной дроби $\int f(x)dx$ упрощается подстановкой $x+\frac{1}{x}=y$, $dx=\frac{x^2dy}{x^2-1}$, если $f\left(\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)dx$, и упрощается подстановкой $x-\frac{1}{x}=y$, $dx=\frac{x^2dy}{x^2+1}$, если $f\left(-\frac{1}{x}\right)d\left(-\frac{1}{x}\right)=f(x)dx$.

*Пример.* Подстановкою $x+\frac{1}{x}=y$ находим:

$$\int\frac{x^4+1}{x^6-1}dx=\int\frac{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dy}{\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)}=\int\frac{(y^2-2)dy}{(y^2-4)(y^2-1)}=$$

$$=\frac{1}{6}\log\frac{y-1}{y+1}+\frac{1}{6}\log\frac{y-2}{y+2}+C=\frac{1}{6}\log\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\log\frac{x-1}{x+1}+C.$$

**§ 3. Формула Остроградского для выделения алгебраической части из интеграла от рациональной дроби.**

Если несократимая дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ не имеет целой части, то справедлива формула:

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}dx=\frac{\varphi(x)}{D(x)}+\int\frac{\psi(x)}{Q(x)}dx,$$

где $D(x)$ есть общий наибольший делитель функции $F(x)$ и ее производной $F'(x)$, находимый последовательным делением, $Q(x)=\frac{F(x)}{D(x)}$, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ суть целые функции с неопределенными коэффициентами степеней на единицу меньших, чем $D(x)$ и $Q(x)$ соответственно.

Формула следует из того, что, положив $F(x)=\Pi(x-a)^\alpha$ ($a$ означает вещественный или комплексный корень функции $F$), имеем:

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}dx=\int\sum\left\{\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_\alpha}{x-a}\right\}dx+$$

$$=\sum\left\{\frac{-A_1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}-\frac{A_2}{(\alpha-2)(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots-\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\int\frac{A_\alpha dx}{x-a}\right\}$$

$$=\sum\frac{\varphi_{\alpha-2}(x)}{(x-a)^{\alpha-1}}+\int\sum\frac{A_\alpha}{x-a}\cdot dx,$$

где $\varphi_{\alpha-2}(x)$ — целая функция степени не выше $\alpha-2$.

Остается заметить, что (по теореме Высшей алгебры, § 13)

$$\Pi(x-a)^{\alpha-1}=D(x),\ \Pi(x-a)=\frac{F(x)}{D(x)}=Q(x),$$

и тогда окажется:

$$\sum\frac{\varphi_{\alpha-2}(x)}{(x-a)^{\alpha-1}}=\frac{\varphi(x)}{D(x)},\ \sum\frac{A_\alpha}{x-a}=\frac{\psi(x)}{Q(x)}.$$

Неопределенные коэффициенты функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ находятся, если продифференцировать формулу Остроградского, освободиться от знаменателей и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $x$.

*Пример.* $$\int\frac{(x^2+1)dx}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2}=\frac{ax^3+bx^2+cx+\partial}{(x+1)^2(x^2+x+1)}+$$
$$+\int\frac{mx^2+nx+p}{(x+1)(x^2+x+1)}dx.$$

Дифференцируя это равенство, имеем:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2}=\frac{-(ax^3+bx^2+cx+\partial)}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2}[2(x^2+x+1)+(x+1)(2x+1)]+$$
$$+\frac{3ax^2+2bx+c}{(x+1)^2(x^2+x+1)}+\frac{mx^2+nx+p}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получаем:

$$(x^2+1)=-(ax^3+bx^2+cx+\partial)(4x^2+5x+3)+$$
$$+(3ax^2+2bx+c)(x^3+2x^2+2x+1)+$$
$$+(mx^2+nx+p)(x^4+3x^3+4x^2+3x+1).$$

Приравнивая коэффициенты при $x^6$, $x^5$, ... 1, находим 7 линейных уравнений с 7 неизвестными:

$$m=0,\ -a+n=0,\ a-2b+3n+p=0,\ 3a-b-3c+4n+3p=0,$$
$$3a+b-3c-4\partial+3n+4p=1,\ 2b-c-5\partial+n+3p=0,\ c-3\partial+p=1,$$

откуда

$$a=-\frac{7}{3},\ b=-\frac{19}{3},\ c=-\frac{20}{3},\ \partial=-\frac{11}{3},\ n=-\frac{7}{3},\ p=-\frac{10}{3}.$$

---

## Глава III.

## Интегрирование иррациональных функций.

### § 1. Интегралы вида

$$\int f(x,\ y^{\frac{m}{n}},\ y^{\frac{m_1}{n_1}},\ y^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots)\,dx,$$

**где $f$ — рациональная функция от $x$ и от дробных степеней $y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, причем $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — постоянные,** $\alpha\delta-\beta\gamma$ не $=0$.

Такие интегралы приводятся к интегралам $\int F(z)dz$, где $F$ — рациональная функция, подстановкою $y=z^N$, где $N$ есть общее наименьшее кратное чисел $n$, $n_1$, $n_2\ldots$, ибо дробные степени $y$ обращаются в целые функции от $z$, а $x$ — в рациональную функцию от $z$.

*Пример.* $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}=6\int\frac{z^5dz}{z^3+z^2-2}$ при $x=z^6$ (здесь $y=x$); выделяя целую часть и разлагая на простейшие дроби, получаем

$$I=6\int\left(z^2-z+1+\frac{\frac{1}{5}}{z-1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{z-2}{z^2+2z+2}\right)dz.$$

*Замечание.* Интегралы вида $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt[n]{(x-a)^k(x-b)^l}}$, где $f(x)$ рациональная функция и $\frac{k+l}{n}=t$ (целому), относятся к классу § 1, ибо переписываются в виде $\int \frac{\frac{f(x)dx}{(x-b)^t}}{\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{k}{n}}}$; берутся подстановкой $y=\frac{x-a}{x-b}=z^n$.

*Пример:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^5(x+1)^7}}=\int \frac{\frac{dx}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{5}{4}}}=\int \frac{1-z^4}{z^2}dz \text{ при } \frac{x-1}{x+1}=z^4.$$

**§ 2. Интегралы вида $\int f(x, y)dx$, где $f$ — рациональная функция от $x$ и $y=\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$.**

Такие интегралы, преобразованием подынтегральной функции, приводятся к трем основным типам. Именно: $f(x, y)$, заменою $y^{2k}$ на $(Ax^2+2Bx+C)^k$ и $y^{2k+1}$ на $(Ax^2+2Bx+C)^k\cdot y$, приводится к выражению $\frac{M+N\cdot y}{M_1+N_1\cdot y}$, где $M$, $N$, $M_1$, $N_1$ — целые функции от $x$, и, далее, умножением числителя и знаменателя на $M_1-N_1y$, обращается в $\frac{P+Q\cdot y}{R}=\frac{P}{R}+\frac{Qy^2}{R}\cdot\frac{1}{y}$, где $P, Q, R$ — целые функции от $x$. Отсюда $\int f(x, y)dx=\int \frac{P}{R}dx+\int \frac{S}{R}\cdot\frac{dx}{y}$; разложив $\frac{S}{R}$ на простейшие дроби: $\frac{S}{R}=\omega(x)+\sum\frac{A}{(x-a)^k}+\sum\frac{Px+Q}{(x^2+2px+q)^m}$ (где $\omega(x)$ целая функция), приходим к трем типам:

$$\text{I. } \int\frac{\omega(x)dx}{y}, \quad \text{II. } \int\frac{dx}{(x-a)^k\cdot y}, \quad \text{III. } \int\frac{(Px+Q)dx}{(x^2+2px+q)^m\cdot y}.$$

I. Интеграл первого типа: $\int\frac{\omega(x)dx}{y}$, где $\omega(x)$ — целая функция $m$-й степени, вычисляется по формуле с неопределенными коэффициентами:

$$\int\frac{\omega(x)dx}{y}=(\alpha_0x^{m-1}+\alpha_1x^{m-2}+\ldots+\alpha_{m-1})\cdot y+\alpha_m\cdot\int\frac{dx}{y},$$

при чем коэффициенты $\alpha_0$, $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ в каждом частном случае найдутся, если продифференцировать написанную формулу и, освободившись от радикалов (умножением на $y$, ибо $y'=\frac{Ax+B}{y}$), приравнять коэффициенты одинаковых степеней $x$.

Для вывода формулы положим $\omega(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$, тогда $\int\frac{\omega(x)dx}{y}=a_0\cdot I_m+a_1\cdot I_{m-1}+\ldots+a_mI_0$, где $I_m=\int\frac{x^m dx}{y}$; для $I_m$ составляется формула приведения:

$$I_m=\frac{1}{A}\int\frac{[(Ax+B)-B]x^{m-1}dx}{y}=\frac{1}{A}\int x^{m-1}dy-\frac{B}{A}\ I_{m-1}=$$

$$=\frac{1}{A}\cdot x^{m-1}\cdot y-\frac{m-1}{A}\int x^{m-2}\cdot\frac{y^2dx}{y}-\frac{B}{A}\ I_{m-1}=$$

$$=\frac{1}{A}\cdot x^{m-1}\cdot y-\frac{m-1}{A}\left\{AI_m+2BI_{m-1}+CI_{m-2}\right\}-\frac{B}{A}\ I_{m-1},$$

откуда

$$I_m=\frac{1}{mA}x^{m-1}\cdot y-\frac{(2m-1)B}{mA}\ I_{m-1}-\frac{(m-1)C}{mA}\ I_{m-2}$$

и, при $m=1$, $I_1=\frac{1}{A}\cdot y-\frac{B}{A}\ I_0$.

Прилагая $m$ раз формулу приведения к

$$\int\frac{\omega(x)dx}{y}=a_0\,I_m+a_1\,I_{m-1}+\ldots+a_m\,I_0,$$

получим указанную выше формулу с неопределенными коэффициентами.

Что касается интеграла $I_0=\int\frac{dx}{y}$, то подстановка $x+\frac{B}{A}=z$ дает $I_0=\int\frac{dz}{\sqrt{Az^2+C_1}}$, где $C_1=\frac{AC-B^2}{A}$; при $A>0$, согласно примеру 5 § 3, гл. I, получаем:

$$I_0=\frac{1}{\sqrt{A}}\log(z\sqrt{A}+\sqrt{Az^2+C_1})+\text{постоянная}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A}}\log(Az+\sqrt{A}\cdot\sqrt{Az^2+C_1})+\text{постоянная}$$

(прибавка $\frac{1}{\sqrt{A}}\log\sqrt{A}$ изменяет только постоянную интегрирования) или

$$I_0=\frac{1}{\sqrt{A}}\log(Ax+B+\sqrt{A}\cdot\sqrt{Ax^2+2Bx+C})+\text{постоянная}.$$

При $A<0$, пример 4, § 3, гл. I дает:

$$I_0=\frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\frac{z\sqrt{-A}}{\sqrt{\frac{AC-B^2}{A}}}+\text{постоянная}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\frac{-Ax-B}{\sqrt{B^2-AC}}+\text{постоянная}.$$

*Пример.*

$$I=\int\frac{(x^3-x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=(\alpha_0x^2+\alpha_1x+\alpha_2)\sqrt{x^2+x+1}+\alpha_3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Дифференцируем формулу; это дает:

$$\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}=(\alpha_0 x^2+\alpha_1 x+\alpha_2)\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}+$$
$$+(2\alpha_0 x+\alpha_1)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{\alpha_3}{\sqrt{x^2+x+1}};$$

умножаем на $\sqrt{x^2+x+1}$:

$$x^3-x+1=(\alpha_0 x^2+\alpha_1 x+\alpha_2)\left(x+\frac{1}{2}\right)+(2\alpha_0 x+\alpha_1)(x^2+x+1)+\alpha_3.$$

Приравнивая коэффициенты при $x^3$, $x^2$, $x$, 1, находим:

$$\alpha_0=\frac{1}{3},\quad \alpha_1=-\frac{5}{12},\quad \alpha_2=-\frac{25}{24},\quad \alpha_3=\frac{31}{16};$$

далее, $$I_0=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\log\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C;$$

окончательно:

$$I=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{12}x-\frac{25}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{31}{16}\log\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$$

II. Интеграл второго типа $\int\frac{dx}{(x-a)^k\cdot y}$ вычисляется или по формуле:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k\cdot y}=\frac{\alpha_0 x^{k-2}+\alpha_1 x^{k-3}+\ldots+\alpha_{k-2}}{(x-a)^{k-1}}\cdot y+\alpha_{k-1}\cdot\int\frac{dx}{(x-a)\cdot y},$$

если $y^2$ не делится на $x-a$, или по формуле

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k\cdot y}=\frac{\alpha_0 x^{k-1}+\alpha_1 x^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}}{(x-a)^k}\cdot y+C,$$

если $y^2$ делится на $x-a$.

Вывод. Подстановка $x-a=\frac{1}{z}$ дает:

$$dx=-\frac{dz}{z^2},\quad \sqrt{Ax^2+2Bx+C}=\frac{1}{z}\sqrt{A_1z^2+2B_1z+C_1}$$

при $A_1=Aa^2+2Ba+C$, $B_1=Aa+B$, $C_1=A$. Если $A_1$ не $=0$, то $\int\frac{dx}{(x-a)^k\cdot y}=-\int\frac{z^{k-1}dz}{\sqrt{A_1z^2+2B_1z+C_1}}=(\beta_0 z^{k-2}+\beta_1 z^{k-3}+\ldots+\beta_{k-2})\cdot$ $\cdot\sqrt{A_1z^2+2B_1z+C_1}+\beta_{k-1}\int\frac{dz}{\sqrt{A_1z^2+2B_1z+C_1}}$; заменяя $z$ на $\frac{1}{x-a}$, $\sqrt{A_1z^2+2B_1z+C_1}$ на $\frac{1}{x-a}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$, получаем, при $A_1$ не $=0$, т.-е. когда $y^2$ не делится на $x-a$, формулу:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k\cdot y}=\frac{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{x-a}\left(\frac{\beta_0}{(x-a)^{k-2}}+\frac{\beta_1}{(x-a)^{k-3}}+\ldots+\beta_{k-2}\right)-$$
$$-\beta_{k-1}\int\frac{dx}{(x-a)y},$$ откуда и вытекает первый результат.

Если $y^2$ делится на $x-a$, то $A_1=0$, $\int\frac{dx}{(x-a)^k\cdot y}=-\int\frac{z^{k-1}dz}{\sqrt{2B_1z+C_1}}$ и подстановкою $2B_1z+C_1=t$ находим:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k\cdot y}=\sum_{h=k-1}^{0}A_h\int t^{h-\frac{1}{2}}dt=\sum\frac{A_h}{h+\frac{1}{2}}t^{h+\frac{1}{2}}+C=$$
$$=\sqrt{t}(\gamma_0t^{k-1}+\gamma_1t^{k-2}+\ldots+\gamma_{k-1})+C;$$

заменяя $\sqrt{t}$ на $\frac{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{x-a}$, $t$ на $\frac{A(x-b)}{x-a}$ ($b$ — второй корень $y^2$), получаем второй результат.

*Пример 1.*

$$\int\frac{(x+2)dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{\alpha_0}{x-1}\sqrt{x^2+x+1}+\alpha_1\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Дифференцируем:

$$\frac{x+2}{(x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{-\alpha_0}{(x-1)^2}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{\alpha_0\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}+$$
$$+\frac{\alpha_1}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Умножим на $(x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}$:

$$x+2=-\alpha_0(x^2+x+1)+\alpha_0\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)+\alpha_1(x-1);$$

сравнение коэффициентов при $x$ и при 1 дает: $\alpha_0=-1$, $\alpha_1=-\frac{1}{2}$.

Подстановкой $x-1=\frac{1}{z}$ находим:

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{3z^2+3z+1}}=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(3z+\frac{3}{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3z^2+3z+1}\right)+C \text{ (см. первый тип, } I_0)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}(x+1)+2\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}+C$$

(относя $-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}}{2}$ к постоянной произвольной).

*Пример 2.* $\int\frac{x+1}{(x-1)^2\sqrt{x^2+x-2}}=\frac{\alpha_0x+\alpha_1}{(x-1)^2}\sqrt{x^2+x-2}+C.$

Дифференцируем:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2\sqrt{x^2+x-2}}=-\frac{2(\alpha_0x+\alpha_1)}{(x-1)^3}\sqrt{x^2+x-2}+\frac{\alpha_0}{(x-1)^2}\sqrt{x^2+x-2}+$$
$$+\frac{\alpha_0x+\alpha_1}{(x-1)^2}\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x-2}}.$$

Умножаем на $(x-1)^2\sqrt{x^2+x-2}$:

$$x+1=-2(\alpha_0x+\alpha_1)\,(x+2)+\alpha_0(x^2+x-2)+(\alpha_0x+\alpha_1)\left(x+\frac{1}{2}\right);$$

отбирая члены с $x$ и свободные, имеем: $\alpha_0=-\frac{10}{27}$, $\alpha_1=-\frac{2}{27}$.

*Замечание.* Более общий интеграл $\int\frac{\varphi(x)dx}{(x-a)^\alpha\cdot y}$, где $\varphi(x)$—целая функция степени не выше $\alpha-1$, может быть вычисляем по тем же формулам, как простейший интеграл $\int\frac{dx}{(x-a)^\alpha\cdot y}$; в этом убеждаемся, разложив дробь $\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha}$ на простейшие и применив к каждому слагаемому упомянутые формулы.

III. Интеграл третьего типа $I=\int\frac{(Px+Q)dx}{(x^2+2px+q)^m\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$.

Начнем с частного случая, когда $p=0$ и $B=0$; тогда $I=PI'+QI''$, где $I'=\int\frac{xdx}{(x^2+q)^m\sqrt{Ax^2+C}}$ и $I''=\int\frac{dx}{(x^2+q)^m\cdot\sqrt{Ax^2+C}}$. Подстановка $Ax^2+C=z^2$ дает $I'=A^{m-1}\int\frac{dz}{(z^2+a)^m}$, где $a=qA-C$; такой интеграл берется по формуле приведения (см. гл. II, § 1, III тип). Второй интеграл преобразуется: $I''=\int\frac{x^{-(2m+1)}dx}{(1+qx^{-2})^m\cdot\sqrt{A+Cx^{-2}}}$ и подстановкою $A+Cx^{-2}=t^2$ приводится к интегралу от рациональной дроби $-\int\frac{(t^2-A)^{m-1}dt}{(qt^2+b)^m}$, где $b=C-qA$.

*Пример.* $\int\frac{(3x+2)dx}{(x^2+3)\sqrt{2-x^2}}=3I'+2I''$; полагая $2-x^2=z^2$, находим $I'=-\int\frac{dz}{5-z^2}=-\frac{1}{2\sqrt{5}}\log\frac{\sqrt{5}+z}{\sqrt{5}-z}$ (см. пример 4, § 5, гл. I); подстановка $2x^{-2}-1=t^2$ дает

$$I''=\int\frac{x^{-3}dx}{(1+3x^{-2})\sqrt{2x^{-2}-1}}=-\int\frac{dt}{3t^2+5}=-\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}t\right),$$

при чем $t=\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}$ (глава I, § 3, пример 3).

*Замечание.* К разобранному частному случаю, линейною подстановкою $x+\frac{B}{A}=z$, приводится общий интеграл 3-го типа при $p=\frac{B}{A}$, ибо тогда $x^2+2px+q=z^2+q-p^2$, $Ax^2+2Bx+C=Az^2+\frac{AC-B^2}{A}$.

Это замечание относится и к интегралам

$$\int\frac{(Px+Q)dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{\frac{2m+1}{2}}},\ \text{у которых}\ p=\frac{B}{A}\ \text{и}\ q=\frac{C}{A}.$$

*Пример 1.*

$$I=\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x-3}}=\int\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)dz}{\left(z^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{2z^2-\frac{7}{2}}}\text{ при } z=x+\frac{1}{2}.$$

Далее, $I=I'+\frac{1}{2}I''$, где

$$I'=\int\frac{zdz}{\left(z^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{2z^2-\frac{7}{2}}}=\int\frac{dt}{t^2+5}=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{5}}\left(\text{при } t=\sqrt{2z^2-\frac{7}{2}}\right)$$

и

$$I''=\int\frac{z^{-3}dz}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-2}\right)\sqrt{2-\frac{7}{2}z^{-2}}}=4\int\frac{du}{20-3u^2}=\frac{1}{\sqrt{15}}\log\left(\frac{2\sqrt{5}+u\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-u\sqrt{3}}\right)$$

$$\left(\text{при } u=\frac{\sqrt{2z^2-\frac{7}{2}}}{z}\right).$$

*Пример 2.*

$$I=\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)^{\frac{5}{2}}}=\int\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)dz}{\left(z^2+\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}=I'+\frac{1}{2}I''\left(z=x+\frac{1}{2}\right);$$

$$I'=\int\frac{zdz}{\left(z^2+\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}=\frac{-1}{3\left(z^2+\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}},\quad I''=\int\frac{z^{-3}dz}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-2}\right)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{16}{9}\int\frac{u^2-1}{u^4}du$$

$$\left(\text{при } u=\frac{\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}}{z}=\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+\frac{1}{2}}\right).$$

Интегралы $I''=\int\frac{dz}{(z^2+a)^{\frac{2m+1}{2}}}$ можно брать также по формуле приведения примера 6, § 5, гл. I, так как она справедлива и для $n$ нецелых.

Общий случай 3-го типа приводится к частному случаю ($p=0$, $B=0$) дробною линейною подстановкою $x=\frac{\alpha z+\beta}{z+1}$; при этом оказывается $Ax^2+2Bx+C=\frac{1}{(z+1)^2}\{(A\alpha^2+2B\alpha+C)z^2+2(A\alpha\beta+B\overline{\alpha+\beta}+C)z+$ $+(A\beta^2+2B\beta+C)\}$.

Поэтому, если $\alpha$ и $\beta$ определить из системы: $A\alpha\beta+B(\alpha+\beta)+C=0$, $\alpha\beta+p(\alpha+\beta)+q=0$ (при условии $q-p^2>0$ $\alpha$ и $\beta$ будут вещественными и различными), то общий интеграл 3-го типа, при подстановке, указанной выше, обратится в $\int\frac{(P_1z+Q_1)(z+1)^{2m-2}dz}{(az^2+b)^m\sqrt{A_1z^2+C_1}}$ и разложится на сумму интегралов $\int\frac{(P_kz+Q_k)dz}{(az^2+b)^k\sqrt{A_1z^2+C_1}}$, относящихся к частному случаю ($p=0$, $B=0$).

*Пример.* $I=\int\frac{(x-2)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+3x+2}}$. Полагая $x=\frac{\alpha z+\beta}{z+1}$, определяем $\alpha$ и $\beta$ из системы: $\alpha\beta+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+1=0$, $2\alpha\beta+\frac{3}{2}(\alpha+\beta)+2=0$, откуда $\alpha\beta=-1$, $\alpha+\beta=0$, т.-е. можно взять $\alpha=1$, $\beta=-1$.

При $x=\frac{z-1}{z+1}$ находим $I=-2\int\frac{(z+3)dz}{(3z^2+1)\sqrt{7z^2+1}}$ и т. д.

Для интегралов $\int\frac{f(x)}{F(x)}\cdot\frac{dx}{y}$, где $y=\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ и $\frac{f(x)}{F(x)}$ есть несократимая дробь, не имеющая целой части, существует формула выделения алгебраической части:

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}\cdot\frac{dx}{y}=\frac{\varphi(x)}{D(x)}\cdot y+\int\frac{\psi(x)}{Q(x)}\cdot\frac{dx}{y},$$

где $D(x)$ есть общий наибольший делитель функции $\omega(x)=F(x)\cdot y^2$ и ее производной $\omega'(x)$, $Q(x)=\frac{F(x)}{D(x)}$, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — целые функции с неопределенными коэффициентами, степеней на 1 ниже, чем $D(x)$ и $Q(x)$ соответственно.

Для вывода формулы положим $F(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}=(x-a_k)^{\alpha_k}$ и представим $\frac{f(x)}{F(x)}$ в виде $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)}{(x-a_k)^{\alpha_k}}$, где $\varphi_k(x)$ — целая функция степени $\alpha_k-1$.

Тогда
$$\int\frac{f(x)}{F(x)}\cdot\frac{dx}{y}=\sum_{k=1}^{n}\int\frac{\varphi_k(x)}{(x-a_k)^{\alpha_k}}\cdot\frac{dx}{y},$$

при чем каждый из интегралов под знаком суммы берется по той или другой из формул, упомянутых при разборе II типа. Отличим три случая:

$\alpha$) $y^2$ не делится ни на один из множителей $x-a_k$; тогда все интегралы берутся по первой формуле $\left(\text{с трансцендентной частью}\int\frac{dx}{(x-a_k)y}\right)$ и окажется

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}\cdot\frac{dx}{y}=\sum_{=1}^{n}\frac{f_{\alpha_k-2}(x)}{(x-a_k)^{\alpha_k-1}}\cdot y+\int\sum_{k=1}^{n}\cdot\frac{A_k}{x-a_k}\cdot\frac{dx}{y};$$

в то же время $\omega(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}(x-a_k)^{\alpha_k}\cdot A(x-a)(x-b)$, следовательно $D(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}(x-a_k)^{\alpha_k-1}$, $Q(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}(x-a_k)$, и формула выделения доказана.

$\beta$) пусть $y^2=A(x-a)(x-b)$ имеет один множитель $x-a$, совпадающий с одним из $x-a_k$, например $a=a_1$; тогда интеграл $\int\frac{\varphi_1(x)dx}{(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot y}$ берется по второй формуле: $\frac{f_{\alpha_1-1}(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}}\cdot y$ (без трансцендентной части), а осталь-

ные интегралы $\int \frac{\varphi_k(x)dx}{(x-a_k)^{\alpha_k}\cdot y}$ при $k=2, 3, \ldots n$ берутся по первой формуле, следовательно:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\cdot\frac{dx}{y}=\frac{\varphi(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\prod\limits_{k=1}^{n}(x-a_k)^{\alpha_k-1}}\cdot y+\int\frac{\psi(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x-a_k)}\,\frac{dx}{y};$$

вместе с тем $\omega(x)=A(x-a_1)^{\alpha_1+1}\cdot\prod\limits_{k=2}^{n}(x-a_k)^{\alpha_k}\cdot(x-b)$, следовательно $D(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot\prod\limits_{k=2}^{n}(x-a_k)^{\alpha_k-1}$, $Q(x)=\prod\limits_{k=2}^{n}(x-a_k)$, и формула выделения доказана:

$\gamma$) пусть оба множителя $x-a$, $x-b$ совпадают с некоторыми двумя из $x-a_k$, например $a=a_1$ и $b=a_2$; тогда из интегралов $\int\frac{\varphi_k(x)dx}{(x-a_k)^{\alpha_k}\cdot y}$ два ($k=1$ и $k=2$) берутся по второй формуле, а остальные ($k=3,\ldots n$) — по первой, следовательно:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\cdot\frac{dx}{y}=\frac{\varphi(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\prod\limits_{k=3}^{n}(x-a_k)^{\alpha_k-1}}\cdot y+\int\frac{\psi(x)}{\prod\limits_{k=3}^{n}(x-a_k)}\cdot\frac{dx}{y};$$

вместе с тем, оказывается, $\omega(x)=A(x-a_1)^{\alpha_1+1}(x-a_2)^{\alpha_2+1}\cdot\prod\limits_{k=3}^{n}(x-a_k)^{\alpha_k}$, следовательно $D(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdot\prod\limits_{k=3}^{n}(x-a_k)^{\alpha_k-1}$, $Q(x)=\prod\limits_{k=3}^{n}(x-a_k)$, и общая формула выделения доказана.

*Пример.* $I=\int\frac{(x^2+x+1)dx}{(x+1)^3(x-1)^2\sqrt{x^2-x-2}}$.

Здесь

$$y^2=x^2-x-2=(x+1)(x-2),$$

следовательно

$$\omega(x)=(x+1)^4(x-1)^2(x-2),\ D(x)=(x+1)^3(x-1),\ Q(x)=\frac{F(x)}{D(x)}=x-1;$$

поэтому

$$I=\frac{ax^3+bx^2+cx+\partial}{(x+1)^3(x-1)}\cdot\sqrt{x^2-x-2}+\int\frac{m\cdot dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-2}}.$$

Дифференцируя и освобождаясь от знаменателей, получаем:

$$x^2+x+1=(ax^3+bx^2+cx+\partial)\left(-3x^2+\frac{17}{2}x-\frac{7}{2}\right)+$$
$$+(3ax^2+2bx+c)\cdot(x^3-2x^2-x+2)+m(x^4+2x^3-2x-1).$$

Сравнение коэффициентов при $x^4$, $x^3,\ldots 1$ (при $x^5$ коэффициент равен 0) дает 5 уравнений с 5 неизвестными, откуда

$$a=\frac{2089}{6480},\ b=\frac{923}{1296},\ c=\frac{2987}{6480},\ \partial=\frac{29}{6480},\ m=-\frac{3}{32}.$$

*Пример 2.* $I=\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^{\frac{7}{2}}}\,dx.$

Здесь $\omega(x)=(x^2+x+1)^4$, $D(x)=(x^2+x+1)^3$, $Q(x)=1$;

$$I=\frac{ax^3+bx^4+cx^3+\partial x^2+fx+g}{(x^2+x+1)^3}\cdot\sqrt{x^2+x+1}+C;$$

способом примера 1-го находим:

$$a=\frac{992}{405},\ b=\frac{496}{81},\ c=\frac{868}{81},\ \partial=\frac{806}{81},\ f=\frac{530}{81},\ g=\frac{898}{405}.$$

**§ 3. Интегралы от двучленных иррациональностей $\int x^m(a+bx^n)^p\cdot dx$, где $m$, $n$, $p$ — рациональные числа, $a$ и $b$ — любые вещественные числа.**

Докажем, что такие интегралы приводятся к интегралам от рациональных функций в следующих трех случаях:

1) $p=$ целому, 2) $\frac{m+1}{n}=t$ (целому), 3) $\frac{m+1}{n}+p=t$ (целому).

При $p$ целом имеем класс интегралов § 1 и приводим к интегралу от рациональной дроби подстановкой $x=z^N$, где $N$—общее наименьшее кратное знаменателей чисел $m$ и $n$.

При $\frac{m+1}{n}=t$ и при $p=\frac{\alpha}{\beta}$ подстановка $a+bx^n=z^\beta$ дает $x^{m+1}=\left(\frac{z^\beta-a}{b}\right)^t$; дифференцируя последнее равенство, найдем:

$$I=\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{\beta}{nb^t}\int z^{\alpha+\beta-1}(z^\beta-a)^{t-1}dz.$$

При $\frac{m+1}{n}+p=t$ и при $p=\frac{\alpha}{\beta}$ сперва преобразуем $I$:

$$I=\int x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p dx$$

и затем подстановкою $ax^{-n}+b=z^\beta$ приводим к

$$-\frac{\beta}{na^{-t}}\int z^{\alpha+\beta-1}(z^\beta-b)^{-t-1}dz.$$

*Замечание 1.* Доказано, что интегрирование двучленных иррациональностей в конечном виде возможно только при выполнении одного из упомянутых трех условий; из них 2-е и 3-е известны под именем признаков Бернулли.

*Замечание 2.* Интегралы $\int\frac{(a+bx^n)^p dx}{x}$ выполняют всегда 1-й признак Бернулли, а интегралы $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{a+bx^n}}$ — выполняют 2-й признак Бернулли.

Тем же приемом, как последний интеграл, берутся интегралы

$$\int\frac{dx}{(c+\partial x^n)\cdot\sqrt[n]{a+bx^n}}=\int\frac{x^{-(n+1)}dx}{(cx^{-n}+\partial)\cdot\sqrt[n]{ax^{-n}+b}}$$

(подстановкою $ax^{-n}+b=z^n$).

*Пример 1.* $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{1+x^3}} = \frac{4}{3}\int \frac{z^2dz}{z^4-1}$ (при $1+x^3=z^4$) $=$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dz}{z^2+1}+\frac{2}{3}\int\frac{dz}{z^2-1}=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}z+\frac{1}{3}\log\frac{z-1}{z+1}+C.$$

*Пример 2.*

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-x^3}}=\int\frac{x^{-4}dx}{\sqrt[3]{2x^{-3}-1}}=-\int\frac{zdz}{z^3+1}\ (\text{при } 2x^{-3}-1=z^3)$$

и вычисляется разложением на простейшие дроби.

*Пример 3.*

$$I=\int\frac{dx}{(2+x^3)\cdot\sqrt[3]{1-x^3}}=\int\frac{x^{-4}dx}{(2x^{-3}+1)\cdot\sqrt[3]{x^{-3}-1}}=-\int\frac{zdz}{2z^3+3}$$

(при $x^{-3}-1=z^3$); подстановкою $z=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot t$ находим:

$$I=-\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\int\frac{tdt}{t^3+1}\ \text{и т. д.}$$

---

## Глава IV.

## Интегрирование трансцендентных функций.

**§ 1. Интегралы вида** $\int e^{kx}f(x)\sin^m ax\sin^{m_1}a_1x\ldots\cos^n bx\cos^{n_1}b_1x\ldots dx$, **где** $f(x)$ — **целая функция, числа** $m$, $m_1,\ldots n$, $n_1\ldots$ — **целые положительные,** $k$, $a$, $a_1,\ldots b$, $b_1\ldots$ — **любые вещественные числа.**

Такие интегралы, при помощи тригонометрических преобразований, приводятся к интегралам типа $\int e^{kx}f(x)\cos lx\,dx$ и $\int e^{kx}f(x)\sin lx\,dx$.

Именно, каждый член произведения

$$P=\sin^m ax\sin^{m_1}a_1x\ldots\cos^n bx\cos^{n_1}b_1x\ldots$$

нужно заменить по формулам:

$$\cos^n bx=B_0\cos nbx+B_1\cos(n-2)bx+B_2\cos(n-4)bx+\ldots$$

$$\sin^m ax=\begin{cases}A_0\cos max+A_1\cos(m-2)ax+A_2\cos(m-4)ax+\ldots\ (m\ \text{четное})\\ A_0'\sin max+A_1'\sin(m-2)ax+A_2'\sin(m-4)ax+\ldots\ (m\ \text{нечетное}),\end{cases}$$

выводимым в теории комплексных чисел.

[Можно пользоваться для этого формулами Эйлера

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}),\ \sin\varphi=\frac{1}{2i}(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i});$$

например:

$$\sin^5\varphi=\frac{1}{(2i)^5}\left\{\begin{matrix}e^{5\varphi i}-5e^{3\varphi i}+10e^{\varphi i}\\-e^{-5\varphi i}+5e^{-3\varphi i}-10e^{-\varphi i}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2^4}\left\{\frac{e^{5\varphi i}-e^{-5\varphi i}}{2i}-5\cdot\frac{e^{3\varphi i}-e^{-3\varphi i}}{2i}+10\frac{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}{2i}\right\}=$$

$$=\frac{1}{16}\left\{\sin5\varphi-5\sin3\varphi+10\sin\varphi\right\}\ \text{и т. п.}].$$

После такой замены $P$ примет вид:

$$P = \Sigma D \sin h_1 x \sin h_2 x \ldots \cos k_1 x \cos k_2 x \ldots,$$

где $D$, $h_1$, $h_2, \ldots k_1$, $k_2$ — постоянные.

Затем, на основании тригонометрических формул:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\},\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\},$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\},$$

число множителей в каждом произведении $\sin h_1 x \sin h_2 x \ldots \cos k_1 x \cos k_2 x \ldots$ постепенно уменьшается на 1, пока не получится линейная функция:

$$P = \Sigma(M\cos lx + M_1 \sin l_1 x).$$

После указанных преобразований предложенный интеграл обратится в сумму интегралов вида

$$\int e^{kx} f(x)\cos lx\,dx,\quad \int e^{kx} f(x)\sin lx\,dx.$$

Для изучения их рассмотрим более общий интеграл

$$J_n = \int e^{kx} f(x)(A\cos lx + B\sin lx)dx,$$

где $A$ и $B$—постоянные и $f(x)$—целая функция $n$-й степени. Интегрируем по частям, полагая

$$u = f(x),\ v = \int e^{kx}(A\cos lx + B\sin lx)dx = e^{kx}(A_1\cos lx + B_1\sin lx)$$

(см. пример 4, § 4, гл. I); тогда $J_n = e^{kx}(A_1\cos lx + B_1\sin lx)/(x) - J_{n-1}$, где

$$J_{n-1} = \int e^{kx} f'(x)(A_1\cos lx + B_1\sin lx)\cdot dx;$$

полагая

$$\int e^{kx}(A_1\cos lx + B_1\sin lx)dx = e^{kx}(A_2\cos lx + B_2\sin lx),$$

получим $J_{n-1} = e^{kx}(A_2\cos lx + B_2\sin lx)\cdot f'(x) - J_{n-2}$ и т. д.

Окончательный результат будет $J_n = e^{kx}\{\cos lx\cdot\varphi(x) + \sin lx\cdot\psi(x)\} + C$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — целые функции степени $n$-й:

$$\varphi(x) = A_1 f(x) - A_2 f'(x) + A_3 f''(x) - \ldots + (-1)^n A_{n+1} f^{(n)}(x)$$
$$\psi(x) = B_1 f(x) - B_2 f'(x) + B_3 f''(x) - \ldots + (-1)^n B_{n+1} f^{(n)}(x).$$

Поэтому интегралы вида $\int e^{kx} f(x)(A\cos lx + B\sin lx)\cdot dx$ можно вычислять по формуле с неопределенными коэффициентами.

*Пример.* $\int e^{-2x}\cos 3x(2x+1)dx = e^{-2x}\{(a_0x + a_1)\cos 3x + (b_0x + b_1)\sin 3x\} + C.$

Дифференцируя, имеем:

$$e^{-2x}\cos 3x\cdot(2x+1) = e^{-2x}\{\cos 3x[(-2a_0 + 3b_0)x + (-2a_1 + 3b_1 + a_0)] +$$
$$+ \sin 3x[(-3a_0 - 2b_0)x + (-3a_1 - 2b_1 + b_0)].$$

Приравнивая члены с $\cos 3x$ и с $\sin 3x$, находим:

$$-2a_0 + 3b_0 = 2,\ -2a_1 + 3b_1 + a_0 = 1,\ -3a_0 - 2b_0 = 0,\ -3a_1 - 2b_1 + b_0 = 0,$$

откуда $a_0 = -\frac{4}{13}$, $b_0 = \frac{6}{13}$, $a_1 = -\frac{16}{169}$, $b_1 = \frac{63}{169}$.

*Замечание 1.* Интегралы $I=\int e^{kx}f(x)dx$, где $f(x)$ — целая функция $n$-й степени, представляют частный случай предыдущих при $l=0$ и берутся по формуле: $I=e^{kx}\cdot\varphi(x)+C$, где $\varphi(x)$—целая функция $n$-й степени с неопределенными коэффициентами.

*Пример.* $\int e^{-2x}(x^2+1)dx=e^{-2x}(a_0x^2+a_1x+a_2)+C.$

Дифференцирование дает:

$$e^{-2x}(x^2+1)=-2e^{-2x}(a_0x^2+a_1x+a_2)+e^{-2x}(2a_0x+a_1).$$

Сравнение членов с $x^2$, $x$, 1 дает: $a_0=-\frac{1}{2}$, $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_2=-\frac{3}{4}$.

*Замечание 2.* Интегралы вида $\int f(x)(A\cos x+B\sin lx)dx\ (k=0)$ проще брать по частям, чем по формуле с неопределенными коэффициентами

*Пример.* $I=\int x\sin 2x\sin 3x\sin 4x\,dx.$

Преобразуем: $\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 5x)$, $\sin 2x\sin 3x\sin 4x=$

$$=\frac{1}{2}\sin 4x\cos x-\frac{1}{2}\sin 4x\cos 5x=\frac{1}{4}\{\sin 5x+\sin 3x-\sin 9x+\sin x\};$$

$I$ приводится к сумме четырех интегралов вида:

$$\int x\sin lx\,dx=-x\frac{\cos lx}{l}+\frac{\sin lx}{l^2}.$$

## § 2. Интегралы вида $\int f(\sin x,\ \cos x)dx$, где $f$ — рациональная функция.

Такие интегралы приводятся к $\int F(z)dz$, где $F$ — рациональная функция, подстановкою $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, при которой $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$, $dx=d\,(2\operatorname{arctg}z)=2\,\frac{dz}{1+z^2}$.

*Пример.* $\int\frac{dx}{2+\cos x-\sin x}=2\int\frac{dz}{z^2-2z+3}=\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{z-1}{\sqrt{2}}\right)+C,$

при $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Отметим несколько частных случаев интегралов этого класса, когда результат получается быстрее, чем указанной подстановкой.

1°. Интегралы вида $\int\sin^p x\cos^q x\,dx$.

Подстановкою $y=\sin x$ интеграл приводится к классу § 3, гл. III: $\int y^p(1-y^2)^{\frac{q-1}{2}}\cdot dy$ и, следовательно, берется в конечном виде в одном из трех случаев: 1) $\frac{q-1}{2}=t$ (целому), т.-е. $q=2t+1$ — нечетному; 2) $\frac{p+1}{2}=t$, $p=2t-1$ — нечетному и 3) $\frac{p+1}{2}+\frac{q-1}{2}=t$, $p+q=2t$ — четному; в первом случае делается подстановка $y=\sin x$, во втором $y=\cos x$, в третьем $y=\operatorname{tg}x$ или $y=\cot x$.

*Пример 1.* $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^3 x} = \int \frac{(1-z^2)^2 dz}{z^4} = -\frac{1}{3z^3} + \frac{2}{z} + z + C$ при $z = \sin x$.

*Пример 2.* $\int \frac{\sqrt{\cos x} \cdot dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{\sqrt{z}\, dz}{(1-z^2)^2}$ (при $z = \cos x$) $= -2\int \frac{u^2 du}{(1-u^4)^2}$ (при $u = \sqrt{z}$); последний интеграл берется разложением на простейшие дроби.

*Пример 3.* $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int \frac{(1+z^2)^3 dz}{z^3} = -\frac{1}{2z^2} + 3\log z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^4 + C$ при $z = \operatorname{tg} x$.

*Пример 4.* $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x \cos^5 x}} = \int \frac{dz}{\sqrt[4]{z}} = \frac{3}{2} z^{\frac{2}{3}} + C$ при $z = \operatorname{tg} x$.

*Замечание 1.* Интеграл $(p, q) = \int \sin^p x \cos^q x dx$ можно привести интегрированием по частям к одному из шести видов: $(p-2, q+2)$, $(p-2, q)$, $(p+2, q)$, $(p+2, q-2)$, $(p, q-2)$, $(p, q+2)$, при чем упрощение интеграла достигается тогда, когда или оба показателя абсолютно уменьшаются или один абсолютно уменьшается, а другой остается без изменения. Для приведения $(p, q)$ к $(p-2, q+2)$ интегрируем по частям, полагая $u = \sin^{p-1} x$, $v = \int \cos^q x \sin x dx = -\frac{\cos^{q+1} x}{q+1}$; находим:

$$(p, q) = -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{q+1} + \frac{p-1}{q+1} \cdot (p-2, q+2) \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

Для приведения $(p, q)$ к $(p-2, q)$ заменяем в последней формуле: $(p-2, q+2) = (p-2, q) - (p, q)$ и тогда

$$(p, q) = -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q} (p-2, q) \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

Заменяя $p$ на $p+2$ и решая затем относительно $(p, q)$, получаем:

$$(p, q) = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q+1} x}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1} (p+2, q) \quad \ldots \quad \text{(III)}$$

Аналогично находим:

$$(p, q) = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+1} + \frac{q-1}{p+1} (p+2, q-2) \quad \ldots \quad \text{(IV)}$$

$$(p, q) = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} (p, q-2) \quad \ldots \quad \text{(V)}$$

$$(p, q) = -\frac{\sin^{p+1} x \cos^{q+1} x}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1} (p, q+2) \quad \ldots \quad \text{(VI)}$$

Общий характер всех 6 формул таков, что выделенный член содержит показатель $\sin x$ и $\cos x$, средний между первоначальным и новым, если этот показатель меняется, или содержит показатель на 1 больше, если этот показатель одинаков в первоначальном и в преобразованном интеграле. Зная это, можно в частных примерах применять способ неопределенных коэффициентов.

*Пример.* $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^2 x} dx = (-2,6)$ приводим к $(0,4)$ по формуле:

$$\int \frac{\cos^6 x}{\sin^2 x} dx = A \frac{\cos^5 x}{\sin x} + B \int \cos^4 x dx.$$

Дифференцирование этой формулы дает:

$$\frac{\cos^6 x}{\sin^2 x} = -\frac{A \cos^6 x}{\sin^2 x} - 5 A \cos^4 x + B \cos^4 x;$$

сокращая на $\cos^4 x$, приравниваем коэффициенты при $\cot^2 x$ и при 1, что дает $A = -1$, $B = -5$. Затем $\int \cos^4 x dx = A_1 \sin x \cos^3 x + B_1 \int \cos^2 x dx$ при $A_1 = \frac{1}{4}$, $B_1 = \frac{3}{4}$ и т. д.

*Замечание 2.* Если в интеграле $(p, q)$ числа $p$ и $q$ оба четные положительные, то вместо подстановки $y = \operatorname{tg} x$, приводящей к рациональной дроби, удобно выразить $\sin^p x$ и $\cos^q x$ линейными функциями от sin или cos кратных дуг.

*Пример.* $\int \sin^4 x \cos^6 x \, dx = \frac{1}{16} \int \sin^4 2x \cos^2 x dx$. Вводя

$$\sin^4 2x = \frac{1}{8}(\cos 8x - 4 \cos 4x + 3), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1),$$

находим $(4,6) = \frac{1}{512} \int (\cos 10x + 2 \cos 8x - 3 \cos 6x - 8 \cos 4x + 2 \cos x 2 + 6) dx$.

*Замечание 3.* Если в интеграле $(p, q)$ $p$ и $q$ оба отрицательные и различной четности (при одинаковой четности $p$ и $q$ удобнее всего подстановка $y = \operatorname{tg} x$), то полезно вводить в числитель $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ с последующим интегрированием по частям.

*Пример.* $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^3 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$;

здесь $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x} = \int \sin x \cdot d\left(\frac{1}{2 \cos^2 x}\right) + \int \frac{dx}{\cos x} =$

$= \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \log \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ (см. гл. I, §5, пример 7);

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sin x}.$$

*Замечание 4.* Укажем наиболее простые подстановки для интегралов $\int \frac{dx}{\cos^n x}$, $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ ($n$ целое положительное)

при $z = \cot x$ $\quad \int \frac{dx}{\sin^{2k} x} = -\int (1 + z^2)^{k-1} dz$;

при $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ $\quad \int \frac{dx}{\sin^{2k+1} x} = \frac{1}{2^{2k}} \int \frac{(1 + z^2)^{2k}}{z^{2k+1}} dz$;

при $z = \operatorname{tg} x$ $\quad \int \frac{dx}{\cos^{2k} x} = \int (1 + z^2)^{k-1} dz$;

при $z = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ $\left[\text{тогда } \cos x = \frac{2z}{1 + z^2}\right]$ $\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x} = \frac{1}{2^{2k}} \int \frac{(1 + z^2)^{2k} dz}{z^{2k+1}}$.

2°. Интегралы вида $\int f(\operatorname{tg} x)dx$ подстановкою $\operatorname{tg} x = z$ приводятся к $\int \frac{f(z)dz}{1+z^2}$. (К этому виду относятся все те интегралы $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$, у которых подынтегральная функция имеет период $\pi$.)

*Пример 1.* $I = \int \operatorname{tg}^n x\, dx = \int \frac{z^n dz}{1+z^2}$; если $n = \frac{p}{q}$ (рациональная дробь), то новой подстановкой $z = t^q$ получаем $I = q\int \frac{t^{p+q-1}dt}{1+t^{2q}}$.

*Пример 2.* $\int \frac{dx}{(a+b\operatorname{tg} x)^n} = \int \frac{dz}{(a+bz)^n(1+z^2)}$ (разложением на простейшие).

*Пример 3.* $\int \frac{dx}{(a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x)^n} = \int \frac{(1+z^2)^{n-1}dz}{(az^2+2bz+c)^n}$.

*Пример 4.* $\int \frac{\sin x dx}{\sin x - 2\cos^3 x} = \int \frac{z dz}{z^3+z-2}$.

*Пример 5.* $\int \frac{\sin^2 x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{z^2 dz}{z^4+1}$.

3°. Интегралы вида $\int \frac{f(\sin x, \cos x)dx}{(a+b\cos x)^m}$ и $\int \frac{f(\sin x, \cos x)dx}{(a+b\sin x)^m}$, где $f$ — целая функция, $m$ — целое положительное, $a$ и $b$ — любые вещественные числа; второй интеграл приводим к первому, полагая $x = \frac{\pi}{2} - y$, поэтому займемся только первым.

Заменяя в функции $f(\sin x, \cos x)$ $\sin^{2k} x$ на $(1-\cos^2 x)^k$ и $\sin^{2k+1} x$ на $\sin x \cdot (1-\cos^2 x)^k$, получим: $f(\sin x, \cos x) = \varphi(\cos x) + \sin x \cdot \psi(\cos x)$, где $\varphi$ и $\psi$ — целые функции; тогда

$$\int \frac{f(\sin x, \cos x)dx}{(a+b\cos x)^m} = \int \frac{\varphi(\cos x)dx}{(a+b\cos x)^m} + \int \frac{\sin x \cdot \psi(\cos x)dx}{(a+b\cos x)^m};$$

второй интеграл подстановкою $a + b\cos x = z$ приводится к $-\frac{1}{b}\int \frac{\psi\left(\frac{z-a}{b}\right)dz}{z^m}$, а первый разложением $\varphi(\cos x)$ по степеням $z$ [именно $\varphi(\cos x) = \varphi\left(-\frac{a}{b} + \frac{z}{b}\right) = \varphi\left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{z}{b}\varphi'\left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{z^2}{b^2}\varphi''\left(-\frac{a}{b}\right) + \ldots$] приводится к сумме интегралов $I_m = \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^m}$; для них составляется формула приведения:

$$I_m = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{m-1}} + B\, I_{m-1} + C\, I_{m-2}, \text{ где}$$

$$A = \frac{b}{(m-1)(b^2-a^2)},\quad B = -\frac{a(2m-3)}{(m-1)(b^2-a^2)},\quad C = \frac{m-2}{(m-1)(b^2-a^2)},$$

и в частности

$$I_2 = \frac{b\sin x}{(b^2-a^2)(a+b\cos x)} - \frac{a}{b^2-a^2} I_1$$

(для вывода формулы приведения можно составить производную от $\frac{\sin x}{(a+b\cos x)^{m-1}}$ и полученный результат проинтегрировать).

Изложенный способ для вычисления $I_m$ предполагает $b^2-a^2$ не $=0$; если $b=a$, то $I_m=\frac{1}{(2a)^m}\int\frac{dx}{\cos^{2m}\left(\frac{x}{2}\right)}$ берется подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$; если $b=-a$, то $I_m=\frac{1}{(2a)^m}\cdot\int\frac{dx}{\sin^{2m}\left(\frac{x}{2}\right)}$ берется подстановкой $\cot\frac{x}{2}=z$.

Зная вид формулы приведения для $I_m$, можно в примерах прилагать способ неопределенных коэффициентов.

*Пример.* $I_3=\int\frac{dx}{(2+\cos x)^3}=\frac{A\sin x}{(2+\cos x)^2}+BI_2+CI_1.$

Дифференцируя, имеем:

$$\frac{1}{(2+\cos x)^3}=\frac{A\cos x}{(2+\cos x)^2}+\frac{2A\sin^2 x}{(2+\cos x)^3}+\frac{B}{(2+\cos x)^2}+\frac{C}{2+\cos x},$$

откуда $1=A\cos x(2+\cos x)+2A(1-\cos^2 x)+B(2+\cos x)+C(2+\cos x)^2$; сравнение коэффициентов при $\cos^2 x$, $\cos x$, 1 дает $A=-\frac{1}{6}$, $B=1$, $C=-\frac{1}{6}$.

Так же $I_2=\frac{A'\sin x}{2+\cos x}+B'I_1$ при $A'=-\frac{1}{3}$, $B'=\frac{2}{3}$; подстановкою

$$z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\qquad I_1=2\int\frac{dz}{3+z^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{3}}+C.$$

**§ 3. Интегралы от трансцендентных функций, вычисляемые введением новой переменной.**

Общий вид таких интегралов: $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$, где $y=\varphi(x)$ — некоторая трансцендентная функция; если $\int f(y)dy$ берется в конечном виде, то берется и первоначальный.

*Пример 1.* $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}=\int\frac{dy}{y\sqrt{1+y+y^2}}$ (при $y=e^x$); последний интеграл (по главе III, § 2, тип II) при $z=\frac{1}{y}$ обращается в $-\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+z-1}}=-\log\left(z+\frac{1}{2}+\sqrt{z^2+z-1}\right)+C$ (по гл. III, §2, тип I, $I_0$).

*Пример 2.*

$$\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}=\int\frac{dy}{\sqrt{1-2y^2}}\ (y=\sin x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(y\sqrt{2})+C.$$

*Пример 3.*

$$\int(x+\sqrt{1+x^2})^m\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int e^{my}dy\ \left(\text{при}\ \ y=\log(x+\sqrt{1+x^2})\right)=$$
$$=\frac{1}{m}e^{my}+C=\frac{1}{m}(x+\sqrt{1+x^2})^m+C.$$

*Пример 4.*

$$\int (a\sin^2 x + b\cos^2 x)^m \cdot \sin 2x\,dx = \frac{1}{a-b}\int y^m dy \text{ (при } y = a\sin^2 x + b\cos^2 x) =$$

$$= \frac{1}{a-b}\cdot\frac{y^{m+1}}{m+1} + C \text{ и т. д. } (m \gtrless -1).$$

*Пример 5.* $I = \int (\log x)^n \cdot x^m dx$ ($n$ — целое положительное, $m$ — любое вещественное $\gtrless -1$).

При $y = \log x$

$$I = \int e^{(m+1)y}\cdot y^n dy \text{ берется по гл. IV, § 1, замечание 1.}$$

*Пример 6.* $I = \int (\arcsin x)^n \cdot dx$ ($n$ — целое положительное).

При $y = \arcsin x$, $I = \int y^n \cos y\,dy$ берется по гл. IV, § 1, замечание 2.

## § 4. Интегралы от трансцендентных функций, интегрируемые по частям.

Интегралы вида

$$\int \varphi(x)\cdot\log\psi(x)dx,\ \int \varphi(x)\cdot\arcsin\psi(x)\cdot dx,\ \int \varphi(x)\cdot\operatorname{arctg}\psi(x)\cdot dx,$$

если они берутся в конечном виде, вычисляются интегрированием по частям, полагая

$$u = \log\psi(x),\quad \arcsin\psi(x),\quad \operatorname{arctg}\psi(x),\quad v = \int \varphi(x)dx.$$

*Пример 1.*

$$\int \frac{\log(x^2+1)dx}{(x-1)^3} = \frac{\log(x^2+1)}{-2(x-1)^2} + \int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

(разложением на простейшие дроби).

*Пример 2.*

$$\int \frac{\log(x+\sqrt{x-1})dx}{\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}\cdot\log(x+\sqrt{x-1}) - \int \frac{1+2\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x-1}}dx;$$

последний интеграл относится к главе III, § 1 и подстановкой $x-1 = y^2$ приводится к $2\int \frac{(2y^2+y)dy}{y^2+y+1}$, и т. д.

*Пример 3.*

$$I = \int \frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.\quad \text{Здесь } v = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(по главе III, § 2, тип III, частный случай, замечание), $du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$I = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$$

*Пример 4.*

$$\int \frac{\log(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{\log(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}};$$

последний интеграл (по гл. III, § 2, тип II) при $y=\frac{1}{x-1}$ обращается в

$$-\int \frac{dy}{\sqrt{6y^2+4y+1}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\log(6y+2+\sqrt{6}\cdot\sqrt{6y^2+4y+1})+C.$$

*Пример 5.*

$$\int \frac{\arcsin x\cdot dx}{(1+x)^2} = -\frac{\arcsin x}{1+x} + \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}};$$

последний интеграл (по гл. III, § 1, замечание), подстановкою $\frac{1-x}{1+x}=y^2$ обращается в $-\int dy = -y+C$.

*Пример 6.*

$$\int \frac{\arcsin x\cdot dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{1-x}}\arcsin x - 2\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x}};$$

последний интеграл (по гл. III, § 1) подстановкою $1+x=y^2$ приводится к

$$2\int \frac{dy}{2-y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{\sqrt{2}+y}{\sqrt{2}-y}\right)+C.$$

*Пример 7.* $\int \frac{x\arcsin x\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}+C.$

*Пример 8.* $\int \frac{\arcsin x\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x + \frac{1}{2}\log(1-x^2)+C.$

*Пример 9.* $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x}\cdot\operatorname{arctg} x - 2\int \frac{\sqrt{1+x}\,dx}{1+x^2}$; последний интеграл подстановкою $1+x=y^2$ приводится к $\int \frac{y^2dy}{y^4-2y^2+2}$ и берется разложением на простейшие дроби.

*Пример 10.* $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$; последний интеграл подстановкою $1-x^2=y^2$ приводится к

$$-\int \frac{dy}{2-y^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+y}{\sqrt{2}-y}+C.$$

## § 5. Гиперболические функции и зависящие от них интегралы.

В дифференциальном исчислении мы ознакомились (см. отд. I, гл. III, § 2) с гиперболическими функциями: $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$,

$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\coth x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ и их производными $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\coth x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$. Отметим основные соотношения:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \coth^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Выведем формулы сложения. Перемножив тождества: $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x = e^{\pm x}$, $\operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y = e^{\pm y}$, получим, беря одновременно верхние или нижние знаки в обоих тождествах, третье тождество:

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \pm (\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x) = e^{\pm (x+y)};$$

с другой стороны, $\operatorname{ch}(x+y) \pm \operatorname{sh}(x+y) = e^{\pm (x+y)}$; из сравнения двух последних тождеств следует:

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x.$$

Заменяя $y$ на $-y$ и замечая, что $\operatorname{sh}(-y) = -\operatorname{sh} y$, $\operatorname{ch}(-y) = \operatorname{ch} y$, находим: $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$.

Как следствия этих формул, вытекают следующие:

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)\right], \quad \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)\right],$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)\right].$$

Если возвысить обе части тождества $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x = e^{\pm x}$ в целую положительную степень $n$, то получится $(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = e^{\pm nx}$; с другой стороны $\operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx = e^{\pm nx}$, откуда следует формула умножения гиперболических функций, аналогичная формуле Моавра: $(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx$, и из нее выражения

$$\operatorname{ch} nx = \operatorname{ch}^n x + \frac{n(n-1)}{1.2} \operatorname{ch}^{n-2} x \operatorname{sh}^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \operatorname{ch}^{n-4} x \operatorname{sh}^4 x + \ldots$$

$$\operatorname{sh} nx = \frac{n}{1} \operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \operatorname{ch}^{n-3} x \operatorname{sh}^3 x + \ldots;$$ в частности

$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$, $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

Для выражения $\operatorname{ch}^n x$ и $\operatorname{sh}^n x$ через ch и sh кратных дуг, пользуемся формулами

$$\operatorname{ch}^n x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^n, \quad \operatorname{sh}^n x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n.$$

Например

$$\operatorname{sh}^3 x = \frac{1}{8}\left(\begin{matrix} e^{3x} & -3e^x \\ -e^{-3x} & +3e^{-x} \end{matrix}\right) = \frac{1}{4}\left(\operatorname{sh} 3x - 3 \operatorname{sh} x\right).$$

В виду полного сходства преобразовательных формул в теории тригонометрических и гиперболических функций, почти все сказанное в §§ 1 и 2 настоящей главы относительно тригонометрических интегралов можно приложить и к интегралам, содержащим гиперболические функции.

Отметим следующие классы таких интегралов.

1°. Интегралы $\int f(x) \operatorname{sh}^m ax \ldots \operatorname{ch}^n bx \ldots \sin^r kx \ldots \cos^s lx \ldots dx$, где $f(x)$ целая функция, $m$, $n$, $r$, $s$ — целые положительные числа.

Преобразованиями § 1 приведем $\mathrm{ch}^m ax \ldots \mathrm{sh}^n bx \ldots$ и $\sin^r kx \ldots \cos^s lx \ldots$ к линейным функциям от sin и cos кратных дуг; тогда данный интеграл обратится в сумму интегралов 4 типов:

$$\int f(x)\sin px\,\mathrm{sh}\,qx\,dx,\ \int f(x)\sin px\,\mathrm{ch}\,qx\,dx,\ \int f(x)\cos px\,\mathrm{sh}\,qx\,dx,\ \int f(x)\cos px\,\mathrm{ch}\,qx\,dx,$$

которые берутся по общей формуле:

$$\varphi_1(x)\sin px\,\mathrm{ch}\,qx + \varphi_2(x)\sin px\,\mathrm{sh}\,qx + \varphi_3(x)\cos px\,\mathrm{ch}\,qx + \varphi_4(x)\cos px\,\mathrm{sh}\,qx,$$

где $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$ суть целые функции той же степени, как $f(x)$. К этой формуле придем, если заменим $\mathrm{sh}\,qx$, $\mathrm{ch}\,qx$ выражениями $\frac{1}{2}\left(e^{qx} \pm e^{-qx}\right)$ и к интегралам $\int e^{\pm qx} f(x) \left\{ \begin{matrix} \sin px \\ \cos px \end{matrix} \right\} dx$ приложим формулу § 1.

*Пример.* $\int \mathrm{sh}\,3x \cos 4x\,dx = \alpha_1 \mathrm{sh}\,3x \sin 4x + \alpha_2 \mathrm{ch}\,3x \sin 4x +$
$$+ \alpha_3 \mathrm{sh}\,3x \cos 4x + \alpha_4 \mathrm{ch}\,3x \cos 4x + C.$$

Здесь a priori очевидно, что $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, так как левая часть не меняется при замене $x$ на $-x$, $dx$ на $-dx$, следовательно и правая часть обладает тем же свойством. Дифференцирование дает:

$$\mathrm{sh}\,3x \cos 4x = \alpha_1(3\,\mathrm{ch}\,3x \sin 4x + 4\,\mathrm{sh}\,3x \cos 4x) + \alpha_4(3\,\mathrm{sh}\,3x \cos 4x - 4\,\mathrm{ch}\,3x \sin 4x),$$

откуда

$$1 = 4\alpha_1 + 3\alpha_4, \quad 0 = 3\alpha_1 - 4\alpha_4, \text{ т.-е. } \alpha_1 = \frac{4}{25}, \quad \alpha_4 = \frac{3}{25}.$$

2°. Интегралы $\int f(\mathrm{sh}\,x, \mathrm{ch}\,x)dx$ берутся подстановкою $z = \mathrm{th}\,\frac{x}{2}$, при которой $\mathrm{sh}\,x = \frac{2z}{1-z^2}$, $\mathrm{ch}\,x = \frac{1+z^2}{1-z^2}$, $dx = \frac{2\,dz}{1-z^2}$. Например,

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}\,x} = 2\int \frac{dz}{1+z^2} = 2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Как и в § 2, можно указать типы, для которых иные приемы интегрирования быстрее дают результат, чем подстановка $z = \mathrm{th}\frac{x}{2}$.

*1-й тип:* $\int \mathrm{sh}^p x\,\mathrm{ch}^q x\,dx$ при $z = \mathrm{sh}\,x$ приводится к интегралу двучленной иррациональности $\int z^p(1+z^2)^{\frac{q-1}{2}}\,dz$, который берется в конечном виде при $q$ нечетном (подстановка $z = \mathrm{sh}\,x$), при $p$ нечетном (подстановка $z = \mathrm{ch}\,x$), при $p+q$ четном (подстановка $z = \mathrm{th}\,x$). Замечания 1, 2, 3, 4 § 2 сохраняют силу, только в замечании 4 интеграл $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^{2k+1} x}$ берется введением в числитель $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ с последующим интегрированием по частям.

*2-й тип:* $\int f(\mathrm{th}\,x)dx$ или $\int f(\mathrm{sh}^2 x, \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x, \mathrm{ch}^2 x)dx$ берутся подстановкой $z = \mathrm{th}\,x$, при которой $\mathrm{sh}^2 x = \frac{z^2}{1-z^2}$, $\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{1-z^2}$, $\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x = \frac{z}{1-z^2}$, $dx = \frac{dz}{1-z^2}$.

*Пример:* $\int \frac{dx}{2+3\operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{dz}{5-2z^2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \log \frac{\sqrt{5}+z\sqrt{2}}{\sqrt{5}-z\sqrt{2}} + C.$

*3-й тип:* $\int \frac{dx}{(a+b\operatorname{ch}x)^n} = I_n$ вычисляется по формуле приведения $I_n = \frac{A\operatorname{sh}x}{(a+b\operatorname{ch}x)^{n-1}} + BI_{n-1} + CI_{n-2}$ и т. д.

---

Глава V.

## Интегрирование полных дифференциалов функций от нескольких переменных.

**§ 1. Задача интегрирования функций состоит в определении функций $y=F(x)$ из уравнения $dy=f(x)dx$. Поставим более общую задачу — определить функцию $u$ от нескольких переменных $x, y, z\ldots$ по данному ее полному дифференциалу $du=M(x, y, z\ldots)dx+N(x, y, z\ldots)dy+$ $+P(x, y, z\ldots)dz+\ldots$**

**§ 2. Случай двух независимых переменных.**

*Теорема.* Для того, чтобы выражение $M(x, y)dx+N(x, y)dy$ было полным дифференциалом функции $z=f(x, y)$, необходимо и достаточно выполнение равенства $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

Необходимость условия. Если $Mdx+Ndy=dz=\frac{\partial z}{\partial z}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$, то должно быть $\frac{\partial z}{\partial x}=M$, $\frac{\partial z}{\partial y}=N$, откуда $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, следовательно $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

Достаточность условия. Пусть $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$; покажем, как найти функцию $z=f(x, y)$, для которой $\frac{\partial z}{\partial x}=M$, $\frac{\partial z}{\partial y}=N$. Из условия $\frac{\partial z}{\partial x}=M(x, y)$ находим $z=\int M(x, y)dx+\varphi(y)=\omega(x, y)+\varphi(y)$, при чем при вычислении $\omega(x, y)=\int M(x, y)dx$ буква $y$ считается за постоянное. Дифференцируя равенство $z=\omega(x, y)+\varphi(y)$ по $y$, находим: $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial \omega}{\partial y}+\varphi'(y)$; но $\frac{\partial z}{\partial y}=N$, следовательно $\varphi'(y)=N-\frac{\partial \omega}{\partial y}$.

Отсюда $\varphi(y)$ определяется, если правая часть не зависит от $x$, т.-е. если

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N-\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)=0;$$

это равенство у нас выполнено, ибо $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$ по условию. Итак, $\varphi(y)=\int\left(N-\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)dy+C$ и окончательно

$$z=\int M(x,\ y)dx+\int\left(N-\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)dy+C.$$

*Замечание.* Начав определение $z=f(x,\ y)$ из условия $\frac{\partial z}{\partial x}=M$, мы получили для $z$ выражение: $z=f(x,\ y)=\omega(x,\ y)+\varphi(y)$, где $\omega(x,\ y)=\int M(x,\ y)dx$ (при постоянном $y$). Если же начать определение $z$ из условия $\frac{\partial z}{\partial y}=N$, то получим:

$z=f(x,y)=\omega_1(x,y)+\psi(x)$, где $\omega_1(x,\ y)=\int N(x,\ y)dy$ (при постоянном $x$).

Итак, находим:

$$z=f(x,\ y)=\omega(x,\ y)+\varphi(y)=\omega_1(x,\ y)+\psi(x).$$

Обозначая через $x_0$, $y_0$ произвольные значения $x$, $y$, имеем:

$$\varphi(y)=-\omega(x_0,\ y)+\omega_1(x_0,\ y)+\psi(x_0),\ \psi(x_0)=-\omega_1(x_0,\ y_0)+f(x_0,\ y_0);$$

складывая эти два равенства с третьим: $f(x,\ y)=\omega(x,\ y)+\varphi(y)$, находим окончательное выражение $z$:

$z=f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0)+[\omega(x,\ y)-\omega(x_0,\ y)]+[\omega_1(x_0,\ y)-\omega_1(x_0,\ y_0)]$, при чем

$$\omega(x,\ y)=\int M(x,\ y)dx \text{ (при постоянном } y),$$

$$\omega_1(x_0,\ y)=\int N(x_0,\ y)dy.$$

*Пример.* Найти $z$, если

$$dz=(2x\sin y-y\cos x+x^2)dx+(x^2\cos y-\sin x-y^2)dy.$$

Условие интегрируемости здесь выполнено, ибо

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2x\cos y-\cos x.$$

Вычисляем:

$$\omega(x,\ y)=\int(2x\sin y-y\cos x+x^2)dx=x^2\sin y-y\sin x+\frac{1}{3}x^3,$$

$$\omega_1(x_0,\ y)=\int(x_0^2\cos y-\sin x_0-y^2)dy=x_0^2\sin y-y\sin x_0-\frac{1}{3}y^3;$$

отсюда

$$z=f(x_0,\ y_0)+x^2\sin y-y\sin x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}y^3-x_0^2\sin y_0+$$

$$+y_0\sin x_0-\frac{1}{3}x_0^3+\frac{1}{3}y_0^3.$$

Можно положить $z=x^2\sin y-y\sin x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}y^3+C.$

## § 3. Случай трех независимых переменных.

*Теорема.* Для того, чтобы выражение $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)dz$ было полным дифференциалом функции $u = f(x, y, z)$ от трех независимых переменных, необходимо и достаточно выполнение трех условий: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (*).

Необходимость условий. Если

$$Mdx + Ndy + Pdz = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

$$\text{то } M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial u}{\partial z},$$

следовательно,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x},$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y},$$

откуда и вытекают условия (*).

Достаточность условий. Покажем, как найти, при выполнении условий (*), такую функцию $u = f(x, y, z)$, для которой $du = Mdx + Ndy + Pdz$. Искомая функция определяется тремя уравнениями:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = P.$$

Из первого уравнения имеем: $u = \omega(x, y, z) + \varphi(y, z)$, где $\omega(x, y) = \int M(x, y, z)dx$, при чем интеграл вычисляется, считая $y$ и $z$ за постоянные. Отсюда $d\varphi(y, z) = du - d\omega(x, y, z) = \left(N - \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)dy + \left(P - \frac{\partial \omega}{\partial z}\right)dz$. Определение функции $\varphi(y, z)$ из этого равенства возможно лишь при выполнении трех условий: 1) и 2) функции $N - \frac{\partial \omega}{\partial y}$, $P - \frac{\partial \omega}{\partial z}$ не зависят от $x$, т.-е. их производные по $x$ равны 0, и 3) $\frac{\partial}{\partial z}\left(N - \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(P - \frac{\partial \omega}{\partial z}\right)$, но эти условия как раз и совпадают с условиями (*). Нахождение функции $\varphi(y, z)$ делается по § 2.

*Замечание.* Смотря по тому, какое из трех уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = P$$

мы примем за исходное, мы получим три различных выражения функции $u$:

$$u(x, y, z) = \omega(x, y, z) + \varphi(y, z) = \omega_1(x, y, z) + \psi(x, z) = \omega_2(x, y, z) + f(x, y),$$

где

$$\omega(x, y, z) = \int M(x, y, z)dx \text{ (при постоянном } y \text{ и } z),$$

$$\omega_1(x, y, z) = \int N(x, y, z)dy \text{ (при постоянном } x \text{ и } z),$$

$$\omega_2(x, y, z) = \int P(x, y, z)dz \text{ (при постоянном } x \text{ и } y).$$

Отсюда, обозначая через $x_0$, $y_0$, $z_0$ частные значения независимых переменных, находим:

$$\varphi(y, z) = -\omega(x_0, y, z) + \omega_1(x_0, y, z) + \psi(x_0, z),$$
$$\psi(x_0, z) = -\omega_1(x_0, y_0, z) + \omega_2(x_0, y_0, z) + f(x_0, y_0),$$
$$f(x_0, y_0) = -\omega_2(x_0, y_0, z_0) + u(x_0, y_0, z_0).$$

Складывая эти три равенства с $u(x, y, z) = \omega(x, y, z) + \varphi(y, z)$, получаем:

$$u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0) + [\omega(x, y, z) - \omega(x_0, y, z)] +$$
$$+ [\omega_1(x_0, y, z) - \omega_1(x_0, y_0, z)] + [\omega_2(x_0, y_0, z) - \omega_2(x_0, y_0, z_0)].$$

*Пример.* Найти $u$, если

$$du = (yz + 2xy + z^2 + x^2)dx + (xz + x^2 + 2yz + y^2)dy +$$
$$+ (xy + y^2 + 2xz + z^2)dz.$$

Условия (*) выполнены. Здесь: $\omega(x, y, z) = xyz + x^2y + xz^2 + \frac{x^3}{3}$, $\omega_1(x_0, y, z) = x_0yz + x_0^2y + y^2z + \frac{1}{3}y^3$, $\omega_2(x_0, y_0, z) = x_0y_0z + y_0^2z + x_0z^2 + \frac{z^3}{3}$, $u(x, y, z) = xyz + x^2y + xz^2 + y^2z + \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) + C$.

## § 4. Случай $n$ независимых переменных.

*Теорема.* Для того, чтобы выражение

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n)dx_1 + f_2(x_1, x_2, \ldots x_n)dx_2 + \ldots f_n(x_1, x_2, \ldots x_n)dx_n$$

было полным дифференциалом функции от $n$ независимых переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, необходимо и достаточно выполнение $\frac{n(n-1)}{2}$ условий вида

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \text{ при } j \gtrless k \text{ и при } j = 1, 2, \ldots n, \ k = 1, 2, \ldots n.$$

Доказательство аналогично § 3, предполагая теорему справедливой для $(n-1)$ независимых переменных.

ОТДЕЛ II.

# ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

## Глава I.

## Соотношение между определенным и неопределенным интегралами.

### § 1. Определенный интеграл как предел суммы бесконечно-большого числа бесконечно-малых слагаемых.

*Теорема.* Пусть $f(x)$ — равномерно-непрерывная функция [1]) от $x$ в интервале $a \leqq x \leqq b$; пусть $x_0 = a$, $x_1$, $x_2, \ldots x_i$, $x_{i+1}, \ldots x_{n-1}$, $x_n = b$ возрастающий ряд значений $x$, подчиненных тому условию, что все разности $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ стремятся к нулю при беспредельном возрастании $n$; пусть еще $\xi_i$ удовлетворяет условию: $x_i \leqq \xi_i \leqq x_{i+1}$. Тогда сумма $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ имеет определенный предел при $n = \infty$, независящий от выбора промежуточных значений $x$ между $a$ и $b$; этот предел $S$ называется определенным интегралом в пределах от $x = a$ до $x = b$ и обозначается символом:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Доказательство. Пусть $m_i$ и $M_i$ означают наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ при $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$, так что $m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i$; так как все разности $\Delta x_i > 0$, то полагая

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

находим:

$$s_n \leqq \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \leqq S_n.$$

Отсюда

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i - s_n \leqq S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\Delta x_i;$$

так как $f(x)$ равномерно-непрерывна в интервале $a \leqq x \leqq b$, то все амплитуды функции $f(x)$: $\delta_i = M_i - m_i$, при достаточно малых $\Delta x_i$, могут быть

сделаны меньше положительного числа $\delta$, сколь угодно малого, и потому $S_n - s_n \leqq \delta \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \delta(b-a)$. Таким образом разность $\Sigma f(\xi_i)\Delta x_i - s_n$ может быть сделана сколь угодно малой, а потому, если существует пред. $s_n = S$, то и пред. $\Sigma f(\xi_i)\Delta x_i = S$. Это замечание позволяет обратиться к суммам $s_n$ и $S_n$, для которых мы и докажем существование общего предела $S$ при $n = \infty$. Сперва мы допустим, что увеличение числа промежуточных значений $x$ между $a$ и $b$ происходит процессом дробления промежутков, при котором каждый следующий ряд промежуточных значений $x$ содержит все значения предыдущего ряда и еще новые значения, заключенные между прежними, так что вместо двух значений $x_i$, $x_{i+1}$ одного ряда в последующем появляются $k_i + 1$ значений:

$$x_i^{(0)} = x_i,\ x_i^{(1)},\ x_i^{(2)}, \ldots x_i^{(j)},\ x_i^{(j+1)}, \ldots x_i^{(k_i-1)},\ x_{i+1}^{(k_i)} = x_{i+1}.$$

Обозначая через $m_i^{(j)}$ и $M_i^{(j)}$ наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ в интервале $x_i^{(j)} \leqq x \leqq x_i^{(j+1)}$, равном по величине $\Delta x_i^{(j)} = x_i^{(j+1)} - x_i^{(j)}$, имеем очевидные неравенства $m_i^{(j)} \geqq m_i$, $M_i^{(j)} \leqq M_i$, откуда $\sum_{j=0}^{k_i-1} m_i^{(j)} \Delta x_i^{(j)} > m_i \Delta x_i$ и $\Sigma M_i^{(j)} \Delta x_i^{(j)} < M_i \Delta x_i$, и потому новые суммы

$$s_N = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{k_i-1} m_i^{(j)} \Delta x_i^{(j)}\right), \qquad S^N = \sum_{n-1}^{i=0} \left(\sum_{j=0}^{k_i-1} M_i^{(j)} \Delta x_i^{(j)}\right),$$

появляющиеся при процессе дробления вместо прежних сумм $s_n$ и $S_n$, удовлетворяют неравенствам: $s_N > s_n$, $S_N < S_n$. Итак, при процессе дробления, переменная $s_n$ возрастает, переменная $S_n$ убывает, при чем $S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\Delta x_i > 0$ и $S_n - s_n < \delta(b-a) = \varepsilon$ при достаточно больших $n$. По известной теореме теории пределов, обе переменные $s_n$ и $S_n$ имеют общий предел:

$$\text{пред. } s_n = \text{пред. } S_n = S;$$

как замечено выше, тогда и пред. $\Sigma f(\xi_i)\Delta x_i = S$. Доказав существование $S$ при процессе дробления, рассмотрим теперь на-ряду с суммами $s_n$ и $S_n$, отвечающими значениям $x$:

$$(1)\quad x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots x_i,\ x_{i+1}, \ldots x_{n-1},\ x_n = b,$$

суммы $s'_m = \sum_{j=0}^{m-1} m'_j \Delta x'_j$, $S'_m = \sum_{j=0}^{m-1} M'_j \Delta x'_j$, отвечающие значениям $x$:

$$(2)\quad x'_0 = a,\ x'_1,\ x'_2, \ldots x'_j,\ x'_{j+1} \ldots x'_{m-1},\ x'_m = b,$$

взятым независимо от значений (1), и докажем, что при $m = \infty$ и при $\Delta x'_j = x'_{j+1} - x'_j = 0$ окажется пред. $s'_m =$ пред. $S'_m = S$.

Для этого составим ряд значений $x$

$$(3)\quad x''_0 = a,\ x''_1,\ x''_2, \ldots x''_k,\ x''_{k+1}, \ldots x''_{l-1},\ x''_l = b,$$

содержащий все члены рядов (1) и (2), расположенные по порядку величины, при чем в рядах (1) и (2) могут быть совпадающие члены, и потому $l \leqq m + n - 1$. Суммы, отвечающие ряду (3), обозначим через $s''_l = \sum_{k=0}^{l-1} m''_k \Delta x''_k$,

$S''_l = \sum_{k=0}^{l-1} M''_k \Delta x''_k$. Так как ряд (3) выводится из ряда (1) и из ряда (2) процессом дробления, то, по доказанному выше, имеем: $S_n > S'_l > s''_l > s_n$ и $S'_m > S''_l > s'_l > s'_m$; если доказано, что пред. $s_n =$ пред. $S_n = S$, то из первых неравенств следует, что пред. $s''_l =$ пред. $S''_l = S$; далее, так как $S'_m - s'_m = \sum_{j=0}^{m-1} (M'_j - m_j) \Delta x'_j < \delta\ (b-a)$ при достаточно больших $m$, то из вторых неравенств следует, что пред. $S'_m =$ пред. $s'_m = S$. Этим доказана независимость предела $S$ от выбора промежуточных значений $x$.

*Замечание.* Предыдущее доказательство существования предела: пред. $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ построено на предположении, что $\sum(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum \delta_i \Delta x_i < \varepsilon$. Поэтому условие: пред. $\sum_{i=0}^{n-1} \delta i \Delta x_i = 0$ можно рассматривать как необходимое и достаточное для «интегрируемости» функции $f(x)$ в интервале $a \leqq x \leqq b$. Необходимость условия видна из того, что, предположив: $\sum \delta_i \Delta x_i > A$ (конечного числа) при достаточно больших $n$, мы не могли бы иметь одинакового предела для $s_n$ и $S_n$; достаточность условия видна из данного доказательства.

## § 2. Основные свойства определенного интеграла.

1) При $b = a$ определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx = 0$, так как все $\Delta x_i = 0$.

2) При перестановке пределов определенный интеграл меняет знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

так как, считая все интервалы $\Delta x_i$ равными, имеем в первом интеграле: $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, а во втором: $\Delta x'_i = \frac{a-b}{n} = -\Delta x_i$, отчего

$$\sum f(\xi_i)\Delta x_i = -\sum f(\xi_i)\Delta x'_i,$$

и в пределе получается предыдущая формула.

3) При любом расположении числа $c$ относительно $a$ и $b$, имеет место формула:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Если $a < c < b$, то, взяв в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ ряд промежуточных значений $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots x_m = c,\ x_{m+1} \ldots x_{n-1},\ x_n = b$, будем иметь:

$$\sum_{i=0}^{m-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

откуда в пределе, при $m=\infty$ и $n=\infty$, следует доказываемая формула. Если $a<b<c$, то, по доказанному

$$\int_a^b+\int_b^c=\int_a^c, \text{ откуда } \int_a^b=\int_a^c-\int_b^c=\int_a^c+\int_c^b \text{ (по 2);}$$

так же разбирается случай $c<a<b$.

7) Постоянный множитель выносится за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b h\cdot f(x)dx=h\cdot\int_a^b f(x)dx,$$

так как это свойство справедливо при любом числе слагаемых суммы.

### § 3. Первая теорема о среднем значении интеграла.

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a\leqq x\leqq b$ и $\varphi(x)$ сохраняет постоянный знак, то

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx=f[a+\theta(b-a)]\cdot\int_a^b\varphi(x)dx, \quad \text{где } 0<\theta<1.$$

Пусть при $a\leqq x\leqq b$ оказывается $\varphi(x)>0$, а наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ равны $m$ и $M$; тогда для всякого $x=\xi_i$ в интервале $(a, b)$ должно быть $m\cdot\varphi(\xi_i)\Delta x_i\leqq f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i\leqq M\cdot\varphi(\xi_i)\Delta x_i$. Суммируя все слагаемые от $i=0$ до $n-1$ и переходя к пределу, находим (по свойству 4, § 2):

$$m\cdot\int_a^b\varphi(x)dx<\int_a^b f(x)\varphi(x)dx<M\cdot\int_a^b\varphi(x)dx,$$

откуда по непрерывности $f(x)$ (см. I ч., стр. 48, следствие теоремы 2) следует предыдущая формула.

В частности при $\varphi(x)=1$ имеем:

$$\int_a^b f(x)dx=f[a+\theta(b-a)]\cdot(b-a) \quad \text{при} \quad 0<\theta<1.$$

### § 4. Определенный интеграл как функция верхнего предела. Непрерывность этой функции и ее производная. Связь определенного интеграла с неопределенным.

Пусть в интеграле $\int_a^x f(X)dX$, при неизменном нижнем пределе $a$, верхний предел делается переменным; тогда, по § 1, при (равномерной) непрерывности функции $f(X)$ в интервале $a\leqq X\leqq x$, каждому значению $x$ отвечает одно определенное значение интеграла, и потому его можно рассматривать как функцию верхнего предела:

$$\int_a^x f(X)dX=\Phi(x).$$

*Теорема.* Если при $a\leqq x\leqq b$ функция $f(x)$ непрерывна, то $\Phi(x)$ также непрерывна и имеет производную $\Phi'(x)=f(x)$.

Действительно, разность $\Phi(x+h)-\Phi(x)$ равна

$$\int_a^{x+h} f(X)dX - \int_a^x f(X)dX = \int_a^x + \int_x^{x+h} - \int_a^x = \int_x^{x+h} f(X)\,dX$$

(см. § 2, 3) и далее, по теореме § 3, имеем:

$$\Phi(x+h)-\Phi(x) = h\cdot f(x+\theta h) \text{ при } 0<\theta<1;$$

при непрерывности функции $f(x)$ можно положить, при достаточно малых $|h|$, $f(x+\theta h)=f(x)\pm\varepsilon$, где $\varepsilon$ положительное число, сколь угодно малое. Отсюда заключаем: 1) при достаточно малых $|h|$ абсолютное значение разности $\Phi(x+h)-\Phi(x)$ сколь угодно мало, то-есть $\Phi(x)$ непрерывна, и 2) $\underset{h=0}{\text{пред.}} \dfrac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = f(x)$, то-есть производная $\Phi'(x)=f(x)$.

*Следствие.* Определенный интеграл от непрерывной функции равен разности двух значений неопределенного интеграла той же функции, взятых для верхнего и нижнего предела:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a), \qquad \text{где } F(x)=\int f(x)\,dx.$$

Действительно, функция $\Phi(x)=\int_a^x f(X)\,dX$ (по доказанной теореме) и $F(x)=\int f(x)\,dx$ (по § 1 интегрирования функций) имеют одну и ту же производную: $\Phi'(x)=F'(x)=f(x)$, следовательно $\Phi(x)=F(x)+C$; далее, $\Phi(a)=\int_a^a f(X)dX=0$ (§ 2, 1), и $\Phi(a)=F(a)+C$, откуда $C=-F(a)$, и окончательно $\Phi(x)=F(x)-F(a)$; в частности $\Phi(b)=F(b)-F(a)$, что и требуется доказать.

Доказанная формула не изменится при замене одного из значений неопределенного интеграла всяким другим, ибо $[F(b)+C]-[F(a)+C]=$ $=F(b)-F(a)$.

*Примеры:*

$$\int_0^1 x^k dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1} \text{ при } k+1>0$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\arcsin x\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4}.$$

*Замечание.* В теореме § 4 доказано, что при непрерывности функции $f(x)$ функция $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ также непрерывна; но $\Phi(x)=F(x)-F(a)$, следовательно неопределенный интеграл $F(x)=F(a)+\Phi(x)$ для всякой непрерывной функции $f(x)$ [при выборе определенного значения $F(a)$] существует как непрерывная функция от $x$.

## § 5. Другое доказательство формулы § 4.

Пусть $S = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$ и пусть известен неопределенный интеграл $F(x) = \int f(x)\,dx$; тогда имеем:

$$f(x) = F'(x) = \text{пред.}\,\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} + \varepsilon,$$

где $\varepsilon$ величина сколь угодно малая по абсолютному значению при достаточно малых $|\Delta x|$. Отсюда $f(x)\Delta x = F(x+\Delta x) - F(x) + \varepsilon\Delta x$. Полагая здесь $x = x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1}$, получаем: $\sum f(x_i)\Delta x_i = \sum_i \{F(x_{i+1}) - F(x_i)\} +$
$+ \sum \varepsilon_i \Delta x_i = F(x_n) - F(x_0) + \sum \varepsilon_i \Delta x_i = F(b) - F(a) + \sum \varepsilon_i \Delta x_i$.

Отсюда пред. $\sum f(x_i)\Delta x_i = F(b) - F(a) +$ пред. $\sum \varepsilon_i \Delta x_i$. Покажем, что последний предел равен 0; пусть все $|\varepsilon_i| \leqq \varepsilon$, где $\varepsilon$ также число сколь угодно малое и положительное; тогда $|\sum \varepsilon_i \Delta x_i| < \varepsilon \sum \Delta x_i = \varepsilon(b-a)$ и пред. $\sum \varepsilon_i \Delta x_i = 0$; отсюда и следует: $S = F(b) - F(a)$.

*Замечание.* Из формулы $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ легко вывести свойства определенного интеграла, указанные в § 2, Отметим еще, что $\int_a^b (u\,dv + v\,du) = (uv)_a^b$, почему формула интегрирования по частям в определенных интегралах пишется так:

$$\int_a^b u\,dv = (uv)_a^b - \int_a^b v\,du.$$

## § 6. Вторая теорема о среднем значении интеграла.

Если функция $\varphi(x)$ при $a \leqq x \leqq b$ имеет знакопостоянную производную $\varphi'(x)$ (тогда $\varphi(x)$ — монотонная функция, то-есть все время только возрастает или только убывает), а функция $f(x)$ — непрерывная, то имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx, \text{ где } a < \xi < b.$$

Вывод. Пусть $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$; по теореме § 4 $F(x)$ непрерывна и имеет производную $F'(x) = f(x)$. Применяя теорему § 3 к интегралу $\int_a^b F(x)\varphi'(x)\,dx$, имеем:

$$\int_a^b F(x)\varphi'(x)dx = F(\xi)\cdot\int_a^b \varphi'(x)dx = F(\xi)\,[\varphi(b) - \varphi(a)]$$

при $a < \xi < b$.

Интегрирование по частям дает (см. § 5, замечание):

$$\int_a^b F(x)\varphi'(x)dx = \Big[F(x)\cdot\varphi(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$

и из сравнения с предыдущим результатом находим:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - F(\xi)\,[\varphi(b) - \varphi(a)] = \varphi(a)\,[F(\xi) - F(a)] +$$
$$+ \varphi(b)\,[F(b) - F(\xi)],$$

откуда и вытекает наша формула.

При существовании конечных разрывов функции $\varphi(x)$ при $x = a$ и $x = b$, следует во 2-й теореме о среднем писать $\varphi(a+0)$ вместо $\varphi(a)$ и $\varphi(b-0)$ вместо $\varphi(b)$.

*Замечание.* Можно доказать, что 2-я теорема справедлива, если $\varphi(x)$—конечная и монотонная, а $f(x)$ — интегрируемая (§ 1, условие: пред. $\Sigma\,\delta_i\Delta x_i = 0$) функция в интервале $(a, b)$.

---

Глава II.

## Различные способы точного вычисления определеных интегралов.

### § 1. Способ подстановки в определенных интегралах.

*Теорема.* Если при вычислении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ делается подстановка $y = \varphi(x)$, $x = \psi(y)$, то формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f[\psi(y)]\cdot\psi'(y)\,dy$$

справедлива вообще лишь тогда, когда $y = \varphi(x)$ — монотонная и непрерывная функция от $x$ в интервале $(a, b)$.

Условие монотонности необходимо потому, что только в этом случае $x = \psi(y)$ будет однозначной функцией и имеет определенную производную $\frac{dx}{dy} = \psi'(y)$; поэтому каждое слагаемое суммы $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$ обратится в однозначное выражение:

$$f(x_i)\Delta x_i = f[\psi(y_i)]\cdot\{\psi(y_{i+1}) - \psi(y_i)\}\cdot\Delta y_i = f[\psi(y_i)]\cdot[\psi'(y_i) + \varepsilon_i]\Delta y_i$$

(по формуле Лагранжа), и

$$\text{пред. } \Sigma f(x_i)\Delta x_i = \text{пред. } \Sigma f[\psi(y_i)]\psi'(y_i)\Delta y_i + \text{пред. } \Sigma f[\psi(y_i)]\cdot\varepsilon_i\Delta y_i,$$

при чем второй предел равен нулю (см. док. в § 5, гл. I), откуда и следует наша формула.

*Замечание.* Если функция $y=\varphi(x)$ не монотонна в целом интервале $(a, b)$, то нужно разбить интервал $(a, b)$ на части $(a, c_1)$, $(c_1\ c_2)\cdots(c_k, b)$, где значениям $c_1$, $c_2\cdots c_k$ отвечают maximum и minimum функции $y$, и к каждой части отдельно применить формулу подстановки.

*Пример 1.* Подстановка $y=\sin x$ дает неверную формулу:

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 x\cdot dx=\int_{\sin 2\pi=0}^{\sin 0=0}\frac{y^2dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

(см. § 2, 1), так как в интервале $(0, 2\pi)$ функция $y=\sin x$ имеет maximum при $x=\frac{\pi}{2}$ и minimum при $x=\frac{3\pi}{2}$.

Правильный результат будет:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_0^1\frac{y^2dy}{\sqrt{1-y^2}},\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_1^{-1}\frac{-y^2dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{-1}^{+1}\frac{y^2dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

но § 3, 2 $\left(\text{при } \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right.$ функция $y=\sin x$ — убывающая, поэтому

$$\left.\frac{dy}{dx}<0 \text{ и } \frac{dy}{dx}=-\sqrt{1-y^2}\right),\ \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin^2 x\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{y^2dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

и окончательно:

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx=2\int_{-1}^{+1}\frac{y^2dy}{\sqrt{1-y^2}}=4\int_0^1\frac{y^2dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

*Пример 2.* Подстановка $y=\operatorname{tg}x$ дает неверную формулу

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int_{\operatorname{tg}0=0}^{\operatorname{tg}\pi=0}\frac{dy}{2+y^2}=0,$$

так как в интервале $(0, \pi)$ функция $y=\operatorname{tg}x$ образует разрыв при $x=\frac{\pi}{2}$.

Правильный результат:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int_0^{+\infty}\frac{dy}{2+y^2},\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dy}{2+y^2},$$

и окончательно

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{2+y^2}=2\int_0^{+\infty}\frac{dy}{2+y^2}.$$

*Замечание.* Заключительные равенства примера 1 и 2 основаны на следующем общем свойстве интегралов, взятых в пределах от $-a$ до $+a$: если $f(x)$ функция нечетная, то $\int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$; если $f(x)$ — функция четная, то $\int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$.

**Вывод.** Делая в интеграле $\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx$ подстановку $x = -y$, преобразуем в интеграл $-\int\limits_{a}^{0} f(-y)dy = \int\limits_{0}^{a} f(-y)dy$ (по § 3, 2), а этот последний можно заменить интегралом $\int\limits_{0}^{a} f(-x)\,dx$, ибо в определенном интеграле подынтегральную переменную можно обозначить любою буквою (не меняя пределов). Итак, $\int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} \{f(x) + f(-x)\}\,dx$, откуда и следуют наши формулы, ибо для нечетной функции $f(-x) = -f(x)$, а для четной $f(-x) = +f(x)$.

Во многих примерах, когда неопределенный интеграл не берется в конечном виде, можно вычислить определенный интеграл, разбивая промежуток интегрирования на части и применяя к одной части подходящую подстановку.

*Пример 1.* $I = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$. Разобьем интервал $(0, \pi)$ на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ и во втором положим $y = \pi - x$; тогда

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi-y)\sin y}{1+\cos^2 y}\,dy = \pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y\,dy}{1+\cos^2 y} - \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{y\sin y\,dy}{1+\cos^2 y},$$

откуда

$$I = \pi\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y\,dy}{1+\cos^2 y} = \pi\int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{1+t^2} \text{ (при } t = \cos y) = \frac{\pi^2}{4}.$$

*Пример 2.* $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx$.

Берем тождество:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x\,dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log 2\cdot dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\,dx.$$

Подстановка $x=\frac{\pi}{2}-y$ дает: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos x\,dx=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\log\sin y\,dy=I$; подстановка $x=\pi-y$ дает: $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log\sin x\,dx=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\lg\sin y\,dy=I$, откуда

$$\int\limits_0^{\pi}\log\sin x\,dx=2I;\text{ подстановка } x=\frac{1}{2}y \text{ дает}$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin 2x\cdot dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\log\sin y\,dy=I.$$

Теперь тождество дает: $I=\frac{\pi}{2}\log 2+2I$, $I=-\frac{\pi}{2}\log 2$.

*Пример 3.* $I=\int\limits_0^{\pi}x\log\sin x\,dx$.

Подстановка $x=\pi-y$ дает: $I=-\int\limits_{\pi}^{0}(\pi-y)\log\sin y\,dy=\pi\int\limits_0^{\pi}\log\sin y\,dy-I$, откуда $I=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\log\sin y\,dy=-\frac{\pi^2}{2}\log 2$ (по примеру 2).

## § 2. Способ интегрирования по частям в определенном интеграле.

В § 5 главы I, замечание, приведена формула $\int\limits_a^b u\,dv=(uv)_a^b-\int\limits_a^b v\,du$, которая прилагается ко многим примерам.

*Пример 1.* $I_k=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^k x\cdot dx$, $k$ — целое положительное.

Полагая $u=\sin^{k-1}x$, $v=\int\sin x\,dx=-\cos x$, получаем:

$$I_k=\Big[-\sin^{k-1}x\cdot\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(k-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{k-2}x\cdot\cos^2 x\,dx;$$

при $k>1$ $I_k=(k-1)(I_{k-2}-I_k)$, откуда $I_k=\frac{k-1}{k}I_{k-2}$ — формула приведения. Замечая, что $I_0=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$ и $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$, находим:

$$I_{2n}=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\cdot\frac{\pi}{2},\ I_{2n+1}=\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2n}{3\cdot5\cdot7\ldots(2n+1)},$$

Подстановкою $y=\frac{\pi}{2}-x$ находим $I_k=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k y\,dy$.

*Пример 2.* $I_n=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+b)^n}$ $n$ целое положительное, $a$ и $b$ положительные.

Из отдела I, глава I, §5, пример 6, имеем формулу приведения:

$$I_n=\left[\frac{x}{(2n-2)\,b\,(ax^2+b)^{n-1}}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{b}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}=\frac{1}{b}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1};$$

замечая, что $I_1=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+b)}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\operatorname{arctg}x\sqrt{\frac{a}{b}}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{\pi}{2}$, имеем:

$$I_n=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}b^{n-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

## § 3. Признак конечности интегралов с бесконечными пределами.

Интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ определяется, как предел $\int\limits_a^{b}f(x)\,dx$ при $b=+\infty$; так же $\int\limits_{-\infty}^{b}=\underset{a=-\infty}{\text{пред.}}\int\limits_a^{b}$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}=\underset{b=\infty}{\text{пред.}}\int\limits_{-b}^{+b}$.

*Пример 1.* При $a>0$ $\int\limits_0^{\infty}e^{-ax}dx=\left[-\frac{e^{-ax}}{a}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{a}$.

*Пример 2.* При $a>0$

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx=\left[\frac{e^{-ax}(-a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}\right]_0^{\infty}=\frac{a}{a^2+b^2},$$

(см. I, гл. I, §4, 4)

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx=\left[\frac{e^{-ax}(-a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}\right]_0^{\infty}=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Когда неопределенного интеграла найти нельзя, то вопрос о конечности определенного интеграла с бесконечными пределами решается *теоремою Коши:* если в $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ можно положить $f(x)=\frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}$, то 1) при $\alpha>1$ и при $\underset{x=\infty}{\text{пред.}}\left[\varphi(x)\right]=A$ (конечному числу) интеграл имеет конечное значение; 2) при $\alpha\leqq1$ и при условии, что для значений $x\geqq x_0$ (достаточно больших) $\varphi(x)$ сохраняет постоянный знак и абсолютно остается $\geqq A$ (конечное число), интеграл равен $\infty$.

**Вывод.** 1) Разлагая интеграл на сумму: $\int\limits_a^\infty = \int\limits_a^{x_0} + \int\limits_{x_0}^\infty$, где $x_0$ достаточно большое, имеем: $\int\limits_{x_0}^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}\,dx = (A+\varepsilon)\int\limits_{x_0}^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = (A+\varepsilon)\,\frac{1}{(\alpha-1)x_0^{\alpha-1}}$ (по первой теореме о среднем), и потому интеграл конечный. 2) Здесь

$$\left|\int\limits_{x_0}^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}\,dx\right| \geqq A\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x_0}^\infty$$

при $\alpha < 1$ или $\geqq A\Big[\log x\Big]_{x_0}^\infty$ при $\alpha = 1$; в обоих случаях интеграл растет беспредельно.

*Пример 3.* $\int\limits_1^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$. Здесь $f(x) = \frac{e^{-x}x^{n+\alpha-1}}{x^\alpha}$, при чем для всякого $\alpha > 1$ оказывается $\underset{x=\infty}{\text{пред.}}\,[e^{-x}x^{n+\alpha-1}] = 0$, следовательно интеграл конечный при всяком $n$.

*Пример 4.* $\int\limits_1^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x}$. Здесь $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^{2-p}}$, $\underset{x=\infty}{\text{пред.}}\,\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$, следовательно интеграл конечный при $2-p > 1$, т.-е. при $p < 1$.

**§ 4. Признак конечности интегралов с разрывом подынтегральной функции.**

Если $f(b) = \infty$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ определяется как $\underset{\varepsilon=0}{\text{пред.}}\int\limits_a^{b-\varepsilon}$; если $f(a) = \infty$, то $\int\limits_a^b = \underset{\varepsilon=0}{\text{пред.}}\int\limits_{a+\varepsilon}^b$; если $f(c) = \infty$ при $a < c < b$, то $\int\limits_a^b = \underset{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon_1=0}}{\text{пред.}}\left\{\int\limits_a^{c-\varepsilon} + \int\limits_{c+\varepsilon_1}^b\right\}$, при чем предел должен существовать, независимо от закона убывания чисел $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$.

*Пример 1.*

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{пред.}\int\limits_0^{1-\varepsilon} = \text{пред.}\Big[\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\Big] = \frac{\pi}{2}.$$

*Пример 2.* $\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{x} = \text{пред.}\left\{\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon_1}^{+1}\frac{dx}{x}\right\} = \text{пред.}\left(\log\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)$ и так как этот предел зависит от закона убывания чисел $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$, то $\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$ не имеет определенного значения.

Когда нельзя найти неопределенного интеграла, то вопрос о конечности определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с разрывом при $x=b$ решается *теоремою Коши*: если в интеграле $\int_a^b f(x)\,dx$ можно положить при $x_0 < x < b$ ($x_0$ достаточно близко к $b$) $f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\alpha}$, то 1) при $\alpha < 1$ и при $\varphi(b) = A$ (конечному числу), интеграл — конечный, 2) при $\alpha \geqq 1$ и при условии, что $\varphi(x)$ сохраняет постоянный знак и абсолютно $\geqq A$, интеграл обращается в бесконечность.

Вывод: 1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} +$ пред. $\int_{x_0}^{b-\varepsilon} f(x)dx$;

здесь

$$\int_{x_0}^{b-\varepsilon} \frac{\varphi(x)dx}{(b-x)^\alpha} = (A+\varepsilon') \cdot \frac{(b-x_0)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

(по первой теореме о среднем) и при $\varepsilon = 0$ имеет конечный предел.

2) Считая $\varphi(x) > 0$, имеем $\int_{x_0}^{b-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\alpha}\,dx > A \int_{x_0}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$; последний интеграл при $\alpha > 1$ равен $\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha-1} - \left(\frac{1}{b-x_0}\right)^{\alpha-1}}{\alpha-1}$, а при $\alpha = 1$ равен $\log \frac{b-x_0}{\varepsilon}$, и в обоих случаях при $\varepsilon = 0$ обращается в $\infty$.

*Пример 3.* $\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx$, $n < 1$. Здесь при $x = 0$ функция $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^{1-n}}$ обращается в $\infty$, при чем $\varphi(0) = 1$, $\alpha = 1-n$, следовательно при $1-n < 1$, т.-е. при $n > 0$, — интеграл конечный.

Принимая во внимание пример 3 § 3, заключаем, что $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ конечный при $n > 0$.

*Пример 4.* $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$, $p < 1$. Здесь $f(x) = \frac{\frac{1}{1+x}}{x^{1-p}}$, $\varphi(0) = 1$, $\alpha = 1-p$, следовательно при $p > 0$ интеграл конечный. Сопоставляя с примером 4 § 3, заключаем, что $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x}$ конечный при $0 < p < 1$.

*Пример 5.* $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ при $p < 1$, $q < 1$.

При $x = 0$ $f(x) = \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}$, $\varphi(0) = 1$, $\alpha = 1-p$, при $p > 0$ интеграл конечный; при $x = 1$ $f(x) = \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}$, $\varphi(1) = 1$, $\alpha = 1-q$, при $q > 0$

интеграл конечный. Итак, при $p>0$, $q>0$ данный интеграл конечный, несмотря на разрывы подъинтегральной функции при $x=0$ (если $p<1$) и при $x=1$ (если $q<1$).

## § 5. Дифференцирование определенного интеграла по параметру.

*Теорема.* Если в интеграле $I(\alpha)=\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx$, где $\alpha$ — параметр, независящий от $x$, пределы $a$ и $b$ не содержат $\alpha$, то производная $\frac{dI}{d\alpha}$ определяется формулой:

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\cdot dx,$$

предполагая при $a\leqq x\leqq b$ непрерывность функций $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}$.

Вывод. По формуле Тэйлора имеем:

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx+\frac{1}{2}\Delta\alpha\cdot\int\limits_a^b \frac{\partial^2 f(x,\alpha+\vartheta\Delta\alpha)}{\partial\alpha^2}dx;$$

отсюда при $\Delta\alpha=0$ и получается предыдущая теорема, если только интеграл $\int\limits_a^b \frac{\partial^2 f(x,\alpha)}{\partial\alpha^2}dx$ имеет конечное значение, что нужно проверять при бесконечных пределах интеграла.

*Замечание.* Если и пределы интеграла $\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ зависят от параметра $\alpha$, то формула дифференцирования по параметру будет:

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx+f(b,\alpha)\cdot\frac{db}{d\alpha}-f(a,\alpha)\cdot\frac{da}{d\alpha}.$$

Она вытекает из правила дифференцирования сложной функции, причем из формулы $I=\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ (гл. I, § 4) следует:

$$\frac{\partial I}{\partial b}=F'(b)=f(b),\quad \frac{\partial I}{\partial a}=-F'(a)=-f(a).$$

*Пример 1.* $I(a)=\int\limits_0^\infty e^{-ax}dx=\frac{1}{a}\,(a>0)$ (§ 3, пример 1). Отсюда

$$-\frac{dI(a)}{da}=\int\limits_0^\infty e^{-ax}\cdot x\cdot dx=\frac{1}{a^2},\quad \frac{d^2I(a)}{da^2}=\int\limits_0^\infty e^{-ax}\cdot x^2dx=\frac{1.2}{a^3}$$ и вообще

$$(-1)^n\frac{d^nI(a)}{da^n}=\int\limits_0^\infty e^{-ax}x^ndx=\frac{1.2\ldots n}{a^{n+1}}.$$

*Пример 2.* $I(m)=\int\limits_0^1 x^{m-1}dx=\frac{1}{m},\quad m>0.$

Отсюда
$$\frac{d^n I(m)}{dm^n} = \int_0^1 x^{m-1}(\log x)^n \cdot dx = (-1)^n \cdot \frac{1.2.3\ldots n}{m^{n+1}}.$$

*Пример 3.* $I(b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$. Составляем $\frac{dI}{db} = \int_0^\infty e^{-bx} dx = \frac{1}{b}$ при $b > 0$; отсюда $dI = \frac{db}{b}$, $I(b) = \int \frac{db}{b} + C = \log b + C$. При $b = a$ непосредственно находим $I(a) = 0$, и с другой стороны $I(a) = \log a + C$, следовательно $C = -\log a$, $I = \log\left(\frac{b}{a}\right)$ при $a > 0$, $b > 0$.

*Пример 4.* $I(b) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot \cos 2bx\, dx (a > 0)$.

Составив $\frac{dI}{db} = -\int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot 2x \sin 2bx\, dx$, интегрируем по частям при $u = \sin 2bx$, $v = -\int e^{-ax^2} \cdot 2x\, dx = \frac{1}{a} e^{-ax^2}$; так как $\Big[uv\Big]_0^\infty = 0$, то $\frac{dI}{db} = -\int_0^\infty v du = -\frac{2b}{a} \cdot I$; отсюда $\int \frac{dI}{I} = -\int \frac{2bdb}{a}$ или $\log I = -\frac{b^2}{a} + \log C$, $I = Ce^{-\frac{b^2}{a}}$. При $b = 0$ $I(o) = C = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ (как будет выведено в § 6, пример 4), следовательно, $I(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{a}}$.

*Пример 5.* $I(b) = \int_0^\infty e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} dx$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Имеем $\frac{dI}{db} = \int_0^\infty e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} \cdot \frac{-dx}{x^2} = \int_\infty^0 e^{-\frac{b}{y^2} - ay^2} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}\, dy$ (при подстановке $x\sqrt{a} = \frac{\sqrt{b}}{y}$) или $\frac{dI}{db} = -\sqrt{\frac{a}{b}} I$. Отсюда $\int \frac{dI}{I} = -\sqrt{a} \int \frac{db}{\sqrt{b}}$, $\log I = \log C - 2\sqrt{ab}$, $I = Ce^{-2\sqrt{ab}}$; при $b = 0$ $I(0) = C = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, следовательно $I(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}$.

*Пример 6.* $I(b) = \int_0^\infty \frac{\cos bx - \cos cx}{x} e^{-ax} dx$ $(a > 0)$.

Здесь $\frac{dI}{db} = -\int_0^\infty \sin bx \cdot e^{-ax} dx = -\frac{b}{a^2 + b^2}$, $I = -\int \frac{bdb}{a^2 + b^2} = -\frac{1}{2}\log(a^2 + b^2) + C$; при $b = c$ $I(c) = 0 = -\frac{1}{2}\log(a^2 + c^2) + C$, откуда $C = \frac{1}{2}\log(a^2 + c^2)$, $I(b) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2}\right)$.

*Пример 7.* $I(a)=\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} ax\cdot dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

Имеем: $\frac{dI}{da}=\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int\limits_0^1 \frac{x^{-3}dx}{(x^{-2}+a^2)\sqrt{x^{-2}-1}}=\int\limits_0^\infty \frac{dy}{y^2+1+a^2}$ (при $y^2=x^{-2}-1$) $=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\cdot\frac{\pi}{2}$, $I=\frac{\pi}{2}\log(a+\sqrt{1+a^2})+C$, $I(0)=C=0$.

*Пример 8.* $I(a)=\int\limits_0^\pi \frac{\log(1+a\cos)}{\cos x}dx$, $0<a<1$.

$$\frac{dI}{da}=\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x}=2\int\limits_0^\infty \frac{dz}{1+a+(1-a)z^2}\left(\text{при } z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\cdot z\right]_0^\infty=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

откуда $I(a)=\pi\arcsin a+C$, $I(0)=C=0$.

## § 6. Интегрирование определенного интеграла по параметру.

*Теорема:* Если функция $f(x,\alpha)$ остается непрерывною при $x_0\leqq x\leqq x_1$ и при $\alpha_0\leqq\alpha\leqq\alpha_1$, то $\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left[\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\,dx\right]d\alpha=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)d\alpha\right]dx$, т.-е. порядок интегрирования можно менять без влияния на результат, предполагая, что пределы по каждой переменной не зависят от другой.

Вывод.

Положив $F(\alpha)=\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)dx\right]d\alpha$ и

$\Phi(\alpha)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(x,\alpha)d\alpha\right]dx$, имеем $F'(\alpha)=\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)dx$ (по главе I, § 4) и

$\Phi'(\alpha)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(x,\alpha)d\alpha\right]dx=\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)dx$ (по § 5). Итак $F'(\alpha)=\Phi'(\alpha)$, следовательно, $F(\alpha)=\Phi(\alpha)+C$; но $F(\alpha_0)=0$, $\Phi(\alpha_0)=0$, следовательно $C=0$ и $F(\alpha)=\Phi(\alpha)$; равенство $F(\alpha_1)=\Phi(\alpha_1)$ выражает нашу теорему.

*Пример 1.* От обеих частей равенства $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}$ $(a>0)$ (смотри § 3, пример 2) берем интегралы по $a$ от $a=0$ до $a=+\infty$ и, по теореме, меняем порядок интегрирования: $\int\limits_0^\infty \frac{b\,da}{a^2+b^2}=\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}\right]_0^\infty=\pm\frac{\pi}{2}=$

$=\int\limits_0^\infty \sin bx\cdot\left[\int\limits_0^\infty e^{-ax}da\right]dx=\int\limits_0^\infty \sin bx\cdot\left[\frac{e^{-ax}}{-x}\right]_{a=0}^\infty\cdot dx=\int\limits_0^\infty \frac{\sin bx}{x}dx$; итак

$\int\limits_0^\infty \frac{\sin bx}{x}dx=\pm\frac{\pi}{2}$ (знак $\pm$ одинаков со знаком $b$).

*Пример 2.* Покажем, что $I=\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx \cos nx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ при $m>n$ $I=\frac{\pi}{4}$ при $m=n$, $I=0$ при $m<n$ (считая $m$ и $n$ положительными).

Полагая $a>b>0$, имеем по примеру 1:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin(a+b)x}{x}\cdot dx=\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\cdot dx+\int\limits_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin(a-b)x}{x}\cdot dx=\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\cdot dx-\int\limits_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}\,dx=\frac{\pi}{2},$$

откуда $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$, $\int\limits_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}\,dx=0.$

При $m=n>0$ $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx\cdot\cos mx}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2mx}{x}\cdot dx=\frac{\pi}{4}$ (пример 1).

*Пример 3.* Умножая обе части равенства: $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}$ на $\frac{\cos b}{b}\,db$ и интегрируя от $b=0$ до $b=\infty$, имеем:

$\int\limits_0^\infty \frac{\cos b\,db}{a^2+b^2}=\int\limits_0^\infty e^{-ax}\left[\int\limits_0^\infty \frac{\sin bx \cos b}{b}\,db\right]dx$; по результату примера 1 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin bx\cdot\cos b}{b}\,db=0$ при $0<x<1$ и равен $\frac{\pi}{2}$ при $1<x<+\infty$; поэтому $\int\limits_0^\infty \frac{\cos b\,db}{a^2+b^2}=\int\limits_1^\infty e^{-ax}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-a}}{a}$. Полагая $b=ax$, получаем результат Лапласа $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax\cdot dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-a}$ при $a>0$. Заменяя здесь $a$ на $ap$, $x$ на $\frac{x}{p}$, найдем $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax\cdot dx}{p^2+x^2}=\frac{\pi}{2p}e^{-ap}$ $(a>0,\ p>0)$, откуда дифференцированием по $p$ можно найти $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{(p^2+x^2)^n}$.

*Пример 4.* $I=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$. Полагая $x=\alpha y$, где $\alpha>0$, находим $I=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2y^2}\cdot\alpha\cdot dy$. Умножая обе части на $e^{-\alpha^2}d\alpha$, интегрируем от $\alpha=0$

до $\alpha = +\infty$; имеем: $I^2 = \int\limits_0^\infty \left[ \int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2(1+y^2)} \cdot \alpha\, d\alpha \right] dy = \int\limits_0^\infty \left[ \frac{e^{-\alpha^2(1+y^2)}}{-2(1+y^2)} \right]_{\alpha=0}^{\infty} dy =$

$= \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}$, откуда $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Полагая $x = \sqrt{a} \cdot y$, получаем $\int\limits_0^\infty e^{-ay^2} \cdot dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ и дифференцированием по $a$: $\int\limits_0^\infty e^{-ay^2} \cdot y^{2n} \cdot dy = \frac{1.3.5.(2n-1)}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a^{n+\frac{1}{2}}}$ $(a > 0)$.

## § 7. Нахождение определенных интегралов помощью рядов.

Теорема интегрирования функций: интеграл суммы равен сумме интегралов всех слагаемых (см. отд. I, гл. I, § 2, ф 12), как и соответствующая теорема дифференциального исчисления, справедлива лишь для конечного числа слагаемых. Если же некоторая функция от $x$ разложена в бесконечный ряд, например: $\Phi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$, то формула: $\int\limits_a^b \Phi(x)\, dx = \int\limits_a^b \varphi_0(x)\, dx + \int\limits_a^b \varphi_1(x)\, dx + \ldots + \int\limits_a^b \varphi_n(x)\, dx + \ldots$ будет верна вообще лишь при условии, что ряд функций $\varphi_n(x)$ обладает свойством так называемой «равномерной» сходимости, как будет сказано в следующем отделе; там же будет показано, что ряд функций $\varphi_n(x)$ будет равномерно сходящимся, если при $a \leqq x \leqq b$ оказывается $|\varphi_n(x)| \leqq u_n$, где $u_n$ общий член абсолютно сходящегося ряда чисел, независящих от $x$. Таковы ряды с общими членами $\varphi_n(x) = a^n \cos nbx$ или $a^n \sin nbx$, при $|a| < 1$, ибо для них $u_n = |a|^n$ представляет геометрическую прогрессию.

Эти ряды появляются в следующих формулах:

$$F_1 = \frac{1 - a\cos bx}{1 - 2a\cos bx + a^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nbx, \quad F_2 = \frac{a \sin bx}{1 - 2a\cos bx + a^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nbx, \quad F_3 = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos bx + a^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nbx.$$

Вывод: на основании формул Эйлера:

$$\frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2} = \cos\theta, \quad \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i} = \sin\theta,$$

имеем: $F_1 + iF_2 = \frac{1 - ae^{-bxi}}{(1 - ae^{-bxi})(1 - ae^{bxi})} = \frac{1}{1 - ae^{bxi}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n e^{nbxi}$,

откуда и следуют разложения для $F_1$ и $F_2$; из тождества $F_3 = 2F_1 - 1$ следует разложение $F_3$.

Помощью этих разложений находятся многие определенные интегралы.

*Пример 1.* $I(a)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx$. При $|a|<1$, пользуясь разложением $F_1$, находим;

$$I(a)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos nx)\,dx=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a^n\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx=$$

$\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m\cdot\frac{a^{2m+1}}{2m+1}=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}a$. При $|a|>1$, полагая $a=\frac{1}{a_1}$, находим: $I(a)=\frac{\pi}{2}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-a_1\cos x}{1-2a_1\cos+a_1^2}dx=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}a_1\right)=\operatorname{arc\,tg}a-\frac{\pi}{2}$.

*Пример 2.* $I(a)=\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2}$ ($m$ — целое положительное). При $|a|<1$, беря разложение $F_3$, находим:

$$I(a)=\frac{1}{1-a^2}\left\{\int\limits_0^{\pi}\cos mx\,dx+2\sum_{n=1}^{\infty}a^n\int\limits_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx\right\}=\frac{\pi a^m}{1-a^2},$$

ибо $\int\limits_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0$ при $n\lessgtr m$ и $=\frac{\pi}{2}$ при $n=m$. При $|a|>1$, $I(a)=a_1^2I(a_1)=\frac{\pi}{a^m(a^2-1)}$.

*Пример 3.* $I(a)=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot dx}{1-2a\cos x+a^2}$. При $|a|<1$, по формуле для $F_3$, находим: $I(a)=\frac{1}{a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\int\limits_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{\pi}{a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{a^n}{n}=\frac{\pi}{a}\log(1+a)$. При $|a|>1$, полагая $a=\frac{1}{a_1}$, имеем $I(a)=a_1^2I(a_1)=\frac{\pi}{a}\log\left(1+\frac{1}{a}\right)$.

*Замечание.* Интегралы вида $\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{f(x)dx}{1-a\cos x}$ при $|a|<1$ можно привести к предыдущим, если положить $a=\sin\alpha=\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$ $\left(\text{где } \lambda=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$, ибо тогда $\frac{1}{1-a\cos x}=\frac{1+\lambda^2}{1-2\lambda\cos x+\lambda^2}$; выразив результат через $\lambda$, затем нужно положить $\lambda=\frac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}=\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$. Так $\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos mx\cdot dx}{1-a\cos x}=(1+\lambda^2)\cdot\frac{\pi\lambda^m}{1-\lambda^2}=$

$=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^m$ ($m$—целое положительное); $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-a\cos x}dx=$

$=\pi\cdot\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\cdot\log(1+\lambda)=\frac{2\pi}{a}\log\left(\frac{1+a-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$.

Глава III.

## Эйлеровы интегралы.

### § 1. Выражение интеграла B через Г.

Под именем Эйлеровых интегралов B (бэта) и Г (гамма) разумеются интегралы: $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ (I) и $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{p-1}dx$ (II); в гл. II, § 4, пример 3 и 5, показано, что при $p > 0$ и $q > 0$ они имеют конечные значения. Подстановкою: $x = \frac{y}{1+y}$, $1 - x = \frac{1}{1+y}$ находим новое выражение для B: $B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}dy}{(1+y)^{p+q}}$ (III).

Докажем, что $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ (IV). Заменяя в формуле для $\Gamma(p)$ $x$ на $ax$, получим: $\frac{\Gamma(p)}{a^p} = \int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^{p-1}dx$. Заменяя здесь $a$ на $1+y$, $p$ на $p+q$, имеем: $\frac{\Gamma(p+q)}{(1+y)^{p+q}} = \int_0^\infty e^{-(1+y)x} \cdot x^{p+q-1} \cdot dx$. Умножая обе части на $y^{p-1}dy$ и интегрируя от $y = 0$ до $y = \infty$, найдем: $\Gamma(p+q) \cdot B(p, q) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{p+q-1} \left( \int_0^\infty e^{-xy} \cdot y^{p-1}dy \right) dx = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{p+q-1} \cdot \frac{\Gamma(p)}{x^p} \cdot dx = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q)$, откуда и следует наша формула.

### § 2. Свойства функций Г.

Интегрируя $\Gamma(p)$ по частям при $u = e^{-x}$, $v = \frac{x^p}{p}$, имеем:

$$\Gamma(p) = \left[ e^{-x} \cdot \frac{x^p}{p} \right]_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^p dx \text{ или } \Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (V), \quad p > 0.$$

Последовательным приложением этой формулы находим:

$$\Gamma(p+n) = p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)\Gamma(p) \quad (VI)$$

Замечая, что $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$, получаем значение $\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ (VII) при $n$ целом положительном. Из формулы (IV) заключаем, что при $0 < p < 1$

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = B(p, 1-p) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}dy}{1+y} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad (VIII)$$

(как показано ниже) и при $p = \frac{1}{2}$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (IX). Из формул (VI) и (VIII) видно, что достаточно иметь значения функций $\Gamma(p)$ при $0 < p < \frac{1}{2}$, чтобы знать $\Gamma(p)$ для всех $p > \frac{1}{2}$.

Вывод результата $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ при $0 < p < 1$.

Берем интеграл $J = \int\limits_{-R}^{+R} \frac{2nz^{2m}dz}{1+z^{2n}}$, где $m$ и $n$—числа целые положительные, и $m \leqq n-1$, а $R$ растет беспредельно. Замечая, что

$$z^{2n}+1 = \sum_{k=0}^{n-1}(z-e^{\alpha_k i})(z-e^{-\alpha_k i}) \text{ при } \alpha_k = \frac{2k+1}{2n}\pi,$$

имеем разложение:

$$\frac{2nz^{2m}}{z^{2n}+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{A_k}{z-e^{\alpha_k i}} + \frac{A'_k}{z-e^{-\alpha_k i}}\right\},$$

при чем $A_k = \left[\frac{2nz^{2m}(z-e^{\alpha_k i})}{z^{2n}+1}\right]_{z=e^{\alpha_k i}} = -e^{(2m+1)\alpha_k i}$ (по правилу l'Hôpital'я для раскрытия неопределенностей); значение $A'_k$ выводится заменой $i$ на $-i$, после чего

$$\frac{2nz^{2m}}{z^{2n}+1} = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2z\cos(2m+1)\alpha_k - 2\cos 2m\alpha_k}{z^2-2z\cos\alpha_k+1},$$

$$\int\limits_{-R}^{+R}\frac{2nz^{2m}dz}{z^{2n}+1} = -\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2m+1)\alpha_k\cdot\left[\log(z^2-2z\cos\alpha_k+1)\right]_{-R}^{+R} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}2\sin(2m+1)\alpha_k\cdot\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{z-\cos\alpha_k}{\sin\alpha_k}\right)\right]_{-R}^{+R}$$

При $R=\infty$ найдем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2nz^{2m}dz}{z^{2n}+1} = 2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2m+1)\alpha_k \doteq 2\pi\cdot S,$$

где, при $\varphi = \frac{2m+1}{2n}\pi$, $S = \sin\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin(2n-1)\varphi$.

Замечая, что $2\sin\varphi\cdot S = 2\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\sin 3\varphi + \ldots + 2\sin\varphi\sin(2n-1)\varphi =$ $= (1-\cos 2\varphi) + (\cos 2\varphi - \cos 4\varphi) + \ldots (\cos 2n - 2\varphi - \cos 2n\varphi) = 1 - \cos 2n\varphi = 2$ находим $S = \frac{1}{\sin\varphi}$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2nz^{2m}dz}{z^{2n}+1} = \int\limits_0^\infty\frac{4nz^{2m}dz}{z^{2n}+1} = \frac{2\pi}{\sin\varphi}$.

Подстановкою $z^{2n} = x$, полагая $p = \frac{2m+1}{2n}$, получаем:

$$\int\limits_0^\infty\frac{x^{p-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \text{ при } 0 < p < 1.$$

Формула доказана для случая, когда $p$ есть дробь вида $\frac{2m+1}{2n}$; всякое значение $p$ (между 0 и 1) иного вида будет заключено между двумя дро-

ями $p_0 = \frac{2m-1}{2n}$ и $p_1 = \frac{2m+1}{2n}$, разность которых $\frac{1}{n}$ сколь угодно мала при достаточно больших $n$; поэтому две непрерывные функции от $p$: $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x}$ и $\frac{\pi}{\sin p\pi}$, будучи равны при $p = p_0$ и $p = p_1$, должны быть равны и для всякого промежуточного значения $p$.

## § 3. Интегралы, приводимые к функциям Г.

*Пример 1.* $I = \int\limits_0^\infty \frac{x^m dx}{1+x^n}$ при $0 < \frac{m+1}{n} < 1$. Подстановкою $x^n =$ находим $I = \frac{1}{n}\int\limits_0^\infty \frac{z^{\frac{m+1}{n}-1}dz}{1+z} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{m+1}{n}\pi\right)}$.

*Пример 2.* $I = \int\limits_0^\infty \frac{x^m dx}{(1+x^n)^k}$ при $0 < \frac{m+1}{n} = p < 1$ и при $k$ целом положительном. При $x^n = z$ находим:

$$I = \frac{1}{n}\int\limits_0^\infty \frac{z^{p-1}dz}{(1+z)^k} = \frac{1}{n}\cdot B(p, k-p) = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma(p)\Gamma(k-p)}{\Gamma(k)} \quad [\text{по (IV), § 1}];$$

$$\text{но } \Gamma(k) = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1) \ [\text{по (VII)}],$$

$$\Gamma(k-p) = (k-p-1)(k-p-2)\ldots(1-p)\Gamma(1-p) \ [\text{по (VI)}],$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \ [\text{по (VIII)}].$$

Окончательно $I = \frac{1}{n}\cdot\frac{(1-p)(2-p)(3-p)\ldots(k-1-p)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)}\cdot\frac{\pi}{\sin p\pi}$ при $p = \frac{m+1}{n}$ и при $0 < p < 1$.

Если в данном интеграле $m > n$, то предварительно следует интегрировать по частям. Например:

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{x^6 dx}{(1+x^4)^4} = \left[-\frac{x^3}{12(1+x^4)^3}\right]_0^\infty + \frac{1}{4}\int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1+x^4)^3} = \frac{1}{16}B\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

$$(\text{при } x^4 = z) = \frac{1}{16}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}{\Gamma(3)}; \text{ но } \Gamma(3) = 1\cdot 2,\ \Gamma\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}, \text{ следовательно } J = \frac{5\pi\sqrt{2}}{512}.$$

*Пример 3.* $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\cos^q x\,dx$ при $p+1 > 0$, $q+1 > 0$.

При $y = \sin x$

$$J = \int_0^1 y^p (1-y^2)^{\frac{q-1}{2}} dy; \quad \text{при } y^2 = z \text{ имеем:}$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 z^{\frac{p-1}{2}} (1-z)^{\frac{q-1}{2}} dz = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}.$$

Например:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin x \cos^3 x} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

При $q = -p$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^p x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\cos\frac{1}{2}p\pi}$ при $-1 < p < 1$.

*Пример 4.* $J = \int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ при $m+1 > 0$, $n > 0$, $p+1 > 0$.

Подстановкою $x^n = y$ находим $J = \frac{1}{n} B\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right)$; при выполнении признаков Бернулли $J$ выразится без функций $\Gamma$. Например:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^3}} dx = \frac{1}{3} B\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma(2) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{4}{9}.$$

*Пример 5.* $J = \int_0^\infty e^{-x^n} \cdot x^k dx$ при $k+1 > 0$, $n > 0$. При $x^n = y$ находим $J = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{k+1}{n}\right)$; $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

---

Глава IV.

## Формулы приближенного вычисления определенных интегралов.

**§ 1. Общий вид формул приближенного вычисления определенных интегралов следующий:**

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) \left\{ C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_k \cdot f(x_k) \right\},$$

где $C_1, C_2, \ldots C_k$ — постоянные числа, а $x_1, x_2, \ldots x_k$ — промежуточные значения $x$ между $a$ и $b$, так что формула определяется заданием $2k$ постоянных $C_j$ и $x_j$ Если $m$ зависимостей между этими постоянными задаются заранее, то остающимися $(2k-m)$ зависимостями обыкновенно распоряжаются

так, чтобы формула была точною для целой функции возможно высокой степени, именно $(2k-m-1)$ так как эта функция содержит $(2k-m)$ коэффициентов. Для вывода этих зависимостей избавимся сперва от чисел $a$ и $b$, делая подстановку: $x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t$, $f(x)=F(t)$, при которой предыдущая формула принимает вид:

$$\int_{-1}^{+1}F(t)dt=2\left\{C_1F(t_1)+C_2F(t_2)+\ldots+C_kF(t_k)\right\},$$

при чем $x_j=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_j$. Теперь положим $F(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n$, произвольной целой функции $n$-ой степени; тогда

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}F(t)dt=a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot\frac{1}{3}+a_3\cdot 0+a_4\cdot\frac{1}{5}+\ldots+a_n\left\{\begin{array}{l}\cdot 0 \text{ при } n \text{ нечети.}\\ \cdot\frac{1}{n+1} \text{ при } n \text{ чети.}\end{array}\right.$$

$$\sum_{j=1}^{k}C_jF(t_j)=a_0\sum C_j+a_1\sum C_jt_j+a_2\sum C_jt_j^2+a_3\sum C_jt_j^3+\ldots+a_n\cdot\sum C_jt_j^n.$$

Для того, чтобы формула $\int_{-1}^{+1}F(t)dt=2\sum C_jF(t_j)$ была точною для всякой целой функции степени не выше $n$-й, в двух последних выражениях должны быть равны коэффициенты при $a_0$, $a_1$, $\ldots a_n$, т.-е.

$$(*)\sum C_j=1,\ \sum C_jt_j=0,\ \sum C_jt_j^2=\frac{1}{3},\ \sum C_jt_j^3=0,\ \sum C_jt_j^4=\frac{1}{5}\ldots\sum C_jt_j^n=\left\{\begin{array}{l}0\ n \text{ нечети.}\\ \frac{1}{n+1}\ n \text{ чети.}\end{array}\right.$$

Отличим 3 частных случая в зависимости от заранее поставленных зависимостей между $C_j$ и $t_j$.

## § 2. Формула Гаусса.

Здесь нет заранее данных зависимостей, $m=0$, $n=2k-1$; формула будет точною для всех целых функций степени не выше $2k-1$, если подчинить $C_j$ и $t_j$ $2k$ условиям:

$$\sum C_j=1,\ \sum C_jt_j=0,\ \sum C_jt_j^2=\frac{1}{3},\ \ldots\sum C_jt_j^{2k-1}=0.$$

Для решения этой системы, положим, $\omega(t)=(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_k)$, тогда целая функция $F(t)=\omega(t)\cdot\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — произвольная целая функция степени не выше $k-1$, будет степени не выше $2k-1$, и потому к ней формула $\int_{-1}^{+1}F(t)dt=2\sum C_jF(t_j)$ приложима, т.-е., в виду $F(t_j)=0$ при $j=1, 2, \ldots k$, должно быть $\int_{-1}^{+1}\omega(t)\varphi(t)dt=0$. Введем функцию:

$$\Phi(t)=\frac{(t+1)^k}{k!}\omega(-1)+\frac{(t+1)^{k+1}}{(k+1)!}\omega'(-1)+\ldots+\frac{(t+1)^{2k}}{2k!}\omega^{(k)}(-1),$$

(где $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k$); для нее $\Phi^{(k)}(t) = \omega(-1) + \frac{t+1}{1}\omega'(-1) + \ldots$ $\ldots + \frac{(t+1)^k}{k!}\omega^k(-1) = \omega(t)$, и последний интеграл перепишется так: $\int\limits_{-1}^{+1} \Phi^{(k)}(t) \cdot \varphi(t)dt = 0$. Применяя к нему $k$ раз интегрирование по частям, найдем:

$$\left[\Phi^{(k-1)}(t)\varphi(t) - \Phi^{(k-2)}(t)\varphi'(t) + \ldots + (-1)^{k-1}\Phi(t)\varphi^{(k-1)}(t)\right]_{-1}^{+1} +$$
$$+ (-1)^k \int\limits_{-1}^{+1} \Phi(t)\varphi^{(k)}(t)dt = 0.$$

Но $\Phi(t) = (t+1)^k\psi(t)$[$\psi(t)$ — целая функция], следовательно (по теореме высшей алгебры), $\Phi(-1) = 0$, $\Phi'(-1) = 0, \ldots \Phi^{(k-1)}(-1) = 0$; кроме того, $\varphi^{(k)}(t) = 0$, ибо $\varphi(t)$ — степени не выше $k-1$; поэтому предыдущее равенство перепишется так:

$$\Phi^{(k-1)}(1)\varphi(1) - \Phi^{(k-2)}(1)\varphi'(1) + \ldots + (-1)^{k-1}\Phi(1)\varphi^{(k-1)}(1) = 0;$$

в виду произвольности чисел $\varphi(1)$, $\varphi'(1)$, $\ldots$ $\varphi^{(k-1)}(1)$, отсюда заключаем: $\Phi(1) = 0$, $\Phi'(1) = 0$, $\ldots$ $\Phi^{(k-1)}(1) = 0$, т.-е. $\Phi(t)$ содержит множитель $(t-1)^k$, и так как $\Phi(t) = (t+1)^k\psi(t)$, где $\psi(t)$ степени $k$, то, очевидно, $\psi(t) = A(t-1)^k$ и $\Phi(t) = A(t^2-1)^k$ ($A$ — постоянное); отсюда $\omega(t) = A\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k$, т.-е. $\omega(t)$ есть полином Лежандра $P_k(t)$ $k$-й степени, имеющий $k$ различных вещественных корней, заключенных между $-1$ и $+1$ (как известно из высшей алгебры). Когда числа $t_1$, $t_2$ $\ldots$ $t_k$ найдены, то постоянные $C_1$, $C_2$ $\ldots$ $C_k$ найдутся из системы (*) при $n = k-1$.

Так, при $k = 2$: $P_2(t) = \frac{d^2}{dt^2}(t^2-1)^2 = 12t^2 - 4$ дает $t_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $t_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$; формулы (*) дают: $C_1 + C_2 = 1$, $C_1t_1 + C_2t_2 = 0$, т.-е. $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$.

Итак, формула $\int\limits_{-1}^{+1} F(t)dt = F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

или
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right]$$

верна для всякой целой функции $F(t)$ или $f(x)$ степени не выше 3-й $\left(\text{так как } \sum C_jt_j^2 = \frac{1}{3}, \sum C_jt_j^3 = 0\right)$.

При $k = 3$: $P_3(t) = \frac{d^3}{dt^3}(t^2-1)^3 = 120t^3 - 72t$ дает $t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $t_2 = 0$, $t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, $-C_1 + C_3 = 0$, $\frac{3}{5}(C_1 + C_2) = \frac{1}{3}$, откуда $C_1 = C_3 = \frac{5}{18}$, $C_2 = \frac{4}{9}$.

Формула

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = \frac{1}{9}\left\{5F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8F(0) + 5F\left(+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right\}$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{18}\left\{5f\left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f\left(\frac{b+a}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + 5f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right\}$$

верна для всякой целой функции $F(t)$ или $f(x)$ степени не выше 5-й $\left(\text{так как } \sum C_j t_j^3 = 0, \sum C_j t_j^4 = \frac{1}{5}, \sum C_j t_j^5 = 0\right)$.

## § 3. Формулы Котеса.

Здесь числа $t_j$ берутся равноотстоящие друг от друга, т.-е.

$$t_1 = -1,\ t_2 = -1 + \frac{2}{k-1},\ t_3 = -1 + \frac{4}{k-1}, \ldots t_{k-1} = -1 + \frac{2(k-2)}{k-1},$$
$$t_k = -1 + 2 = +1;\ \text{ число } m = k,\ n = k-1,$$

формула верна для целой функции степени не выше $k-1$, если определить $C_1, C_2, \ldots C_k$ условиями (*) при $n = k-1$. Разберем частные случаи:

1) $k = 2$: $t_1 = -1$, $t_2 = +1$, $C_1 + C_2 = 1$, $-C_1 + C_2 = 0$, откуда $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$.

Формула $\int_{-1}^{+1} F(t)dt = F(-1) + F(+1)$ или

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left\{f(a) + f(b)\right\}$$

верна для целой функции степени не выше 1-й (условие $\sum C_j t_j^2 = \frac{1}{3}$ не выполняется) и известна под именем формулы трапеций, так как интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, изображающий (как показано в отд. IV) площадь между кривою $AB$ $y = f(x)$, двумя ординатами $x = a$ и $x = b$ и осью абсцисс, приравнивается площади трапеции с параллельными сторонами $f(a)$, $f(b)$ и с высотою $b - a$.

2) $k = 3$: $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = +1$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, $-C_1 + C_3 = 0$, $C_1 + C_3 = \frac{1}{3}$, откуда

$$C_1 = C_3 = \frac{1}{6},\ C_2 = \frac{2}{3},\ \text{при чем} \sum C_j t_j^3 = 0, \sum C_j t_j^4 \text{ не} = \frac{1}{5}.$$

так что формула

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = \frac{1}{3}\left\{F(-1) + 4F(0) + F(+1)\right\},$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right\}$$

верна для целой функции 3-й степени: она называется первой формулой Симпсона.

3) $k=4$: $t_1=-1$, $t_2=-\frac{1}{3}$, $t_3=\frac{1}{3}$, $t_4=1$; 4 уравнения системы (*) будут

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1, \quad -C_1 - \frac{1}{3}C_2 + \frac{1}{3}C_3 + C_4 = 0,$$

$$C_1 + \frac{1}{9}C_2 + \frac{1}{9}C_3 + C_4 = \frac{1}{3}, \quad -C_1 - \frac{1}{27}C_2 + \frac{1}{27}C_3 + C_4 = 0,$$

откуда $C_1 = C_4 = \frac{1}{8}$, $C_2 = C_3 = \frac{3}{8}$, при чем условие $\sum C_j t_j^4 = \frac{1}{5}$ не выполнено, и потому формула

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = \frac{1}{4}\left\{F(-1) + 3F\left(-\frac{1}{3}\right) + 3F\left(\frac{1}{3}\right) + F(+1)\right\}$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{8}\left\{f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) + f(b)\right\}$$

верна для целой функции степени не выше 3-й: она называется второю формулой Симпсона.

*Замечание.* Для увеличения точности вычислений по формулам трапеций или Симпсона обыкновенно делят вычисляемую площадь на $n$ полос с равными основаниями и к каждой полосе прилагают формулу трапеций или Симпсона.

Пользуясь формулой трапеций, назовем ординаты, отвечающие $(n+1)$ точкам деления основания, через $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ (черт. 1); тогда площадь $Q$, изображаемая интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$, равна:

$$Q = \frac{b-a}{n}\left\{\frac{1}{2}y_0 + (y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + \frac{1}{2}y_n\right\}.$$

Пользуясь первой формулой Симпсона, построим ординаты $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{2n}$, отвечающие не только точкам деления основания, но и средние ординаты каждой полосы (черт. 2); тогда площадь

$$Q = \frac{b-a}{6n}\left\{y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})\right\}.$$

Пользуясь 2-й формулой Симпсона, строим ординаты $y_0, y_1, y_2, \dots y_{3n}$, отвечающие не только $(n+1)$ точкам деления основания, но еще по две промежуточные ординаты на каждой полосе (черт. 3). Найдем:

$$Q=\frac{b-a}{8n}\Big\{y_0+y_{3n}+2(y_3+y_6+\dots+y_{3n-3})+$$
$$+3(y_1+y_2+y_4+y_5+\dots+y_{3n-2}+y_{3n-1})\Big\}.$$

Черт. 1.

Черт. 2.

Черт. 3.

## § 4. Формулы Чебышева.

Здесь предполагаются все числа $C_j$ равными, что дает $m=(k-1)$ условий, так что $n=k$, т.-е. формула, будет верна для целой функции степени не выше $k$, если выполнены уравнения (*) при $n=k$. Но первое из этих уравнений $\sum C_j=1$ дает $C_1=C_2=\dots=C_k=\frac{1}{k}$, после чего остальные $k$ уравнений будут:

$$(**)\ \sum t_j=0,\ \sum t_j^2=\frac{k}{3},\ \sum t_j^3=0,\ \sum t^4=\frac{k}{5}\dots\sum t_j^k=\begin{cases}0 & (\text{к нечетн.})\\ \dfrac{k}{k+1} & (\text{к четн.})\end{cases}$$

Самая формула имеет вид:

$$\int_{-1}^{+1}F(t)dt=\frac{2}{k}\Big\{F(t_1)+F(t_2)+\dots+F(t_k)\Big\},$$

или

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{k}\Big\{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_k)\Big\},\quad \text{где } x_j=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_j.$$

Если числа $t_1, \dots t_k$ рассматривать как корни уравнения $k$-ой степени $t^k+p_1t^{k-1}+p_2t^{k-2}+\dots+p_{k-1}t+p_k=0$, то формулы Ньютона определят $p_1, p_2, \dots p_k$, ибо в этих формулах $S_1+p_1=0$, $S_2+p_1S_1+2p_2=0$, $S_3+p_1S_2+p_2S_1+3p_3=0$ и т. д. известны $S_1=0$, $S_2=\frac{k}{3}$, $S_3=0$, $S_4=\frac{k}{5}$ и проч. Отсюда найдем:

$$p_1=p_3=p_5=\dots 0,\ \frac{k}{3}+2p_2=0,\ \frac{k}{5}+\frac{k}{3}p_2+4p_4=0,$$
$$\frac{k}{7}+\frac{k}{5}p_2+\frac{k}{3}p_4+6p_6=0\dots$$

Если $k$ четное, то уравнение $t^k+p_1t^{k-1}+\ldots+p_k=0$ будет содержать только четные степени $t$, следовательно его корни будут попарно отличаться лишь знаками; поэтому, помимо $k$ уравнений (**), выполняется само собою следующее $(k+1)$ уравнение $\sum t_j^{k+1}=0$, и формула Чебышева при $k$ четном оказывается точною для целой функции степени не выше $(k+1)$. Если $k$ нечетное, то уравнение $t^k+p_1t^{k-1}+\ldots+p_k=0$ содержит только нечетные степени $t$, следовательно один из его корней будет 0, а остальные попарно отличаются только знаками; последнее уравнение системы (**) будет $\sum t_j^k=0$, и следующее уравнение $\sum t_j^{k+1}=\frac{k}{k+2}$ вообще не выполняется, так что формула Чебышева при $k$ нечетном будет верна только для целой функции степени не выше $k$. Разберем частные случаи.

1) $k=2$: уравнение $t^2-\frac{1}{3}=0$ имеет корни $t_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-0{,}577350$, $t_2=-t_1$; формула Чебышева верна для целой функции степени не выше 3-й (результат совпадает с формулой Гаусса).

2) $k=3$: уравнение $t^3-\frac{1}{2}t=0$ имеет корни $t_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-0{,}707107$, $t_2=0$, $t_3=-t_1$; формула верна для целой функции степени не выше 3-й.

3) $k=4$: $t^4-\frac{2}{3}t^2+\frac{1}{45}=0$, $t_1=-0{,}794654$, $t_2=-0{,}187592$, $t_3=-t_1$, $t_4=-t_2$.

4) $k=5$: $t^5-\frac{5}{6}t^3+\frac{7}{72}t=0$, $t_1=-0{,}832497$, $t_2=-0{,}374541$, $t_3=0$, $t_4=-t_2$, $t_5=-t_1$.

5) $k=6$: $t^6-t^4+\frac{1}{5}t^2-\frac{1}{105}=0$, $t_1=-0{,}866247$, $t_2=-0{,}422519$, $t_3=-0{,}266635$, $t_4=-t_3$, $t_5=-t_2$, $t_6=-t_1$.

6) $k=7$: $t^7-\frac{7}{6}t^5+\frac{119}{360}t^3-\frac{149}{6480}t=0$, $t_1=-0{,}883862$, $t_2=-0{,}529657$, $t_3=-0{,}323912$, $t_4=0$, $t_5=-t_3$, $t_6=-t_2$, $t_7=-t_1$.

7) $k=8$: уравнение с $t$ имеет комплексные корни.

8) $k=9$: $t^9-\frac{3}{2}t^7+\frac{27}{40}t^5-\frac{57}{560}t^3+\frac{53}{22400}t=0$, $t_1=-0{,}911589$, $t_2=-0{,}601019$, $t_3=-0{,}528762$, $t_4=-0{,}167907$, $t_5=0$, $t_6=-t_4$, $t_7=-t_3$, $t_8=-t_2$, $t_9=-t_1$.

## § 5. О дополнительном члене в формулах приближенного вычисления определенных интегралов.

Формулы §§ 2, 3, 4 являются точными для целых функций степени соответственно $n=2k-1$, $k-1$, $k$, при чем в отдельных случаях (формула Котеса при $k=3$ и формулы Чебышева при $k$ четном) $n$ повышается на 1.

Если же эти формулы прилагаются к другим интегрируемым функциям, то нужно добавить в правой части дополнительный член.

Желая приложить формулу, точную для целой функции $n$-й степени к некоторой иной функции $F(t)$, построим целую функцию $\varphi_n(t)$ степени $n$-й

так, чтобы она имела значения, одинаковые с $F(t)$, при $(n+1)$ частных значениях $t=t_j$ $(j=1, 2, 3, \ldots n+1)$, при чем $k$ из этих значений $t_j$ как раз совпадают с $t_j (j=1, 2, \ldots k)$, входящими во взятую формулу, а $(n+1-k)$ остальных остаются пока произвольными (во всех случаях $n+1-k \geqq 0$).

Тогда при всяком значении $t$ можно положить

$$F(t)=\varphi_n(t)+\mathrm{K}\cdot(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_{n+1})$$

(где K — неизвестная функция от $t$), ибо при этом равенства

$$F(t_j)=\varphi(t_j) \quad (j=1, 2, \ldots n+1)$$

выполняются. Для определения K, составляем функцию от $z$:

$$\Phi(z)=F(z)-\varphi_n(z)-\mathrm{K}\cdot(z-t_1)(z-t_2)\ldots(z-t_{n+1}),$$

которая обращается в 0 при $z=t_1, t_2, \ldots t_{n+1}$ и при $z=t$. Согласно теореме Ролля, $\Phi^{(n+1)}(z)$ имеет, по крайней мере, один вещественный корень при $z=\xi$, где $\xi$ — число промежуточное между наибольшим и наименьшим из чисел $t_j (j=1, 2, \ldots n+1)$ и $t$; итак, $\Phi^{(n+1)}(\xi)=0$, но

$$\Phi^{(n+1)}(z)=F^{(n+1)}(z)-\mathrm{K}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1),$$

ибо $\varphi_n^{(n+1)}(z)=0$ и K не зависит от $z$; отсюда $\mathrm{K}=\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\xi)$, где $\xi$ заключено между $-1$ и $+1$, если $t$ и все $t_j$ содержатся между $-1$ и $+1$. Итак,

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = \int_{-1}^{+1} \varphi_n(t)dt+\frac{1}{(n+1)!}\int_{-1}^{+1} F^{(n+1)}(\xi)\cdot\omega_{n+1}(t)dt,$$

если положить $\omega_{n+1}(t)=\prod_{j=1}^{n+1}(t-t_j)$. Но для $\varphi_n(t)$ имеем точную формулу:

$$\int_{-1}^{+1}\varphi_n(t)dt=2\sum_{j=1}^{k}C_j\varphi_n(t_j)=2\sum_{j=1}^{k}C_jF(t_j),$$

следовательно

$$\int_{-1}^{+1}F(t)dt=2\sum_{j=1}^{k}C_jF(t_j)+\frac{1}{(n+1)!}\int_{-1}^{+1}F^{(n+1)}(\xi)\cdot\omega_{n+1}(t)dt;$$

здесь $n$ есть наивысшая степень целой функции, для которой точна формула без дополнительного члена (ибо для такой функции $F^{(n+1)}(\xi)=0$).

Возвращаясь к переменной $x$, при чем

$$x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t, \quad f(x)=F(t),$$

находим:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1}F(t)dt, \quad F^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(x)\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1},$$

и предыдущая формула принимает вид:

$$(*)\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot\sum_{j=1}^{k}C_jf(x_j)+\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+2}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\cdot\int_{-1}^{+1}f^{(n+1)}(\zeta)\cdot\omega_{n+1}(t)dt,$$

где $\zeta$ означает некоторое число между $a$ и $b$.

Для формулы Гаусса $n=2k-1$, $n+1=2k$, и можно выбрать числа $t_{k+1}, \ldots t_{2k}$ равными соответственно числам $t_1, t_2, \ldots t_k$; тогда $\omega_{n+1}(t)$ будет квадратом целой функции $k$-й степени, и можно к интегралу, входящему в дополнительный член, применить первую теорему о среднем. Именно, положив $P_k(t)=\frac{d^k}{dt^k}\left[(t^2-1)^k\right]$, имеем (см. § 2): $P_k(t)=\frac{2k!}{k!}(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_k)$, следовательно, $\omega_{2k}(t)=\left[\frac{k!}{2k!}P_k(t)\right]^2$, $\int\limits_{-1}^{+1}\omega_{2k}(t)dt=\left[\frac{k!}{2k!}\right]^2\int\limits_{-1}^{+1}P_k^2(t)dt$;

но $k=$ кратное интегрирование по частям дает: $\int\limits_{-1}^{+1}P_k^2(t)dt=$

$$=\left[P_k(t)\cdot\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(t^2-1)^k-P_k'(t)\cdot\frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}(t^2-1)^k+\ldots+(-1)^{k-1}P_k^{(k-1)}(t)\cdot(t^2-1)^k\right]_{-1}^{+1}+$$

$$+(-1)^k\cdot P_k^{(k)}(t)\cdot\int\limits_{-1}^{+1}(t^2-1)^k\cdot dt=2k!\cdot 2\cdot\int\limits_0^1(1-t^2)^k dt=$$

$$=2k!\cdot 2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k+1}u\cdot du \text{ (при } t=\cos u)=2k!\cdot 2\cdot\frac{[2^k\cdot k!]^2}{(2k+1)!}$$

(см. гл. II, § 2, пр. 1). Таким образом формула Гаусса с дополнительным членом имеет вид:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=(b-a)\sum_{j=1}^{k}C_j f(x_j)+(b-a)^{2k+1}\cdot\frac{(k!)^4}{(2k!)^2\cdot(2k+1)!}\cdot M^{(2k)},$$

где $M^{(2k)}$ — среднее значение $f^{(2k)}(x)$ при значениях $x$ между $a$ и $b$.

При $k=1$: $\int\limits_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{b+a}{2}\right)+(b-a)^3\cdot\frac{M^{(2)}}{24}$.

При $k=2$ (см. § 2) дополнительный член равен $(b-a)^5\cdot\frac{M^{(4)}}{4320}$, при $k=3$ дополнительный член $(b-a)^7\cdot\frac{M^{(6)}}{2016000}$ и т. д.

В формулах Котеса вообще $n+1=k$ (при $k=3$ $n=3$, как объяснено в § 3), следовательно $\omega_k(t)=\prod\limits_{j=1}^{k}(t-t_j)$; эта функция вообще не сохраняет постоянного знака при $-1\leqq t\leqq+1$, и для установления высшей границы дополнительного члена $\frac{(b-a)^{(n+2)}}{2^{n+2}(n+1)!}\int\limits_{-1}^{+1}f^{(n+1)}(\zeta)\cdot\omega_{n+1}(t)dt$ можно пользоваться очевидным неравенством

$$\left|\int\limits_{-1}^{+1}f^{(n+1)}(\zeta)\cdot\omega_{n+1}(t)dt\right|<\int\limits_{-1}^{+1}|f^{(n+1)}(\zeta)|\cdot|\omega_{n+1}(t)|dt$$

(ибо абсолютное значение суммы меньше суммы абсолютных значений слагаемых, если они не все одного знака) и далее, по первой теореме о среднем

(гл. I, § 3), значение последнего интеграла равно $|M^{(n+1)}| \cdot \int\limits_{-1}^{+1} |\omega_{n+1}(t)| dt$, где $|M^{(n+1)}|$ среднее значение $|f^{(n+1)}(x)|$ при значениях $x$ между $a$ и $b$.

При $k=2$ имеем $t_1=-1$, $t_2=+1$, $\omega_{n+1}(t)=\omega_2(t)=t^2-1$, $\omega_2(t)$ знакопостоянная, $\int\limits_{-1}^{+1} \omega_2(t) dt = -\frac{4}{3}$, дополнительный член равен $-$ $-(b-a)^3 \cdot \frac{M^{(2)}}{12}$.

При $k=3$: $t_1=-1$, $t_2=0$, $t_3=+1$, $n=k=3$; беря $t_4=0$, имеем $\omega_4(t)=t^2(t^2-1)$, $\omega_4(t)$ знакопостоянная, $\int\limits_{-1}^{+1} \omega_4(t)\, dt = -\frac{4}{15}$, дополнительный член $=-(b-a)^5 \cdot \frac{M^{(4)}}{2880}$.

При $k=4$: $t_1=-1$, $t_2=-\frac{1}{3}$, $t_3=+\frac{1}{3}$, $t_4=1$, $n=k-1=3$:

$$\omega_4(t)=(t^2-1)\left(t^2-\frac{1}{9}\right),$$

$\int\limits_{-1}^{+1} |\omega_4(t)| dt = 2\left[\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \omega_4(t)\, dt + \int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} -\omega_4(t)\, dt\right] = \frac{784}{3645}$; дополнительный член $=\pm (b-a)^5 \cdot \frac{49}{174960} \cdot |M^{(4)}|$, где $|M^{(4)}|$ — среднее значение $|f^{(4)}(x)|$ при значениях $x$ между $a$ и $b$.

ОТДЕЛ III.

# РЯДЫ, ЧЛЕНЫ КОТОРЫХ СУТЬ ФУНКЦИИ ОТ $x$.

## Глава I.

## Общие свойства таких рядов.

### § 1. Равномерная сходимость.

Дан бесконечный ряд $\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots+\varphi_n(x)+\ldots$.

Положив $\Phi_n(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)$, будем называть ряд сходящимся, если существует при $n=\infty$ пред. $\Phi_n(x)=\Phi(x)$. Этот предел называется суммою ряда, что записывается в виде: $\Phi(x)=\Phi_n(x)+R_n(x)$, где $R_n(x)=\varphi_{n+1}(x)+\varphi_{n+2}(x)+\ldots$ называется остатком ряда. Из данного определения следует, что для сходящегося ряда должно быть: $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\, R_n(x)=$ $=$ пред. $[\Phi(x)-\Phi_n(x)]=0$, т.-е. $|R_n(x)|<\varepsilon$ при $n\geqq n_0$ ($n_0$ — достаточно большое целое положительное число, $\varepsilon$ — сколь угодно малое положительное число).

*Определение*: Ряд с общим членом $u_n=\varphi_n(x)$ называется равномерно сходящимся при $a\leqq x\leqq b$, если при $n\geqq n_0$ можно сделать $|R_n(x)|<\varepsilon$, каково бы ни было значение $x$ от $x=a$ до $x=b$.

*Пример.* Пусть $u_n=\dfrac{1}{1+nx^2}-\dfrac{1}{1+(n+1)x^2}$. Тогда $\Phi_n(x)=$ $1-\dfrac{1}{1+(n+1)x^2}$; при $x$ не $=0$, имеем пред. $\Phi_n(x)=1$, следовательно $\Phi(x)=1$, $R_n(x)=\Phi(x)-\Phi_n(x)=\dfrac{1}{1+(n+1)x^2}$. Если $|x|\geqq a$, то $|R_n(x)|\leqq\dfrac{1}{1+(n+1)a^2}$, и можно сделать $|R_n(x)|<\varepsilon$, если взять $n+1>$ $>\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2}$; отсюда $n_0=\mathrm{E}\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2}$ (E — означает целую часть числа: entier). Таким образом ряд будет равномерно-сходящимся в любом интервале значений $x$, где не содержится $x=0$ (при $a=0$ выходит $n_0=\infty$); однако и при $x=0$ ряд остается сходящимся, ибо $\varphi_n(0)=0$, $\Phi_n(0)=0$, $\Phi(0)=0$.

*Теорема.* Если при $a\leqq x\leqq b$ оказывается $|\varphi_n(x)|\leqq v_n$, где $v_n$—общий член (абсолютно) сходящегося ряда положительных чисел, независящих от $x$, то ряд $u_n=\varphi_n(x)$ будет равномерно-сходящимся в интервале $a\leqq x\leqq b$.

Вывод. При всяком $x$ от $x=a$ до $x=b$ имеем неравенство:

$$|R_n(x)| \leqq |\varphi_{n+1}(x)| + |\varphi_{n+2}(x)| + \ldots\ldots < v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots = \underset{m=\infty}{\text{пред.}}\,(v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{n+m});$$

но для сходящегося ряда положительных чисел при $n \geqq n_0$ и при любом $m > 0$ выполняется неравенство: $v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{n+m} < \varepsilon$, следовательно и пред. $(v_{n+1} + \ldots + v_{n+m}) \leqq \varepsilon$, и оказывается $|R_n(x)| < \varepsilon$ для всякого $x$ в интервале $a \leqq x \leqq b$, т.-е. ряд $\varphi_n(x)$ — равномерно-сходящийся.

## § 2. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда.

*Теорема.* Если при $a \leqq x \leqq b$ ряд, составленный из непрерывных функций от $x$: $\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$ оказывается равномерно-сходящимся, то его сумма есть непрерывная функция от $x$.

Вывод. По § 1 имеем $\Phi(x+h) - \Phi(x) = \Phi_n(x+h) - \Phi_n(x) + R_n(x+h) - R_n(x)$, откуда $|\Phi(x+h) - \Phi(x)| \leqq |\Phi_n(x+h) - \Phi_n(x)| + |R_n(x+h)| + |R_n(x)|$. При $n = n_0$, по определению § 1, можно сделать $|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ и $|R_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}$; затем, так как $\Phi_{n_0}(x)$, как сумма конечного числа $n_0 + 1$ непрерывных функций, есть функция непрерывная, можно взять столь малым $|h|$, чтобы $|\Phi_n(x+h) - \Phi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, тогда выйдет $|\Phi(x+h) - \Phi(x)| < \varepsilon$, т.-е $\Phi(x)$ — непрерывная функция.

В примере § 1 $\Phi(x) = 1$, пока $x$ не $= 0$, т.-е $\Phi(x)$ остается повсюду непрерывной, кроме $x = 0$, где $\Phi(x)$ имеет конечный разрыв, ибо $\Phi(0) = 0$.

## § 3. Интегрирование рядов.

*Теорема.* Если ряд $\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$ оказывается равномерно-сходящимся при $a \leqq x \leqq b$ и имеет суммою $\Phi(x)$, то ряд, полученный почленным интегрированием:

$$\int_a^x \varphi_0(x)dx + \int_a^x \varphi_1(x)dx + \ldots + \int_a^x \varphi_n(x)dx + \ldots$$

будет также равномерно сходящимся и имеет суммою

$$\int_a^x \Phi(x)dx.$$

Вывод. Из равенства $\Phi(x) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x) + R_n(x)$ получаем, при всяком конечном $n$: $\int_a^x \Phi(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \int_a^x \varphi_j(x)\,dx + \int_a^x R_n(x)\,dx$, ибо интеграл суммы равен сумме интегралов при конечном числе слагаемых. Дополнительный член нового ряда $\rho_n(x) = \int_a^x R_n(x)\,dx$ подчиняется неравенству:

$|\rho_n(x)| \leqq \int_a^x |R_n(x)|\,dx < \int_a^x \varepsilon \cdot dx = (x-a)\cdot\varepsilon < (b-a)\varepsilon$ при $n \geqq n_0$, следовательно новый ряд равномерно сходится и имеет суммою $\int_a^x \Phi(x)\,dx$.

*Замечание.* Если при $x=b$ ряд $\varphi_n(x)$ перестает быть равномерно-сходящимся или даже делается расходящимся, но новый ряд $\int\limits_a^x \varphi_n(x)\,dx$ остается равномерно сходящимся и при $x=b$, то сумма его равна $\int\limits_a^b \Phi(x)dx$, ибо, по § 2, эта сумма есть непрерывная функция от $x$ при $x=b$, а потому, выражаясь интегралом $\int\limits_a^x \Phi(x)dx$ при $x$, сколь угодно близких к $b$, она будет и при $x=b$ выражаться интегралом $\int\limits_a^b \Phi(x)dx$.

### § 4. Дифференцирование рядов.

*Теорема.* Если ряд $\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)+\ldots$ оказывается сходящимся при $a\leqq x\leqq b$ и имеет суммою $\Phi(x)$, то ряд, выводимый почленным дифференцированием: $\varphi_0'(x)+\varphi_1'(x)+\ldots+\varphi_n'(x)+\ldots$, будет иметь суммою $\Phi'(x)$, если этот новый ряд равномерно-сходящийся при $a\leqq x\leqq b$.

Вывод. Называя сумму нового ряда через $\Psi(x)$:

$$\Psi(x)=\varphi_0'(x)+\varphi_0'(x)+\ldots\varphi_n'(x)\ldots,$$

находим по теореме § 3:

$$\int\limits_a^x \Psi(x)dx=[\varphi_0(x)-\varphi_0(a)]+[\varphi_1(x)-\varphi_1(a)]+\ldots+[\varphi_n(x)-\varphi_n(a)]+\ldots=$$
$$=\Phi(x)-\Phi(a),$$ откуда $\Psi(x)=\Phi'(x)$ (см. отд. II, гл. I, § 4).

---

## Глава II.

## Степенные ряды.

### § 1. Условие равномерной сходимости.

*Теорема.* Если степенной ряд $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$, где коэффициенты $a_0$, $a_1,\ldots$ не зависят от $x$, оказывается абсолютно сходящимся при $-l\leqq x\leqq +l$, то он будет и равномерно-сходящимся в этом интервале.

Вывод. При $|x|\leqq l$ имеем $|a_nx^n|\leqq|a_n|\cdot l^n$, но ряд $v_n=|a_n|l^n$ сходящийся по условию, следовательно по теореме § 1, гл. I, ряд с общим членом $a_nx^n$ равномерно-сходящийся при $-l\leqq x\leqq +l$.

Например, ряды: $1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{1+x}$, $1-x^2+x^4-\ldots=\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\ldots$ будут абсолютно и равномерно-сходящимися при $-1<x<+1$.

## § 2. Интегрирование степенных рядов.

*Теорема.* Если степенной ряд оказывается абсолютно-сходящимся при $|x| \leqq l$ и имеет суммою $\Phi(x)$, то ряд, полученный почленным интегрированием от 0 до $x$: $a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}a_nx^{n+1} + \ldots$, при $|x| \leqq l$ также абсолютно-сходящийся и имеет суммою $\int\limits_0^x \Phi(x)\,dx$.

Вывод. Положив $u_n = a_nx^n$, $v_n = \frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$, имеем, при $|x| \leqq l$, неравенство $|v_n| \leqq l \cdot |u_n|$, а так как ряд $u_n$ абсолютно-сходящийся, то и ряд $v_n$ абсолютно-сходящийся. Далее, по § 1, гл. II, ряд $u_n$ равномерно сходящийся при $|x| \leqq l$, следовательно по § 3, гл. I, он допускает почленное интегрирование.

*Пример 1.* $$\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x} = \log(1+x) = \int\limits_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)dx =$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

Ряд абсолютно сходящийся при $|x| < 1$; так как, по свойству знакопеременного ряда, остаток $R_n(x) = (-1)^n \left\{ \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} + \ldots \right\}$ при $1 \geqq x > 0$ удовлетворяет неравенству $|R_n(x)| \leqq \frac{1}{n+1}$, то новый ряд остается равномерно сходящимся и при $x = +1$, почему его сумма при $x = 1$ будет $\log 2$: $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ (см. замечание, § 3 гл. I).

*Пример 2.*
$$\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = \int\limits_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots)\,dx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots$$

Новый ряд равномерно-сходящийся при $|x| \leqq 1$, поэтому
$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

*Пример 3.* $$\int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \operatorname{arcth} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots$$
при $|x| < 1$.

*Пример 4.* $$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = \int\limits_0^x \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \ldots\right)dx =$$
$$= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots \text{ при } |x| \leqq 1.$$

*Пример 5.* $$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} +$$
$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \cdots \text{ при } |x| \leqq 1.$$

## § 3. Дифференцирование степенных рядов.

*Теорема.* Если степенной ряд остается абсолютно-сходящимся при $-l \leqq x \leqq +l$ и имеет сумму $\Phi(x)$, то ряд, полученный почленным дифференцированием: $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$, будет абсолютно-сходящимся и имеет суммою $\Phi'(x)$ внутри интервала $-l < x < +l$ (равенства вообще исключаются).

Вывод. По условию, данный ряд $u_n = a_nx^n$ абсолютно-сходящийся при $|x| = l$, следовательно, по признаку д'Аламбера, $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \text{пред.} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot l = k \leqq 1$, откуда $\text{пред.} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{k}{l}$. Для нового ряда $v_n = na_nx^{n-1}$ имеем: $\text{пред.} \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \text{пред.} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = k \cdot \frac{|x|}{l} \leqq \frac{|x|}{l}$, так что, при $|x| \leqq l - \varepsilon$, оказывается $\text{пред.} \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| \leqq \frac{l-\varepsilon}{l} < 1$, и ряд $v_n$ абсолютно-сходящийся при $-l < x < +l$. Тогда по главе II, § 1, он будет и равномерно-сходящийся, а следовательно, по главе I, § 4, допускает почленное дифференцирование.

*Пример.* Из ряда $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ выводим дифференцированием новые результаты:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots,$$

$$\frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \ldots,$$

сходящиеся при $|x| < 1$.

## § 4. Действия над степенными рядами.

Общая теорема сложения рядов, в применении к степенным рядам, $u_n = a_nx^n$ и $v_n = b_nx^n$, имеющим суммы $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$, показывает, что новый ряд $w_n = (a_n + b_n)x^n$ имеет суммою $\Phi(x) + \Phi_1(x)$, так что степенные ряды можно складывать, как многочлены. Эта теорема дает возможность для любой рациональной дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ составить разложение в степенной ряд с указанием общего члена; именно, нужно разложить дробь на простейшие дроби вида $\frac{A_k}{(x-a)^k}$ ($a$ может быть и комплексным) и приложить к каждой дроби формулы, следующие из примера § 3:

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \ldots, \quad \frac{1}{(a-x)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2x}{a^3} + \frac{3x^2}{a^4} + \ldots$$

и проч., при чем ряды остаются сходящимися при $|x| < |a|$ (если $a$ комплексное, то $|a|$ означает модуль его). Почленным сложением таких рядов находим разложение данной дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$, и новый ряд будет сходящимся при значениях $x$, которые абсолютно меньше наименьшего модуля всех корней знаменателя $F(x)$.

*Пример.*

$$\frac{3-x}{2-x-x^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2+x}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+$$

$$+\frac{5}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{=0}^{\infty}x^n\left[\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}\right];$$

ряд сходящийся при $|x|<1$.

Теорема умножения рядов в применении к рядам $u_n=a_nx^n$, $v_n=b_nx^n$, имеющим суммы $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$, показывает, что новый ряд с общим членом $w_n=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ldots+u_nv_0=(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)x^n$ имеет суммою $\Phi(x)\cdot\Phi_1(x)$, так что степенные ряды перемножаются как многочлены.

Например, $e^x\cos x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$, $e^x\sin x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$.

Отсюда следует, что степенные ряды можно и делить, как многочлены, расположенные по возрастающим степеням $x$; например:

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\ldots}{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\ldots}=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\ldots;$$

положив $\operatorname{tg}x=c_1x+c_3x^3+c_5x^5+\ldots$, получаем формулу

$$\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=c_{2n+1}-c_{2n-1}\frac{1}{2!}+\ldots+(-1)^n\cdot c_1\cdot\frac{1}{2n!},$$

из которой последовательно находятся $c_1, c_3, c_5, \ldots$ Ряд для $\operatorname{tg}x$ остается сходящимся при $|x|<\frac{\pi}{2}$, так как $x=\frac{\pi}{2}$ есть абсолютно наименьший корень знаменателя $\cos x$.

## § 5. Суммирование некоторых степенных рядов.

*Пример 1.* Найти:

$$f(x)=\frac{x^3}{1\cdot 3}-\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^5}{3\cdot 5}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{(n-2)n}+\ldots \text{ при } |x|<1.$$

Имеем:

$$f'(x)=\frac{x^2}{1}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-2}+\ldots=x\log(1+x),$$

откуда

$$f(x)=\int_0^x x\log(1+x)\cdot dx=\frac{1}{2}(x^2-1)\cdot\log(1+x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x.$$

*Пример 2.*

$$f(x)=x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\ldots+(-1)^n\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right]+\ldots$$

при $|x|<1$.

Имеем:

$$f'(x)=1-x^2-x^4+x^6+\ldots+(-1)^n[x^{4n}-x^{4n+2}]+\ldots=\frac{1-x^2}{1+x^4},$$

$$f(x)=\int_0^x\frac{1-x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\left(\text{подстановка } y=x+\frac{1}{x}\right).$$

При $x=1$:

$$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^n\left[\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\right]+\ldots=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2}).$$

*Пример 3.*

$$f(x)=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1}-\frac{x^{3n+2}}{3n+2}\right)+\ldots\ |x|<1.$$

Имеем:

$$f'(x)=1-x-x^3+x^4+\ldots+(-1)^n(x^{3n}-x^{3n+1})+\ldots=\frac{1-x}{1+x^3},$$

$$f(x)=\int_0^x\frac{1-x}{1+x^3}\cdot dx=\frac{1}{3}\log\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\left(\text{подстановка } y=x+\frac{1}{x}\right).$$

При $x=1$:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right)+\ldots=\frac{2}{3}\log 2.$$

---

Глава III.

## Тригонометрические ряды.

### § 1. Определение коэффициентов в простейшем тригонометрическом ряде.

Рассмотрим разложение некоторой функции $f(x)$, заданной в интервале $\alpha\leqq x\leqq\alpha+2\pi$, в следующий ряд: $f(x)=a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$.

Если допустить заранее равномерную сходимость этого ряда, то по главе I, § 3, его можно почленно интегрировать; тогда, умножая все члены на $dx$ и интегрируя от $x=\alpha$ до $x=\alpha+2\pi$, находим:

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi}f(x)dx=a_0\cdot 2\pi+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\cos kx\,dx+b_k\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\sin kx\,dx\right\},$$

но интегралы, стоящие при $a_k$ и $b_k$, равны 0, поэтому $a_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_\alpha^{\alpha+2\pi}f(x)dx$.

Умножая все члены разложения $f(x)$ на $\cos mx\,dx$ и интегрируя от $x=\alpha$ до $x=\alpha+2\pi$, получаем:

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_0\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\cos mx\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\cos kx\cos mx\,dx + \right.$$

$$\left. + b_k\cdot\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\sin kx\cos mx\,dx\right\},\ \text{но}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\sin kx\cos mx\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\{\sin(k+m)x+\sin(k-m)x\}\,dx=0,\ \text{а}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\cos kx\cos mx\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\{\cos(k+m)x+\cos(k-m)x\}\,dx=0\ \text{при}\ k\gtrless m$$

и тот же интеграл, при $k=m$, равен $\pi$; отсюда $a_m=\frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}f(x)\cos mx\,dx$. Аналогично, умножая разложение $f(x)$ на $\sin mx\,dx$ и интегрируя от $x=\alpha$ до $\alpha+2\pi$, найдем: $b_m=\frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}f(x)\sin mx\,dx$.

*Замечание.* Если функция $f(x)$ задана в интервале $a\leqq x\leqq b$, то подстановкою $y=\frac{2\pi x}{b-a}$ найдем $f(x)=f\left(\frac{b-a}{2\pi}\cdot y\right)=F(y)$, при чем, при изменении $x$ от $a$ до $b$, $y$ изменяется от $\alpha=\frac{2\pi a}{b-a}$ до $\alpha+2\pi=\frac{2\pi b}{b-a}$. Таким образом новая функция $F(y)$, согласно предыдущему выводу, представится рядом: $F(y)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos ky+b_k\sin ky)$ при $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}F(y)dy$, $a_m=\frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}F(y)\cos my\,dy$, $b_m=\frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}F(y)\sin my\,dy$.

Возвращаясь к прежней переменной $x$, при чем $dy=\frac{2\pi}{b-a}\,dx$, получаем разложение:

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos\frac{2\pi kx}{b-a}+b_k\sin\frac{2\pi kx}{b-a}\right\}$$

при

$$a_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,\ a_m=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2\pi mx}{b-a}\cdot dx,$$

$$b_m=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2\pi mx}{b-a}\cdot dx$$

**§ 2. Теорема Дирихлэ** (Dirichlet).

*Теорема.* Если функция $f(x)$, заданная в интервале $0 \leqq x \leqq 2\pi$, имеет конечное число maxima и minima и конечное число разрывов: конечных или таких бесконечных, при которых интеграл $\int f(x)dx$ имеет конечное значение, то бесконечный ряд $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, в котором

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\, d\alpha,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha,$$

имеет суммою: 1) $f(x)$ в точках, где $f(x)$ непрерывна, или

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

в точках конечного разрыва, при $0 < x < 2\pi$ и 2) $^1/_2\,[f(+0)+f(2\pi-0)]$ при $x = 0, 2\pi$. (Эта теорема выясняет достаточные условия для возможности разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье).

Вывод. Составим сумму конечного числа членов ряда:

$$S_{2n+1} = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx);$$

вводя значения $a_0$, $a_k$, $b_k$ и переставляя знаки $\Sigma$ и $\int$, получим:

$$S_{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(\alpha - x)\right\}d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha).\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{\alpha - x}{2}}\cdot d\alpha,$$

на основании формулы из теории комплексных чисел:

$$\frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Положив $\alpha - x = 2z$, $d\alpha = 2dz$, $\frac{z}{\sin z}\cdot f(x+2z) = \varphi(z)$ при новых пределах для $z$

$\left(z = -\frac{x}{2}\ \text{и}\ z = \pi - \frac{x}{2}\right)$, получаем: $S_{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}}\varphi(z)\cdot\frac{\sin(2n+1)z}{z}\cdot dz$,

и нужно искать $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\, S_{2n+1}$.

Воспользуемся (ниже доказанной) *леммой*: если при $a < z < b$ функция $\varphi(z)$ удовлетворяет так называемым условиям Dirichlet (перечисленным для $f(x)$ в предыдущей теореме), то пред. $\frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \frac{\sin mz}{z}\cdot\varphi(z)\cdot dz = L$, где $L = 0$,

если $a$ и $b$ одного знака, $L=\frac{1}{2}\varphi(+0)$ при $a=0$, $b>0$, $L=\frac{1}{2}\varphi(-0)$ при $a<0$, $b=0$, $L=\frac{1}{2}[\varphi(+0)+\varphi(-0)]$ при $a<0$, $b>0$.

На основании этой леммы, если предположить в интеграле, определяющем $S_{2n+1}$, $0<x<2\pi$, то его пределы будут подчинены неравенствам $0>-\frac{x}{2}>-\pi$, $\pi>\pi-\frac{x}{2}>0$ (т.-е. будут разных знаков), и функция $\varphi(z)$ будет выполнять условия Dirichlet $\left(\frac{z}{\sin z}\right.$ остается конечной и имеет один minimum при $z=0\left.\right)$, поэтому пред. $S_{2n+1}=\frac{1}{2}[\varphi(-0)+\varphi(+0)]=$ $=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$, что обращается в $f(x)$ в точке, где $f(x)$ непрерывна.

При $x=0$ получаем $S_{2n+1}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}f(2z)dz$; разбивая интервал $(0, \pi)$ на два: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, полагаем во втором $z=\pi-z_1$, после чего

$$S_{2n+1}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}f(2z)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)z_1}{\sin z_1}\cdot f(2\pi-2z_1)dz_1;$$

по лемме, пределы обоих интегралов будут определяться формулой $\frac{1}{2}\varphi(+0)$, при чем в первом $\varphi(z)=\frac{z}{\sin z}f(2z)$ и во втором $\varphi(z_1)=\frac{z_1}{\sin z_1}f(2\pi-2z_1)$; поэтому пред. $S_{2n+1}=\frac{1}{2}\Big[f(+0)+f(2\pi-0)\Big]$.

При $x=2\pi$ получаем: $S_{2n+1}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{0}\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}f(2\pi+2z)dz$; подстановкою $z=-z_1$ находим: $S_{2n+1}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{-\pi}\frac{\sin(2n+1)z_1}{\sin z_1}\cdot f(2\pi-2z_1)dz_1$ и приводим разыскание предела к случаю $x=0$ с заменою входившей туда функции $f(2z)$ на $f(2\pi-2z_1)$, так что пред. $S_{2n+1}=\frac{1}{2}\Big[f(2\pi-0)+f(+0)\Big]$, что и требовалось доказать.

Остается доказать лемму.

1°. При $\varphi(z)=1$ имеем:

$$L=\text{пред.}\frac{1}{\pi}\int\limits_a^b\frac{\sin mz}{z}dz=\text{пред.}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{mb}\frac{\sin u}{u}du-\text{пред.}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{ma}\frac{\sin u}{u}du \text{ (при } u=mz),$$

и так как $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}$, $\int\limits_0^{-\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=-\frac{\pi}{2}$ (см. отд. II, гл. II, § 6), то $L=0$, если $a$ и $b$ одного знака, $L=\frac{1}{2}$ при $a=0$, $b>0$ и при $a<0$, $b=0$ и $L=1$ при $a<0$, $b>0$.

2°. Если $\varphi(z)$ конечна и монотонна при $a<z<b$, то по второй теореме о среднем (см. отд. II, гл. I, § 6) имеем:

$$\int\limits_a^b\frac{\sin mz}{z}\varphi(z)dz=\varphi(a+0)\cdot\int\limits_a^{\xi}\frac{\sin mz}{z}\,dz+\varphi(b-0)\cdot\int\limits_{\xi}^{b}\frac{\sin mz}{z}dz \text{ при } a<\xi<b.$$

Пользуясь результатом 1°, находим в пределе: $L=0$ при $a$ и $b$ одинаковых знаков, $L=\frac{1}{2}\varphi(+0]$ при $a=0$, $b>0$, $L=\frac{1}{2}\varphi(-0)$ при $a<0$, $b=0$, $L=\frac{1}{2}\Big[\varphi(-0)+\varphi(+0)\Big]$ при $a<0$, $b>0$.

3° Если $\varphi(z)$ имеет в интервале $(a, b)$ конечное число maxima и minima в точках $z=c_1, c_2, \ldots c_n$, то разбиваем интервал $(a, b)$ на части $(a, c_1)$. $(c_1, c_2), \ldots (c_n, b)$ и в каждой прилагаем результат 2°; находим: $L=\sum\limits_{j=0}^{n}L_j$, где $L_j=\underset{m=\infty}{\text{пред.}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{c_j}^{c_{j+1}}\frac{\sin mz}{z}\varphi(z)dz$, при чем $c_0=a$ и $c_{n+1}=b$.

Если $a$ и $b$ одного знака, то все $L_j=0$ и $L=0$; если $a=0$, $b>0$, то $L_0=\frac{1}{2}\varphi(+0)$, остальные $L_j=0$, $L=\frac{1}{2}\varphi(+0)$; если $a<0$, $b=0$, то $L_n=\frac{1}{2}\varphi(-0)$, остальные $L_j=0$, $L=\frac{1}{2}\varphi(-0)$; если $a<0$, $b>0$, то примыкающие к точке $z=0$ интервалы дадут в пределе $\frac{1}{2}\varphi(-0)$ и $\frac{1}{2}\varphi(+0)$, остальные же дадут нули, $L=\frac{1}{2}\Big[\varphi(-0)+\varphi(+0)\Big]$.

4°. Если $\varphi(z)$ при $a\leqq z\leqq b$ имеет конечное число разрывов при $z=d_1, d_2, \ldots d_n$, при чем $\int\limits_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j+\varepsilon'_j}\varphi(z)dz$ стремится к нулю вместе с положительными числами $\varepsilon_j$ и $\varepsilon_j'$, то, предполагая функцию $\varphi(z)$ знакопостоянною в интервале $(d_j-\varepsilon_j, d_j)$, имеем по первой теореме о среднем $\int\limits_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j}\frac{\sin mz}{z}\varphi(z)dz=\frac{\sin m\xi}{\xi}\int\limits_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j}\varphi(z)dz$, и так как $\left|\frac{\sin m\xi}{\xi}\right|$ не превосходит конечной величины [если в интервале $(d_j-\varepsilon_j, d_j)$ не содержится точка $z=0$], а $\int\limits_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j}\varphi(z)dz$ по условию стремится

к нулю вместе с $\varepsilon_j$, то $\underset{m=\infty}{\text{пред.}} \int\limits_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j} \frac{\sin mz}{z} \varphi(z)dz = 0$, и при конечном числе точек $d_j$ предел всего интеграла $\frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \frac{\sin mz}{z}\varphi(z)dz$ при $m=\infty$ сохраняет то значение $L$, которое получено в 2°. Лемма доказана.

## § 3. Условия абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье.

Если функция $f(x)$, заданная в интервале $(0, 2\pi)$, имеет конечный разрыв при $x=k_1$, то, разбивая интервал $(0, 2\pi)$ на два: $(0, k_1)$ и $(k_1, 2\pi)$ и выполняя интегрирование по частям, получаем для коэффициентов $a_n$ и $b_n$ простейшего ряда Фурье $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ следующие выражения:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nx\cdot dx=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_0^{k_1}+\int\limits_{k_1}^{2\pi}\right]=$$

$$=\left[f(x)\cdot\frac{\sin nx}{n\pi}\right]_0^{k_1}+\left[f(x)\cdot\frac{\sin nx}{n\pi}\right]_{k_1}^{2\pi}-\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\cdot dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sin nk_1\left\{f(k_1-0)-f(k_1+0)\right\}-\frac{1}{n}\cdot b'_n,$$

где $b'_n$ есть выражение коэффициента при $\sin nx$ в разложении производной $f'(x)$;

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx=\left[-f(x)\frac{\cos nx}{n\pi}\right]_0^{k_1}+\left[-f(x)\frac{\cos nx}{n\pi}\right]_{k_1}^{2\pi}+$$

$$+\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{2\pi} f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\left\{f(+0)-f(2\pi-0)\right\}-\frac{\cos nk_1}{n\pi}\left\{f(k_1-0)-\right.$$

$$\left.-f(k_1+0)\right\}+\frac{1}{n}\cdot a'_n,$$

где $a'_n$ есть выражение коэффициента при $\cos nx$ в разложении производной $f'(x)$.

Отсюда заключаем, что коэффициенты $a_n$ и $b_n$ ряда Фурье будут порядка $\frac{1}{n}$, если функция $f(x)$ имеет конечные разрывы или не выполняет условие: $f(+0)=f(2\pi-0)$, и $a_n$, $b_n$ будут порядка по крайней мере $\frac{1}{n^2}$, если функция $f(x)$ представляется графически непрерывною кривою на всей плоскости [вообще всегда функция $f(x)$, представляющая сумму ряда Фурье, графически изображается повторением бесчисленное множество раз одного и того же чертежа, определяющего $f(x)$ в интервале $(0, 2\pi)$]. Из теории рядов известно, что ряды, общий член которых $u_n$ оказывается порядка $\frac{1}{n^l}$, будут абсолютно сходящимися лишь при $l>1$ и не могут быть абсолютно сходящимися при $l\leqq 1$. Поэтому функция $f(x)$ может разлагаться в ряд

Фурье, абсолютно и равномерно-сходящийся, лишь тогда, когда она изображается непрерывною кривою по всей плоскости. Обратно, если дано разложение неизвестной функции в ряд Фурье, и коэффициенты $a_n$ и $b_n$ (или по крайней мере один из них) оказываются порядка $\frac{1}{n}$, то неизвестная функция имеет конечные разрывы или внутри интервала $(0, 2\pi)$ или на границах, (т.-е. $f(+0)$ не $= f(2\pi - 0)$.

Сравнивая данные выражения коэффициентов $a_n$ и $b_n$ с приведенными выше, можно определить места и амплитуды разрывов функции $f(x)$ и построить из отрезков прямых такую функцию $F(x)$, которая имеет те же разрывы и с теми же амплитудами; например, при разрывах в точках $k_1$, $k_2$ следует определить $F(x)$ так:

$$\text{при } 0 < x < k_1 \quad F(x) = f(+0) + \frac{x}{k_1} \cdot \Big[ f(k_1 - 0) - f(+0) \Big],$$

$$\text{при } k_1 < x < k_2 \quad F(x) = f(k_1 + 0) + \frac{x - k_1}{k_2 - k_1} \cdot \Big[ f(k_2 - 0) - f(k_1 + 0) \Big],$$

$$\text{при } k_2 < x < 2\pi \quad F(x) = f(k_2 + 0) + \frac{x - k_2}{2\pi - k_2} \Big[ f(2\pi - 0) - f(k_2 + 0) \Big].$$

Тогда разность $f(x) - F(x)$ представит функцию $f_1(x)$, непрерывную на всей плоскости, которая разложится в ряд Фурье с коэффициентами порядка не ниже $\frac{1}{n^2}$. Такую операцию усиления сходимости можно продолжить. Именно, для функции $f_1(x)$, непрерывной на всей плоскости, коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют условиям: $a_n = -\frac{1}{n} b'_n$, $b_n = \frac{1}{n} a'_n$ (смотри выше), т.-е. производная функция $f'_1(x)$ определится рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos kx + b'_k \sin kx) = \sum_{k=1}^{\infty} (-k a_k \sin kx + k b_k \cos kx)$$

$$\left( \text{при этом коэффициент } a'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_1(x) dx = \frac{1}{2\pi} \Big\{ f_1(2\pi - 0) - f_1(+0) \Big\} = 0 \right),$$

а это показывает, что разложение для $f'_1(x)$ выводится из разложения $f_1(x)$ почленным дифференцированием. Если коэффициенты разложения $f'_1(x)$ будут порядка $\frac{1}{n}$, то определяем, как выше для $f(x)$, места и амплитуды разрывов функции $f'_1(x)$ и строим из отрезков прямых функцию $F_1(x)$ с такими же разрывами; тогда разность $f'_1(x) - F_1(x)$ представит функцию $f_2(x)$, у которой коэффициенты разложения в ряд Фурье будут порядка не ниже $\frac{1}{n^2}$.

Отсюда: $f_1(x) = \int F_1(x) dx + \int f_2(x) dx$, при чем, так как $F_1(x)$ состояла из отрезков прямых $ax + b$, то $F_2 = \int F_1(x) dx$ будет состоять из отрезков парабол $\frac{1}{2} ax^2 + bx + c$, различных для различных интервалов значений $x$ между двумя точками разрыва функции $f'_1(x)$; постоянные $c$, входящие в уравнения парабол, определяются из условия, что $f_1(x)$ остается непрерывною во всех точках разрыва функции $f'_1(x)$. Что касается $\int f_2(x) dx$, то он

представится рядом Фурье, выводимым из ряда для $f_2(x)$ почленным интегрированием (что возможно, ибо коэффициенты ряда, изображающего $f_2(x)$, порядка не ниже $\frac{1}{n^2}$, следовательно этот ряд равномерно сходящийся) и потому коэффициенты этого ряда будут порядка не ниже $\frac{1}{n^3}$; положим, $\int f_2(x)dx = f_3(x)$. Теперь мы имеем: $f(x) - F(x) = f_1(x)$, $f_1(x) - F_2(x) = f_3(x)$, следовательно, $f(x) = F(x) + F_2(x) + f_3(x)$, где функция $F(x)$ состоит из отрезков прямых, $F_2(x)$ — из отрезков парабол, а $f_3(x)$ изображается рядом Фурье с коэффициентами порядка не ниже $\frac{1}{n^3}$. Для функции $f_3(x)$ можно двукратным почленным дифференцированием ряда составить $f''_3(x)$ с коэффициентами порядка $\frac{1}{n}$, выделить из $f''_3(x)$ функцию, состоящую из отрезков прямых и имеющую общие разрывы с $f''_3(x)$, после чего $f_3(x)$ представится суммою функции $F_3(x)$, состоящей из отрезков парабол 3-го порядка, и $f_4(x)$, которая изображается рядом с коэффициентом порядка $\frac{1}{n^4}$, и т. д. Этим приемом можно преобразовать любой данный ряд Фурье, представив его суммою целых функций $p$-й степени и ряда Фурье с коэффициентами порядка $\frac{1}{n^{p+1}}$, и следовательно найти сумму ряда, если она представляет собою целую функцию от $x$.

### § 4. Примеры.

*Пример 1.* Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \frac{x}{2}$, заданную в интервале $0 < x < 2\pi$. Графически сумма ряда представится (см. черт. 4) разрывной линией, состоящей из отрезков прямых, при чем в точках разрыва сумма ряда равна средней ординате. Вычисляем коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2},\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\cos kx\,dx = 0,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\sin kx\,dx = -\frac{1}{k}$$

(интегрируем по частям). Полученный ряд: $\frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ имеет суммою $\frac{x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$ или $\frac{\pi}{2}$ при $x = 0$ и $2\pi$. При $x = \frac{\pi}{2}$ получается известный ряд Лейбница: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$, а при $x = \frac{\pi}{4}$: $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \ldots = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$, что легко проверить, представив сумму интегралом $\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right]_0^1$; так как разлагаемая функция $f(x)$ имеет разрывы, то коэффициенты ряда Фурье получились порядка $\frac{1}{n}$, согласно § 3.

*Пример 2.* Разложить в ряд Фурье функцию: $f(x) = x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \pi - x$ при $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

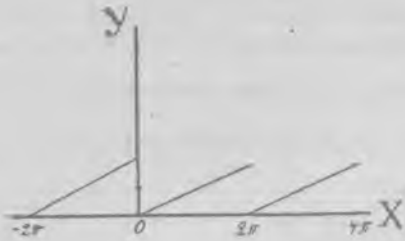
Графически сумма ряда представится ломаной линией (черт. 5), следовательно $f(x)$ непрерывна на всей плоскости, а $f'(x)$ имеет разрывы при $x=(2l+1)\frac{\pi}{2}$, поэтому, согласно § 3, коэффициенты разложения будут порядка $\frac{1}{n^2}$.

Здесь $a=0$, $b=\pi$, $\frac{2k\pi x}{b-a}=2kx$; по формулам замечания к § 1 имеем:

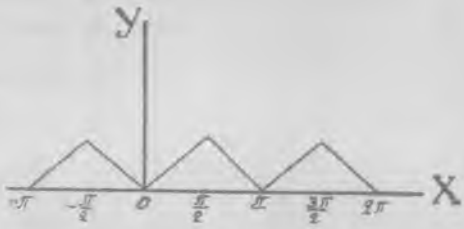
$$a_0=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\,dx\right\}=\frac{\pi}{4},$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos 2kx\cdot dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\cos 2kx\,dx\right\}=0$$

при $k$ четном или $-\frac{2}{\pi k^2}$ при $k$ нечетном $(=2l+1)$; $b_k=0$.




Черт. 4.




Черт. 5.

Искомый ряд $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\cos(4l+2)x}{(2l+1)^2}$ имеет суммою $x$ при $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ или $\pi-x$ при $\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$. При $x=0$, отсюда,

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

Называя

$$S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots,\ \text{имеем}\ \frac{1}{4}S=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots=S-\frac{\pi^2}{8},$$

откуда $S=\frac{\pi^2}{6}$.

*Пример 3.* Разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=x^2$ при $-\pi<x<+\pi$. Вообще, если функция, заданная в интервале $-l<x<+l$, будет четною, т.-е. если $f(-x)=f(x)$, то в разложении отсутствуют члены с $\sin\frac{k\pi x}{l}$,

т.-е. $b_k=0$, а если $f(x)$ будет нечетною, т.-е. если $f(-x)=-f(x)$, то в разложении отсутствуют члены с $\cos\frac{k\pi x}{l}$, т.-е. $a_0=0$ и $a_k=0$. Здесь $f(x)$ — четная функция. Находим:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx \text{ (см. II, гл. II, § 1, зам.)}=\frac{\pi^2}{3},$$

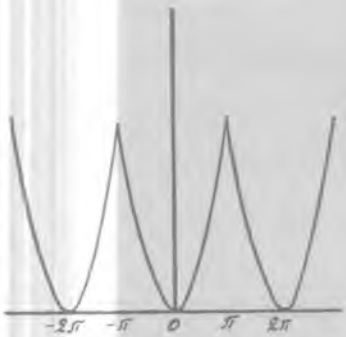
$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x^2\cos kx\cdot dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos kx\cdot dx=(-1)^k\cdot\frac{4}{k^2},\ b_k=0.$$

$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cos kx}{k^2}$ при $-\pi\leqq x\leqq+\pi$. При $x=\pi$ находим:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6};\ \text{при } x=0:\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12};$$

$$\text{при } x=\frac{\pi}{4}:\ 1-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\ldots=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}.$$

Разлагаемая функция непрерывна на всей плоскости (черт. 6), но производная $f'(x)$ имеет разрывы при $x=(2k+1)\pi$, поэтому коэффициенты ряда — порядка $\frac{1}{n^2}$.



Черт. 6.

*Пример 4.* Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx \text{ при } -\pi<x<+\pi.$$

Чтобы перейти к интервалу $(0,2\pi)$, положим $y=x+\pi$; тогда при $0<y<2\pi$ получим ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot\sin k(y-\pi)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin ky}{k},$$

сумму которого $F(y)$ определим. Здесь $a_n=0$, $b_n=-\frac{1}{n}=\frac{1}{n\pi}\Big[f(+0)-f(2\pi-0)\Big]$ (см. § 3), так что $f(2\pi-0)-f(+0)=\pi$; построим функцию $F_1(y)=\frac{y}{2}$, которая имеет ту же амплитуду разрыва: $F_1(2\pi-0)-F_1(+0)=\pi$, и разложим ее в ряд Фурье. Для нее находим:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{y}{2}dy=\frac{\pi}{2},\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{y}{2}\cos ky\,dy=0,\ b_k=-\frac{1}{k},$$

так что

$$F_1(y)=\frac{y}{2}=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin ky}{y} \text{ и } F(y)=-\sum\frac{\sin ky}{k}=\frac{y-\pi}{2}=\frac{x}{2}.$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = \frac{x}{2} \text{ при } -\pi < x < +\pi.$$

*Пример 5.* Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \cos kx$ при $-\pi < x < +\pi$.

Полагая $y = x + \pi$, приходим к ряду: $F(y) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ky}{k^2}$ при $0 < y < 2\pi$.

Составляем почленным дифференцированием новый ряд $F'(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ky}{k} = \frac{\pi - y}{2}$ (по прим. 4); отсюда $F(y) = C + \frac{1}{2}\pi y - \frac{1}{4} y^2$; постоянное $C$ определяется из условия, что $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(y)\,dy = 0$, именно $C = -\frac{\pi^2}{6}$; теперь находим $f(x) = F(\pi + x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$.

ОТДЕЛ IV.

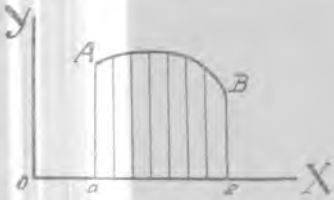
# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

## Глава I.

## Однократные интегралы.

### § 1. Площадь сегмента в прямоугольных координатах.

Рассмотрим площадь (черт. 7) $aABb$ ограниченную кривою $AB$, коей уравнение $y=f(x)$, двумя ординатами $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс $y=0$, при чем предположим, что функция $f(x)$ непрерывная и положительная в интервале $(a, b)$.



Черт. 7.

Разделим отрезок $ab$ на $n$ частей точками с абсциссами $x_0(=a), x_1, x_2, \ldots x_i, x_{i+1}, \ldots x_{n-1}, x_n(=b)$ при $x_{i+1}-x_i=\Delta x_i$ и через точки деления проведем ординаты; искомая площадь $Q$ разделится на $n$ параллельных полос; площадь $q_i$ полосы, построенной на основании $\Delta x_i$, будет удовлетворять неравенствам: $m_i\Delta x_i < q_i < M_i\Delta x_i$, где $m_i$ и $M_i$ означают соответственно наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)$ в интервале $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$; по непрерывности функции $f(x)$, можно положить $q_i=f(\xi_i)\Delta x_i$, где $x_i<\xi_i<x_{i+1}$.

Искомая площадь $Q=\sum\limits_{i=0}^{n=1} q_i = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \sum\limits_{i=0}^{n=1} q_i = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \sum\limits_{i=1}^{n=1} f(\xi_i)\Delta x_i$; в отд. II, гл. I, § 1 показано, что последний предел не зависит от выбора промежуточных значений $x$ между $a$ и $b$ и представляет определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Итак, искомая площадь $Q=\int\limits_a^b f(x)dx$.

*Замечание 1.* Если функция $f(x)$ меняет знак в интервале $(a, b)$ при $x=c_1, c_2$ (см. черт. 8), то $Q_1=\int\limits_a^{c_1} f(x)dx$, $Q_2=-\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$ (ибо все слагаемые суммы отрицательные), $Q_3=\int\limits_{c_2}^{b} f(x)dx$, и потому $\int\limits_a^b f(x)dx=Q_1-Q_2+Q_3$,

т.-е. интеграл равен алгебраической сумме площадей сегментов, при чем сегменты, лежащие под осью абсцисс, считаются отрицательными.

*Замечание 2.* При задании кривой $AB$ параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, площадь $Q=\int\limits_{t_0}^{t_1}\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$, где $t_0$ и $t_1$ — значения $t$ в точках $A$ и $B$.

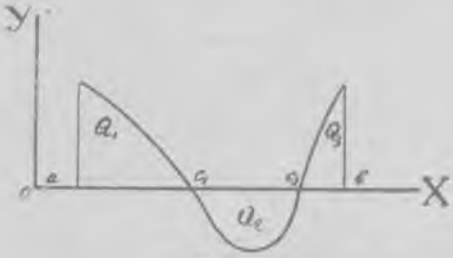
*Пример 1.* Площадь эллипса $x=a\sin t$, $y=b\cos t$.

$$Q=4\cdot\int\limits_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}b\cos t\cdot a\cos t\,dt=4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\ (\text{II, гл. II, § 2, пр. 1})=\pi ab.$$

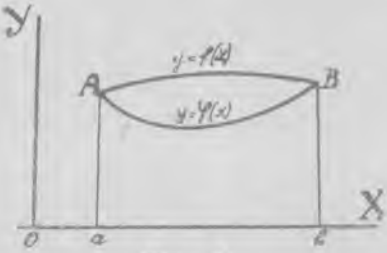
*Пример 2.* Площадь циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

$$Q=2\cdot\int\limits_{t=0}^{\pi}a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt=8a^2\int\limits_0^{\pi}\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=16a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\cdot du=16a^2\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi a^2.$$




Черт. 8.




Черт. 9.

*Пример 3.* Площадь эволюты эллипса: $x=a_1\sin^3 t$, $y=b_1\cos^3 t$.

$$Q=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}b_1\cos^3 t\cdot 3a_1\sin^2 t\cos t\,dt=12a_1b_1\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t-\cos^6 t)dt=$$

$$=12a_1b_1\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{\pi}{2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{8}\,\pi a_1b_1.$$

*Замечание 3.* Площадь $ACBD$ (черт. 9), ограниченная двумя кривыми $y=f(x)$ $(ACB)$ и $y=\varphi(x)$ $(ADB)$, определится как разность: площадь $aACBb$ — площадь $aADBb=\int\limits_a^b[f(x)-\varphi(x)]dx$, где $a$ и $b$ суть корни уравнения $f(x)-\varphi(x)=0$.

В частности, если площадь $Q$ ограничена замкнутою кривою, из уравнения которой $f(x,\ y)=0$ ордината $y$ имеет два значения: $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ $[\varphi_1(x)<\varphi_2(x)]$, то $Q=\int\limits_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx$, где $a$ и $b$ суть корни уравнения $\varphi_2(x)-\varphi_1(x)=0$.

*Пример 4.* Площадь, ограниченная кривыми $x^2+y^2=2a^2$, $x^2=ay$ (чертеж, 10), равна

$$Q=2\int_0^a\left(\sqrt{2a^2-x^2}-\frac{x^2}{a}\right)dx=a^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\right).$$

*Пример 5.* Площадь, ограниченная эллипсом:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad (AC-B^2>0, \quad C>0).$$

Здесь $y=\frac{1}{C}\left\{-(Bx+E)\pm\sqrt{(AC-B^2)(x-x_1)(x_2-x)}\right\}$, при чем $x_1$, $x_2$ $(x_1<x_2)$ суть корни уравнения

$$(AC-B^2)x^2-2(BE-CD)x+CF-E^2=0;$$

отсюда

$$Q=\int_{x_1}^{x_2}(y_2-y_1)dx=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\cdot\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}\cdot dx.$$

Подстановкою

$$x-\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_2-x_1}{2}\sin t$$

находим:

$$Q=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\cdot\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{C}\cdot\sqrt{AC-B^2}\cdot\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2;$$

но

$$\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2=\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)^2-x_1x_2=\frac{(BE-CD^2)-(CF-E^2)(AC-B^2)}{(AC-B^2)^2}=$$

$$=\frac{-C\cdot\Delta}{(AC-B^2)^2},$$

где $\Delta$ — дискриминант, имеющий для вещественного эллипса значение $<0$. Итак,

$$Q=\frac{\pi(-\Delta)}{(AC-B^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*Замечание 4.* Если координатный угол прямолинейной системы $\Theta$ не прямой, то площадь между кривою $y=f(x)$, ординатами $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс будет $Q=\sin\Theta\cdot\int_a^b f(x)dx$, ибо элементарные прямоугольники $f(\xi_i)\Delta x_i$ заменятся параллелограммами с площадью $f(\xi_i)\Delta x_i\cdot\sin\Theta$.

*Пример 6.* Площадь эллипса примера 5 в косоугольных координатах:

$$Q=\frac{\pi(-\Delta)\sin\Theta}{(AC-B^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pi(-L)}{I^{\frac{3}{2}}},$$ где $L=\frac{\Delta}{\sin^2\Theta}$, $I=\frac{AC-B^2}{\sin^2\Theta}$ суть инварианты данного эллипса.

## § 2. Площадь сектора в полярных координатах.

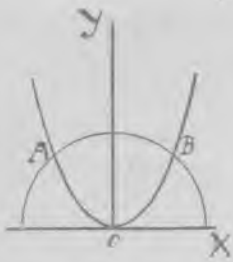
Чтобы вычислить площадь сектора, ограниченного кривою $r=f(\theta)$ и двумя прямыми $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$, (черт. 11), разобьем ее на $n$ секторов прямыми $\theta=\theta_0(\alpha)$, $\theta_1$, $\theta_2, \ldots$ $\theta_i$, $\theta_{i+1}, \ldots$ $\theta_{n-1}$, $\theta_n(\beta)$ при $\theta_{i+1}-\theta_i=\Delta\theta_i$.

Площадь $q_i$ сектора с центральным углом $\Delta\theta_i$ содержится между площадями двух круговых секторов с тем же центральным углом и с радиусами $r_i$ и $R_i$ [наименьшее и наибольшее значения функции $f(\theta)$ в интервале $(\theta_i, \theta_{i+1})$] итак, $\frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta_i<q_i<\frac{1}{2}R_i^2\Delta\theta_i$. Если $f(\theta)$ — непрерывная функция, то $q_i=\frac{1}{2}\Delta\theta_i\cdot f^2(\xi_i)$, где $\xi_i$ — среднее значение $\theta$ между $\theta_i$ и $\theta_{i+1}$.

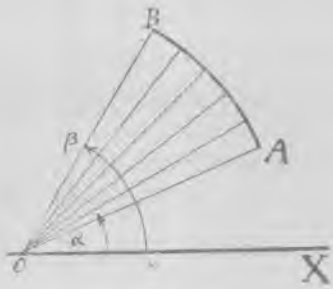
Отсюда искомая площадь

$$Q=\sum_{i=0}^{n-1} q_i=\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\sum_{i=0}^{n-1} q_i=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)d\theta$$

(см. II, гл. I, § 1).




Черт. 10.




Черт. 11.

*Пример 1.* Площадь лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\theta$:

$$\frac{1}{4}Q=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta=\frac{1}{4}a^2, \quad Q=a^2.$$

*Пример 2.* Площадь кардиоиды $r=a(1+\cos\theta)$:

$$\frac{1}{2}Q=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta=\frac{3}{4}\pi a^2, \quad Q=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

*Пример 3.* Площадь петли кривой $x^3=axy-ay^2$.

Вводя $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, находим $r=\frac{a\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos^3\theta}$.

Пределы для площади петли определяются условиями $\sin\theta=0$, $\sin\theta-\cos\theta=0$, что дает $\theta=0$ и $\theta=\frac{\pi}{4}$:

$$Q=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\theta(\cos\theta-\sin\theta)^2}{\cos^6\theta}d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^1 t^2(1-t)^2dt=\frac{1}{60}a^2 \quad \text{(черт. 12)}$$

(при $\operatorname{tg}\theta=t$).

*Пример 4.* Для Декартова листа $x^3+y^3=3axy$ (черт. 13) найти площадь петли и площадь между кривою и асимптотою $x+y+a=0$.

Площадь петли $Q=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}=\frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^2dt}{(t^3+1)^2}$

(при $\operatorname{tg}\theta=t$) $=\frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{t^3+1}\right]_0^{\infty}=\frac{3}{2}a^2$. Вторая площадь $Q_1$ равна 2 площадям $OAC$ + площадь $AOB$, при чем площадь $AOB=$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\left\{\frac{a^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\frac{9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\right\}d\theta=\frac{a^2}{2}\int\limits_{-1}^{0}\left\{\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{9t^2}{(1+t^3)^2}\right\}dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+t}+\frac{3}{1+t^3}\right]_{-1}^{0}=\frac{a^2}{2}\left[\frac{2+t-t^2}{1+t^3}\right]_{-1}^{0}=\frac{a^2}{2}\left[\frac{2-t}{1-t+t^2}\right]_{-1}^{0}=\frac{a^2}{2},$$

откуда $Q_1=\frac{3}{2}a^2$.

*Замечание.* Из формул $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ следует, что $\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $d\theta=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, $r^2d\theta=xdy-ydx$.

Поэтому, если дуга $AB$ кривой задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ между пределами $t=t_0$ и $t=t_1$, то площадь сектоар $OAB$ равна $\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}(xdy-ydx)$.

*Пример 5.* Площадь между кривою $\sqrt[k]{\frac{x}{a}}+\sqrt[k]{\frac{y}{b}}=1$ и положительными осями координат ($k$ целое положительное).

Полагая $x=a\cos^{2k}t$, $y=b\sin^{2k}t$, получаем:

$$Q=abk\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k-1}t\cos^{2k-1}t\,dt=\frac{kab}{2^{2k-1}}\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\ldots(2k-2)}{3\cdot5\cdot7\ldots(2k-1)}.$$

## § 3. Длина дуги кривой и центр тяжести дуги.

Пусть плоская кривая $AB$ задана уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, при чем $t=t_0$ в точке $A$ и $t=T$ в точке $B$.

Длиною дуги $AB$ называется предел периметра вписанной ломаной линии $M_0M_1\ldots M_iM_{i+1}\ldots M_{n-1}M_n$, вершинам которой отвечают значения $t_0, t_1,\ldots t_i, t_{i+1},\ldots t_{n-1}, t_n=T$, при условии, что $n$ растет беспредельно, а все разности $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$ стремятся к нулю (черт. 14).

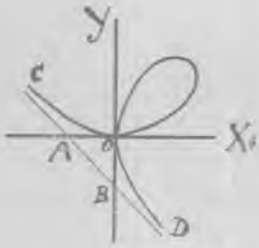
Чтобы найти этот предел, замечаем, что длина хорды

$$M_iM_{i+1}=\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2},$$

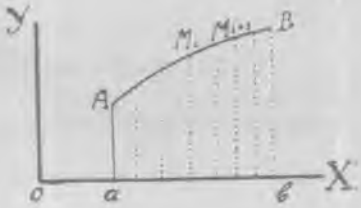
при чем, по формуле Лагранжа, $x_{i+1}-x_i=\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)=\Delta t_i\{\varphi'(t_i)+\alpha_i\}$ и $y_{i+1}-y_i=\Delta t_i\{\psi'(t_i)+\beta_i\}$, где $\alpha_i$ и $\beta_i$ суть бесконечно-малые вместе с $\Delta t_i$ при непрерывности функций $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$; таким образом можно при-

нять: длина $M_iM_{i+1}=\Delta t_i\left\{\sqrt{\varphi'(t_i)^2+\psi'(t_i)^2}+\varepsilon_i\right\}$, где $\varepsilon_i$ бесконечно-малая вместе с $\Delta t_i$, и тогда длина $\smile AB=\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left\{\sqrt{\varphi'(t_i)^2+\psi'(t_i)^2}+\varepsilon_i\right\}\Delta t_i=$ $=\int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}dt$ (см. II, гл. I, §5). Принимая во внимание, что $\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\cdot dt=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+x'^2}dy$, получим следующие выражения для длины дуги $AB$: $\int\limits_{x_0}^{X}\sqrt{1+f'(x)^2}dx$, если кривая задана уравнением $y=f(x)$, или $\int\limits_{y_0}^{Y}\sqrt{1+f'(y)^2}dy$, если кривая задана уравнением $x=f(y)$.


Черт. 12.




Черт. 13.




Черт. 14.

В полярных координатах, при $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, имеем:

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2},$$

и длина дуги

$$s=\int\limits_{\theta_0}^{\Theta}\sqrt{r^2+r'^2}\cdot d\theta.$$

*Замечание 1.* Если при неподвижной точке $A$ точка $B$ перемещается, то длина дуги $AB$ делается функцией $s(t)$ от значения $t$, отвечающего концу дуги $B$; как найдено выше, $s=\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}dt$, следовательно,

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2},\quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

*Пример 1.* Длина обвода циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Здесь $ds=2a\sin\frac{t}{2}dt$, $s=2a\int\limits_{0}^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=8a$.

*Пример 2.* Длина обвода эволюты эллипса:

$$x = a_1 \cos^3 t, \quad y = b_1 \sin^3 t \left( a_1 = \frac{a^2 - b^2}{a}, \; b_1 = \frac{a^2 - b^2}{b} \right).$$

По симметричности фигуры, вычислив

$$ds = 3 \sin t \cos t \sqrt{a_1^2 \cos^2 t + b_1^2 \sin^2 t} \; dt,$$

находим:

$$s = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \sqrt{a_1^2 \cos^2 t + b_1^2 \sin^2 t} \, dt = 4 \cdot \frac{b_1^3 - a_1^3}{b_1^2 - a_1^2} = 4 \frac{a^3 - b^3}{ab}$$

(подстановкой $u^2 = b_1^2 \sin^2 t + a_1^2 \cos^2 t$).

*Пример 3.* Длина обвода кардиоиды $r = a(1 + \cos\theta)$.

Здесь $ds = 2a \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta, \quad s = 2 \cdot \int_0^{\pi} 2a \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta = 8a.$

Чтобы найти центр тяжести однородной материальной дуги $AB$, при плотности (т.-е. при массе единицы длины дуги) $= \gamma$, определим сперва центр тяжести вписанной ломаной линии, рассматривая ее как систему материальных точек — середин каждой хорды $M_i M_{i+1}$ с координатами $\left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \; \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \right)$ и с массою $\gamma \cdot \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \gamma \Delta x_i \{ \sqrt{1 + y_i'^2} + \alpha_i \}$; статический момент относительно $OY$ такой материальной точки равен

$$\left( x_i + \frac{1}{2} \Delta x_i \right) \cdot \gamma \cdot \Delta x_i \{ \sqrt{1 + y_i'^2} + \alpha_i \} = \gamma \Delta x_i \{ x_i \sqrt{1 + y_i'^2} + \varepsilon_i \},$$

а потому абсцисса центра тяжести системы определится формулой:

$$x_c = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \gamma \Delta x_i \{ x_i \sqrt{1 + y_i'^2} + \varepsilon_i \}}{\sum_{i=0}^{n-1} \gamma \Delta x_i \{ \sqrt{1 + y_i'^2} + \alpha_i \}}.$$

Переходя к пределу при $n = \infty$ и при $\Delta x_i = 0$, находим координаты центра тяжести дуги $AB$ (при $\gamma$ постоянном):

$$x_c = \frac{\int x ds}{\int ds}, \qquad y_c = \frac{\int y ds}{\int ds}.$$

*Пример 4.* Центр тяжести обвода циклоиды:

$$x_c = \pi a \text{ (по симметрии)}, \quad y_c = \frac{1}{8a} \cdot 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} \, dt = \frac{4}{3} a.$$

*Пример 5.* Центр тяжести обвода кардиоиды:

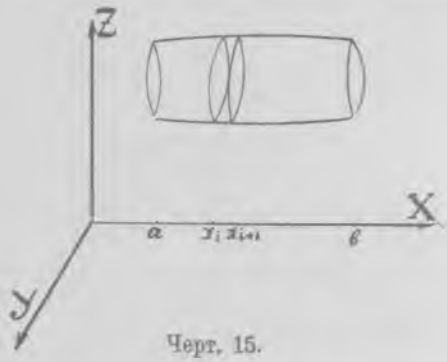
$$y_c = 0 \text{ (по симметрии)}, \qquad x_c = \frac{1}{8a} \cdot 2 \int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\cos\theta \cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{4a}{5}.$$

*Замечание 2.* Для линии в пространстве, заданной уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$, между точками $t=t_0$ и $t=T$, длина дуги равна

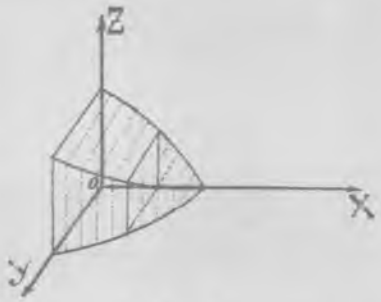
$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \omega'(t)^2} \cdot dt$, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, и центр тяжести дуги имеет координаты: $x_c = \dfrac{\int x ds}{\int ds}$, $y_c = \dfrac{\int y ds}{\int ds}$, $z_c = \dfrac{\int z ds}{\int ds}$.

## § 4. Вычисление объемов по площадям параллельных сечений. Объемы вращения. Теорема Гюльдена.

Составим выражение объема, ограниченного некоторою поверхностью и плоскостями $X=a$, $X=b$, предполагая, что площадь сечения этого объема




Черт. 15.




Черт. 16.

плоскостью $X=x$ равна $U(x)$, где $U(x)$ — непрерывная функция при $a \leqq x \leqq b$ (черт. 15).

Разобьем искомый объем $V$ на параллельные слои плоскостями: $X=x_0(a)$, $x_1, x_2, \ldots x_i, x_{i+1}, \ldots x_{n-1}, x_n(b)$ при $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Объем $V_i$ слоя выделенного плоскостями $X=x_i$, $X=x_{i+1}$, содержится между объемами двух прямых цилиндров с высотою $\Delta x_i$ и с площадями оснований $u_i$ и $U_i$, где $u_i$ и $U_i$ означают наименьшее и наибольшее значения функции $U(x)$ при $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$.

Итак, $u_i \cdot \Delta x_i < V_i < U_i \cdot \Delta x_i$, откуда, по непрерывности функции $U(x)$, имеем $V_i = U(\xi_i)\Delta x_i$, где $x_i < \xi_i < x_{i+1}$, и $V = \sum_{i=0}^{n-1} V_i = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \sum_{i=0}^{n-1} V_i = \int_a^b U(x)\,dx$.

*Пример 1.* Объем, ограниченный цилиндрами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (черт. 16).}$$

Так как буквы $x, y, z$ входят только в четных степенях, то координатные плоскости делят объем на восемь равных частей. Сечение $^1/_8$ объема плоскостью $X = x$ образует прямоугольник с основанием $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ и с высотою $z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, следовательно:

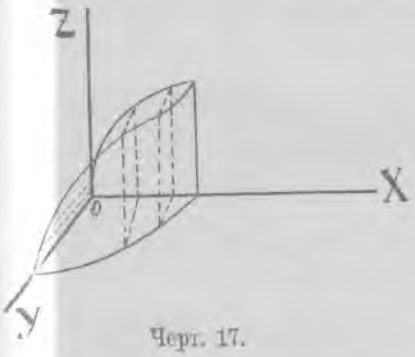
$$U(x) = \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2), \quad V = 8\frac{bc}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{16}{3}abc.$$

*Пример 2.* Объем, ограниченный цилиндрами $z^2 = 2px$, $y^2 = 2q(a - x)$ (черт. 17).

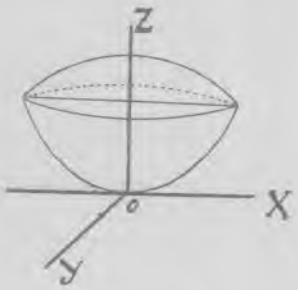
Так как $y$ и $z$ входят в четных степенях, то объем состоит из 4 равных частей; для $\frac{1}{4}$ объема

$$U(x) = y \cdot z = 2\sqrt{pq} \cdot \sqrt{x(a-x)}; \quad V = 8\sqrt{pq}\int_0^a \sqrt{x(a-x)}\,dx =$$

$$(\text{при } x = a\sin^2 t)\ 16\sqrt{pq} \cdot a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\pi\sqrt{pq} \cdot a^2.$$




Черт. 17.




Черт. 18.

*Пример 3.* Объем, ограниченный поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, $x^2 + y^2 = 2az$ (черт. 18).

Плоскость пересечения данных поверхностей $z = a$ делит объем на два $V_1 = \int_0^a U_1(z)dz$, $V_2 = \int_a^{a\sqrt{3}} U_2(z)dz$, где $U_1(z)$ есть площадь круга $x^2 + y^2 = 2az$ т.-е. $U_1(z) = 2\pi az$, и $U_2(z)$ — площадь круга $x^2 + y^2 = 3a^2 - z^2$, то-есть $U_2(z) = \pi(3a^2 - z^2)$. Окончательно $V = \pi a^3\left(2\sqrt{3} - \frac{5}{3}\right)$.

*Пример 4.* Объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

$V = \int_{-c}^{+c} U(z)dz$, где $U(z)$ площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$, т.-е., по § 1 пример 1, $U(z) = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$; $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

*Пример 5.* Объем, ограниченный поверхностью $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

$V=\int\limits_{-c}^{+c} U(z)dz$, где $U(z)$ площадь кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1-\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$ или кривой $\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ при $a_1=a\left[1-\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}$, $b_1=b\left[1-\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}$, т.-е., по §1, примеру 3, $U(z)=\frac{3}{8}\pi ab\left[1-\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3$. Окончательно $V=\frac{4}{35}\pi abc$.

*Замечание 1.* Если кривая $y=f(x)$, лежащая в плоскости $XOY$, вращается около оси $OX$, образуя поверхность $y^2+z^2=[f(x)]^2$, то площадь сечения объема плоскостью $X=x$, как площадь круга, равна $U(x)=\pi[f(x)]^2$ и объем вращения $V_x=\pi\int\limits_a^b[f(x)]^2dx$. Если кривая $x=\varphi(y)$ вращается около оси $OY$, то объем вращения $V_y=\pi\int\limits_c^d[\varphi(y)]^2dy$.

*Пример 6.* Объем вращения циклоиды около $OX$

$$V_x=2\pi\int\limits_0^{\pi} a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)dt=32\pi a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 u\,du=5\pi^2a^3.$$

*Пример 7.* Объем вращения круга $x^2+(y-h)^2=R^2$ около оси $OX$. Обозначая через $y_2$ больший и через $y_1$ меньший корень уравнения, находим $V=\pi\int\limits_{-R}^{+R}(y_2^2-y_1^2)dx=8\pi h\int\limits_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\pi R^2\cdot 2\pi h$, т.-е. объем вращения равен произведению площади круга на длину окружности, описанной его центром.

*Замечание 2.* Последний результат есть частный случай 1-й *теоремы Гюльдена:* объем, полученный от вращения плоской фигуры около прямой, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее площади, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описанной ее центром тяжести. В частности, при вращении около осей координат, получаем: $V_x=Q\cdot 2\pi y_c$, $V_y=Q\cdot 2\pi x_c$, где $Q$ — площадь фигуры и $(x_c, y_c)$ — ее центр тяжести.

Вывод (черт. 19). Пусть из уравнения кривой $f(x, y)=0$, ограничивающей площадь, $y$ имеет два значения: $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$ $(y_1<y_2)$, при чем уравнение $\varphi_2(x)-\varphi_1(x)=0$ дает корни $x=a$, $x=b$. Тогда $V_x=\pi\int\limits_a^b[\varphi_2^2(x)-\varphi_1^2(x)]dx$. $Q=\int\limits_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx$. Чтобы найти ординату $y_c$ центра тяжести площади, предполагая ее однородною с плотностью $\mu$, разобьем площадь $Q$ на параллельные полосы прямыми $X=x_0(a)$, $x_1$, $x_2, \ldots x_i$.

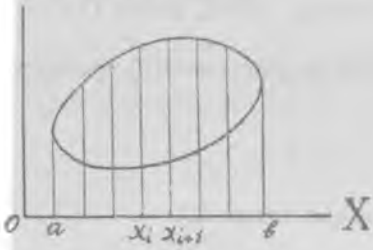
$x_{i+1}, \ldots x_{n-1}, x_n(b)$; для полосы, выделенной прямыми $X = x_i$, $X = x_{i+1}$, масса $m_i = \mu \cdot \Delta x_i [\varphi_2(x_i) - \varphi_1(x_i) + \alpha_i]$ и ордината центра тяжести

$$y_c^{(i)} = \frac{\varphi_2(x_i) + \varphi_1(x_i)}{2} + \beta_i,$$

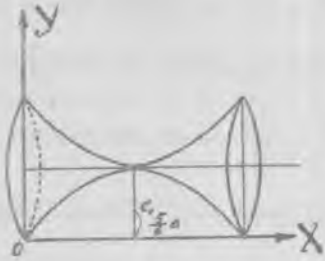
где $\alpha_i$ и $\beta_i$ — бесконечно-малые вместе с $\Delta x_i$; статический момент этой полосы равен $m_i y_c^{(i)} = \frac{1}{2}\gamma \Delta x_i [\varphi_2^2(x_i) - \varphi_1^2(x_i) + \varepsilon_i]$, и отсюда

$$y_c = \frac{\text{пред.} \sum m_i y_c^{(i)}}{\text{пред.} \sum m_i} = \frac{\frac{1}{2}\gamma \int\limits_a^b [\varphi_2^2(x) - \varphi_1^2(x)]dx}{\gamma \int\limits_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx} = \frac{V_x}{2\pi Q},$$

что и требуется доказать.




Черт. 19.




Черт. 20.

*Пример 8.* Найти центр тяжести площади кругового сектора $AOB$ при радиусе $R$ и центральном угле $\alpha$.

Принимая центр $O$ за начало и радиус $OA$ за ось $x$, имеем:

$$V_x = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot R(1 - \cos\alpha) = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad Q = \frac{1}{2} R^2 \alpha,$$

следовательно $y_c = \frac{V_x}{2\pi Q} = \frac{4}{3} R \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}$. Центр тяжести, лежащий на среднем радиусе, отстоит от центра $O$ на расстояние $OC = \frac{y_c}{\sin\frac{\alpha}{2}} = R\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$;

с уменьшением $\alpha$ до 0 пред. $OC = \frac{2}{3}R$.

*Пример 9.* Для площади циклоиды найдено (пример 6) $V_x = 5\pi^2 a^3$, $Q = 3\pi a^2$ (§1), следовательно $y_c = \frac{5}{6}a$, $x_c = \pi a$ (по симметрии фигуры). Отсюда находим (черт. 20) объем, полученный от вращения циклоиды около касательной в вершине: $\pi(2a)^2 \cdot 2\pi a - 3\pi a^2 \cdot 2\pi\left(2a - \frac{5}{6}a\right) = \pi^2 a^3$. Объем вращения циклоиды около оси $OY$: $V_y = \pi a^2 \cdot 2\pi \cdot \pi a = 6\pi^3 a^3$.

*Замечание 3.* Результат примера 8 и теорема Гюльдена дают возможность вывести выражения объемов вращения около осей координат площади сектора, ограниченного кривою $r=f(\theta)$ и прямыми $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$:

$$V_x=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3\sin\theta d\theta,\quad V_y=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3\cos\theta d\theta.$$

Вывод. Разделим данный сектор на $n$ секторов прямыми $\theta=\theta_0(\alpha)$, $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_i, \theta_{i+1}\ldots\theta_{n-1}, \theta_n(\beta)$; для сектора с центральным углом $\Delta\theta_i=\theta_{i+1}-\theta_i$ площадь равна $\frac{1}{2}(r_i^2+\varepsilon_i)\Delta\theta_i$, ордината центра тяжести (см. пример 8) $\frac{2}{3}(r_i\sin\theta_i+\eta_i)$; следовательно, объем вращения его около $OX$ равен $V_x^{(i)}=\frac{2}{3}\pi\left[r_i^3\sin\theta_i+\xi_i\right]\Delta\theta_i$, где $\varepsilon_i, \eta_i, \xi_i$ — бесконечно-малые вместе с $\Delta\theta_i$. Отсюда искомый объем $V_x=\text{пред.}\sum V_x^{(i)}=\frac{2}{3}\int_\alpha^\beta r^3\sin\theta d\theta$.

*Пример 10.* Объем вращения кардиоиды $r=a(1+\cos\theta)$ около оси $OX$: $V_x=\frac{2}{3}\pi\int_0^\pi a^3(1+\cos\theta)^3\sin\theta d\theta=\frac{8}{3}\pi a^3$.

*Пример 11.* Объем вращения лемнискаты $r^2=a^2\cos\theta$ около оси $OY$:

$$V_y=2\cdot\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^3(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta d\theta=$$

$$(\text{при } \sqrt{2}\sin\theta=\sin t)=\frac{4}{3}\pi a^3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2a^3.$$

## § 5. Поверхность тела вращения. Теорема Гюльдена.

Поверхность тела, образованного вращением около оси $OX$ кривой $y=f(x)$, определяется как предел поверхности, образованной вращением вписанной ломаной линии, у которой абсциссы вершин суть $x_0(a)$, $x_1, \ldots x_i$, $x_{i+1}$, $\ldots x_{n-1}$, $x_n(b)$. Поверхность $S_x^{(i)}$, образованная вращением хорды $M\,M_{i+1}$, есть боковая поверхность усеченного конуса с радиусами оснований $y_i$ и $y_{i+1}=y_i+\Delta y_i$ и с образующей $\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\Delta x_i\left\{\sqrt{1+y_i'^2}+\varepsilon_i\right\}$, так что $S_x^{(i)}=2\pi\left(y_i+\frac{1}{2}\Delta y_i\right)\left(\sqrt{1+y_i'^2}+\varepsilon_i\right)\Delta x_i=2\pi\left\{y_i\sqrt{1+y_i'^2}+\alpha_i\right\}\Delta x_i$, откуда $S_x=\text{пред.}\sum_{i=0}^{n-1}S_x^{(i)}=2\pi\int_{[x=a}^b y ds$. Аналогично, $S_y=2\pi\cdot\int x ds$.

*Пример 1.* Поверхность вращения циклоиды около $OX$.

$$S_x=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t).\ 2a\sin\frac{t}{2}dt=32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 u\,du=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

*Пример 2.* Поверхность вращения кардиоиды около $OX$.

$$S_x = 2\pi\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

*Пример 3.* Поверхность вращения окружности $x^2+(y-h)^2=R^2$ около $OX$.

Пусть $y_1$ и $y_2$ два значения $y=h\pm\sqrt{R^2-x^2}$; $ds_1=ds_2=\frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}$;

$S_x=2\pi\int_{-R}^{+R}(y_1+y_2)ds=4\pi Rh\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=2\pi R\cdot 2\pi h$, т.-е. длине вращающейся дуги, умноженной на длину окружности, описанной ее центром.

*Замечание.* Результат примера 3 есть частный случай *теоремы Гюльдена:* поверхность, полученная от вращения плоской кривой около оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей кривой, равна произведению длины дуги кривой на длину окружности, описанной центром тяжести дуги. В частности, при вращении около осей координат, $S_x=s\cdot 2\pi y_c$, $S_y=s\cdot 2\pi x_c$, где $s$ — длина дуги кривой и $(x_c, y_c)$ — центр тяжести дуги.

Вывод. В §3 доказано, что $x_c=\frac{\int xds}{s}=\frac{2\pi\int xds}{2\pi s}$, но $2\pi\int xds=S_y$, следовательно $x_c=\frac{S_y}{2\pi s}$.

*Пример 4.* Поверхность вращения циклоиды около $OX$ равна (см. §3, пример 4) $8a\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{3}a=\frac{64}{3}\pi a^2$ (см. пример 1).

Поверхность вращения циклоиды около касательной в вершине $(\pi a, 2a)$ равна $8a\cdot 2\pi\left(2a-\frac{4}{3}a\right)=\frac{32}{3}\pi a^2$. Поверхность вращения циклоиды около оси $OY$: $S_y=8a\cdot 2\pi\cdot\pi a=16\pi^2a^2$.

---

Глава II.

## Двукратные интегралы.

### § 1. Выражение объема двукратным интегралом.

Рассмотрим объем, ограниченный поверхностью $Z=f(X, Y)$, цилиндром $F(X, Y)=0$ и плоскостью $Z=0$, предполагая 1) что из уравнения $F(X, Y)=0$ выводятся два значения: $Y=\varphi_1(X)$, $Y=\varphi_2(X)$ $(\varphi_1<\varphi_2)$ и два значения: $X=\psi_1(Y)$, $X=\psi_2(Y)$ $(\psi_1<\psi_2)$, при чем корни уравнения $\varphi_1(X)-\varphi_2(X)=0$ суть $X=a$, $X=b$ $(a<b)$, а корни уравнения $\psi_1(Y)-\psi_2(Y)=0$ суть $Y=c$, $Y=d$ $(c<d)$; 2) что линия пересечения поверхности $Z=f(X, Y)$ с плоскостью $Z=0$, т.-е. линия $f(X, Y)=0$ не лежит ни одной точкой внутри основания цилиндра $F(X, Y)=0$, и что для всех точек этого основания $f(X, Y)>0$.

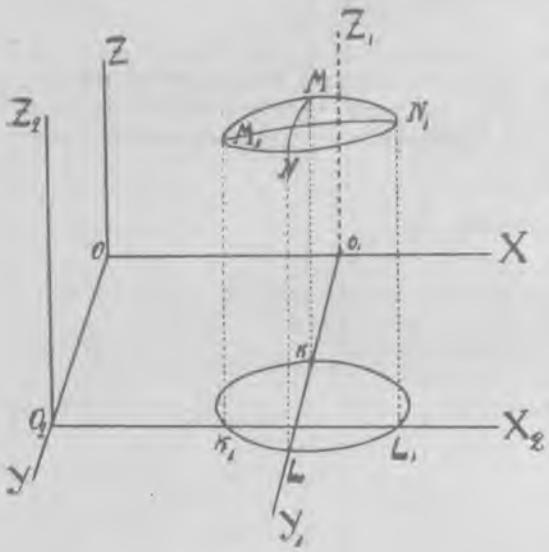
По §4 гл. I искомый объем $V=\int_a^b U(x)dx$, где $U(x)$ есть площадь (черт. 21) $KMNL$ сечения объема плоскостью $Y_1O_1Z_1$: $X=x=OO_1$; так как

уравнение линии $MN$ в плоскости сечения есть $Z_1 = f(x, Y_1)$ и $O_1K = \varphi_1(x)$, $O_1L = \varphi_2(x)$, то $U(x) = \int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$ (переменная интегрирования вместо $Y_1$ обозначена через $y$), при чем при интегрировании $x$ считается постоянным.

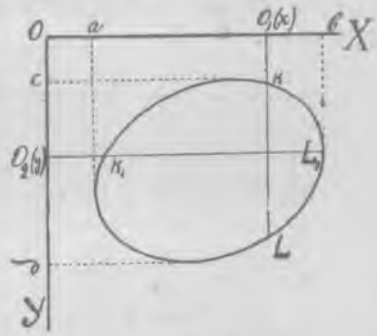
Итак $V = \int\limits_{x=a}^{b} \left[ \int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right] dx$. Пересекая объем $V$ плоскостью $X_2O_2Z_2$: $Y = y$, получим другое выражение $V$:

$$V = \int\limits_{y=c}^{d} \left[ \int\limits_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy,$$

при чем, при интегрировании по $x$, $y$ считается постоянным.




Черт. 21.




Черт. 22.

Оба выражения $V$, отличающиеся порядком интегрирования, можно соединить в одно: $V = \int\int f(x, y)dxdy$, при чем интегрирование распространяется на площадь, ограниченную линией $F(x, y) = 0$ (черт. 22).

*Замечание 1.* Вообще из пределов внутреннего интеграла один по крайней мере зависит от другой переменной; только в том случае, когда область интегрирования есть площадь прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат (см. черт. 23), пределы внутреннего интеграла оба постоянны, и в этом случае изменение порядка интегрирования не влияет на пределы: $V = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=c}^{d} f(x, y)dy\,dx$.

*Пример 1.* Объем, ограниченный поверхностями $z^2 = xy$, $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = 0$ (черт. 24):

$$V = \int\limits_{x=a}^{b} \left[ \int\limits_{y=c}^{d} \sqrt{xy}\, dy \right] dx = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{x} \cdot \left[ \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_{c}^{d} dx = \frac{4}{9} \left( b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right) \left( d^{\frac{3}{2}} - c^{\frac{3}{2}} \right)$$

(при $0 < a < b$, $0 < c < d$).

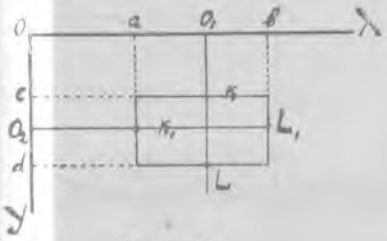
*Пример 2.* Объем, ограниченный поверхностями $cz = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.

Так как $x$ и $y$ входят только в четных степенях, то плоскостями $YOZ$, $XOZ$ объем делится на 4 равных части:

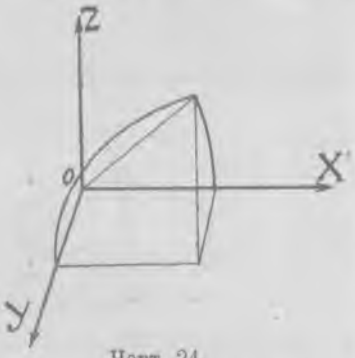
$$V = 4\int_{x=0}^{R}\left[\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{x^2+y^2}{c}\,dy\right]dx = \frac{4}{c}\int_0^R\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}dx =$$

$$\frac{4}{3c}\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\left(2x^2+R^2\right)dx = (\text{при } x = R\sin t) = \frac{4R^4}{3c}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2 t - 2\cos^4 t)\,dt = \frac{\pi R^4}{2c}.$$

*Замечание 2.* [Хотя при непрерывности $f(x, y)$ в области интегрирования] результат вычисления двукратного интеграла не зависит от порядка интегрирования, но в смысле экономии действий иногда следует выбрать определенный порядок. Так, если $f(x, y)$ зависит от одной переменной $y$ или если $\int f(x, y)\,dx$ проще, чем $\int f(x, y)\,dy$, следует первое интегрирование выполнить по $x$.




Черт. 23.




Черт. 24.

*Пример 3.* Объем, ограниченный цилиндрами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Так как все переменные $x$, $y$, $z$ входят только в четных степенях, то объем делится на 8 равных частей координатными плоскостями:

$$V = 8\int_{x=0}^{a}\left[\int_{y=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dy\right]dx = 8\,\frac{bc}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,dx = \frac{16}{3}\,abc.$$

При другом порядке интегрирования:

$$V = 8\int_{y=0}^{b}\left[\int_{x=0}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\right]dy = \frac{4ac}{b^2}\int_0^b\left[y\sqrt{b^2-y^2}+b^2\arcsin\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right]dy.$$

*Пример 4.* Объем, ограниченный поверхностями $cz = x\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=R^2$ и заключенный внутри угла положительных координат.

$$V = \int_{y=0}^{R}\left[\int_{x=0}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{1}{c}\,x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\right]dy = \frac{1}{3c}\int_0^R\left[(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{\sqrt{R^2-y^2}}dy =$$

$$= \frac{1}{3c}\int_0^R(R^3-y^3)\,dy = \frac{R^4}{4c}.$$

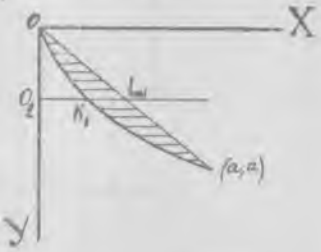
При другом порядке:

$$V=\int_{x=0}^{R}\left[\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{c}x\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2c}\int_{0}^{R}x\left[y\sqrt{x^2+y^2}+x^2\log(y+\sqrt{x^2+y^2})\right]_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2c}\int_{0}^{R}\left[Rx\sqrt{R^2-x^2}+x^3\log\left(\frac{R+\sqrt{R^2-x^2}}{x}\right)\right]dx.$$

*Замечание 3.* Если поверхность $Z=f(X, Y)$ пересекается с плоскостью $XOY$ по линии $f(X, Y)=0$, то эта последняя может дополнять или ограничивать область интегрирования, определенную уравнением $F(X, Y)=0$.



Черт. 25.

*Пример 5.* Объем, ограниченный поверхностями: $cz=x\sqrt{y^2-x^2}$, $y^2=ax$ и заключенный внутри угла положительных осей координат.

Здесь область интегрирования определяется пересечением параболы $y^2=ax$ с прямою $y=x$ (черт. 25), ибо уравнение $f(x, y)=0$ дает систему прямых $x=0$, $y=x$, $y=-x$:

$$V=\int_{y=0}^{a}\left[\int_{x=\frac{y^2}{a}}^{y}\frac{x}{c}\sqrt{y^2-x^2}\,dx\right]dy=\int_{0}^{a}\left[-\frac{1}{3c}(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=\frac{y^2}{a}}^{y}dy=$$

$$=\frac{1}{3c}\int_{0}^{a}y^3(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{dy}{a^3}=(\text{при } y=a\sin t)\,\frac{a^4}{3c}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos^4 t\,dt=\frac{2}{105}\cdot\frac{a^4}{c}.$$

При другом порядке:

$$V=\int_{x=0}^{a}\left[\int_{y=x}^{y=\sqrt{ax}}\frac{x}{c}\sqrt{y^2-x^2}\,dy\right]dx,$$

и вычисления сложнее.

*Замечание 4.* Иногда область интегрирования приходится разбивать на несколько частей или потому, что различным частям интервала $a\leqq x\leqq b$ отвечают неодинаковые пределы $y$: $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, или потому, что данному $x$ отвечает более двух значений $y$.

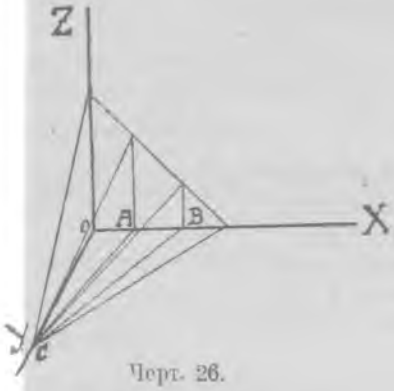
*Пример 6.* Объем, ограниченный плоскостями $x+y+z=a$, $3x+y=a$, $\frac{3}{2}x+y=a$, $y=0$, $z=0$ (черт. 26).

Область интегрирования есть $\triangle\, ACB$ со сторонами $AC$ $(3x+y=a)$, $BC\left(\frac{3}{2}x+y=a\right)$, $AB\,(y=0)$ (черт. 26а). Если внутреннее интегрирование делается по $y$ при постоянном $x$, то область разбивается на две: $\triangle\, CAD$,

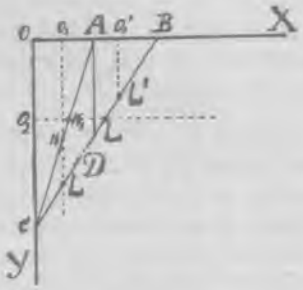
где при $0 \leqq x \leqq \frac{a}{3}$ имеем: $a - 3x \leqq y \leqq a - \frac{3}{2}x$, и $\triangle\, BAD$, где при $\frac{a}{3} \leqq x \leqq \frac{2a}{3}$ имеем: $0 \leqq y \leqq a - \frac{3}{2}x$;

отсюда

$$V = \int\limits_{x=0}^{\frac{a}{3}} \left[ \int\limits_{y=a-3x}^{a-\frac{3}{2}x} (a - x - y)\, dy \right] dx + \int\limits_{x=\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \left[ \int\limits_{y=0}^{a-\frac{3}{2}x} (a - x - y)\, dy \right] dx.$$




Черт. 26.

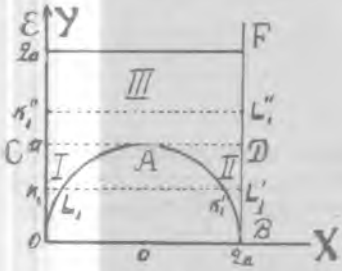



Черт. 26а.

При другом порядке:

$$V = \int\limits_{y=0}^{a} \left[ \int\limits_{x=\frac{a-y}{3}}^{\frac{2}{3}(a-y)} (a - y - x)\, dx \right] dy = \frac{1}{6} \int\limits_{0}^{a} (a - y)^2\, dy = \frac{1}{18} a^3.$$

*Пример 7.* Переменить порядок интегрирования в интеграле




Черт. 27.

$$V = \int\limits_{x=0}^{2a} \left[ \int\limits_{y=\sqrt{2ax-x^2}}^{2a} f(x, y)\, dy \right] dx, \text{ где } f(x, y) > 0$$

в пределах интегрирования. Область интегрирования (черт. 27) ограничена окружностью $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ и прямыми $x = 0$, $x = 2a$, $y = 2a$.

При изменении порядка приходится разбить ее на 3 области: 1) $OAC$, где при $0 \leqq y \leqq a$ имеем $0 \leqq x \leqq a - \sqrt{a^2 - y^2}$; 2) $BAD$, где при $0 \leqq y \leqq a$, $a + \sqrt{a^2 - y^2} \leqq x \leqq 2a$; 3) $CEFD$, где, при $a \leqq y \leqq 2a$, $0 \leqq x \leqq 2a$. Итак

$$V = \int\limits_{y=0}^{a} \left[ \int\limits_{x=0}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx \right] dy + \int\limits_{y=0}^{a} \left[ \int\limits_{x=a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx \right] dy + \int\limits_{y=a}^{2a} \left[ \int\limits_{x=0}^{2a} f(x, y) dx \right] dy.$$

*Замечание 5.* Если требуется найти объем, ограниченной двумя поверхностями $z=f_1(x, y)$, $z=f_2(x, y)$ (или поверхностью $f(x, y, z)=0$, из уравнения которой $z$ имеет два значения) и цилиндром $F(x, y)=0$ (или цилиндром $f_1(x, y)-f_2(x, y)=0$, проектирующим линию пересечения данных поверхностей на плоскость $XOY$), то $V=\int\int\left\{f_2(x, y)-f_1(x, y)\right\}dx\,dy$.

*Пример 8.* Объем, ограниченный поверхностями $x^2+y^2=az$, $x^2+y^2=b(c-z)$. Поверхности пересекаются по кривой, лежащей в плоскости $z=\frac{bc}{a+b}$ и проектирующейся на $XOY$ по кругу $x^2+y^2=R^2$, где $R^2=\frac{abc}{a+b}$.

$$V=4\int\limits_{x=0}^{R}\left\{\int\limits_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left[c-\frac{c}{R^2}(x^2+y^2)\right]dy\right\}dx=$$

$$=\frac{8c}{3R^2}\int\limits_0^R(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{abc^2}{a+b}.$$

*Пример 9.* Объем, вырезанный из цилиндра $(x\cos\alpha-z\sin\alpha)^2+y^2=R^2$ цилиндром $x^2+y^2=R^2$, т.-е. общий объем двух равных круговых цилиндров, оси которых наклонены под углом $\alpha$. Пересечение поверхности первого цилиндра с плоскостью $z=0$ дает эллипс $\left(\frac{x}{R\sec\alpha}\right)^2+\frac{y^2}{R^2}=1$, объемлющий круг $x^2+y^2=R^2$, поэтому интегрирование распространится по площади последнего.

$$V=\int\int(z_2-z_1)\,dxdy=\frac{2}{\sin\alpha}\int\limits_{y=-R}^{+R}\left[\int\limits_{x=-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2+y^2}}\sqrt{R^2-y^2}dx\right]dy=$$

$$=\frac{8}{\sin\alpha}\int\limits_0^R(R^2-y^2)\,dy=\frac{16}{3}R^3\operatorname{cosec}\alpha.$$

*Замечание 6.* Если подынтегральная функция имеет в области интегрирования разрыв непрерывности, то результат двойного интегрирования может зависеть от порядка интегрирования.

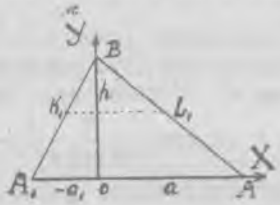
*Пример 10* (Коши). $V=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx\,dy$. Замечая, что $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$, получаем при внутреннем интегрировании по $y$: $V=\int\limits_0^1\left[\frac{-y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^1dx=-\frac{\pi}{4}$, а при внутреннем интегрировании по $x$: $V=\int\limits_0^1\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^1dy=+\frac{\pi}{4}$.

Причина несовпадения двух значений $V$ в том, что $f(x, y)$ разрывная функция при $x=0$, $y=0$. Для получения правильного результата нужно рассматривать $V = \text{пред.} \int\limits_{x=\varepsilon}^{1} \int\limits_{y=\eta}^{1} f(x, y)\, dy\, dx$ при $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$; тогда $V = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left[\underset{\substack{\varepsilon=0\\ \eta=0}}{\text{пред.}}\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right]$, и зависит от закона убывания $\varepsilon$ и $\eta$.

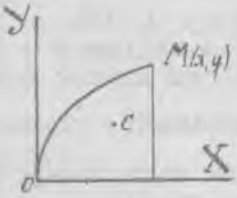
*Замечание 7.* Двойные интегралы встречаются в механике и служат для вычисления моментов инерции (относительно осей координат) $I_x = \int\int \mu y^2 dx\, dy$, $I_y = \int\int \mu x^2 dx\, dy$ и координат центра инерции:

$$x_c = \frac{\int\int \mu x dx\, dy}{\int\int \mu dx\, dy},\ y_c = \frac{\int\int \mu y dx dy}{\int\int \mu dx\, dy}$$

плоских фигур, при чем $\mu$ означает плотность вещества пластинки и при однородности ее может быть взято за знак интеграла.




Черт. 28.




Черт. 29.

*Пример 11.* Момент инерции площади треугольника с массою $M$ и с высотою $h$ относительно его основания; $\mu$ постоянно.

Уравнение сторон $AB$ и $A_1B$ (черт. 28) будут $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$, $\frac{x}{-a_1} + \frac{y}{h} = 1$; отсюда

$$I_x = \mu \int\limits_{y=0}^{h} y^2 \left[\int\limits_{x=-\frac{a_1}{h}(h-y)}^{\frac{a}{h}(h-y)} dx\right] dy = \mu \int\limits_{0}^{h} \frac{a_1 + a}{h} y^2 (h-y) dy = \frac{1}{12} \cdot \frac{\mu(a_1 + a)}{h} \cdot h^4$$

$= \frac{1}{6} Mh^2$, где $M = \frac{1}{2}(a_1 + a)\, h$ есть масса пластинки.

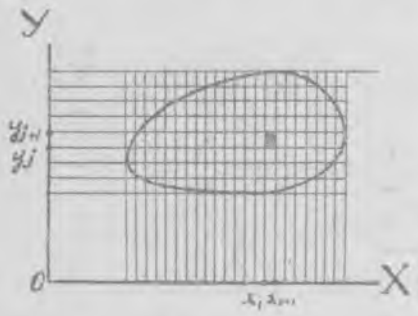
*Пример 12.* Центр инерции площади параболического сегмента, ограниченного параболой $Y^2 = 2pX$ и прямыми $Y = 0$, $X = x$ (черт. 29).

Здесь $\int\int dx\, dy = \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^{\sqrt{2px}} dy\right) dx = \frac{2}{3} xy$, $\int\int x dx\, dy = \int\limits_0^x x \left(\int\limits_0^{\sqrt{2px}} dy\right) dx = \frac{2}{5} x^2 y$,

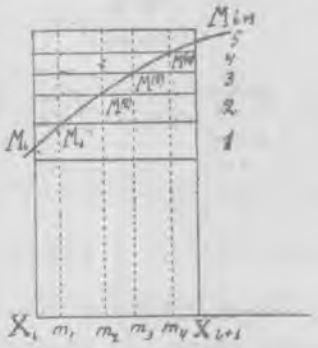
$$\int\int y\, dx\, dy = \int\limits_0^x \left[\int\limits_0^{\sqrt{2px}} y\, dy\right] dx = \frac{1}{4} xy^2;\ x_c = \frac{3}{5} x,\ y_c = \frac{3}{8} y.$$

## § 2. Двойные интегралы как пределы двойных сумм.

Однократный определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ можно рассматривать или как разность значений неопределенного интеграла $F(b)-F(a)$, или как предел суммы: пред. $\Sigma f(\xi_i)\Delta x_i$. Подобным образом и двойной интеграл $\int\int f(x, y)dx\,dy$, распространенный на некоторую область значений $x$, $y$, можно рассматривать или как результат двух последовательных интегрирований в смысле составления разности двух значений неопределенного интеграла (это сделано в § 1) или как предел двойной суммы $\sum\limits_i\sum\limits_j f(x_i, y_j)\Delta x_i\Delta y_j$, зависящей от двух переменных $x$ и $y$, принимающих значения координат любой точки, лежащей в области интегрирования. К этому новому представлению мы придем из геометрических соображений.




Черт. 30.




Черт. 31.

Рассмотрим площадь $Q$, ограниченную кривою $F(x, y)=0$, из уравнения которой $y$ имеет два значения: $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, при чем уравнение $\varphi_2(x)-\varphi_1(x)=0$ имеет корни $x=a$, $x=b$. По гл. I, § 1, замечанию 3 $Q=\int\limits_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx=\int\limits_{x=a}^{b}\left[\int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\right]dx=\int\int dx\,dy$ в смысле § 1, гл. II. Для вычисления той же площади $Q$ можно поступить еще иначе. Построим прямоугольник: $X=a$, $X=b$, $Y=c$, $Y=d$, стороны которого касаются кривой $F(x, y)=0$, и разделим его прямыми: $X=x_0(a)$, $x_1$, $\ldots x_i$, $x_{i+1}$, $\ldots x_{n-1}$, $x_n(b)$, $Y=y_0(c)$, $y_1, \ldots y_j$, $y_{j+1}, \ldots y_{m-1}$, $y_m(d)$, при $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $\Delta y_j=y_{j+1}-y_j$, на прямоугольники с площадью $\Delta x_i\Delta y_j$, (число их $=n\cdot m$); из них одни целиком лежат внутри площади $Q$, другие — целиком лежат вне площади $Q$, третьи (пограничные) — частью лежат внутри $Q$, частью вне $Q$. Если в двойной сумме $\sum\limits_i\sum\limits_j\Delta x_i\Delta y_j$ собрать элементы первой и третьей категории, то можно доказать, что предел этой двойной суммы, при беспредельном возрастании $n$ и $m$ и при уменьшении всех $\Delta x_i$ и $\Delta y_j$ до нуля, равен $Q$ (черт. 30).

Для вывода отметим прежде всего, что, при данной системе значений $y$, уменьшением разностей $\Delta x_i$ можно достигнуть того, что в каждой полосе,

построенной на $\Delta x_i$, будет лишь по одному пограничному элементу в верхней и в нижней части полосы (на черт. 31 полоса, построенная на $\Delta x_i$, содержит 5 пограничных элементов 1, 2, 3, 4, 5, но, разбивая пунктирными ординатами $m_1M^{(1)}$, $m_2M^{(2)}$, $m_3M^{(3)}$, $m_4M^{(4)}$ основание полосы на 5 частей, получаем в каждой новой полосе по одному пограничному элементу). Теперь в двойной сумме $\sum\sum \Delta x_i \Delta y_j$ просуммируем сперва элементы, имеющие общий множитель $\Delta x_i$; $\sum\limits_j \Delta x_i \Delta y_j = \Delta x_i \sum\limits_j \Delta y_j$, при чем $\sum\limits_j \Delta y_j$ есть сумма высот элементов, лежащих внутри полосы с основанием $\Delta x_i$; из черт. 32 видно, что, при двух пограничных элементах внутри полосы, можно принять:

$$\sum \Delta y_j = K_i'L_i' = K_iL_i + K_i'K_i + L_iL_i' = \varphi_2(x_i) - \varphi_1(x_i) + 2\vartheta_i \Delta y,$$

где $0 < \vartheta_i < 1$ и $\Delta y$ есть наибольшее из всех $\Delta y_j$. Итак,

$$\sum\sum \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \{\varphi_2(x_i) - \varphi_1(x_i) + 2\vartheta_i \Delta y\}$$

и пред. $\sum\sum \Delta x_i \Delta y_i = \int\limits_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx = Q$, ибо пред. $\left\{2\Delta y \cdot \sum\limits_{i=0}^{n-1} \vartheta_i \Delta x_i\right\} = 0$ в силу того, что пред. $\Delta y = 0$, пред. $\sum \vartheta_i \Delta x_i <$ пред. $\sum \Delta x_i = b - a$. Итак, доказано, что $Q = \int\int dx\,dy =$ пред. $\sum\sum \Delta x_i \Delta y_j$.

Теперь перейдем к более общему случаю $\int\int f(x, y)dx\,dy$, для чего рассмотрим объем $V$, ограниченный поверхностью $z = f(x, y)$, цилиндром $F(x, y) = 0$ и плоскостью $z = 0$.

По § 1, $V = \int\int f(x, y)dx\,dy$, где интегрирование распространяется по площади $Q$. Но можно вычислить $V$ иначе. Разобьем площадь $Q$ на элементы $\Delta x_i \Delta y_i$, как сделано выше, и обозначим через $V_{i,j}$ объем, ограниченный поверхностью $z = f(x, y)$ и плоскостями $X = x_i$, $X = x_{i+1}$, $Y = y_j$, $Y = y_{j+1}$, $z = 0$ (черт. 33). Покажем, что $V =$ пред. $\sum\sum V_{ij}$, при тех же условиях суммирования, как выше для $Q$. Действительно, так как пограничные объемы $V_{ij}$ присчитываются целиком, то $V < \sum\sum V_{ij}$, при чем $\sum\sum V_{ij} - V < z_0 \left(\sum\sum \Delta x_i \Delta y_j - Q\right)$, где $z_0$ наибольшее значение $z = f(x, y)$ для пограничных элементов, а разность $\sum\sum \Delta x_i \Delta y_j - Q$ есть сумма выступающих за пределы площади $Q$ частей пограничных элементов $\Delta x_i \Delta y_j$. Но выше доказано, что $Q =$ пред. $\sum\sum \Delta x_i \Delta y_j$, следовательно, при конечности числа $z_0$, получаем: $V =$ пред. $\sum\sum V_{i,j}$. Далее, $V_{i,j}$ содержится между объемами двух прямоугольных параллелепипедов с основанием $\Delta x_i \Delta y_j$ и с высотами $z_{i,j}$, $Z_{i,j}$, представляющими наименьшее и наибольшее значения

$z=f(x, y)$ при $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$, $y_j \leqq y \leqq y_{j+1}$: $z_{i,j}\Delta x_i \Delta y_j < V_{i,j} < Z_{i,j}\Delta x_i \Delta y_j$; отсюда, при непрерывности функции $f(x, y)$, можно положить

$$V_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j \{f(x_i, y_j) + \varepsilon_{i,j}\},$$

где $\varepsilon_{i,j}$ обращается в нуль вместе с $\Delta x_i$ и $\Delta y_j$. Теперь имеем:

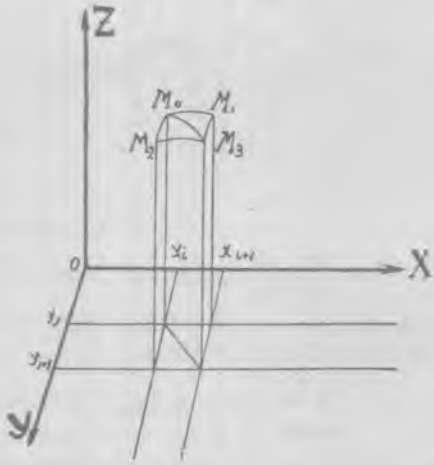
$$V = \text{пред.} \sum\sum f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j + \text{пред.} \sum\sum \varepsilon_{i,j}\Delta x_i \Delta y_j,$$

но если $|\varepsilon_{i,j}| < \varepsilon$, то

$$\left|\sum\sum \varepsilon_{i,j}\Delta x_i \Delta y_j\right| < \varepsilon \cdot \sum\sum \Delta x_i \Delta y_j,$$

откуда пред. $\sum\sum \varepsilon_{i,j}\Delta x_i \Delta y_j = 0$, ибо пред. $\varepsilon = 0$ и пред. $\sum\sum \Delta x_i \Delta y_j = Q$. Окончательно получаем: $V = \int\int f(x, y)\,dx\,dy = \text{пред.} \sum\sum f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$, чем и устанавливается представление двукратного интеграла как предела суммы.


Черт. 32.




Черт. 33.

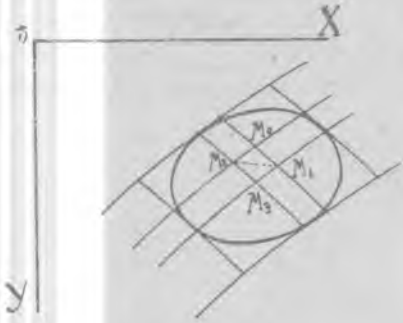
## § 3. Преобразование переменных в двойном интеграле.

Пусть переменные $x, y$ связаны с переменными $u, v$ уравнениями $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, из которых $u = \Phi(x, y)$, $v = \Psi(x, y)$, при чем все 4 функции предполагаются однозначными и непрерывными. Тогда каждой точке $M(x, y)$ плоскости отвечает определенная система чисел $u, v$, и обратно, почему переменные $u, v$ можно назвать координатами точки $M$. В новой системе линии $\Phi(x, y) = u_0$, $\Psi(x, y) = v_0$ называются координатными (в прямолинейной системе это будут прямые $x = x_0$, $y = y_0$). Рассмотрим снова площадь $Q$, ограниченную кривою $F(x, y) = 0$; пусть в новой системе это уравнение будет $F(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = \Omega(u, v) = 0$, при чем $v$ имеет два значения $v = \lambda_1(u)$, $v = \lambda_2(u)$, и корни уравнения $\lambda_2(u) - \lambda_1(u) = 0$ суть $u = u_0$, $u = u_1$. Докажем тогда, что

$$Q = \int\limits_{u=u_0}^{u_1} \left[ \int\limits_{v=\lambda_1(u)}^{\lambda_2(u)} |J| \cdot dv \right] du,$$

при чем функция $J(u, v)$, называемая функциональным определителем или Якобианом данной системы координат, есть $J = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial u}$.

Вывод. Разобьем площадь $Q$ на бесконечно-малые элементы координатными линиями $U =$ постоянному, $V =$ постоянному и рассмотрим элемент, образованный линиями $U = u$, $U = u + \Delta u$, $V = v$, $V = v + \Delta v$. Обозначив буквами $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ вершины его с координатами $(u, v)$, $(u + \Delta u, v)$, $(u, v + \Delta v)$, $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ (черт. 34), получим прямолинейные координаты этих точек в виде: $x_0 = \varphi(u, v)$, $x_1 = \varphi(u + \Delta u, v) = x_0 + \Delta u\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \varepsilon_1\right)$, $x_2 = x_0 + \Delta v\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \varepsilon_2\right)$, $x_3 = x_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \varepsilon_3'\right)\Delta u + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \varepsilon_3''\right)\Delta v$, применяя разложение по формуле Тэйлора (выражения ординат отличаются заменою $\varphi$ на $\psi$). Теперь убеждаемся, что прямолинейная фигура $M_0M_1M_2M_3$ есть параллелограмм, ибо стороны $M_0M_1$ и $M_2M_3$ равны и параллельны: именно, длина $M_0M_1 =$ длине $M_2M_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2}\,\Delta u$, угловой коэффициент $M_0M_1 =$ угловому коэффициенту $M_2M_3 = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}$. Площадь этого параллелограмма $= 2 \cdot$ площадям $\Delta M_0M_1M_2 = |(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v = |J|\Delta u\Delta v$; площадь криволинейного четыреугольника $M_0M_1M_2M_3$ можно представить в виде: $\{|J| + \varepsilon\}\Delta u\Delta v$, где $\varepsilon$ обращается в 0 вместе с $\Delta u, \Delta v$, и тогда




Черт. 34.

$$Q = \text{пред.}\sum_i\sum_j |J(u_i, v_j)|\Delta u_i\Delta v_j + \text{пред.}\sum_i\sum_j \varepsilon_{i,j}\Delta u_i\Delta v_j = \int\int |J(u, v)|\,du\,dv,$$

ибо второй предел равен нулю (если $|\varepsilon_{i,j}| < \varepsilon$, то

$$\sum\sum \varepsilon_{i,j}\Delta u_i\Delta v_j < \varepsilon(u_1 - u_0)(v_1 - v_0),$$

где $u_0, u_1$ — суть крайние значения $u$ в области интегрирования, $v_0, v_1$ — имеют те же значения для $v$).

Другой вывод. Из формул $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ следует, что $dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv$, $dy = \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv$; если в интеграле $\int\int dx\,dy$ произвести первое интегрирование по $y$, при постоянном $x$, то, составляя $dy$, нужно положить $dx = 0$, что дает $dy = \frac{J}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}dv$ или $dy = \left|\frac{J}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right|dv$, если считать $dy > 0$ и $dv > 0$, для чего достаточно иметь нижний предел интеграла меньше верхнего. Итак,

$$\int\int dx\,dy = \int\left[\int\left|\frac{J}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right|_{x,v} dv\right]dx,$$

где значок $x, v$ показывает, что подынтегральная функция выражена через $x$ и $v$. Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле и делая внутреннее интегрирование по $x$, мы должны вычислять $dx$ при $dv=0$, что дает $dx=\frac{\partial\varphi}{\partial u}du=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right|du$, если считать $dx$ и $du$ положительными; теперь $\int\int dx\,dy=\int\left[\int\left|J\right|_{u,v}du\right]dv=\int\int|J|\,du\,dv$, что и требуется доказать.

Тот и другой вывод приложим и к преобразованию более общего интеграла $\int\int f(x, y)dx\,dy$, который обращается в

$$\int\int f[\varphi(u, v),\ \psi(u, v)]\,|J(u, v)|\,du\,dv.$$

Геометрический вывод. На каждой площадке $\{|J|+\varepsilon\}\,du\,dv$ строим объем $V_{i,j}$, ограниченный данною поверхностью $z=f(x, y)$, цилиндрами с образующими $\parallel OZ$ и упомянутой площадкой; полагая $z=\omega(u, v)$, находим $V_{i,j}=[\omega(u, v)+\eta]\ \ [|I(u, v)|+\varepsilon]\times du\,dv$, откуда $V=$ пред. $\sum\sum V_{i,j}=$ $=\int\int\omega(u, v)\cdot|I|\cdot du\,dv$.

Аналитический вывод: $\int\int f(x,y)dx\,dy=\int\left[\int f(x, y)\cdot\frac{|I|}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right|}dv\right]_{x,v}dx=$ $=\int\left[\int f(x, y)\cdot\frac{|I|}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right|}\cdot\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right|du\right]_{u,v}dv=\int\int\omega(u, v)\cdot|I|du\,dv.$

Разберем частные случаи различных систем координат.

*Случай 1.* (Полярные координаты) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $J=r$, $|J|=r$, ибо $r>0$. Объем $V=\int\int z\cdot r\,dr\,d\theta$.

Координатные линии: $r=r_0$ — окружности $x^2+y^2=r_0^2$, $\theta=\theta_0$ — полупрямые $y=x\cdot\operatorname{tg}\theta_0$, пределы изменения $r$ от 0 до $+\infty$, $\theta$ от 0 до $2\pi$.

*Пример 1.* Объем, ограниченный поверхностями $az=x^2+y^2$, $x+z=2a$. Исключением $z$ из этих уравнений находим проекцию линии пересечения их на плоскость $XOY$: $x^2+y^2=2a^2-ax$ или $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}a\right)^2$. Полагая $x=-\frac{a}{2}+r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, находим: $z_2=\frac{5}{2}a-r\cos\theta$, $z_1=\frac{a}{4}-r\cos\theta+\frac{r^2}{a}$; область интегрирования: $r=\frac{3}{2}a$, т.-е. полная площадь круга радиуса $\frac{3}{2}a$ с центром в начале, что дает пределы $r$: 0 и $\frac{3}{2}a$, и пределы $\theta$: 0 и $2\pi$. $V=\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{3/2a}\left(\frac{9}{4}a-\frac{r^2}{a}\right)rdr\,d\theta=\frac{81}{32}\pi a^3$.

*Пример 2.* Момент инерции площади круга $x^2+y^2=R^2$ относительно оси $OX$: $I_x=\mu\int\int y^2dx\,dy=\mu\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{R}r^2\sin^2\theta\cdot rdrd\theta=\frac{1}{4}MR^2$, где $M=\mu\pi R^2$ есть масса пластинки.

*Случай 2.* $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$ при $\rho > 0$, $J = ab\rho$, $|J| = ab\rho$. Координатные линии: $\rho = \rho_0$ — эллипсы $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho_0^2$, $\varphi = \varphi_0$ — полупрямые $y = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi_0 \cdot x$, при чем $\rho$ меняется от 0 до $+\infty$, $\varphi$ от 0 до $2\pi$.

*Пример 3.* Площадь, ограниченная кривою: $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$. В новых координатах: $\rho^4 = \rho^2\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi\right)$, откуда $\rho = 0$ и $\rho = \sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}$ — пределы интегрирования по $\rho$; из условия вещественности $\rho$ следует $\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi \geqq 0$, $\operatorname{tg}^2\varphi \leqq \frac{a^2k^2}{b^2h^2}$, что дает для угла положительных координат пределы интегрирования по $\varphi$: $0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}$. По симметричности площади относительно обеих осей находим:

$$Q = 4ab\int_0^{\varphi_0}\int_0^{\rho}\rho\,d\rho\,d\varphi = 2ab\int_0^{\varphi_0}\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi\right)d\varphi = ab\left\{\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2}\right)\varphi_0 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)\sin\varphi_0\cos\varphi_0\right\} = ab\left\{\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh} + \frac{ab}{hk}\right\}.$$

*Пример 4.* Объем, ограниченный поверхностью $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^k + \frac{z}{c} = 1$ при $z \geqq 0$ $(k > 0)$. В новых координатах $z = c(1 - \rho^{2k})$; область интегрирования (при $z = 0$): $\rho = 1$, т.-е. площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, что дает пределы интегрирования по $\rho$: 0 и 1, по $\varphi$: 0 и $2\pi$.

$$V = abc\int_0^{2\pi}\int_0^1(1 - \rho^{2k})\rho\,d\rho\,d\varphi = \pi \cdot \frac{k}{k+1} \cdot abc.$$

*Случай 3.* $x = a\rho\cos^2\varphi$, $y = b\rho\sin^2\varphi$, $\rho > 0$. Здесь $x \geqq 0$, $y \geqq 0$. Координатные линии: прямые $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \rho$ и полупрямые $\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}^2\varphi$; $\rho$ изменяется от 0 до $+\infty$, $\varphi$ от 0 до $\frac{\pi}{2}$; $|J| = 2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi$.

*Пример 5.* Площадь между кривою $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}$ и положительными осями координат. В новых координатах $\rho^3 = \rho\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi - \frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)$, откуда получаются пределы для $\rho$: $\rho = 0$ и $\rho = \sqrt{\frac{a}{h}\cos^2\varphi - \frac{b}{k}\sin^2\varphi}$; условие вещественности $\rho$ дает $\frac{a}{h}\cos^2\varphi - \frac{b}{k}\sin^2\varphi \geqq 0$, откуда пределы интегрирования по $\varphi$:

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_0 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}}; \quad Q = 2ab \int_0^{\varphi_0} \int_0^{\rho} \rho \sin\varphi \cos\varphi \, d\rho \, d\varphi =$$

$$= ab \int_0^{\varphi_0} \left( \frac{a}{h} \cos^2\varphi - \frac{b}{k} \sin^2\varphi \right) \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{ab}{2\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right)} \int_0^{\frac{a}{h}} t \, dt =$$

$$\left(\text{при } t = \frac{a}{h} \cos^2\varphi - \frac{b}{k} \sin^2\varphi\right) \qquad = \frac{ab}{4\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right)} \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^2.$$

*Пример 6.* Объем, ограниченный поверхностями $cz = xy$, $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{xy}{ab}$ и заключенный внутри угла положительных координат. В новых координатах $z = \frac{ab}{c} \rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi$, область интегрирования: $\rho^4 - \rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi = 0$, откуда $\rho = 0$ и $\rho = \sin\varphi \cos\varphi$; пределы для $\varphi$: 0 и $\frac{\pi}{2}$.

$$V = \frac{2a^2b^2}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin\varphi \cos\varphi} \rho^3 \sin\varphi \cos\varphi \, d\rho \, d\varphi = \frac{a^2b^2}{2c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\varphi \cos^7\varphi \, d\varphi = \frac{a^2b^2}{560\,c}.$$

*Случай 4.* Если область интегрирования ограничена двумя линиями одной системы: $\Phi(x, y) = u_0$, $\Phi(x, y) = u_1$ и двумя линиями другой системы $\Psi(x, y) = v_0$, $\Psi(x, y) = v_1$, то удобно выбрать систему координат $u = \Phi(x, y)$, $v = \Psi(x, y)$; решив эти уравнения относительно $x$ и $y$, найдем $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, составим якобиан $J$, и тогда

$$Q = \int_{u=u_0}^{u_1} \int_{v=v_0}^{v_1} |J| \, du \, dv, \quad V = \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} z \cdot |J| \, du \, dv.$$

*Пример 7.* Площадь, ограниченная четырьмя параболами: $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $x^2 = my$, $x^2 = ny$ при $0 < a < b$, $0 < m < n$. Полагая $y^2 = ux$, $x^2 = vy$, находим $x = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}$, $y = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}}$, $|J| = \frac{1}{3}$. $Q = \frac{1}{3} \int_{u=a}^{b} \int_{v=m}^{n} du dv =$ $= \frac{1}{3}(b - a)(n - m)$.

*Пример 8.* Объем, ограниченный поверхностями: $cz = xy$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y^2 = bx$, $y^2 = 2bx$, $z = 0$.

Полагая $xy = u^2$, $y^2 = vx$, находим:

$$x = u^{\frac{4}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \; y = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \quad |J| = \frac{2u}{3v}; \quad V = \int_{u=a}^{a\sqrt{2}} \int_{v=b}^{2b} \frac{u^2}{c} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{u}{v} \, du \, dv =$$

$$= \frac{2}{3c} \cdot \left[\frac{1}{4} u^4\right]_a^{a\sqrt{2}} \cdot [\log v]_b^{2b} = \frac{a^4}{2c} \log 2.$$

*Случай 5.* Если из системы $\Phi(x, y) = u$, $\Psi(x, y) = v$ определить якобиан $J_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$, то в двойном интеграле элемент $du dv = |J_1| dx dy$,

откуда $dx\,dy = \frac{1}{|J_1|}\,du\,dv$; с другой стороны, $dx\,dy = |J|\,du\,dv$, где $J = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$, следовательно $|J| = \frac{1}{|J_1|}$. Пользуясь этим свойством, можно избежать решения системы $\Phi(x,y) = u$, $\Psi(x, y) = v$ относительно $x$, $y$ — при составлении $J$.

*Пример 9.* Площадь параллелограмма со сторонами $a_1x + b_1y = h_1$, $a_1x + b_1y = h_2$, $a_2x + b_2y = k_1$, $a_2x + b_2y = k_2$ при $h_2 > h_1$, $k_2 > k_1$, $a_1b_2 - a_2b_1$ не $= 0$. Полагая $a_1x + b_1y = u$, $a_2x + b_2y = v$, находим $J_1 = a_1b_2 - a_2b_1 = \triangle$, следовательно

$$J = \frac{1}{\triangle};\ Q = \int_{h_1}^{h_2}\int_{k_1}^{k_2} |J|\,du\,dv = \frac{(h_2 - h_1)\ (k_2 - k_1)}{|\triangle|}.$$

*Пример 10.* Площадь трапеции со сторонами $a_1x + b_1y = h_1$, $a_1x + b_1y = h_2$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$ при $h_2 > h_1 > 0$, $\beta > \alpha > 0$, $a_1 > 0$, $b_1 > 0$. Полагая $a_1x + b_1y = u$, $\frac{y}{x} = v$, находим:

$$J_1 = \frac{a_1x + b_1y}{x^2} = \frac{u}{[u:(a_1+b_1v)]^2} = \frac{(a_1+b_1v)^2}{u},\quad J = \frac{u}{(a_1+b_1v)^2},$$

$$Q = \int_{h_1}^{h_2} u\,du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{(a_1+b_1v)^2} = \frac{1}{2}(h_2^2 - h_1^2)\cdot\frac{\beta - \alpha}{(a_1 + b_1\alpha)(a_1 + b_1\beta)}.$$

## § 4. Вычисление кривых поверхностей.

Чтобы вычислить часть поверхности $z = f(x, y)$, вырезаемую цилиндром $F(x, y) = 0$, разобьем площадь основания цилиндра $Q$ на бесконечно-малые прямоугольники $\Delta x_i \Delta y_j$ и построим на них (см. § 2 и черт. 33) прямоугольные параллелепипеды, которые вырежут на поверхности $z = f(x, y)$ криволинейные 4-угольники $M_0M_1M_3M_2$; диагональною плоскостью разделим каждый из них на два криволинейные треугольника $M_0M_1M_3$ и $M_0M_2M_3$ и построим прямолинейные треугольники с теми же вершинами. Проделав эту операцию для всех элементов $\Delta x_i \Delta y_j$, хотя частью принадлежащих площади $Q$, мы получим вписанную многогранную поверхность, составленную из треугольных граней; предел этой поверхности мы и примем за искомую величину кривой поверхности $S$. Замечаем, что прямолинейные $\triangle M_0M_1M_3$ и $M_0M_2M_3$ проектируются на плоскость $XOY$ в виде прямоугольных треугольников с площадью $\frac{1}{2}\Delta x_i\,\Delta y_j$; поэтому, по теореме аналитической геометрии о зависимости между площадью фигуры и площадью ее проекции, имеем:

$\frac{1}{2}\Delta x_i\,\Delta y_j = \triangle M_0M_1M_3\cdot\cos\varphi_1$, $\frac{1}{2}\Delta x_i\,\Delta y_j = \triangle M_0M_2M_3\cdot\cos\varphi_2$, где $\varphi_1$ и $\varphi_2$ суть углы, составляемые плоскостями треугольников с плоскостью $XOY$, или, что то же, углы, составляемые нормалями к плоскостям треугольников с осью $OZ$. Отсюда $S_{i,j} = \triangle M_0M_1M_3 + \triangle M_0M_2M_3 = \frac{1}{2}\Delta x_i\,\Delta y_j\left\{\sec\varphi_1 + \sec\varphi_2\right\}$. С уменьшением сторон $\Delta x_i$ и $\Delta y_j$ до нуля, хорды $M_0M_1$, $M_0M_2$, $M_0M_3$ обращаются

в касательные к соответствующим кривым, проведенным по поверхности через точку $M_0$, следовательно плоскости обоих треугольников $M_0M_1M_3$, $M_0M_2M_3$ сливаются с касательною плоскостью к поверхности в точке $M_0[x_i, y_j, f(x_i, y_j)]$, а нормали к плоскостям треугольников сливаются с нормалью к поверхности в точке $M_0$, и потому пред. $\sec\varphi_1 =$ пред. $\sec\varphi_2 = \sqrt{1+p^2+q^2}$, где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ определяются из уравнения поверхности $z = f(x, y)$ при $x = x_i$, $y = y_j$. Итак $S_{i,j} = \Delta x_i\, \Delta y_j \left\{ \sqrt{1+p^2+q^2} + \varepsilon_{i,j} \right\}$, где $\varepsilon_{i,j}$ обращается в нуль вместе с $\Delta x_i$, $\Delta y_i$; отсюда искомая поверхность

$$S = \text{пред.} \sum_i \sum_j S_{i,j} = \int\int \sqrt{1+p^2+q^2} \cdot dx\, dy,$$

$$\text{ибо пред.} \sum\sum \varepsilon_{i,j}\, \Delta x_i\, \Delta y_j = 0 \text{ (см. § 2).}$$

*Замечание 1.* Вводя криволинейные координаты $u$ и $v$ уравнениями $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, получаем уравнение поверхности в виде $z = f(x, y) = \omega(u, v)$. Отсюда:

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial\psi}{\partial u} du + \frac{\partial\psi}{\partial v} dv, \quad dz = \frac{d\omega}{\partial u} \partial u + \frac{\partial\omega}{\partial v} dv;$$

внося эти значения в равенство $dz = pdx + qdy$, получим, в виду произвольности $du$ и $dv$, два уравнения:

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial u} + q\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial u}, \; p\frac{\partial\varphi}{\partial v} + q\frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial v},$$

откуда

$$p = \frac{D(\omega, \psi)}{D(\varphi, \psi)}, \quad q = \frac{D(\varphi, \omega)}{D(\varphi, \psi)},$$

если положить вообще

$$D(\lambda, \mu) = \frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial v} - \frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial u},$$

при чем $D(\varphi, \psi) = J$.

По формуле преобразования переменных в двойном интеграле имеем теперь:

$$\int\int \sqrt{1+p^2+q^2}\, dxdy =$$

$$= \int\int \sqrt{1 + \frac{D^2(\omega, \psi)}{D^2(\varphi, \psi)} + \frac{D^2(\varphi, \omega)}{D^2(\varphi, \psi)}} \cdot |D(\varphi, \psi)|\, dudv =$$

$$= \int\int \sqrt{D^2(\varphi, \psi) + D^2(\psi, \omega) + D^2(\omega, \varphi)}\, dudv.$$

*Замечание 2.* Если данная поверхность образована вращением кривой $y = f(x)$ около оси $OX$, то ее уравнение будет $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$, откуда

$$z = \sqrt{[f(x)]^2 - y^2}, \; p = \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}}, \; q = \frac{-y}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}}.$$

Поверхность $S$, по симметрии расположения относительно плоскостей $XOZ$, $XOY$, состоит из 4 равных частей, и для $\frac{1}{4}S$ область интегрирования есть площадь, ограниченная кривою $y=f(x)$, ординатами $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс $y=0$, так что

$$S=4\int\limits_{x=a}^{b} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\left[\int\limits_{y=0}^{f(x)}\frac{dy}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\right]dx,$$

и так как

$$\int\limits_{0}^{f(x)}\frac{dy}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}=\left[\arcsin\frac{y}{f(x)}\right]_0^{f(x)}=\frac{\pi}{2},$$

то получаем

$$S=2\pi\int\limits_{a}^{b} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=2\pi\int y\,ds,$$

как в главе I, § 5.

*Замечание 3.* Отметим формулы для определения моментов инерции относительно осей координат и координат центра инерции кривых поверхностей:

$I_x=\int\int\mu\cdot(y^2+z^2)\cdot\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy$ [в $I_y$ входит $(z^2+x^2)$ и в $I_z(x^2+y^2)$],

$x_c=\dfrac{\int\int\mu x\sqrt{1+p^2+q^2}dx\,dy,}{\int\int\mu\sqrt{1+p^2+q^2}dx\,dy,}$, где $\mu$ есть плотность вещества поверхности (для $y_c$ и $z_c$ под знаком интеграла в числителе $x$ заменяется на $y$ и $z$).

*Пример 1.* Часть поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, вырезаемая цилиндром $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$. Здесь $p=-\frac{x}{z}$, $q=-\frac{y}{z}$, $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{z}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$; так как $x$, $y$, $z$ входят только в четных степенях, то

$$S=8\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=8a\int\limits_{0}^{a}\left[\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dx=8a^2\arcsin\frac{b}{a}.$$

Черт. 35.

*Пример 2.* Часть поверхности конуса $y^2+z^2=x^2$, вырезаемая цилиндром $x^2+y^2=a^2$. Здесь

$$p=\frac{x}{z},\ q=-\frac{y}{z},\ \sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-y^2}};$$

для $\frac{1}{8}S$ область интегрирования состоит из совокупности окружности $x^2+y^2=a^2$ и прямой $y=x$, получаемой от пересечения конуса с плоскостью $XOY$ (черт. 35).

$$S=8\int\limits_{y=0}^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\left[\int\limits_{x=y}^{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{x\sqrt{2}dx}{\sqrt{x^2-y^2}}\right]dy=8\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\left[\sqrt{x^2-y^2}\right]_{x=y}^{\sqrt{a^2-y^2}}dy=$$

$$=8\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\sqrt{a^2-2y^2}dy=\left(\text{при } y=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t\right)=2\pi a^2.$$

*Пример 3.* Часть поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=3a^2$, вырезаемая параболоидом $x^2+y^2=2az$. Линия пересечения проектируется на плоскость $XOY$ по окружности $x^2+y^2=2a^2$, которая и определяет область интегрирования;

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2-r^2}},$$

$$S=a\sqrt{3}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[\int\limits_{0}^{a\sqrt{2}}\frac{rdr}{\sqrt{3a^2-r^2}}\right]d\theta=2\pi a^2(3-\sqrt{3}).$$

*Пример 4.* Часть поверхности параболоида $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z$, вырезаемая цилиндром $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и расположенная над плоскостью $z=0$. Так как $x$ и $y$ входят в четных степенях, то поверхность состоит из 4 равных частей, и область интегрирования внутри угла положительных координат определяется эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямою $y=\sqrt{\frac{b}{a}}x$ пересечения параболоида с плоскостью $z=0$. В системе координат $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$ имеем:

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+\rho^2},\ S=4\int\limits_{\varphi=0}^{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}}\int\limits_{\rho=0}^{1}\sqrt{1+\rho^2}\cdot ab\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}ab(2\sqrt{2}-1)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

*Пример 5.* Центр инерции поверхности конуса $x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\alpha$, отсеченной плоскостью $z=H$ (при $z\geqslant 0$).

По симметрии поверхности относительно оси $OZ$ имеем: $x_c=0$, $y_c=0$; для вычисления $z_c$ составляем:

$$p=\frac{x}{z}\cot^2\alpha,\ q=\frac{y}{z}\cot^2\alpha,\ \sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{1}{\sin\alpha},$$

и в полярных координатах находим:

$$\iint z\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot rdrd\theta=\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{H\operatorname{tg}\alpha}r\operatorname{cotg}\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha}\cdot rdrd\theta=\frac{2}{3}\pi H^3\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha},$$

$$\iint\sqrt{1+p^2+q^2}rdrd\theta=\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{H\operatorname{tg}\alpha}\frac{1}{\sin\alpha}\cdot rdrd\theta=\pi H^3\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha},\ z_c=\frac{2}{3}H.$$

## Глава III.

## Трехкратные интегралы.

### § 1. Представление объема тройным интегралом.

Если объем ограничен двумя поверхностями $z=f_1(x, y)$, $z=f_2(x, y)$ или замкнутою поверхностью $F(z, y, z)=0$, из уравнения которой $z$ имеет два значения: $z=f_1(x, y)$ и $z=f_2(x, y)$, то (см. гл. II, § 1, замечание 5) объем равен $\int\int \{f_2(x, y)-f_1(x, y)\}\,dx\,dy$, где интегрирование распространяется по площади, ограниченной кривою $f_2(x, y)-f_1(x, y)=0$; последний интеграл можно переписать как $\int\int\left[\int\limits_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dz\right] dxdy$, и таким образом объем выразится тройным интегралом $\int\int\int dx\,dy\,dz$, который понимается как результат трех последовательных интегрирований функции 1. В механике употребляются и более общие тройные интегралы $\int\int\int f(x, y, z)dx\,dy\,dz$ для выражения моментов инерции и координат центра инерции материальных тел (см. § 2).

### § 2. Тройные интегралы как пределы тройных сумм.

Объем $V$, ограниченный замкнутою поверхностью $F(x, y, z)=0$, из уравнения которой $z=f_1(x, y)$, $z=f_2(x, y)$, выражается по § 1 тройным интегралом $\int\int\int dx\,dy\,dz$, вычисляемым, как указано в § 1. Но мы можем составить объем $V$ путем суммирования бесконечно-малых элементов. Именно, опишем около данной поверхности прямоугольный параллелепипед, грани которого $X=a$, $X=b$, $Y=c$, $Y=d$, $Z=g$, $Z=h$ касаются поверхности (для получения чисел $x=a$ и $x=b$, нужно исключить $y$ и $z$ из системы $F(x, y, z)=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, $\frac{\partial F}{\partial z}=0$, выражающей условия параллельности касательной плоскости с плоскостью $X=0$). Затем проведем три ряда плоскостей: $X=x_0(a)$, $x_1$, $x_2$, $\ldots x_i$, $x_{i+1}$, $\ldots x_{n-1}$, $x_n(b)$, $Y=y_0(c)$, $y_1$, $y_2$, $\ldots y_j$, $y_{j+1}$, $\ldots y_{m-1}$, $y_m(d)$, $Z=z_0(g)$, $z_1$, $\ldots z_k$, $z_{k+1}$, $\ldots z_p(h)$, при $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $\Delta y_j=y_{j+1}-y_j$, $\Delta z_k=z_{k+1}-z_k$. Эти плоскости разобьют весь параллелепипед на элементы (числом $n\cdot m\cdot p$), коих объемы $=\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$.

Покажем, что, распространяя суммирование на те элементы, которые хотя частью лежат внутри данной поверхности, мы найдем:

$$\text{пред.}\sum_i\sum_j\sum_k \Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k=V,$$

если числа $n$, $m$, $p$ растут беспредельно, а все разности $\Delta x_i$, $\Delta y_i$, $\Delta z_k$ стремятся к нулю. Рассуждая аналогично § 2 главы II, будем суммировать элементы, имеющие общее основание $\Delta x_i\Delta y_i$; при достаточной малости $\Delta x_i$ и $\Delta y_j$ можно считать (как в § 2), что в каждой трубке, построенной на

основании $\Delta x_i \Delta y_j$, будет лишь по одному пограничному элементу в верхней и в нижней части; при таком условии и при постоянных $i$ и $j$ найдем:

$$\sum_k \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \Delta x_i \Delta y_j \sum_k \Delta z_k = \Delta x_i \Delta y_j \left\{ f_2(x_i, y_j) - f_1(x_i, y_j) + 2\vartheta_{i,j} \Delta z \right\},$$

где $0 < \vartheta_{i,j} < 1$ и $\Delta z$ есть наибольшее из всех $\Delta z_k$. Суммируя теперь по $i$ и $j$ на всей области интегрирования в плоскости $XOY$, найдем:

$$\text{пред.} \sum_i \sum_j \sum_k \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \text{пред.} \sum_i \sum_j \left\{ f_2(x_i, y_j) - f_1(x_i, y_j) \right\} \Delta x_i \Delta y_j +$$

$$+ 2 \text{ пред. } \Delta z \cdot \text{пред.} \sum_i \sum_j \vartheta_{i,j} \Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= \int\int \left\{ f_2(x, y) - f_1(x, y) \right\} dx\, dy = V,$$

ибо

$$\text{пред. } \Delta z = 0, \text{ пред.} \sum\sum \vartheta_{i,j} \Delta x_i \Delta y_i < \text{пред.} \sum\sum \Delta x_i \Delta y_j = Q.$$

Итак, сравнивая два выражения $V$, приходим к представлению тройного интеграла как предела тройной суммы:

$$\int\int\int dxdydz = \text{пред.} \sum_i \sum_j \sum_k \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Более общие тройные интегралы $\int\int\int f(x, y, z) dxdydz$ встречаются в механике, например при вычислении массы тела переменной плотности $\mu = f(x, y, z)$, заполняющей рассмотренный сейчас объем $V$. Именно, разбив объем $V$ на элементы $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$, покажем, что масса $M = \text{пред.} \sum\sum\sum M_{i,j,k}$, где $M_{i,j,k}$ есть масса элемента $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$, при чем суммирование распространяется целиком на пограничные элементы; действительно, при таком условии

$$\sum\sum\sum M_{i,j,k} > M,$$

но

$$\sum\sum\sum M_{i,j,k} - M < M_0 \cdot \left\{ \sum\sum\sum \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_k - V \right\},$$

где $M_0$ есть наибольшее значение функции $\mu = f(x, y, z)$ для пограничных элементов, а $\sum\sum\sum \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - V$ представляет сумму выступающих за пределы объема $V$ частей пограничных элементов, и так как выше доказано, что последняя разность имеет пределом 0, а $M_0$ — число конечное, то отсюда $M = \text{пред.} \sum\sum\sum M_{i,j,k}$. Далее, $M_{i,j,k}$ заключается между произведениями $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ на наименьшее и наибольшее значения функции $\mu = f(x, y, z)$ для всех точек элемента $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$, следовательно, при непрерывности функции $f(x, y, z)$, можно положить: $M_{i,j,k} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \left\{ f(x_i, y_j, z_k) + \varepsilon_{i,j,k} \right\}$, где $\varepsilon_{i,j,k}$ обращается в нуль вместе с $\Delta x_i$, $\Delta y_j$, $\Delta z_k$. Теперь

$$M = \text{пред.} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$

ибо

$$\text{пред.} \sum\sum\sum \varepsilon_{i,j,k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = 0$$

(в силу неравенства

$$\left| \sum\sum\sum \varepsilon_{i,j,k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \right| < \varepsilon \cdot \sum\sum\sum \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$

где $\varepsilon \geqq |\varepsilon_{i,j,k}|$, в пределе находим:

$$\text{пред.} \left| \sum\sum\sum \varepsilon_{i,j,k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \right| \leqq \text{пред. } \varepsilon \cdot \text{пред.} \sum\sum\sum \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = 0 \cdot V = 0,$$

при чем знак $<$ отпадает, ибо $|..|$ всегда $\geqq 0$). Полученный предел тройной суммы для значения $M$ и представляет более общий тройной интеграл

$$\int\int\int f(x, y, z) dx\, dy dz,$$

вычисляемый тремя последовательными интегрированиями по переменным $z$, $y$, $x$, как пояснено примерами.

Отметим формулы для моментов инерции и координат центра инерции объемов:

$$I_x = \int\int\int \mu(y^2 + z^2) dx dy dz \quad (\text{в } I_y \text{ входит } z^2 + x^2, \text{ в } I_z\ x^2 + y^2),$$

$$x_c = \frac{\int\int\int \mu \cdot x \cdot dx dy dz}{\int\int\int \mu \cdot dx dy dz}, \text{ где } \mu \text{ есть плотность вещества (и при однородности тела может быть взято за знак интеграла).}$$

*Пример 1.* Центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z^2 = xy$, $z = 0$, $x = a$, $x = b$.

Здесь пределы интегрирования по $z$ найдутся из уравнений поверхностей: $z = 0$ и $z = \sqrt{xy}$; пересечение этих поверхностей дает на плоскости $XOY$ две прямые: $x = 0$, $y = 0$, которые вместе с $x = a$, $y = b$ определяют область интегрирования по $x$, $y$ с постоянными пределами: $0 \leqq y \leqq b$, $0 \leqq x \leqq a$. Вычисляем:

$$\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b} \left[ \int_{z=0}^{\sqrt{xy}} dz \right] dx dy = \int_0^a \sqrt{x} dx \cdot \int_0^b \sqrt{y} dy = \frac{4}{9} (ab)^{\frac{3}{2}},$$

$$\int\int \left[ \int dz \right] x\, dx dy = \int_0^a x \sqrt{x} dx \cdot \int_0^b \sqrt{y}\, dy = \frac{4}{15} a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{3}{2}},$$

$$\int\int \left[ \int dz \right] y\, dx dy = \int_0^a \sqrt{x}\, dx \cdot \int_0^b y \sqrt{y}\, dy = \frac{4}{15} a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{5}{2}},$$

$$\int\int \left[ \int_{z=0}^{\sqrt{xy}} z\, dz \right] dx dy = \frac{1}{2} \int_0^a x\, dx \cdot \int_0^b y\, dy = \frac{1}{8} a^2 b^2.$$

Отсюда, $x_c = \frac{3}{5} a$, $y_c = \frac{3}{5} b$, $z_c = \frac{9}{32} \sqrt{ab}$.

*Пример 2.* Момент инерции относительно $OZ$ объема, ограниченного гиперболическим параболоидом $z=c\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Пределы по $z$ будут: $z=0$, $z=c\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$; область интегрирования по $x$, $y$ определяется прямоугольником $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$. Имеем:

$$V=\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{b}\left[\int\limits_{z=0}^{z}dz\right]dx\,dy=c\int\limits_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx\cdot\int\limits_{0}^{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)dy=\frac{1}{4}abc.$$

$$I_z=\mu\cdot\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{0}^{b}\left[\int\limits_{0}^{z}dz\right](x^2+y^2)dx\,dy=\mu c\int\limits_{0}^{a}x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)dx\cdot\int\limits_{0}^{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)dy+$$

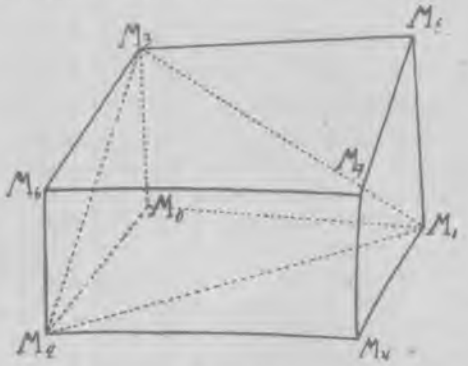
$$+\mu c\cdot\int\limits_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx\cdot\int\limits_{0}^{b}y^2\left(1-\frac{y}{b}\right)dy=\frac{1}{24}\mu abc(a^2+b^2)=\frac{1}{6}M(a^2+b^2),$$

где масса объема $M=\mu\cdot V$.

## § 3. Преобразование переменных в тройном интеграле.

Пусть переменные $x$, $y$, $z$ связаны с переменными $u$, $v$, $w$ уравнениями $x=\varphi(u,v,w)$, $y=\psi(u,v,w)$, $z=\omega(u,v,w)$, при чем, отсюда, $u=\Phi(x,y,z)$, $v=\Psi(x,y,z)$, $w=\Omega(x,y,z)$; все 6 функций будем предполагать однозначными и непрерывными. Тогда каждой точке $M(x,y,z)$ пространства отвечает определенная система значений $u$, $v$, $w$ и обратно; поэтому можно $u$, $v$, $w$ считать координатами точки $M$. В новой системе поверхности $\Phi(x,y,z)=u_0$, $\Psi(x,y,z)=v_0$, $\Omega(x,y,z)=w_0$ называются координатными поверхностями (в прямоугольной системе такую роль играют плоскости $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$). Посмотрим, как в новых координатах выразится тот объем

$$V=\iiint dx\,dy\,dz,$$




Черт. 36.

ограниченный замкнутою поверхностью $F(x,y,z)=0$, о котором говорилось в §§ 1 и 2. Разобьем этот объем на бесконечно-малые элементы координатными поверхностями новой системы и возьмем элемент (черт. 36), ограниченный поверхностями $U=u$, $U=u+\Delta u$, $V=v$, $V=v+\Delta v$, $W=w$, $W=w+\Delta w$. Новые координаты вершин этого элемента будут: $M_0(u,v,w)$, $M_1(u+\Delta u,v,w)$, $M_2(u,v+\Delta v,w)$, $M_3(u,v,w+\Delta w)$, $M_4(u+\Delta u,v+\Delta v,w)$, $M_5(u+\Delta u,v,w+\Delta w)$, $M_6(u,v+\Delta v,w+\Delta w)$, $M_7(u+\Delta u,v+\Delta v,w+\Delta w)$.

Прямоугольные координаты этих вершин определятся (по формуле Тэйлора с удержанием членов 1-го порядка малости) так: $x_0=\varphi(u,v,w)$, $x_1=x_0+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u$, $x_2=x_0+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v$, $x_3=x_0+\frac{\partial\varphi}{\partial w}dw$, $x_4=x_0+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v$,

$x_5 = x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\Delta w$, $\quad x_6 = x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\Delta w$, $\quad x_7 = x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\Delta w$ ($y$ и $z$ получается заменою $\varphi$ на $\psi$ и $\omega$). Покажем, что прямолинейный элемент с теми же вершинами будет параллелепипедом, т.-е. что противоположные грани его суть равные параллелограммы, лежащие в параллельных плоскостях; для граней $M_0M_3M_5M_1$ и $M_2M_6M_7M_4$ достаточно показать, что ребра $M_0M_1$, $M_3M_5$, $M_2M_4$, $M_6M_7$ равны и параллельны, а также $M_0M_3$, $M_1M_5$, $M_2M_6$, $M_4M_7$ равны и параллельны; но это непосредственно следует из равенства их проекций на оси координат:

$$x_1 - x_0 = x_5 - x_3 = x_4 - x_2 = x_7 - x_6 = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u,$$

$$x_3 - x_0 = x_5 - x_1 = x_6 - x_2 = x_7 - x_4 = \frac{\partial\varphi}{\partial w}\Delta w.$$

Если же взятый прямолинейный элемент есть параллелепипед, то объем его равен ушестеренному объему тетраэдра $M_0M_1M_2M_3$, т.-е. (согласно известной формуле аналитической геометрии) равен абсолютному значению определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\omega}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\omega}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w} & \frac{\partial\psi}{\partial w} & \frac{\partial\omega}{\partial w} \end{vmatrix} \cdot \Delta u \Delta v \Delta w.$$

Обозначая через $J$ (якобиан, или функциональный определитель) полученный определитель, находим для объема криволинейного элемента выражение: $\{|J| + \varepsilon\}\,\Delta u \Delta v \Delta w$, где $\varepsilon$ обращается в нуль вместе с $\Delta u$, $\Delta v$, $\Delta w$. Суммируя элементы, хотя частью входящие в объем $V$, найдем:

$$V = \text{пред.}\ \Sigma\Sigma\Sigma\,|J| \cdot \Delta u \Delta v \Delta w, \quad \text{ибо пред.}\ \Sigma\Sigma\Sigma\,\varepsilon \Delta u \Delta v \Delta w = 0$$

(абсолютное значение этой суммы меньше $\varepsilon_0(u_1 - u_0)(v_1 - v_0)(w_1 - w_0)$, где $\varepsilon_0$ есть наибольшее абсолютное значение всех $\varepsilon$, а $u_0$, $u_1$, $v_0$, $v_1$, $w_0$, $w_1$, суть крайние значения переменных, отвечающие касательным координатным поверхностям). Итак, находим формулу преобразования переменных в тройном интеграле $\int\int\int dxdydz = \int\int\int |J|\,dudvdw$. Установление пределов нового интеграла делается так. Пусть из уравнения ограничивающей объем поверхности $F(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \omega(u, v, w)) = 0$ получаются два значения $w$: $w = \lambda_1(u, v)$, $w = \lambda_2(u, v)$ — это будут пределы интегрирования по $w$; область же двойного интегрирования по $u$ и $v$ определяется условием: $\lambda_1(u, v) - \lambda_2(u, v) = 0$, или, что то же, результатом исключения $w$ из системы $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial w} = 0$, ибо при условии $\frac{\partial F}{\partial w} = 0$ два корня $w_1$ и $w_2$ делаются равными.

В дополнение к предыдущему доказательству выведем аналитическим путем более общую формулу преобразования переменных в тройном интеграле:

$$\int\int\int f(x, y, z)dxdydz = \int\int\int f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \omega(u, v, w)] \cdot |J(u, v, w)| \cdot dudvdw.$$

Вывод. В тройном интеграле $M=\int\int\int f(x, y, z)dxdydz$ сделаем внутреннее интегрирование по $z$ при постоянных $x$ и $y$; тогда, вычисляя $dz$ из выражения $z=\omega(u, v, w)$, следует положить $dx=0$ и $dy=0$, что дает систему:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv+\frac{\partial\varphi}{\partial w}dw=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv+\frac{\partial\psi}{\partial w}dw=0,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}du+\frac{\partial\omega}{\partial v}dv+\frac{\partial\omega}{\partial w}dw=dz.$$

Решая ее, с помощью определителей, относительно $dw$, находим:

$$dw=\frac{dz\cdot J_1}{J},\quad \text{где}\quad J_1=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

и, следовательно, $dz=\frac{J}{J_1}dw$; если считать дифференциалы старых и новых координат положительными (для чего следует выбирать нижний предел при каждом интегрировании меньше верхнего), то можно положить $dz=\frac{|J|}{|J_1|}dw$. Итак, имеем:

$$M=\int\int\left[\int\left\{f(x, y, z)\frac{|J|}{|J_1|}\right\}_{x, y, w}dw\right]dx\,dy,$$

где буквы $x$, $y$, $w$, приписанные внизу, показывают, что подъинтегральная функция выражена через $x, y, w$ (это возможно выполнить, ибо из уравнений $x=\varphi(u, v, w)$, $y=\psi$, $z=\omega$ можно $z$, $u$, $v$ выразить через $x$, $y$, $w$). Меняя в последнем интеграле порядок, получим:

$$M=\int\left[\int\int\left\{\ldots\right\}dx\,dy\right]dw,$$

и так как при внутреннем интегрировании по $x$ и $y$ нужно считать $w$ постоянным, то мы приходим к преобразованию переменных в двойном интеграле по формулам $x=\varphi(u, v, w)$, $y=\psi(u, v, w)$, при чем $w$ считается постоянным; но в главе II, § 3, показано, что $dx\,dy=|J_1|du\,dv$, следовательно,

$$M=\int\left[\int\int\left\{f(x, y, z)\cdot\frac{|J|}{|J_1|}\cdot|J_1|\right\}dudv\right]dw=$$

$$=\int\int\int f[\varphi, \psi, \omega]\cdot|J|\cdot dudvdw,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим частные случаи координатных систем.

*Случай 1.* Сферические координаты: $x=\rho\sin\theta\cos\psi$, $y=\rho\sin\theta\sin\psi$, $z=\rho\cos\theta$. Координатные поверхности: 1) $\rho=\rho_0$: сферы $x^2+y^2+z^2=\rho_0^2$ 2) $\theta=\theta_0$: конусы $x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\theta_0$ (одной полости, ибо при $\rho>0$ $z$ одного знака с $\cos\theta_0$) 3) $\psi=\psi_0$: полуплоскости $y=x\operatorname{tg}\psi_0$ (полуплоскости, а не целые плоскости берутся потому, что при $\rho>0$ и при $\sin\theta>0$ — что отвечает интервалу $0<\theta<\pi$ — оказывается $x$ одного знака с $\cos\psi$, $y$ одного знака с $\sin\psi$). Пределы изменения координат: $\rho$ от 0 до $+\infty$, $\theta$ от 0 до $\pi$, $\psi$ от 0 до $2\pi$.

$$\text{Якобиан } J=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta\\ \rho\cos\theta\cos\psi & \rho\cos\theta\sin\psi & -\rho\sin\theta\\ -\rho\sin\theta\sin\psi & \rho\sin\theta\cos\psi & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\theta,\quad |J|=\rho^2\sin\theta.$$

*Пример 1.* Момент инерции объема сферы относительно одного из диаметров.

Для сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ составим $I_z$:

$$I_z=\mu\int\int\int(x^2+y^2)dxdydz=\mu\int\int\int\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\psi$$

при пределах: по $\rho$: 0, $R$, по $\theta$: 0, $\pi$, по $\psi$: 0, $2\pi$. Итак,

$$I_z=\mu\cdot\int_0^R\rho^4d\rho\cdot\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta\cdot\int_0^{2\pi}d\psi=\mu\cdot\frac{1}{5}R^5\cdot\frac{4}{3}\cdot2\pi=\frac{2}{5}MR^2,$$

где $M=\mu\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$ есть масса сферы.

*Пример 2.* Объем, ограниченный поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$. Объем состоит из 4 равных частей, расположенных в тех координатных углах, где $xyz>0$, т.-е. где знаки координат: $+++$, $+--$, $-+-$, $--+$; поэтому $V=4\int\int\int\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\psi$, где уже интегрирование распространяется по объему, лежащему внутри угла положительных координат.

Уравнение поверхности дает: $\rho^4-a\rho^3\sin^2\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi=0$, откуда $\rho=0$ и $\rho=a\sin^2\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi$ — пределы интегрирования по $\rho$; приравнивая эти значения, получаем для определения $\theta$ условие: $\sin^2\theta\cos\theta=0$, для $\psi$: $\sin\psi\cos\psi=0$, что дает (внутри угла положительных координат) $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$; $\psi=0$, $\psi=\frac{\pi}{2}$.

Итак,

$$V=4\int\int\left[\int_0^\rho\rho^2d\rho\right]\sin\theta\,d\theta d\psi=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^3\theta d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\psi\cos^3\psi d\psi=$$

$$=\frac{4}{3}a^3\cdot\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{360}a^3.$$

*Пример 3.* Объем, ограниченный поверхностью

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2).$$

Объем делится координатными плоскостями на 8 равных частей. Из данного уравнения находим: $\rho^4=a^2\rho^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$, откуда $\rho=0$ и $\rho=a\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$ — пределы интегрирования по $\rho$.

Условие вещественности $\rho$ дает $\sin^2\theta-\cos^2\theta\geqq0$, $\operatorname{tg}^2\theta\geqq1$, что в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$ определяет интервал $\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$; что касается $\psi$, то $\rho$ не зависит от $\psi$, следовательно, для $\psi$ следует взять полный интервал $0\leqq\psi\leqq\frac{\pi}{2}$ (для угла положительных координат). Итак,

$$V=8\int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{\rho=0}^{\rho}\rho^2d\rho\right]\sin\theta\,d\theta\,d\psi=\frac{8}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\sin\theta d\theta;$$

подстановкою $\sqrt{2}\cos\theta = \sin t$ находим:

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt = \frac{\pi^2 a^3 \sqrt{2}}{8}.$$

*Случай 2.* Координаты $x = a\rho\sin\theta\cos\psi$, $y = b\rho\sin\theta\sin\psi$, $z = c\rho\cos\theta$.

Координатные поверхности: $\rho = \rho_0$ эллипсоиды $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \rho_0^2$, $\theta = \theta_0$ конусы $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \operatorname{tg}^2\theta_0 \cdot \frac{z^2}{c^2}$ (одна полость); $\psi = \psi_0$ полуплоскости $\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}\psi_0$. Якобиан $|J| = abc\rho^2\sin\theta$.

Пределы изменения координат: $\rho$ от 0 до $+\infty$, $\theta$ от 0 до $\pi$, $\psi$ от 0 до $2\pi$.

*Пример* 4. Объем, ограниченный поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^3 = \frac{z}{l}\left(\frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}\right).$$

Объем симметричен относительно плоскостей $XOZ$ и $YOZ$. Из уравнения поверхности $\rho = 0$ и $\rho = \sqrt[3]{\frac{c}{l}\sin^2\theta\cos\theta\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\psi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\psi\right)}$; так как $\rho$ должно быть $> 0$, то 1) при $\cos\theta > 0$ имеем:

$$\frac{a^2}{h^2}\cos^2\psi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\psi \geqq 0,\ \operatorname{tg}^2\psi \leqq \left(\frac{ak}{bh}\right)^2,\ |\operatorname{tg}\psi| \leqq \frac{ak}{bh},$$

что при $\psi$, заключенном между 0 и $\frac{\pi}{2}$, дает интервал $0 \leqq \psi \leqq \psi_0 = \operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}$; 2) при $\cos\theta < 0$ имеем $|\operatorname{tg}\psi| \geqq \frac{ak}{bh}$, т.-е. $\psi_0 \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}$. Итак,

$$V = 4\,abc\left\{\int_{\psi=0}^{\psi_0}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\rho}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\psi + \int_{\psi=\psi_0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{\rho}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\psi\right\} =$$

$$= \frac{4\,abc^2}{3l}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta \cdot \int_0^{\psi_0}\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\psi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\psi\right)d\psi + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta \cdot \int_{\psi_0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\psi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\psi\right)d\psi\right\} = \frac{abc^2}{3l}\left\{\int_0^{\psi_0} - \int_{\psi_0}^{\frac{\pi}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{abc^2}{3l}\left\{\frac{ab}{hk} + \left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh} - \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

*Пример 5.* Объем, ограниченный поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=\frac{y}{k}-\frac{x}{h}.$$

Объем симметричен относительно плоскости $XOY$. Из данного уравнения

$$\rho=0 \text{ и } \rho=\sqrt{\frac{\sin\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\left(\frac{b}{k}\sin\psi-\frac{a}{h}\cos\psi\right)},$$

для вещественности $\rho$, $\theta$ может иметь любое значение от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а $\psi$ должно удовлетворять условию:

$$\frac{b}{k}\sin\psi-\frac{a}{h}\cos\psi\geqslant 0.$$

Отсюда получаем:

1) при $\cos\psi>0$: $\operatorname{tg}\psi\geqq\frac{ak}{bh}$, т.-е. $\frac{\pi}{2}\geqslant\psi\geqslant\psi_0=\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}$;

2) при $\cos\psi<0$: $\operatorname{tg}\psi\leqq\frac{ak}{bh}$, т.-е. $\pi+\psi_0\geqslant\psi\geqq\frac{\pi}{2}$,

так что пределы для $\psi$ будут $\psi_0$ и $\pi+\psi_0$. (Заметим, что из первоначального уравнения поверхности следует неравенство: $\frac{y}{k}-\frac{x}{h}\geqslant 0$, т.-е. точки области интегрирования лежат по ту сторону прямой, где проходит положительная ось $Y$, а так как эта прямая есть $\psi=\psi_0$, то пределы для $\psi$ будут $\psi_0$ и $\psi_0+\pi$).

Итак,
$$V=2abc\int\limits_{\psi_0}^{\pi+\psi_0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\rho}\rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\psi=$$

$$=\frac{2}{3}abc\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\cdot\int\limits_{\psi_0}^{\pi+\psi_0}\left(\frac{b}{k}\sin\psi-\frac{a}{h}\cos\psi\right)d\psi.$$

Здесь, подстановкой $\operatorname{tg}\theta=t$, получаем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}=\int\limits_0^{\infty}\frac{t^2dt}{t^4+1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

(смотри отдел II, глава III, § 3, пример 1) и

$$V=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}abc\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2+\left(\frac{b}{k}\right)^2}.$$

*Случай 3.* Координаты

$$x=a\rho\sin^2\theta\cos^2\psi,\quad y=b\rho\sin^2\theta\sin^2\psi,\quad z=c\rho\cos^2\theta$$

при $\rho > 0$ (здесь $x$, $y$, $z$ имеют только положительные значения). Координатные поверхности:

$$\rho = \rho_0 \text{ плоскости } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \rho_0; \quad \theta = \theta_0 \text{ плоскости } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\operatorname{tg}^2\theta_0;$$

$$\psi = \psi_0 \text{ плоскости } \frac{y}{b} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}^2\psi_0.$$

Якобиан $|J| = 4abc\rho^2 \sin^3\theta \cos\theta \sin\psi \cos\psi$.

*Пример 6.* Объем, ограниченный поверхностью

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^3 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}$$

и заключенный внутри угла положительных координат. Из уравнения находим:

$$\rho = 0, \quad \rho = \sin\theta \sqrt{\frac{a}{h}\cos^2\psi - \frac{b}{k}\sin^2\psi};$$

значение $\rho$ будет вещественным и положительным при всяком $\theta$ между 0 и $\frac{\pi}{2}$ и при $\psi$, удовлетворяющем неравенству $\frac{a}{h}\cos^2\psi - \frac{b}{k}\sin^2\psi \geqslant 0$, т.-е. при $|\operatorname{tg}\psi| \leqslant \sqrt{\frac{ak}{bh}}$, что дает интервал: $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0 = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}$.

Итак,

$$V = 4abc \int_0^{\psi_0} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\rho} \rho^2 d\rho \right) \sin^3\theta \cos\theta \, d\theta \right] \sin\psi\cos\psi \, d\psi =$$

$$= \frac{4}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta\cos\theta \cdot d\theta \cdot \int_0^{\psi_0} \left(\frac{a}{h}\cos^2\psi - \frac{b}{k}\sin^2\psi\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\psi\cos\psi \, d\psi =$$

$$= \frac{4}{3} abc \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right)} \cdot \int_0^{\frac{a}{h}} t^{\frac{3}{2}} dt \left(\text{при } t = \frac{a}{h}\cos^2\psi - \frac{b}{k}\sin^2\psi\right) =$$

$$= \frac{4abc \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{5}{2}}}{105\left(\frac{a}{k} + \frac{b}{k}\right)}.$$

*Пример 7.* Объем, ограниченный поверхностью

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{h}$$

и заключенный внутри угла положительных координат. Из уравнения $\rho = 0$ и $\rho = \sin^2\theta - \frac{c}{h}\cos^2\theta$; для того, чтобы $\rho$ было $> 0$, должно быть $\operatorname{tg}^2\theta \geqslant \frac{c}{h}$,

т.-е. $\theta$ содержится между $\theta_0 = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{c}{h}}$ и $\frac{\pi}{2}$; $\psi$ может иметь любое значение от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Итак.

$$V = \frac{4}{3}abc\int\limits_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\theta - \frac{c}{h}\cos^2\theta\right)^3 \sin^3\theta\cos\theta\, d\theta \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi\cos\psi\, d\psi =$$

$$= \frac{2}{3}abc\int\limits_0^1 \frac{t^3\left(t + \frac{c}{h}\right)}{2\left(1 + \frac{c}{h}\right)^2}\, dt \left(\text{при } t = \sin^2\theta - \frac{c}{h}\cos^2\theta\right) = \frac{abc\left(4 + 5\frac{c}{h}\right)}{60\left(1 + \frac{c}{h}\right)^2}.$$

*Случай 4.* Координаты $u$, $v$, $z$, при чем $x = \varphi(u, v)$, $y = \gamma(u, v)$. Якобиан $J = J_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$. Например, цилиндрические координаты: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ при Якобиане $r$; координаты: $x = a\rho\cos\varphi$; $y = b\rho\sin\varphi$, $z = z$ при Якобиане $ab\rho$ и т. д.

*Пример 8.* Центр инерции объема конуса $x^2 + y^2 = z^2\operatorname{tg}^2\alpha$, отсеченного плоскостью $z = H$.

По симметрии объема относительно $OZ$, $x_c = 0$, $y_c = 0$,

$z_c = \dfrac{\int\int\int z \cdot r dr d\theta dz}{\int\int\int r dr d\theta dz}$. Пределы для $z$ будут: $z = r \cdot \cot\alpha$ и $z = H$; пределы по $r$ и $\theta$ определяются областью интегрирования в плоскости $XOY$: $x^2 + y^2 = H^2\operatorname{tg}^2\alpha$, т.-е. по $r$ от 0 до $H\operatorname{tg}\alpha$, по $\theta$ от 0 до $2\pi$. Итак, имеем:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{H\operatorname{tg}\alpha}\left[\int\limits_{z = r\cot\alpha}^{H} z dz\right] r dr d\theta = 2\pi\int\limits_0^{H\operatorname{tg}\alpha}\frac{r}{2}(H^2 - r^2\cot^2\alpha) dr = \frac{1}{4}\pi H^4\operatorname{tg}^2\alpha,$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{H\operatorname{tg}\alpha}\left[\int\limits_{z = r\cot\alpha}^{H} dz\right] r dr d\theta = 2\pi\int\limits_0^{H\operatorname{tg}\alpha} r(H - r\cot\alpha) dr = \frac{1}{3}\pi H^3\operatorname{tg}^2\alpha,$$

следовательно $z_c = \frac{3}{4}H$.

*Пример 9.* Центр инерции объема, ограниченного поверхностями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}.$$

Здесь $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c$ (в системе $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, $z = z$) равно $\dfrac{\int\int\int z \cdot ab\rho d\rho d\varphi dz}{\int\int\int ab\rho d\rho d\varphi dz}$; пределы интегрирования по $z$: $z = \frac{1}{2}c\rho^2$ и $z = c\rho$. Область интегрирования в плоскости $XOY$ есть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$ (результат исключения $z$ из данных уравнений), т.-е. $\rho = 2$, откуда пределы для $\rho$: 0 и 2; для $\varphi$: 0 и $2\pi$.

Имеем:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left[\int_{z=\frac{1}{2}c\rho^2}^{c\rho} z\,dz\right]ab\rho\,d\rho\,d\varphi = ab\cdot 2\pi\int_0^2 \frac{1}{2}\left(c^2\rho^2-\frac{1}{4}c^2\rho^4\right)\rho\,d\rho = \frac{4}{3}\pi abc^2,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left[\int_{z=\frac{1}{2}c\rho^2}^{c\rho} dz\right]ab\rho\,d\rho\,d\varphi = ab\cdot 2\pi\cdot\int_0^2\left(c\rho-\frac{1}{2}c\rho^2\right)\rho\,d\rho = \frac{4}{3}\pi abc,\ z_c = c.$$

*Случай 5.* Если новые координаты $u$, $v$, $w$ вводятся уравнениями $u=\Phi(x, y, z)$, $v=\Psi(x, y, z)$, $w=\Omega(x, y, z)$ и составлен Якобиан

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix},$$

при чем

$$du\,dv\,dw = |J|\,dx\,dy\,dz,$$

то Якобиан $J$, входящий в формулу $dx\,dy\,dz = |J|\,du\,dv\,dw$, определяется простым равенством $|J| = \frac{1}{|J'|}$.

*Пример 10.* Объем параллелепипеда, ограниченного плоскостями:

$$ax+by+cz=h_1,\ ax+by+cz=h_2,\ a_1x+b_1y+c_1z=k_1,$$

$a_1x+b_1y+c_1z=k_2$, $a_2x+b_2y+c_2z=l_1$, $a_2x+b_2y+c_2z=l_2$ при $h_2>h_1$, $k_2>k_1$, $l_2>l_1$ и при

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \text{ не} = 0$$

(тогда три плоскости с разными коэффициентами образуют трегранный угол).

Полагая $u=ax+by+cz$, $v=a_1x+b_1y+c_1z$, $w=a_2x+b_2y+c_2z$, находим $J'=\Delta$, следовательно $J=\frac{1}{\Delta}$ и отсюда

$$V=\int_{h_1}^{h_2}\int_{k_1}^{k_2}\int_{l_1}^{l_2}\frac{1}{|\Delta|}\cdot du\cdot dv\cdot dw = \frac{(h_2-h_1)(k_2-k_1)(l_2-l_1)}{|\Delta|}.$$

ОТДЕЛ V.

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

## Глава I.

## Общие понятия.

### § 1. Классификация дифференциальных уравнений.

Дифференциальным уравнением называется такое уравнение, которое связывает независимые переменные, их неизвестные функции и производные различных порядков от этих функций. При этом, если независимая переменная одна, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным, например $\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y=0$ или $\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=y^2+z^2$, а если независимых переменных несколько, то уравнение называется уравнением в частных производных, например: $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$. Порядком дифференциального уравнения называется высший порядок входящих в него производных; из приведенных выше трех уравнений первое будет 2-го порядка, остальные два — 1-го порядка.

Проинтегрировать дифференциальное уравнение значит найти все выражения неизвестных функций, удовлетворяющие этому уравнению, т.-е. обращающие его в тождество.

### § 2. Происхождение обыкновенных дифференциальных уравнений при исключении постоянных произвольных.

Пусть функция $y$ связана с независимой переменной $x$ уравнением, содержащим $n$ параметров, независящих от $x$ и друг от друга:

$$(1)\ F(x,\ y,\ C_1,\ C_2,\ldots C_n)=0.$$

Дифференцируя это уравнение $n$ раз последовательно по $x$, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'=0 \quad \text{или } F_1(x,y,y',C_1,C_2,\ldots C_n)=0\ldots(2)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial F_1}{\partial y'}\cdot y''=0 \quad \text{или } F_2(x,y,y',y'',C_1,C_2,\ldots C_n)=0\ldots(3),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial F_2}{\partial y'}\cdot y''+\frac{\partial F_2}{\partial y''}\cdot y'''=0$$

или

$$F_3(x,y,y',y'',y''',C_1,C_2,\ldots C_n)=0\ldots(4)$$

и т. д. до уравнения $F_n\ (x,y,y',y'',\ldots y^{(n)},C_1,C_2,\ldots C_n)=0\ldots(n+1)$.

Исключив из $(n+1)$ уравнений (1) до $(n+1)$ $n$ букв $C_1, C_2, \ldots C_n$, мы получим зависимость $f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0 \ldots$ (*) которая представляет обыкновенное дифференциальное уравнение $n$-го порядка. Если теперь из уравнений (1) до $(n+1)$ определить значения $y, y', \ldots y^{(n)}$ в виде функций от $x, C_1, C_2, \ldots C_n$ и внести эти значения в уравнение (*) $f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$, то получится тождество $0 = 0$, ибо иначе оказалась бы зависимость между $x$ и $C_1, C_2, \ldots C_n$, что противоречит предположению о независимости параметров от $x$ и друг от друга. Итак уравнение (1) представляет решение или интеграл уравнения (*), и такой интеграл, содержащий в своем составе $n$ независимых постоянных $C_1, C_2, \ldots C_n$, называется **общим интегралом** уравнения (*); при этом предполагается, что исключение букв $C_1, C_2, \ldots C_n$ возможно только из полной системы уравнений (1) до $(n+1)$, а не из укороченной системы, не содержащей одного или нескольких последних уравнений; в последнем случае (см. прим. 2) число постоянных $C$ может быть уменьшено изменением обозначений.

С геометрической точки зрения, общий интеграл представляет систему линий, зависящих от $n$ параметров, а дифференциальное уравнение выражает общее для всех линий геометрическое свойство.

*Пример 1.* Дано уравнение окружности $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2$ с произвольным положением центра $(C_1, C_2)$ и с определенным радиусом $a$. Дифференцируя два раза, находим:

$$x - C_1 + (y - C_2)y' = 0, \quad 1 + y'^2 + (y - C_2)y'' = 0,$$

откуда $y - C_2 = -\dfrac{1 + y'^2}{y''}$, $x - C_1 = \dfrac{y'(1 + y'^2)}{y''}$; подставляя в данное уравнение, находим: $\dfrac{(1 + y'^2)^3}{y''^2} = a^2$. Это дифференциальное уравнение 2-го порядка выражает собою, что все кривые общего интеграла имеют постоянный радиус кривизны, равный $a$.

*Пример 2.* Дано уравнение $y = C_1 e^{x + C_2}$, содержащее 2 постоянные. Дифференцируя дважды, находим: $y' = C_1 e^{x + C_2}$, $y'' = C_1 e^{x + C_2}$, но здесь исключение $C_1$ и $C_2$ можно произвести не из полной системы трех уравнений, а уже из первых двух, что и дает дифференциальное уравнение 1-го порядка $y' - y = 0$.

В его общем интеграле $y = C_1 e^{x + C_2}$ можно уменьшить число постоянных на одну, положив $C_1 e^{C_2} = C'$, что даст $y = C' e^x$.

Когда найден общий интеграл дифференциального уравнения, то из него можно получить бесчисленное множество **частных интегралов**, придавая буквам $C_1, C_2, \ldots C_n$ любые частные значения. При этом возможно выбрать значения $C_1, C_2, \ldots C_n$ так, чтобы полученный частный интеграл $y$ и $(n-1)$ первых производных его $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ при данном $x = a$ принимали заранее данные значения: $y_a, y'_a, \ldots y_a^{(n-1)}$; для этого достаточно определить $C_1, C_2, \ldots C_n$ из системы:

$$\begin{aligned}
&F(a, y_a, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0,\\
&F_1(a, y_a, y'_a, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0,\\
&F_2(a, y_a, y'_a, y''_a, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots F_{n-1}(a, y_a, y'_a, \ldots y_a^{(n-1)}, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0.
\end{aligned}$$

Кроме частных интегралов, дифференциальное уравнение может иметь еще **особенные интегралы**, не выводимые из общего ни при каком зна-

чении постоянных $C_1, C_2, \ldots C_n$. Например, уравнение $y' - 2\sqrt{y} = 0$ или $\frac{dy}{2\sqrt{y}} - dx = 0$ дает $d(\sqrt{y} - x) = 0$, $\sqrt{y} - x = C_1$, $y = (x + C_1)^2$ — это есть общий интеграл, представляющий систему парабол; но сверх того уравнение $y' - 2\sqrt{y} = 0$ удовлетворяется решением $y = 0$, которое не содержится среди парабол и представляет особенное решение.

Задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в нахождении общего интеграла и особенных решений, при чем задача считается решенною, если удалось выразить $y$ через $x$ помощью квадратур, т.-е. неопределенных интегралов, независимо от того, берется ли квадратура в конечном виде или нет.

## § 3. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью бесконечных рядов.

Если из данного дифференциального уравнения $n$-го порядка определить $y^{(n)}$: $y^{(n)} = F(x, y, y', y', \ldots y^{(n-1)})$, то, дифференцируя и заменяя в правой части $y^{(n)}$ его выражением, можно представить и $y^{(n+1)}$ в виде функции от $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$. Именно:

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot y'' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} \cdot F(x, y, \ldots y^{(n-1)}) =$$
$$= F_1(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}).$$

Тем же способом получим:

$y^{(n+2)} = F_2(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) \ldots$ и вообще $y^{(n+m)} = F_m(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$.

Если при некотором $x = a$ задать наперед значения $y, y', \ldots y^{(n-1)}$, например $y = y_a$, $y' = y'_a, \ldots y^{(n-1)} = y_a^{(n-1)}$, то из предыдущих формул определятся значения и всех последующих производных при $x = a$:

$$y_a^{(n)} = F(a, y_a, y'_a, \ldots y_a^{(n-1)}),\ y_a^{(n+1)} = F_1(a, y_a, y'_a, \ldots y_a^{(n-1)})$$

и т. д. Если все эти числа окажутся конечными и если удастся подметить закон их составления, то по формуле Тэйлора можем написать разложение неизвестной функции $y$ в ряд по степеням разности $x - a$:

$$y = y_a + \frac{y'_a}{1}(x - a) + \frac{y''_a}{1.2}(x - a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{y_a^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + \frac{y_a^{(n)}}{n!}(x - a)^n + \ldots;$$

при чем ряд будет сходящимся при $|x - a| \leqq R$, где величина числа $R$ зависит от характера ряда. Если ряд можно суммировать, то получится общий интеграл $y = F(x, y_a, y'_a, \ldots y_a^{(n-1)})$.

*Пример 1.* Дано уравнение $y'' + k^2 y = x$. Найти его общий интеграл так, чтобы при $x = 0$ выходило $y = y_0$ и $y' = y'_0$.

Имеем: $y'' = -k^2 y + x$, $y''' = -k^2 y' + 1$, $y^{IV} = -k^2 y'' = k^4 y - k^2 x$, $y^V = k^4 y' - k^2$, $y^{VI} = k^4 y'' = -k^6 y + k^4 x$, $y^{VII} = -k^6 y' + k^4$ и вообще $y^{(2n)} = (-1)^n \{k^{2n} y - k^{2n-2} x\}$, $y^{(2n+1)} = (-1)^n \{k^{2n} y' - k^{2n-2}\}$.

При $x = 0$ получаем: $y_0^{(2n)} = (-1)^n k^{2n} \cdot y_0$, $y_0^{(2n+1)} = (-1)^n \{k^{2n} y'_0 - k^{2n-2}\}$.

Отсюда

$$y = y_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n} x^{2n}}{2n!} \right\} + \left( \frac{y_0'}{k} - \frac{1}{k^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(kx)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x}{k^2} =$$

$$= y_0 \cos kx + \left( \frac{y_0'}{k} - \frac{1}{k^2} \right) \sin kx + \frac{x}{k^2}.$$

Для проверки замечаем, что 1) $y'' = -k^2 y + x$ и 2) при $x = 0$: $y = y_0$, $y' = y_0'$.

*Замечание 1.* Если, по освобождении данного уравнения от знаменателей, коэффициент при высшей производной $y^{(n)}$ оказывается $\varphi(x)$, то очевидно, что при $x = x_0$, корню уравнения $\varphi(x) = 0$, $y^{(n)}$ обращается в $\infty$, и невозможно разложить $y$ в ряд Тэйлора по положительным целым степеням $x - x_0$; тогда разложение будет другой формы, и такие точки $x = x_0$ называются особенными точками общего интеграла данного дифференциального уравнения. Например, для уравнения $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$ точки $x = \pm 1$ будут особенными точками его общего интеграла.

*Замечание 2.* Иногда можно найти частное решение данного уравнения в виде степенного ряда, пользуясь способом неопределенных коэффициентов.

*Пример 2.* Для уравнения $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$ положим

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Тогда, составив $y'$ и $y''$ также в виде рядов, найдем:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = \frac{a_1}{x} + (a_0 + 2^2 \cdot a_2) + x(a_1 + 3^2 \cdot a_3) + x^2(a_2 + 4^2 \cdot a_4) +$$

$$+ \ldots + x^n \{ a_n + (n+2)^2 a_{n+2} \} + \ldots$$

Приравнивая нулю все коэффициенты, получим:

$$a_1 = 0,\ a_3 = 0,\ a_5 = 0,\ \ldots\ a_0 + 2^2 \cdot a_2 = 0,\ a_2 + 4^2 \cdot a_4 = 0,\ \ldots,$$

откуда, беря $a_0 = 1$, имеем: $a_2 = -\frac{1}{2^2}$, $a_4 = +\frac{1}{2^2 \cdot 4^2}, \ldots a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n)^2} \ldots$;

таким образом составляется частный интеграл данного уравнения:

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \ldots,$$

который представляет Бесселеву функцию нулевого порядка $J_0(x)$.

*Пример 3.* Для уравнения $(1 - x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0$, полагая $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, приходим к зависимости между $a_k$ и $a_{k+2}$ вида:

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} + (m-k)(m+k+1)a_k = 0.$$

Если $m$ целое положительное число, то, беря $k = m$, найдем $a_{m+2} = 0$, откуда, затем, $a_{m+4} = 0$, $a_{m+6} = 0$, ...; полагая же $k = m - 2$, найдем: $a_{m-2} = -\frac{m(m-1)}{2(2m-1)} \cdot a_m$; при $k = m - 4$ найдем:

$$a_{m-4} = -\frac{(m-2)(m-3)}{4 \cdot (2m-3)} a_{m-2} = +\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 4(2m-1)(2m-3)} a_m$$

и т. д. дойдем до $a_1$ при $m$ нечетном или до $a_0$ при $m$ четном; что касается коэффициентов $a_{m+2i+1}$, то можно принять их все равными 0, так как общая зависимость при этом выполняется. Итак, данное уравнение имеет (при $m$ целом положительном) частное решение:

$$y = a_m \left\{ x^m - \frac{m(m-1)}{2\cdot(m-1)} x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 4\cdot(2m-1)(2m-3)} x^{m-4} - \ldots \right\},$$

которое представляет так называемый полином Лежандра $m$-й степени $P_m(x)$; при этом берут $a_m = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}$, чтобы выходило $P_m(1) = 1$, $P_m(-1) = (-1)^m$. Этот же полином можно определить формулой:

$$P_m(x) = \frac{1}{m!\cdot 2^m}\cdot\frac{d^m}{dx^m}\left[(x^2-1)^m\right].$$

## § 4. Приближенное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

*Способ Коши.* Пусть требуется найти интеграл уравнения $y' = f(x, y)$ при условии, чтобы $y = y_0$ при $x = x_0$. Взяв ряд достаточно близких значений $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, X$, имеем по формуле Лагранжа:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)\{f(x_0, y_0) + \varepsilon_0\},\ y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\{f(x_1, y_1) + \varepsilon_1\},\ \ldots$$
$$Y - y_{n-1} = (X - x_{n-1})\{f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \varepsilon_{n-1}\},$$

где величины $\varepsilon_i$ можно считать сколь угодно малыми при достаточно малых разностях $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$. Складывая все эти равенства, находим:

$$Y - y_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \{f(x_i, y_i) + \varepsilon_i\},$$

при чем значения $y_1, y_2, \ldots Y$ вычисляются приближенно по предыдущим формулам, считая $\varepsilon_i = 0$. Переходя к пределу, при $n = \infty$ и при $\Delta x_i = 0$, находим, полагая пред. $Y = y$, что $y - y_0 = \int_{x_0}^{X} f(x, y)dx$; по свойству определенного интеграла (отд. II, гл. I, § 4), отсюда заключаем, что $y' = f(X, y)$ и $y = y_0$ при $X = x_0$, т.-е. $y$ есть искомый интеграл. Таким образом вычисленные по приближенным формулам: $y_{i+1} = y_i + \Delta x_i f(x_i, y_i)$ значения неизвестной функции тем ближе подходят к точным значениям, чем меньше интервалы $\Delta x_i$. Этот прием приводит к графическому интегрированию, т.-е. к приближенному построению интегральной кривой. Именно, через точку $(x_0, y_0)$ ведем прямую $y - y_0 = (x - x_0)f(x_0, y_0)$, параллельную касательной к интегральной кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ (угловой коэффициент этой касательной есть $y_0' = f(x_0, y_0)$ в силу данного дифференциального уравнения) и продолжаем эту прямую до точки $M_1(x_1, y_1)$; через $M_1$ ведем прямую $y - y_1 = (x - x_1)f(x_1, y_1)$ до точки $M_2(x_2, y_2)$ и т. д. Полученная ломаная линия $M_0M_1M_2\ldots$ есть приближенное представление искомой интегральной кривой.

*Способ Пикара.* Желая найти интеграл дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ при условии: $y = y_0$ при $x = x_0$, определим первое приближение

из уравнения: $y'_1 = f(x, y_0)$ при условии $y_1 = y_0$ при $x = x_0$; это дает $y_1 = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$. Второе приближение $y_2$ определяется уравнением $y'_2 = f(x, y_1)$ и условием $y_2 = y_0$ при $x = x_0$, что дает: $y_2 = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx$ и т. д.; вообще $y_{k+1} = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_k)dx$. Если положим

$$\underset{k=\infty}{\text{пред.}}\ y_k = \underset{k=\infty}{\text{пред.}}\ y_{k+1} = F(x),$$

то этот предел будет удовлетворять уравнению: $F(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, F(x))dx$, т.-е. $y = F(x)$ будет искомый интеграл, ибо $y' = f(x, y)$ и $y = y_0$ при $x = x_0$. Практически достижение предельного значения пред. $y_k = F(x)$ определяется тем, что $(k+1)$-е приближение $y_{k+1}$ совпадет с $k$-м приближением $y_k$ в пределах точности вычислений.

Способ Пикара приложим и к интегрированию системы: $x' = f(t, x, y, z)$, $y' = \varphi(t, x, y, z)$, $z' = \psi(t, x, y, z)$ при условии: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ при $t = t_0$. Последовательные приближения будут определяться формулами:

$$x_{k+1} = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(t, x_k, y_k, z_k)dt, \quad y_{k+1} = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(t, x_k, y_k, z_k)dt,$$

$$z_{k+1} = z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(t, x_k, y_k, z_k)dt.$$

*Способ Рунге.* Отличается от способа Коши тем, что последовательные разности $y_{k+1} - y_k$ вычисляются не по формуле Лагранжа:

$$y_{k+1} - y_k = \Delta x_k \cdot f(x_k, y_k),$$

а по более точной формуле Тэйлора с удержанием в ней членов 3-го порядка относительно $\Delta x_k$, именно: $y_{k+1} - y_k = \Delta x_k \cdot y'_k + \frac{1}{2}\Delta x_k^2 \cdot y''_k + \frac{1}{6}\Delta x_k^3 \cdot y'''_k$. Полагая $A_k = f(x_k, y_k)$, $p_k = f'_x(x_k, y_k)$, $q_k = f'_y(x_k, y_k)$, $r_k = f''_{xx}(x_k, y_k)$, $s_k = f''_{xy}(x_k, y_k)$, $t_k = f''_{yy}(x_k, y_k)$, имеем: $y'_k = A_k$, $y''_k = B_k = p_k + A_k q_k$, $y'''_k = C_k = P_k + Q_k$, где $P_k = r_k + 2A_k s_k + A_k^2 t_k$, $Q_k = B_k q_k$; тогда

$$y_{k+1} - y_k = \Delta x_k \left\{ A_k + \frac{1}{2} B_k \Delta x_k + \frac{1}{6} C_k \Delta x_k^2 \right\}.$$

Чтобы все вычисления вести со значениями функции $f(x, y)$, не вводя ее частных производных, составим следующие значения $f(x, y)$, удерживая в формуле Тэйлора члены 2-го порядка относительно $\Delta x_k$:

$$\alpha_k = f\left(x_k + \frac{1}{2}\Delta x_k,\ y_k + \frac{1}{2}A_k \Delta x_k\right) = A_k + \frac{1}{2}B_k \Delta x_k + \frac{1}{8}P_k \Delta x_k^2,$$

$$\delta_k = f(x_k + \Delta x_k, y_k + \alpha_k \Delta x_k) = A_k + B_k \Delta x_k + \frac{1}{2}C_k \Delta x_k^2,$$

$$\gamma_k = f\left(x_k + \frac{1}{2}\Delta x_k,\ y_k + \frac{1}{2}\alpha_k \Delta x_k\right) = A_k + \frac{1}{2}B_k \Delta x_k + \left(\frac{1}{8}P_k + \frac{1}{4}Q_k\right)\Delta x_k^2.$$

Отсюда, $\alpha_k + \gamma_k = 2A_k + B_k \Delta x_k + \frac{1}{4}C_k \Delta x_k^2$, $y_{k+1} - y_k = \frac{\Delta x_k}{6}\{A_k + 2(\alpha_k + \gamma_k) + \delta_k\}$.

## Глава II.

## Обыкновенные уравнения 1-го порядка.

### § 1. Классы уравнений 1-го порядка и 1-й степени относительно $y'$, приводимых к квадратурам.

В виду того, что в способе интегрирования дифференциальных уравнений помощью рядов (§ 3) редко удается подметить общий закон выражения $y_a^{(n+m)}$ через $y_a, y_a', \dots y_a^{(n-1)}$, а без этого невозможно определить предел погрешности при вычислении интеграла, то предпочтительнее, если возможно, проинтегрировать уравнение в квадратурах, для чего мы и перечислим здесь классы уравнений, интегрирующихся в квадратурах.

*Класс 1.* Полные дифференциалы. Так называется уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \text{или} \quad M + N \cdot y' = 0,$$

в котором $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Именно, в отд. I, гл. V, § 2, показано, что в этом случае можно найти такую функцию $z = f(x, y)$, для которой $dz = Mdx + Ndy$; тогда данное уравнение обращается в $dz = 0$, и его общий интеграл будет $z = C$ или $f(x, y) = C$.

*Пример 1.* $3x^2 - 2x - y + y'(2y - x + 3y^2) = 0$.

Здесь $z = \int (3x^2 - 2x - y)dx + \varphi(y) = x^3 - x^2 - xy + \varphi(y)$, при чем $\varphi'(y) = 2y - x + 3y^2 + x = 2y + 3y^2$, $\varphi(y) = y^2 + y^3$, и общий интеграл: $x^3 - x^2 + y^3 - xy + y^2 = C$.

*Класс 2.* Уравнения с отделенными переменными. Так называются уравнения вида $X_1 \cdot Y_2 dx + X_2 \cdot Y_1 dy = 0$, где $X_1$ и $X_2$ суть функции от $x$ и $Y_1$, $Y_2$ суть функции от $y$. Делением на $X_2 Y_2$ приводим уравнение к виду $\frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_1}{Y_2} dy = 0$, подходящему под класс 1 $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0\right)$, и находим общий интеграл: $\int \frac{X_1}{X_2} dx + \int \frac{Y_1}{Y_2} dy = C$.

*Пример 2.* $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$.

Переписывая в виде $\frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2} = 0$, берем квадратуры и находим: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} C$; взяв тангенсы от обеих частей равенства, получаем интеграл в рациональной форме: $x + y = C(1 - xy)$.

*Класс 3.* Уравнения Эйлера: $(aydx + bxdy) + x^m y^n (cydx + gxdy) = 0$, где $a$, $b$, $c$, $g$, $m$, $n$ — постоянные. Разделив на $xy$, получаем:

$$a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} + x^m y^n \left(c\frac{dx}{x} + g\frac{dy}{y}\right) = 0.$$

Введем новые переменные $u$ и $v$, полагая $u = x^a y^b$, $v = x^c y^g$; отсюда

$$a \log x + b \log y = \log u, \quad c \log x + g \cdot \log y = \log v$$

и $a\frac{dx}{x}+b\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}$, $c\frac{dx}{x}+g\cdot\frac{dy}{y}=\frac{dv}{v}$. Если $ag-bc$ не $=0$, то находим $\log x=h\cdot\log u+k\log v$, $\log y=p\log u+q\log v$ (где $h=\frac{g}{ag-bc}$, $k=\frac{-b}{ag-bc}$ и пр.), откуда $x=u^h v^k$, $y=u^p v^q$, $x^m y^n=u^r v^s$, где $r=hm+pn$, $s=km+qn$. Данное уравнение принимает вид: $\frac{du}{u}+u^r v^s\cdot\frac{dv}{v}=0$ и относится к классу 2. Найдя общий интеграл: $-\frac{u^{-r}}{r}+\frac{v^s}{s}=C$, нужно положить в нем $u=x^a y^b$, $v=x^c y^g$. Если $ag-bc=0$, то поступаем иначе: положив $\frac{b}{c}=\frac{b}{g}=\lambda$, откуда $a=c\lambda$, $b=g\lambda$, перепишем уравнение в виде $\left(c\frac{dx}{x}+g\frac{dy}{y}\right)(\lambda+x^m y^n)=0$, откуда 1) $c\frac{dx}{x}+g\frac{dy}{y}=0$, $c\log x+g\log y=\log C$ или $x^c y^g=C$ — общий интеграл и 2) $x^m y^n+\lambda=0$ — решение частное или особенное

$$\left(\text{частное при } \frac{m}{c}=\frac{n}{g}\right).$$

*Пример 3.* $2xdy-6ydx+xy(xdy-ydx)=0$.

Переписав в виде:

$$2\frac{dy}{y}-6\frac{dx}{x}+xy\left(\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}\right)=0,$$

полагаем $u=y^2x^{-6}$, $v=yx^{-1}$, откуда $2\log y-6\log x=\log u$, $\log y-\log x=\log v$,

$$2\frac{dy}{y}-6\frac{dx}{x}=\frac{du}{u},\quad \frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=\frac{dv}{v},$$

и далее: $4\log x=2\log v-\log u$, $4\log y=6\log v-\log u$,

$$x=u^{-\frac{1}{4}}v^{\frac{1}{2}},\quad y=u^{-\frac{1}{4}}v^{\frac{3}{2}},\quad xy=u^{-\frac{1}{2}}v^2.$$

Данное уравнение принимает вид: $\frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}+vdv=0$, откуда

$$2\sqrt{u}+\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}C,\quad 4\sqrt{u}+v^2=C,\quad \frac{4y}{x^3}+\frac{y^2}{x^2}=C,\quad xy^2+4y=Cx^2 -$$

общий интеграл.

Проверка: Дифференцируя общий интеграл, находим:

$$y^2+y'(2xy+4)=3Cx^2;$$

исключая из двух уравнений $C$, находим $3(xy^2+4y)=x[y^2+y'(2xy+4)]$, что, по сокращении на 2, дает данное дифференциальное уравнение.

*Класс 4.* Однородные уравнения. Так называются уравнения

$$\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy=0,$$

где $\varphi$ и $\psi$ — однородные функции одной и той же степени $m$-й. Полагая $y=xz$, имеем:

$$\varphi(x,y)=\varphi(x,xz)=x^m\varphi(1,z),\quad \psi(x,y)=x^m\psi(1,z),\quad dy=zdx+xdz;$$

данное уравнение, по сокращении на $x^m$, приводится к уравнению 2-го класса

$$dx[\varphi(1, z) + z\psi(1, z)] + x\psi(1, z)dz = 0$$

и дает:

$$\frac{dx}{x} + F(z)dz = 0, \text{ где } F(z) = \frac{\psi(1, z)}{\varphi(1, z) + z\psi(1, z)};$$

беря квадратуры, находим:

$$\log x + \int F(z)dz = \log C, \; x = Ce^{-\int F(z)dz},$$

где после интегрирования нужно заменить $z$ на $\frac{y}{x}$.

*Пример 4.* $4x^2 + 3xy + y^2 + y'(x^2 + 3xy + 4y^2) = 0.$

Умножая на $\frac{dx}{x^2}$ и полагая $\frac{y}{x} = z$, находим:

$$dx(4 + 3z + z^2) + (zdx + xdz)(1 + 3z + 4z^2) = 0$$

или

$$4(1 + z + z^2 + z^3)dx + x(1 + 3z + 4z^2)dz = 0.$$

Отделяя переменные, находим:

$$4\frac{dx}{x} + \frac{3z(z + 1) + (z^2 + 1)}{(1 + z)(1 + z^2)}dz = 0.$$

Беря квадратуры, имеем:

$$4\log x + \frac{3}{2}\log(1 + z^2) + \log(1 + z) = \frac{1}{2}\log C,$$

откуда $x^8 \cdot (1 + z^2)^3 \cdot (1 + z)^2 = C$ или $(x^2 + y^2)^3(x + y)^2 = C$ — общий интеграл.

*Класс 5.* Уравнения, приводимые к однородным: $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$. Если здесь $ab_1 - a_1b$ не $= 0$, то, полагая $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ и определяя $\alpha$ и $\beta$ из системы $a\alpha + b\beta + c = 0$, $a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$, находим:

$$ax + by + c = au + bv, \quad a_1x + b_1y + c_1 = a_1u + b_1v, \quad y' = \frac{dv}{du},$$

после чего данное уравнение приводится к классу 4-му: $\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{a_1u + b_1v}\right)$. Найдя его общий интеграл, остается ввести $u = x - \alpha$, $v = y - \beta$. Если же $ab_1 - a_1b = 0$, то, полагая $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, вводим новую неизвестную функцию $z = ax + by$; тогда $a_1x + b_1y = \lambda z$, $z' = a + by'$, и уравнение принимает вид: $\frac{z' - a}{b} = f\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right) = F(z)$, и приводится к классу 2-му: $\frac{dz}{a + bF(z)} = dx$, откуда $x + C = \int \frac{dz}{a + bF(z)}$ — его общий интеграл, в котором $z = ax + by$.

*Пример 5.* $x - y + 3 + y'(3x + y + 1) = 0.$

Полагая $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, находим из системы:

$\alpha - \beta + 3 = 0$, $3\alpha + \beta + 1 = 0$ значения: $\alpha = -1$, $\beta = 2$.

Уравнение обращается в $\frac{dv}{du}+\frac{u-v}{3u+v}=0$ и при подстановке: $\frac{v}{u}=z$ принимает вид: $u\frac{dz}{du}+\frac{(1+z)^2}{3+z}=0$ или $\frac{(3+z)dz}{(1+z)^2}+\frac{du}{u}=0$, откуда

$-\frac{2}{z+1}+\log(z+1)+\log u=\log C$, $u(z+1)=Ce^{\frac{z}{z+1}}$, $v+u=Ce^{\frac{2u}{v+u}}$,

$x+y-1=Ce^{\frac{2(x+1)}{x+y-1}}$.

*Пример 6.* $y'=\sin^2(x+y-1)$. Полагая $z=x+y-1$, имеем:

$$y'=z'-1=\sin^2 z,\ \frac{dz}{1+\sin^2 z}=dx,$$

откуда

$$x+C=\int\frac{-d\cot z}{2+\cot^2 z}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{\cot z}{\sqrt{2}}\right),\ \cot z=\sqrt{2}\cot(x\sqrt{2}+C_1),$$

где $C_1=C\sqrt{2}$, и окончательно: $\cot(x+y-1)=\sqrt{2}\cot(x\sqrt{2}+C_1)$.

*Класс 6.* Линейные уравнения $y'+Py=Q$, где $P$ и $Q$ — функции от $x$.

*Способ Бернулли.* Положив $y=uv$, дадим уравнению вид:

$$v'u+v(u'+Pu)=Q.$$

Определим $u$ из уравнения $u'+Pu=0$, что дает $\frac{du}{u}+P\cdot dx=0$, $\log u+\int P\cdot dx=0$ (для $u$ достаточно взять частное значение), $u=e^{-\int P\cdot dx}$. Теперь $v$ определяется уравнением: $v'=\frac{Q}{u}=Q\cdot e^{\int -P\cdot dx}$, откуда

$$v=C+\int Q\cdot e^{\int P\cdot dx}\cdot dx$$

и окончательно $y=u\cdot v=Ce^{-\int Pdx}+e^{-\int Pdx}\cdot\int Q\cdot e^{\int Pdx}\cdot dx$ — общий интеграл.

*Способ Эйлера* (способ множителя). Здесь коэффициент при $y'$ предполагается $=1$; тогда, умножая данное уравнение на $e^{\int Pdx}$, находим:

$$y'\cdot e^{\int Pdx}+y\cdot e^{\int Pdx}\cdot P=Q\cdot e^{\int Pdx}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left\{y\cdot e^{\int Pdx}\right\}=Q\cdot e^{\int Pdx},\ \text{откуда}\ y\cdot e^{\int Pdx}=C+\int Q\cdot e^{\int Pdx}\cdot dx,$$

т.-е. прежний результат.

Отметим, что $e^{k\log\varphi(x)}=[e^{\log\varphi(x)}]^k=[\varphi(x)]^k$.

*Пример 7.* $y'-\frac{x+1}{x^2+2x-1}\cdot y=\frac{x-1}{x^2+2x-1}$.

Составляем множитель:

$$e^{-\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}dx} = e^{-\frac{1}{2}\log(x^2+2x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}.$$

По умножении данного уравнения на этот множитель, оно обращается в:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{y}{\sqrt{x^2+2x-1}}\right\} = \frac{x-1}{(x^2+2x-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Отсюда

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+2x-1}} = C + \int \frac{x-1}{(x^2+2x-1)^{\frac{3}{2}}}dx = C + \frac{x}{\sqrt{x^2+2x-1}}$$

(См. отд. I, гл. III, §2, 3 случай, замеч.), откуда $y = C\sqrt{x^2+2x-1} + x$.

*Класс 7.* Уравнения Бернулли $y' + P \cdot y = Q \cdot y^n$, где $P$ и $Q$ функции от $x$. Разделив уравнение на $y^n$, получим $y'y^{-n} + Py^{-(n-1)} = Q$; положив $z = y^{-(n-1)}$, $z' = -(n-1)y^{-n} \cdot y'$, приводим данное уравнение к линейному: $-\frac{1}{(n-1)}z' + Pz = Q$ (множитель его будет $e^{-(n-1)\int Pdx}$).

*Пример 8.* $2y'(x^2+a^2) - xy + xy^2(3x^2+2a^2) = 0$.

Полагая

$$\frac{1}{y^2} = z, \quad -\frac{2y'}{y^3} = z',$$

получаем:

$$z' + \frac{x}{x^2+a^2} \cdot z = \frac{x(3x^2+2a^2)}{x^2+a^2}.$$

Множитель равен

$$e^{\int \frac{xdx}{x^2+a^2}} = e^{\frac{1}{2}\log(x^2+a^2)} = \sqrt{x^2+a^2};$$

после умножения, уравнение даст:

$$\frac{d}{dx}\left\{z \cdot \sqrt{x^2+a^2}\right\} = \frac{x(3x^2+a^2)}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

откуда

$$z \cdot \sqrt{x^2+a^2} = C + \int \frac{x(3x^2+a^2)dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = C + x^2 \cdot \sqrt{x^2+a^2}$$

(подстановкой $x^2+a^2 = t^2$), $z = \frac{1}{y^2} = \frac{C}{\sqrt{x^2+a^2}} + x^2$.

*Класс 8.* Уравнение Дарбу: $f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = \psi(x, y) \cdot (x\,dy - y\,dx)$, где $f$ и $\varphi$ — однородные функции одной степени $m$, $\psi$ — однородная функция степени $n$.

По свойству однородных функций имеем:

$f(x, y) = x^m f(1, z)$, $\varphi(x, y) = x^m \varphi(1, z)$, $\psi(x, y) = x^n \psi(1, z)$, где $z = \frac{y}{x}$.

Внося в уравнение $dy = xdz + zdx$, $xdy - ydx = x^2dz$ и сокращая на $x^m$, получим:

$$\{f(1, z) + z \cdot \varphi(1, z)\}dx + x \cdot \varphi(1, z)dz = x^{n-m+2}\psi(1, z)dz$$

или

$$\frac{dx}{dz} + xP(z) = x^{n-m+2} \cdot Q(z),$$

где

$$P(z) = \frac{\varphi(1, z)}{f(1, z) + z\varphi(1, z)}, \quad Q(z) = \frac{\psi(1, z)}{f(1, z) + z\varphi(1, z)}.$$

Таким образом приходим к уравнению Бернулли для $x$ как функции от $z$.

*Пример 9.* $x^2 + 2y^2 - xyy' = xy' - y$. Здесь $m = 2$, $n = 0$.

Полагая $\frac{y}{x} = z$ и деля уравнение на $x^2$, получаем:

$$dx(1 + z^2) - xzdz = dz$$

или

$$\frac{dx}{dz} - \frac{z}{1 + z^2} \cdot x = \frac{1}{1 + z^2}$$

линейное уравнение. Множитель его $\frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$; по умножении имеем:

$$\frac{x}{\sqrt{1 + z^2}} = C + \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \text{ или } x^2 - y = C\sqrt{x^2 + y^2}.$$

**§ 2. Классы уравнений 1-го порядка и высших степеней относительно $y'$, интегрируемые в квадратурах.**

*Класс 1.* Уравнения, не содержащие $y$: $f(x, p) = 0$, где $p = y'$.

*Случай 1.* Уравнение решается относительно $p$ и дает $y' = \varphi(x)$; тогда $y = \int \varphi(x)dx + C$ есть общий интеграл.

*Случай 2.* Уравнение решается относительно $x$ и дает $x = \varphi(p)$. Дифференцируя, находим: $dx = \varphi'(p)dp$, но $dx = \frac{dy}{p}$, следовательно $dy = p\varphi'(p)dp$, откуда $y = C + \int p\varphi'(p)dp$; присоединяя сюда $x = \varphi(p)$, получаем параметрическое представление общего интеграла.

Если возможно, $p$ исключается, и получается общий интеграл в виде $F(x, y, C) = 0$.

*Пример 1.* $x = y' + \log y'$. Полагая $y' = p$ и дифференцируя, имеем:

$$dx = \frac{dy}{p} = dp + \frac{dp}{p},$$

откуда $dy = pdp + dp$, $y + C = \frac{1}{2}p^2 + p$. Общий интеграл определяется системою $x = p + \log p$, $y + C = \frac{1}{2}p^2 + p$. Здесь $p$ можно исключить: переписав последнее уравнение в виде: $2y + C_1 = p^2 + 2p + 1$ (где $C_1 = 2C + 1$), находим: $p = -1 + \sqrt{2y + C_1}$, $x + 1 - \sqrt{2y + C_1} = \log(\sqrt{2y + C_1} - 1)$.

*Случай 3.* Уравнение $f(x, p) = 0$ имеет в левой части две группы однородных членов степеней $m$ и $m+1$. Полагая

$$f(x, p) = \varphi_m(x, p) + \varphi_{m+1}(x, p),$$

получаем по свойству однородных функций:

$$x^m \varphi_m(1, t) + x^{m+1} \varphi_{m+1}(1, t) = 0,$$

где $t = \frac{p}{x}$; отсюда $x = -\frac{\varphi_m(1, t)}{\varphi_{m+1}(1, t)} = \varphi(t)$. Далее,

$$dy = pdx = txdx = t\varphi(t)\varphi'(t)dt,$$

откуда $y + C = \int t\varphi(t)\varphi'(t)dt$; присоединяя сюда $x = \varphi(t)$, получаем общий интеграл. Подобный способ прилагается и тогда, когда $f(x, p)$ образует три группы однородных членов степеней $m$, $m+1$, $m+2$.

*Пример 2.* $x + y' = x^2 + y'^2$. Полагая $\frac{y'}{x} = t$, находим:

$$x = \frac{1+t}{1+t^2},\ y + C = \int \frac{t(1+t)(1-2t-t^2)}{(1+t^2)^3} dt = \int \frac{4tdt}{(1+t^2)^3} + \int \frac{(1-3t)dt}{(1+t^2)^3} -$$

$$- \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1+t+3t^2+t^3}{2(1+t^2)^2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t.$$

*Класс 2.* Уравнения, не содержащие $x$: $f(y, p) = 0$, где $p = y'$.

*Случай 1.* Уравнение решается относительно $y'$ и дает $y' = \varphi(y)$; отсюда $\frac{dy}{\varphi(y)} = dx$, $x + C = \int \frac{dy}{\varphi(y)}$.

*Случай 2.* Уравнение решается относительно $y$ и дает $y = \varphi(p)$. Дифференцируя, имеем: $dy = pdx = \varphi'(p)dp$, откуда

$$dx = \frac{\varphi'(p)dp}{p},\ x + C = \int \frac{\varphi'(p)dp}{p},$$

что вместе с $y = \varphi(p)$ дает общий интеграл в параметрической форме.

*Пример 3.* $y = \frac{1}{y'} + y'^2 \cdot e^{y'}$. Здесь $dy = pdx = -\frac{dp}{p^2} + e^p(p^2 + 2p)dp$,

$$dx = -\frac{dp}{p^3} + e^p(p+2)dp,\ x + C = \frac{1}{2p^2} + e^p(p+1),$$

что вместе с $y = \frac{1}{p} + p^2 e^p$ дает параметрическое решение.

*Случай 3.* Левая часть уравнения $f(y, p) = 0$ представляет две группы однородных членов степеней $m$ и $m+1$ (или три группы степеней $m$, $m+1$, $m+2$). Полагая $f(y, p) = \varphi_m(y, p) + \varphi_{m+1}(y, p)$ и $t = \frac{p}{y}$, имеем:

$$\varphi_m(1, t) + y\varphi_{m+1}(1, t) = 0,$$

откуда $y = -\frac{\varphi_m(1, t)}{\varphi_{m+1}(1, t)} = \varphi(t)$; тогда

$$dx = p^{-1} \cdot dy = \frac{dy}{ty} = \frac{\varphi'(t)dt}{t\varphi(t)},\ x + C = \int \frac{\varphi'(t)dt}{t\varphi(t)},$$

что вместе с $y = \varphi(t)$ дает общий интеграл.

*Пример 4.* $yy'^2 = y^4 - y'^4$. Полагая $\frac{y'}{y} = t$, находим:

$$y = \frac{t^2}{1-t^4},\ dx = \frac{dy}{yt} = \frac{d\log y}{t} = \frac{1}{t}\left\{\frac{2}{t} + \frac{4t^3}{1-t^4}\right\},$$

откуда $x + C = -\frac{2}{t} + 2\operatorname{arctg} t + \log\frac{1+t}{1-t}$.

*Класс 3.* Уравнения, содержащие $x$, $y$, $y'$: $f(x, y, p) = 0$.

*Случай 1.* Уравнение $f(x, y, p) = 0$ решается относительно $p$ и дает $n$ решений: $p = f_1(x, y)$, $p = f_2(x, y) \ldots p = f_n(x, y)$. Если эти уравнения относятся к одному из классов §1, то пусть их общие интегралы будут: $y = F_1(x, C)$, $y = F_2(x, C) \ldots y = F_n(x, C)$; тогда общий интеграл уравнения $f(x, y, p) = 0$ можно написать в виде произведения

$$\prod_{j=1}^{n}\left\{y - F_j(x, C)\right\} = 0.$$

Постоянная $C$ во всех функциях $F_j$ берется одна и та же, так как общий интеграл уравнения 1-го порядка должен содержать одну постоянную произвольную.

*Пример 5.* $xy'^2 + (2x^2 - y)y' - 2xy = 0$.

Решая квадратное уравнение относительно $y'$, находим: 1) $y' = \frac{y}{x}$, что дает $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, $\log y = \log x + \log C$, $y = Cx$; 2) $y' = -2x$, $y = C - x^2$. Общий интеграл: $(y - Cx)(y - C + x^2) = 0$ или

$$y(y + x^2) - C(y + xy + x^3) + C^2x = 0.$$

*Случай 2.* Уравнение $f(x, y, p) = 0$ решается относительно $y$ и дает $y = f(x, p)$. Вообще задача решается дифференцированием с заменою $dy$ на $pdx$, что дает уравнение 1-го порядка $\left(p - \frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p}$ для $x$ как функции от $p$. Интегрирование этого уравнения выполняется в квадратурах, между прочим, для следующих двух типов:

*Тип 1.* Уравнение Лагранжа: $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ и, как частный случай, уравнение Клеро: $y = xp + \psi(p)$ (для 1-го типа $f(x, p)$ есть линейная функция от $x$). Дифференцирование дает

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p),$$

т.-е. линейное уравнение для $x$ как функции от $p$; в частности, при $\varphi(p) = p$ (в уравнении Клеро) получается $0 = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]dp$, что дает: 1) $dp = 0$, $p = C$, откуда находим общий интеграл $y = Cx + \psi(C)$, изображающий систему прямых, и 2) $x\varphi'(p) + \psi'(p) = 0$, что вместе с уравнением $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ дает, по исключении $p$, особенное решение; так как особенное решение получается исключением $C$ из уравнений

$$y = Cx + \psi(C),\ \frac{\partial y}{\partial C} = x + \psi'(C) = 0,$$

то оно представляет огибающую прямых, изображаемых общим интегралом.

*Пример 6.* $y = 2xy' + \log y'$. Дифференцирование и замена $dy$ на $pdx$ приводит к уравнению $\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -1$, которое дает $x = \frac{C-p}{p^2}$, что вместе с $y = \frac{2C}{p} - 2 + \log p$ определяет общий интеграл.

*Пример 7.* $y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$. Общий интеграл $y = Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$. Особое решение получается исключением $p$ из уравнений

$$y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},\ 0 = x + \frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}};$$

полагая $p = \operatorname{tg} t$, находим $x = -a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, результат исключения:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \text{ (астроида).}$$

*Тип 2.* Уравнение $y = f(x, p)$, где $f$ есть однородная функция второй степени от $x$ и $p$. Полагая $\frac{p}{x} = t$, имеем $y = x^2 \cdot f(1, t) = x^2\varphi(t)$, откуда

$$dy = pdx = txdx = 2x\varphi(t)dx + x^2\varphi'(t)dt;$$

по сокращении на $x$ получаем: $0 = \frac{dx}{x} + \frac{\varphi'(t)dt}{2\varphi(t) - t}$ — уравнение с отделенными переменными. Отсюда

$$\log C = \log x + \int F(t)dt, \text{ где } F(t) = \frac{\varphi'(t)}{2\varphi(t) - t},\ x = Ce^{-\int F(t)dt};$$

присоединяя сюда $y = x^2\varphi(t)$, получаем общий интеграл.

*Пример 8.* $y = 2y'^2 - \frac{1}{2}xy' - x^2$.

Полагая $t = \frac{y'}{x}$, получаем:

$$y = x^2\left(2t^2 - \frac{1}{2}t - 1\right),\ xt\,dx = 2x\,dx \cdot \left(2t^2 - \frac{1}{2}t - 1\right) + x^2\left(4t - \frac{1}{2}\right)dt;$$

по сокращении на $x$ имеем:

$$0 = \frac{dx}{x} + \frac{4t - \frac{1}{2}}{4t^2 - 2t - 2}dt,$$

откуда

$$\log C = \log x + \frac{7}{12}\log(t-1) + \frac{5}{12}\log(2t+1),\ x = \frac{C}{\sqrt[12]{(t-1)^7(2t+1)^5}};$$

вместе с $y = x^2\left(2t^2 - \frac{1}{2}t - 1\right)$ этим определяется общий интеграл.

*Случай 3.* Уравнение $f(x, y, p) = 0$ решается относительно $x$ и дает $x = f(y, p)$. Если ввести $q = \frac{1}{p} = \frac{dx}{dy}$, то получится $x = f\left(y, \frac{1}{q}\right) = f_1(y, q)$, и случай 3-й выводится из 2-го перестановкой букв $x$ и $y$, при которой $p$ обращается в $q$. Поэтому типы 1-й и 2-й случая 2-го теперь заменяются

следующими: *тип 1:* $x = y\varphi_1(q) + \psi_1(q)$, который совпадает с типом 1-м случая 2-го, ибо дает

$$y = \frac{x}{\varphi_1(q)} - \frac{\psi_1(q)}{\varphi_1(q)} = x\varphi(p) + \psi(p);$$

*тип 2:* $x = f_1(y, q)$, где $f_1$ — однородная функция 2-й степени относительно $y$ и $q$. Полагая $\frac{q}{y} = t$, найдем:

$$x = y^2\varphi(t),\ dx = qdy = ytdy = 2y\varphi(t)dy + y^2\varphi'(t)dt,$$

откуда

$$0 = \frac{dy}{y} + \frac{\varphi'(t)dt}{2\varphi(t) - t},\ \log C = \log y + \int F(t)dt,\ y = Ce^{-\int F(t)dt},$$

что вместе с $x = y^2\varphi(t)$ определит общий интеграл.

*Пример 9.* $xy'^2 = 1 - \frac{3}{2}yy'$. Полагая $q = \frac{1}{y'} = ty$, имеем:

$$x = y^2\left(t^2 - \frac{3}{2}t\right),\ dx = tydy = 2y\left(t^2 - \frac{3}{2}t\right)dy + y^2\left(2t - \frac{3}{2}\right)dt.$$

По сокращении на $y$ имеем:

$$0 = \frac{dy}{y} + \frac{2t - \frac{3}{2}}{2(t-2)t}dt = 0,\ \log C = \log y + \frac{3}{8}\log t + \frac{5}{8}\log(t-2),$$

$$y = \frac{C}{\sqrt[8]{t^3(t-2)^5}},$$

что вместе с $x = y^2\left(t^2 - \frac{3}{2}t\right)$ определяет общий интеграл.

## § 3. Об особенных решениях уравнений 1-го порядка.

*Теорема 1.* Если известен общий интеграл $F(x, y, C) = 0$ дифференциального уравнения 1-го порядка $y' = f(x, y)$, то исключением $C$ из системы: $F = 0$, $F'_c = 0$ получаются выражения $y = \varphi(x)$, которые могут быть особенными решениями данного дифференциального уравнения.

Действительно, если $F(x, y, C) = 0$ есть общий интеграл данного уравнения $y' = f(x, y)$, то исключение $C$ из системы $F = 0$, $F'_x + F'_y \cdot y' = 0$ должно давать уравнение $y' = f(x, y)$ или, что равносильно, исключение $C$ из системы $F = 0$, $F'_x + F'_y \cdot f(x, y) = 0$ должно приводить к тождеству $0 = 0$. Будем теперь считать $C$ в уравнении $F(x, y, C) = 0$ не постоянным, а функцией от $x$; тогда результат дифференцирования по $x$ будет:

$$F'_x + F'_y \cdot y' + F'C \cdot \frac{dC}{dx} = 0,$$

и, следовательно, исключение $C$ из системы, содержащей последнее уравнение и уравнение $F = 0$, должно приводить к результату $y' = f(x, y)$ или, что то же, определив $C$ из уравнения $F = 0$ и внеся его значение в уравнение

$$F'_x + F'_y \cdot f(x, y) + F'C \cdot \frac{dC}{dx} = 0,$$

мы должны получить тождество $0 = 0$. Сравнивая этот результат с предъидущим, приходим к заключению, что $F'C \cdot \frac{dC}{dx} = 0$, и так как $C$ не есть

постоянная, то $F'C=0$; таким образом система $F=0$, $F'C=0$ может, по исключении $C$, обнаружить особенные решения.

*Пример.* В уравнении Клеро (§2) $y=xp+\psi(p)$ общий интеграл $F(x, y, C)=y-Cx-\psi(C)$, следовательно $F'C=-x-\psi'(C)$, и особенное решение находится исключением $C$ из системы $y=Cx+\psi(C)$, $0=x+\psi'(C)$, как было найдено в §2.

*Замечание.* Так как огибающая кривая имеет с каждою огибаемою общую касательную в характеристической точке, то система огибаемых $F(x, y, C)=0$ и огибающая, получаемая исключением $C$ из уравнений $F=0$, $F'C=0$, будут обладать одним и тем же свойством касательных, изображаемым уравнением $y'=f(x, y)$.

Огибаемые представят общий интеграл, а огибающая — особенное решение. Но известно, что исключение $C$ из системы $F=0$, $F'C=0$ не всегда дает огибающую, а иногда определяет общее место особенных точек, следовательно и особенное решение получается способом, указанным в теореме 1, лишь тогда, когда оно представляет огибающую кривую, а не общее место особенных точек.

*Теорема 2.* Если дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид $f(x, y, p)=0$, где $f$ есть целая функция относительно $p=y'$, то особенное решение можно получить, исключая $p$ из системы: $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial p}=0$.

Действительно, согласно предыдущему замечанию, в точках $(x, y)$, принадлежащих огибающей, угловой коэффициент касательной $p=y'$ имеет по крайней мере два равных значения, отвечающих огибающей и одной по крайней мере из огибаемых, а тогда должно быть выполнено условие $\frac{\partial f}{\partial p}=0$, следовательно огибающая найдется исключением $p$ из системы: $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial p}=0$, что и требуется доказать.

*Пример.* Для уравнения: $(x+yy')^2-(x^2+y^2-a^2)=0$, находим $\frac{\partial f}{\partial p}=2(x+yy')y=0$, что дает $x+yy'=0$ и $y=0$; исключение $p$ из уравнений $f=0$, $x+yy'=0$ дает особенное решение $x^2+y^2=a^2$ (исключение $y'$ из уравнений $f=0$, $y=0$ приводит к противоречию).

## § 4. Геометрические задачи.

1°. Задача об изогональных траекториях.

Дана система линий $f(x, y, a)=0$, зависящих от произвольного параметра $a$. Найти их изогональные траектории, т.-е. такие линии, которые каждую из данных линий пересекают под постоянным углом $\omega$.

Обозначая через $\alpha_1$ и $\alpha$ углы, составляемые с осью $OX$ касательными к искомой и к данной кривой, имеем $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{f'_x(x, y, a)}{f'_y(x, y, a)}$ или, внося сюда значение $a$ из уравнения $f(x, y, a)=0$, $\operatorname{tg}\alpha=\varphi(x, y)$; далее, $\operatorname{tg}\alpha_1=y'$ из уравнения искомой кривой, и по условию изогональности имеем:

$$\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}(\alpha-\alpha_1)=\frac{\varphi(x, y)-y'}{1+\varphi(x, y)\cdot y'},$$

что дает дифференциальное уравнение для определения искомых траекторий. В частности, для ортогональных траекторий, когда $\omega = \frac{\pi}{2}$, имеем:

$$1 + \varphi(x, y) \cdot y' = 0.$$

*Пример 1.* Найти ортогональные траектории гипербол $xy = \pm a^2$. Здесь $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{y}{x} = \varphi(x, y)$, следовательно $y' = \frac{x}{y}$, $2ydy - 2xdx = 0$, $y^2 - x^2 = \pm b^2$, т.-е. те же гиперболы, повернутые на угол 45° около начала.

*Пример 2.* Найти ортогональные траектории парабол: $y^2 = \pm 2px$. Здесь $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\pm p}{y} = \frac{y}{2x} = \varphi(x, y)$, следовательно, $y' = -\frac{2x}{y}$, $ydy + 2xdx = 0$, $x^2 + \frac{y^2}{2} = a^2$, т.-е. эллипсы с эксцентриситетом $= \frac{1}{\sqrt{2}}$.

*Замечание.* В полярных координатах условие изогональности будет $\omega = \mu - \mu_1$, где $\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\theta}{dr}$ из уравнения данных кривых $f(r, \theta, a) = 0$, причем, после замены $a$ его выражением из последнего уравнения, выходит $\operatorname{tg}\mu = F(r, \theta)$. Дифференциальное уравнение траекторий будет

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{F(r, \theta) - \frac{rd\theta}{dr}}{1 + \frac{rd\theta}{dr} F(r, \theta)}.$$

*Пример 3.* Найти ортогональные траектории лемнискат $r^2 = a^2 \sin 2\theta$. Имеем $\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg} 2\theta$, $\mu = 2\theta$, откуда $\mu_1 = \mu - \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\mu_1 = -\cot 2\theta = \frac{rd\theta}{dr}$, $\frac{dr}{r} = -\operatorname{tg} 2\theta d\theta$, $\log r = \log b + \frac{1}{2}\log\cos 2\theta$, $r^2 = b^2 \cos 2\theta$ — те же лемнискаты, повернутые на угол $\frac{\pi}{4}$ около полюса.

2°. Задача о нахождении эвольвенты по данной эволюте:

$$x_c = \varphi(t), \; y_c = \psi(t).$$

Берем уравнения:

$$\frac{dy_c}{dx_c} = -\frac{dx}{dy} = \frac{y - y_c}{x - x_c},$$

выражающие, что прямая $CM$, соединяющая точку $C(x_c, y_c)$ эволюты с точкою $M(x, y)$ эвольвенты, есть касательная к эволюте в точке $C$ и нормаль к эвольвенте в точке $M$. Из уравнения $\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y - \psi(t)}{x - \varphi(t)}$ находим: $y = x \cdot \lambda(t) + \mu(t)$ (1); из уравнения $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ имеем $\frac{dy}{dt} = \rho(t) \cdot \frac{dx}{dt}$ (2).

Дифференцируя уравнение (1) по $t$, получаем:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}\lambda(t) + x\lambda'(t) + \mu'(t)$$

или, на основании (2):

$$\frac{dx}{dt}\Big[\lambda(t) - \rho(t)\Big] + x\lambda'(t) + \mu'(t) = 0 -$$

линейное уравнение для $x$ как функции $t$; общий интеграл его вместе со значением $y$ из (1) и даст систему эвольвент, которые представляются параллельными кривыми, как известно из геометрических приложений дифференциального исчисления.

*Пример 4.* Найти эвольвенты окружности $x_c^2 + y_c^2 = a^2$. Полагая $x_c = a\cos t$, $y_c = a\sin t$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{\sin t} - x \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} = -a\cot t.$$

Отсюда $x = a(\cos t + t\sin t) + C\sin t$ и, далее, $y = a(\sin t - t\cos t) - C\cos t$.

3°. Найти кривую по данному свойству длины касательной $T$, длины нормали $N$, подкасательной $S_t$ и поднормали $S_n$, которое выражается уравнением $f(T, N, S_t, S_n, x, y) = 0$.

Вносим сюда выражения:

$$T = \frac{y}{\sin\alpha}, \quad N = \frac{y}{\cos\alpha}, \quad S_t = -y\cot\alpha, \quad S_n = y\operatorname{tg}\alpha$$

и получаем зависимость $F(x, y, \alpha) = 0$; присоединяя сюда уравнение $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, можем выразить $x$ и $y$ через $\alpha$ и постоянную $C$.

*Пример 5.* Найти плоскую кривую в прямоугольных координатах, обладающую свойством $N^2 + T^2 = a^2$.

Это уравнение дает $y = a\sin\alpha\cos\alpha$, после чего

$$dx = \operatorname{cotg}\alpha\, dy = a\,[\cot\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha]\,d\alpha,$$

откуда

$$x - x_0 = a\,[\log\sin\alpha - \sin^2\alpha].$$

*Пример 6.* Найти плоскую кривую в полярных координатах, обладающую свойством $N \cdot T = a^2$.

Вводя $N = \frac{r}{\sin\mu}$, $T = \frac{r}{\cos\mu}$, получаем: $r = a\sqrt{\sin\mu\cos\mu}$ и, далее, $\operatorname{tg}\mu = \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{d\log r}$, откуда

$$d\theta = \operatorname{tg}\mu \cdot d\log r = d\mu - \frac{1}{2}\frac{d\mu}{\cos^2\mu}, \quad \theta - \theta_0 = \mu - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\mu.$$

Глава III.

# Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков.

## § 1. Дифференциальные уравнения высшего порядка, интегрирующиеся в квадратурах.

*Класс 1.* Уравнения: $y^{(n)} = f(x)$. Интегрируя обе части последовательно $n$ раз, находим:

$$y^{(n-1)} = C_1 + \int f(x)\,dx,\ y^{(n-2)} = C_2 + C_1 x + \int\int f(x)\,dx^2,$$

$$y^{(n-3)} = C_3 + C_2 x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + \int\int\int f(x)\,dx^3 \ldots$$

$$y = C_n + C_{n-1} x + \frac{1}{2} C_{n-2} x^2 + \ldots + \frac{C_1 x^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots (n-1)} + \underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} f(x)\,dx^n;$$

таким образом в состав общего интеграла входит произвольная целая функция степени $(n-1)$-й. Общий интеграл $y$ можно представить определенным интегралом

$$y = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)} \cdot \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\,dt,$$

как легко проверить, составляя $\frac{d^n y}{dx^n}$ по правилу дифференцирования по параметру (отдел II, гл. II, § 5).

*Пример 1.* $y^{\mathrm{IV}} = e^{-x}$, $y = e^{-x} + C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$.

*Класс 2.* Уравнения вида $f(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, решаемые относительно $y^{(n-1)}$ или $y^{(n)}$.

*Случай 1.* Уравнение решается относительно $y^{(n)}$ и дает

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}).$$

Вводя новую неизвестную функцию $y^{(n-1)} = z$, получаем: $z' = f(z)$, $\frac{dz}{f(z)} = dx$, $x + C = \int \frac{dz}{f(z)}$. Если, затем, это уравнение решается относительно $z$, то получается $z = y^{(n-1)} = \varphi(x, C)$ — уравнение 1-го класса.

*Пример 2.* $y''^2 + y'''^2 = 1$. Полагая $z = y''$, $z' = y'''$, получаем: $z' = \sqrt{1 - z^2}$, $\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \arcsin z = x + C$, $z = y'' = \sin(x + C)$, откуда

$$y = -\sin(x + C) + C_1 + C_2 x.$$

*Пример 3.* $y''(1 + 2\log y') = 1$. Полагая $y' = z$, $y'' = z'$, имеем:

$$dz(1 + 2\log z) = dx,\ x + C_1 = z(2\log z - 1).$$

Это уравнение не решается относительно $z$; поэтому найдем параметрическое выражение общего интеграла; именно $dy = zdx = dz(z + 2z\log z)$, откуда $y + C_2 = z^2\log z$, что вместе с $x + C_1 = z(2\log z - 1)$ определяет общий интеграл.

*Случай 2.* Уравнение $f(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ решается относительно $y^{(n-1)}$ и дает $y^{(n-1)} = f(y^{(n)})$.

Полагая $y^{(n-1)} = z$, $y^{(n)} = z'$, получаем $z = f(z')$, т.-е. приходим к главе II, § 2, класс 2, случай 2; если общий интеграл этого уравнения можно представить в виде $z = y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1)$, то задача приводится к главе III, класс 1.

*Пример 4.* $3(y'' + y'''^2) = 2y'''^3$.

Полагая $y'' = z$, $y''' = z'$, имеем: $z = \frac{2}{3}z'^3 - z'^2$, откуда $dz = z'dx = 2z'^2dz' - 2z'dz'$; оставляя в стороне особенное решение $z' = 0$, дающее $z = 0$, $y = c_1 + c_2x$, получаем: $dx = 2z'dz' - 2dz'$, $x + C_1 = (z' - 1)^2$, $z' = 1 + \sqrt{x + C_1}$, $z = C + x + \frac{2}{3}(x + C_1)^{\frac{3}{2}}$; так как $z$ и $z'$ связаны уравнением

$$z = \frac{2}{3}z'^3 - z'^2,$$

то отсюда выходит:

$$C = C_1 - \frac{1}{3},\ z = C_1 - \frac{1}{3} + x + \frac{2}{3}(x + C_1)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = C_3 + C_2x + \frac{1}{2}\left(C_1 - \frac{1}{3}\right)x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{105}(x + C_1)^{\frac{7}{2}}.$$

*Класс 3.* Уравнения $f(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$, решаемые относительно $y^{(n)}$ или $y^{(n-2)}$.

*Случай 1.* Уравнение решается относительно $y^{(n)}$ и дает $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$; полагая $y^{(n-2)} = z$, $y^{(n)} = z''$, находим: $z'' = f(z)$ или

$$\frac{dz'}{dx} = \frac{dz'}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{z'dz'}{dz} = f(z),$$

откуда

$$2z'dz' = 2 \cdot f(z)dz,\ z'^2 = C_1 + 2\int f(z)dz,$$

$$z' = \frac{dz}{dx} = \sqrt{C_1 + 2\int f(z)dz},\ \int \frac{dz}{\sqrt{C_1 + 2\int f(z)dz}} = x + C_2.$$

*Пример 5.* $4y''\sqrt{y}=1$. По отделении переменных имеем:

$$2y'dy'=\frac{dy}{2\sqrt{y}}\,,\quad y'^2=C_1+\sqrt{y},\ x+C_2=\int\frac{dy}{\sqrt{C_1+\sqrt{y}}}\,,$$

$$3x+C_2=4\sqrt{C_1+\sqrt{y}}\cdot(\sqrt{y}-2C_1).$$

*Случай 2.* Уравнение решается относительно $y^{(n-2)}$ и дает: $y^{(n-2)}=f(y^{(n)})$; полагая $y^{(n-2)}=z$, $y^{(n)}=z''$, находим $z=f(z'')$, откуда $dz=z'dx=\frac{z'dz'}{z''}=f'(z'')dz''$, или $2z'dz'=2z''f'(z'')dz''$; это дает: $z'^2=C_1+2\int z''\cdot f'(z'')dz''$,

$$z'=\frac{f'(z'')dz''}{dx}=\sqrt{C_1+2\int z''\cdot f'(z'')dz''},$$

откуда
$$x+C_2=\int\frac{f'(z'')\cdot dz''}{\sqrt{C_1+2\int z''\cdot f'(z'')dz''}}\,.$$

*Пример 6.* $y=\log y''$. Дифференцированием находим:

$$dy=y'dx=y'\cdot\frac{dy'}{y''}=\frac{dy''}{y''}\,,$$

откуда $y'dy'=dy''$, $y'^2=C_1+2y''$, $y'=\sqrt{C_1+2y''}=\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{dy''}{y''}\right)}{dx}$,

$$dx=\frac{dy''}{y''\cdot\sqrt{C_1+2y''}}\,,\ x+C_2=\frac{1}{\sqrt{C_1}}\log\frac{t-\sqrt{C_1}}{t+\sqrt{C_1}}\ (\text{при } C_1>0),$$

где
$$t=\sqrt{C_1+2y''}=\sqrt{C_1+2e^y}.$$

## § 2. Уравнения, допускающие понижение порядка.

*Класс 1.* Уравнения вида $f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots y^{(n)})=0$, не содержащие $y, y', y'', \dots y^{(k-1)}$, допускают понижение порядка на $k$ единиц при введении новой неизвестной функции $y^{(k)}=z$, ибо данное уравнение принимает вид: $f(x, z, z', \dots z^{(n-k)})=0$.

*Пример 1.* $2xy'''-y''=\frac{y''^3}{x^2}$.

Полагая $y''=z$, $y'''=z'$, приходим к уравнению Бернулли

$2xz'-z=\frac{1}{x^2}z^3$, из которого находим $z=y''=\frac{x}{\sqrt{C_1x+1}}$, откуда

$$y=C_3+C_2x+\frac{4}{15C_1^3}(C_1x+1)^{\frac{3}{2}}(C_1x-4).$$

*Класс 2.* Уравнения $f(y, y', y'', \dots y^{(n)})=0$, не содержащие $x$, приводятся к порядку $n-1$, если взять за новую независимую переменную $y$, а за новую неизвестную функцию $z=y'$. Именно,

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z\cdot\frac{dz}{dy}\,,\ y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=$$

$$=z\cdot\frac{d}{dy}\left\{z\frac{dz}{dy}\right\}=z^2\cdot\frac{d^2z}{dy^2}+z\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)^2,$$

$$\dots y^{(n)}=z^{n-1}\cdot\frac{d^{n-1}z}{d\,y^{n-1}}+\dots+z\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)^{n-1},$$

и данное уравнение обращается в уравнение $(n-1)$ порядка:

$$F(y,\ z,\ z',\ldots z^{(n-1)})=0.$$

Если его общий интеграл $z=\varphi(y,\ C_1,\ C_2,\ldots C_{n-1})$ найден, то остается взять квадратуру:

$$x+C_n=\int\frac{dy}{\varphi(y,\ C_1,\ldots C_{n-1})},$$

чтобы получить общий интеграл первоначального уравнения.

*Пример 2.* $yy''+y'^2=1$.

Полагая $y'=z$, $y''=z\dfrac{dz}{dy}$, приходим к уравнению Бернулли $yz\dfrac{dz}{dy}+z^2=1$, из которого $z^2=\dfrac{C_1+y^2}{y}$, $z=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{C_1+y^2}}{y}$, $dx=\dfrac{ydy}{\sqrt{C_1+y^2}}$, $(x+C_2)^2=y^2+C_1$.

*Класс 3.* Уравнения, однородные относительно $y,\ y',\ldots y^{(n)}$ (при чем $x$ может входить, как угодно); если степень однородности такого уравнения будет $k$, то, по разделении на $y^k$, уравнение принимает вид:

$$f\left(x,\ \frac{y'}{y},\ \frac{y''}{y},\ \ldots\frac{y^{(n)}}{y}\right)=0$$

и введением новой неизвестной функции $z=\dfrac{y'}{y}$ приводится к $(n-1)$ порядку. Именно, $y'=y\cdot z$, следовательно:

$$y''=y'z+yz'=y(z^2+z');$$

далее: $y'''=y'(z^2+z')+y(2zz'+z'')=y(z^3+3zz'+z'')=\ldots y^{(n)}=$
$=y(z^n+\ldots+z^{(n-1)})$;

преобразованное уравнение будет:

$$F(x,\ z,\ z',\ldots z^{(n-1)})=0;$$

если найден его общий интеграл

$$z=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ldots C_n),$$

то останется проинтегрировать уравнение:

$$\frac{dy}{y}=z\cdot dx,\ \text{откуда}\ \log y=\log C_n+\int z\cdot dx,\ x=C_n\cdot e^{\int z\cdot dx}.$$

*Пример 3.* $xy'(yy''-y'^2)-yy'^2=x^4y^3$.

Деля на $y^3$ и полагая $\dfrac{y'}{y}=z$, $\dfrac{y''}{y}=z'+z^2$, находим уравнение Бернулли:

$$xzz'-z^2=x^4,$$

откуда

$$z^2=x^2(C_1+x^2),\ z=\frac{y'}{y}=x\sqrt{C_1+x^2},\ \log y=$$

$$=\log C_2+\frac{1}{3}(C_1+x^2)^{\frac{3}{2}},\ y=C_2e^{\frac{1}{3}(C_1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

## § 3. Геометрические задачи.

*Задача 1.* Найти кривые, у которых радиус кривизны $R$ представляет данную функцию от одной из координат и от угла $\alpha$, образуемого касательною с осью абсцисс: $R=f(x, \alpha)$ или $R=f(y, \alpha)$.

Берем выражение $R=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{dx}{d\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{dy}{d\alpha}$ и приходим к уравнению $\frac{dx}{d\alpha}=\cos\alpha\cdot f(x, \alpha)$ или $\frac{dy}{d\alpha}=\sin\alpha\cdot f(y, \alpha)$; когда одна координата определена как функция от $\alpha$ и от постоянной произвольной, то другая найдется из соотношения: $dy=dx\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

*Замечание.* В более общем случае, когда $R=f(x, y, \alpha)$, задача приводится к интегрированию системы совокупных дифференциальных уравнений: $\frac{dx}{d\alpha}=\cos\alpha\cdot f(x, y, \alpha)$, $\frac{dy}{d\alpha}=\sin\alpha\cdot f(x, y, \alpha)$ (см. гл. V).

*Пример 1.* Найти кривые в прямоугольных координатах, у которых радиус кривизны в каждой точке пропорционален длине нормали: $R=k\cdot N$.

Так как $R=\pm\frac{ds}{d\alpha}$ и $|N|=\pm\frac{y}{\cos\alpha}$, то, считая $k$ числом положительным или отрицательным, получаем: $\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{dy}{d\alpha}=k\cdot\frac{y}{\cos\alpha}$, откуда

$$\frac{dy}{y}=k\cdot\operatorname{tg}\alpha\, d\alpha,\ \log y=\log a-k\log\cos\alpha,\ y=\frac{a}{\cos^k\alpha};$$

далее, $dx=dy\cdot\cot\alpha=\frac{ka\,d\alpha}{\cos^k\alpha}$, откуда $x=x_0+ka\cdot\int\frac{d\alpha}{\cos^k\alpha}$,

при чем, при $k$ целом, квадратура берется в конечном виде.

Частные случаи: 1) $k=-1$ дает: $x-x_0=-a\sin\alpha$, $y=a\cos\alpha$, $(x-x_0)^2+y^2=a^2$ (окружность); 2) $k=1$ дает: $x-x_0=a\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$,

$$y=\frac{a}{\cos\alpha},\ y=\frac{a}{2}\left\{e^{\frac{x-x_0}{a}}+e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right\}=a\cdot\operatorname{ch}\frac{x-x_0}{a}\ \text{(цепная линия)}.$$

3) $k=-2$ дает: $x-x_0=-\frac{a}{2}(2\alpha+\sin 2\alpha)$, $y=\frac{a}{2}(1+\cos 2\alpha)$ (циклоида).

4) $k=2$ дает: $x-x_0=2a\operatorname{tg}\alpha$, $y=\frac{a}{\cos^2\alpha}$, $(x-x_0)^2=4a(y-a)$ (парабола, у которой ордината фокуса делится вершиною пополам).

*Задача 2.* Найти кривые в полярных координатах, у которых радиус кривизны $R$ представляет данную функцию от радиуса-вектора $r$ и от угла $\mu$, образуемого касательною с радиусом-вектором: $R=f(r, \mu)$.

Преобразуя выражение $R$, находим:

$$\frac{1}{R}=\frac{d\alpha}{N\cdot d\theta}=\frac{d\mu+d\theta}{N\cdot d\theta}=\frac{1+\frac{d\theta}{d\mu}}{\frac{r}{\sin\mu}\cdot\frac{d\theta}{d\mu}},\ \text{но}\ \frac{d\theta}{d\mu}=\frac{\operatorname{tg}\mu}{r}\cdot\frac{dr}{d\mu},\ \text{следовательно}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{\sin\mu}{r}\left\{1+\frac{1}{\frac{d\theta}{d\mu}}\right\}=\frac{\sin\mu}{r}+\frac{\cos\mu}{\frac{dr}{d\mu}}=\frac{1}{f(r, \mu)}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, находим $r$ как функцию от $\mu$ и постоянной произвольной, после чего определится $\theta$ как функция от $\mu$ из уравнения

$$\frac{d\theta}{d\mu}=\frac{\operatorname{tg}\mu}{r}\cdot\frac{dr}{d\mu}.$$

*Пример 2.* Найти кривые в полярных координатах, у которых радиус кривизны $R$ пропорционален длине нормали: $R=\frac{1}{k}N$.

Имеем:

$$\frac{1}{R}=\frac{\sin\mu}{r}+\frac{\cos\mu}{\frac{dr}{d\mu}}=\frac{k}{N}=\frac{k\sin\mu}{r},$$

откуда

$$(k-1)\frac{dr}{r}=\cot\mu\cdot d\mu,\ (k-1)\log r=(k-1)\log a+\log\sin\mu,\ r^{k-1}=a^{k-1}\cdot\sin\mu;$$

далее:

$$\frac{d\theta}{d\mu}=\frac{1}{k-1},\ \mu=(k-1)(\theta-\theta_0),$$

и окончательно

$$r^{k-1}=a^{k-1}\sin(k-1)(\theta-\theta_0).$$

*Задача 3.* Найти кривые в прямоугольных координатах, у которых радиус кривизны $R$ представляется данною функцией от длины дуги $s$: $R=f(s)$.

Из уравнения $\frac{ds}{d\alpha}=f(s)$, находим: $\alpha-\alpha_0=\int\limits_{s_0}^{s}\frac{ds}{f(s)}$; если отсюда можно найти $s$ как функцию от $\alpha$: $s=\varphi(\alpha)$, то искомая кривая будет:

$$x-x_0=\int\cos\alpha\cdot\varphi'(\alpha)d\alpha,\ y-y_0=\int\sin\alpha\cdot\varphi'(\alpha)d\alpha.$$

*Пример 3.* Найти кривую, для которой $R=\sqrt{a^2-s^2}$ при условии: $\alpha=0$ при $s=0$.

Имеем: $\alpha=\int\limits_0^s\frac{ds}{\sqrt{a^2-s^2}}=\arcsin\frac{s}{a}$, откуда $s=a\cdot\sin\alpha$, и далее:

$$x-x_0=a\int\cos^2\alpha d\alpha=\frac{a}{4}(\alpha+\sin 2\alpha),$$

$$y-y_0=a\int\sin\alpha\cos\alpha d\alpha=\frac{a}{4}(1-\cos 2\alpha).$$

Глава IV.

## Линейные уравнения.

### § 1. Общие свойства линейных уравнений.

Уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = q, \qquad (1)$$

в котором $p_1, p_2, \ldots p_n, q$ — данные функции от $x$, называется линейным уравнением $n$-го порядка с последним членом $q$. На ряду с ним рассматривается уравнение

$$u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + p_2 u^{(n-2)} \ldots + p_{n-1} u' + p_n u = 0, \qquad (2)$$

которое называется соответствующим уравнением без последнего члена.

Уравнение (1) называют также неоднородным, уравнение (2) — однородным.

*Теорема 1.* Если $u_1, u_2, \ldots u_k$ представляют частные решения уравнения (2), то и выражение $u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_k u_k$, при произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots C_k$, будет также решением уравнения (2).

Вывод. Обозначим для краткости символом $F(u_j)$ результат подстановки $u = u_j$ в левую часть уравнения (2); тогда, по условию теоремы, имеем: $F(u_j) = 0$ при $j = 1, 2, \ldots k$. Так как постоянный множитель можно вынести за знак производной, то находим $F(C_j u_j) = C_j\, F(u_j)$, и так как производная суммы равна сумме производных, то

$$F(C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_k u_k) = F(C_1 u_1) + F(C_2 u_2) + \ldots + F(C_k u_k).$$

Отсюда ясно, что при $F(u_j) = 0$ (для $j = 1, 2, \ldots k$) имеем также $F\left(\sum_{j=1}^{k} C_j\, u_j\right) = 0$, что и требуется доказать.

*Замечание.* Частные решения $u_1, u_2, \ldots u_k$ уравнения (2) называются независимыми, если нельзя подобрать такую систему постоянных $a_1, a_2 \ldots a_k$ (неравных одновременно нулю), чтобы при всяком $x$ существовало тождество

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k = 0.$$

*Пример 1.* Уравнение $u'' - u = 0$ имеет частные решения:

$$u_1 = e^x, \quad u_2 = e^{-x}, \quad u_3 = \operatorname{ch} x, \quad u_4 = \operatorname{sh} x;$$

из них $u_1$ и $u_2$ независимы, ибо невозможно тождество $a_1 e^x + a_2 e^{-x} = 0$ (из него выходило бы $e^{2x} = -\frac{a_2}{a_1}$, т.-е. $e^{2x}$ постоянно при всех $x$); но любые три решения будут зависимы, например: $u_1 + u_2 - 2u_3 = 0$, $u_1 - u_2 - 2u_4 = 0$, $u_1 - u_3 - u_4 = 0$, $u_2 - u_3 + u_4 = 0$.

*Теорема 2.* Имея $k$ независимых частных решений уравнения (2), можно понизить на $k$ единиц порядок уравнений (1) и (2), при чем новые уравнения будут также линейными и соответствующими.

Вывод. Пусть $u_1, u_2, \ldots u_k$ будут $k$ независимых решений уравнения (2). Положим в уравнении (1): $y = u_1 \cdot \int z dx$.

На основании формулы Лейбница находим:

$$y' = u_1' \cdot \int z dx + u_1 \cdot z, \quad y'' = u_1'' \cdot \int z dx + 2u_1' \cdot z + u_1 \cdot z' \ldots$$

$$y^{(n)} = u_1^{(n)} \cdot \int z dx + \frac{n}{1} u_1^{(n-1)} \cdot z + \frac{n(n-1)}{1.2} u_1^{(n-2)} \cdot z' + \ldots + u_1 \cdot z^{(n-1)};$$

отсюда

$$q = F(y) = F(u_1) \cdot \int z dx + r_{n-1} z + r_{n-2} z' + \ldots + u_1 \cdot z^{(n-1)},$$

где $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots$ известные функции от $x$. По условию $F(u_1) = 0$, следовательно новая неизвестная функция $z$ определяется уравнением:

$$z^{(n-1)} + s_1 z^{(n-2)} + \ldots + s_{n-1} \cdot z = \frac{q}{u_1}, \quad \ldots \ldots \quad (1')$$

где $s_j = \frac{r_j}{u_1}$. Подобным образом, положив в уравнении (2) $u = u_1 \cdot \int v dx$, найдем для $v$ уравнение:

$$v^{(n-1)} + s_1 v^{(n-2)} + \ldots + s_{n-1} v = 0. \quad \ldots \ldots \quad (2')$$

Покажем, что для уравнения (2') известны $(k-1)$ независимых частных решений. В самом деле, неизвестные функции $u$ и $v$ связаны зависимостью $\left(\frac{u}{u_1}\right)' = v$; полагая в ней $u = u_2, u_3, \ldots u_k$, найдем $(k-1)$ решений для $v$:

$$v_1 = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)', \quad v_2 = \left(\frac{u_3}{u_1}\right)', \ldots v_{k-1} = \left(\frac{u_k}{u_1}\right)',$$

и эти решения независимы, ибо, допустив их зависимость, т.-е. возможность тождества:

$$a_2 v_1 + a_3 v_2 + \ldots + a_k v_{k-1} = 0,$$

мы нашли бы путем интегрирования новое тождество:

$$a_1 + a_2 \frac{u_2}{u_1} + a_3 \frac{u_3}{u_1} + \ldots + a_k \frac{u_k}{u_1} = 0$$

($a_1$ постоянная интегрирования), которое давало бы зависимость

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k = 0,$$

что противоречит условию теоремы (о независимости решений $u_1, u_2, \ldots u_k$). Итак, помощью одного частного решения $u = u_1$ уравнения (2), мы понизили порядок уравнений (1) и (2) на единицу и привели их к уравнениям (1') и (2'), при чем для (2') известны $(k-1)$ независимых частных решений. При помощи новых подстановок:

$$z = v_1 \cdot \int \xi dx, \quad v = v_1 \cdot \int w dx$$

уравнения (1') и (2') преобразуем в уравнения (1''), (2'') с неизвестными $\xi$ и $w$, линейные порядка $(n-2)$ и соответствующие, при чем для (2'') будут известны $(k-2)$ независимых частных решения:

$$w_1 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)', \quad w_2 = \left(\frac{v_3}{v_1}\right)', \ldots w_{k-2} = \left(\frac{v_{k-1}}{v_1}\right)'.$$

Выполнив операцию понижения $k$ раз, получим уравнения линейные, соответствующие, порядка $(n-k)$-го, в чем и заключается теорема 2.

*Следствие.* Если для линейного уравнения 2-го порядка

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q$$

известно частное решение $u_1$ соответствующего уравнения без последнего члена, то общий интеграл $y$ можно выразить в квадратурах.

Вывод. Подстановкою $y = u_1 \cdot \int z\,dx$ приведем, как показано в теореме 2, данное уравнение к уравнению линейному 1-го порядка: $z' + s_1 z = \frac{q}{u_1}$; его общий интеграл (смотри глава II, § 1, класс 6) будет вида

$$z = C_1 \varphi(x) + \psi(x),$$

после чего найдется

$$y = u_1 \left\{ C_2 + C_1 \int \varphi(x) dx + \int \psi(x) dx \right\}.$$

*Пример 2.* $(1 + x^2)y'' + xy' - y + 1 = 0$; дано $u_1 = x$.

Подстановкой $y = x \cdot \int z\,dx$ преобразуем уравнение в линейное 1-го порядка

$$x(1 + x^2)z' + (2 + 3x^2)z + 1 = 0;$$

его общий интеграл:

$$z = -\frac{C_1}{x^2\sqrt{1 + x^2}} - \frac{1}{x^2};$$

отсюда

$$y = x \left\{ C_2 - \int \frac{dx}{x^2} - C_1 \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}} \right\} = C_2 x + 1 + C_1 \sqrt{1 + x^2}.$$

*Теорема 3.* Если $u_1, u_2, \ldots u_n$ представляют $n$ независимых частных решений уравнения (2), то $u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n$ будет его общим интегралом.

Вывод. Докажем теорему для $n = 1$, т.-е. докажем, что общий интеграл уравнения $u' + p_1 u = 0$ есть $u = C_1 u_1$, где $u_1$—частное решение того же уравнения; в самом деле, так как $-p_1 = \frac{u'}{u} = \frac{u_1'}{u_1}$, то $\int \frac{du}{u} = \int \frac{du_1}{u_1}$, откуда $\log u = \log u_1 + \log C_1$ и $u = C_1 u_1$. Теперь, предполагая, что теорема 3 доказана для уравнения $(n - 1)$-го порядка, докажем, что она верна и для уравнения $n$-го порядка.

В теореме 2 мы видели, что уравнение (2) подстановкою $u = u_1 \cdot \int v\,dx$ приводится к уравнению (2') $(n - 1)$-го порядка

$$v^{(n-1)} + s_1 v^{(n-1)} + \ldots + s_{n-1} v = 0,$$

для которого будут известны $(n - 1)$ независимых частных решений:

$$v_1 = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)', \quad v_2 = \left(\frac{u_3}{u_1}\right)', \ldots v_{n-1} = \left(\frac{u_n}{u_1}\right)',$$

и, следовательно, общий интеграл, согласно сделанному предположению, составится по теореме 3-й:

$$v = C_2 v_1 + C_3 v_2 + \ldots + C_n v_{n-1}.$$

Тогда общий интеграл $u$ уравнения (2) будет:

$$u = u_1 \cdot \int v dx = u_1 \left\{ C_1 + \int \left[ C_2 \left(\frac{u_2}{u_1}\right)' dx + C_3 \left(\frac{u_3}{u_1}\right)' dx + \ldots + \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots + C_n \cdot \left(\frac{u_n}{u_1}\right)' dx \right] \right\} = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n,$$

т.-е. теорема 3-я будет доказана и для уравнения $n$-го порядка.

*Теорема 4.* Общий интеграл уравнения (1) равен сумме частного решения того же уравнения (1) и общего интеграла соответствующего уравнения (2).

Вывод. Пусть $Y$—частное решение уравнения (1), так что $F(Y) = q$. Введем в уравнение (1) новую неизвестную функцию $z$, полагая $y = Y + z$; тогда $F(y) = F(Y + z) = F(Y) + F(z)$ (смотри теорему 1-ю, где показано, что символ $F$ от суммы равен сумме символов $F$ от отдельных слагаемых); но $F(y) = q$ и $F(Y) = q$, следовательно $F(z) = 0$, т.-е. $z$ есть $u$ — общий интеграл уравнения (2), который по теореме 3 имеет выражение:

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n.$$

Итак, общий интеграл

$$y = Y + u = Y + \sum_{j=1}^{n} C_j u_j,$$

что и требуется доказать.

*Теорема 5.* Если для уравнения (2) известны $n$ независимых частных решений $u_1, u_2, \ldots u_n$, то частное решение $Y$ уравнения (1) можно составить при помощи $n$ квадратур.

*1-й способ* (последовательного понижения). Согласно теореме 2-й, зная $n$ независимых частных решений уравнения (2), можно понизить порядок уравнения (1) на $n$ единиц, т.-е. привести его уже не к дифференциальному, а к конечному уравнению 1-й степени относительно последней неизвестной функции, которая из него и определится; а так как последовательные неизвестные функции были связаны уравнениями:

$$y = u_1 \cdot \int z dx, \quad z = v_1 \cdot \int \xi dx \text{ и т. д.},$$

то, восходя от последней неизвестной к $y$, мы получим выражение общего интеграла $y$ (а следовательно и частного решения $Y$) при помощи $n$ квадратур.

*Пример 3.* $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$; для уравнения $u'' - u' = 0$ известны два независимых частных решения: $u_1 = e^x$, $u_2 = 1$.

Подстановкою $y = e^x \cdot \int z\, dx$ приводим уравнение к линейному 1-го порядка:

$z' + z = \frac{1}{e^x(e^x + 1)}$, при чем для соответствующего уравнения $v' + v = 0$ известно частное решение $v_1 = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)' = -e^{-x}$, вместо которого возьмем

$v_1 = +e^{-x}$. Новой подстановкой $z = e^{-x} \cdot \int \xi dx$ приходим к конечному уравнению: $\xi = \frac{1}{e^x + 1}$, после чего находим:

$$z = e^{-x}\left\{C_1 + \int \frac{dx}{e^x + 1}\right\} = e^{-x}\left\{C_1 - \log(1 + e^{-x})\right\},$$

$$y = e^x\left\{C_2 + C_1 \int e^{-x} dx - \int e^{-x} \log(1 + e^{-x}) dx\right\} =$$

$$= e^x\left\{C_2 - C_1 e^{-x} + (e^{-x} + 1) \cdot \log(e^{-x} + 1) - e^{-x}\right\} =$$

$$= C_2 e^x + C^{(1)} + (1 + e^x) \log(e^{-x} + 1),$$

где положено $-(C_1 + 1) = C^{(1)}$.

Таким образом частное решение данного уравнения будет $Y = (1 + e^x) \cdot \log(e^{-x} + 1)$, а общий интеграл $y = Y + C_2 u_1 + C^{(1)} u_2$, как и следует по теореме 4.

*2-й способ* (Лагранжа или вариации постоянных произвольных). Из теоремы 3 известно, что, по данным $n$ независимым частным решениям $u_1, u_2, \ldots u_n$ уравнения (2), общий интеграл этого уравнения выражается формулой: $u = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j$, где $C_j$ означают произвольные постоянные.

Будем искать и общий интеграл $y$ уравнения (1) в той же форме: $y = \sum C_j u_j$, но считая $C_j$ не постоянными, а функциями от $x$. Эти $n$ функций $C_j$ должны удовлетворять лишь одному уравнению (1), следовательно $(n - 1)$ условий мы можем наложить на эти функции произвольно, и Лагранж выбрал эти условия так, чтобы $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ сохраняли те же выражения, как при постоянных $C_j$. Именно: $y' = \sum C_j u_j' + \sum C_j' u_j$, и чтобы выходило $y' = \sum C_j u_j'$, как было при постоянных $C_j$, нужно положить $\sum C_j' u_j = 0 \ldots\ldots (1)$. Теперь найдем: $y'' = \sum C_j u_j'' + \sum C_j' u_j'$, и чтобы выходило $y'' = \sum C_j u_j''$, полагаем $\sum C_j' u_j' = 0 \ldots\ldots (2)$, и так дойдем до выражения $y^{(n-1)} = \sum C_j u_j^{(n-1)} + \sum C_j' u_j^{(n-2)}$, которое обратится в $y^{(n-1)} = \sum C_j u_j^{(n-1)}$, если положить $\sum C_j' u_j^{(n-2)} = 0 \ldots\ldots (n - 1)$. Для составления $n$-го условия, вносим в уравнение (1) $F(y) = q$ значения:

$$y = \sum C_j u_j,\ y' = \sum C_j u_j', \ldots\ y^{(n-1)} = \sum C_j u_j^{(n-1)},\ y^{(n)} = \sum C_j u_j^{(n)} +$$
$$+ \sum C_j' u_j^{(n-1)};$$

получим:

$$\sum C_j' u_j^{(n-1)} + F\left(\sum C_j u_j\right)$$

но $$F\left(\sum C_j u_j\right) = \sum F(C_j u_j) = \sum C_j F(u_j)$$

(согласно теореме 1) и так как $F(u_j) = 0$, то $F\left(\sum C_j u_j\right) = 0$, и условие $(n)$ принимает вид: $\sum C_j' u_j^{(n-1)} = q \ldots\ldots (n)$.

Если решения $u_1, u_2, \ldots u_n$ независимы, то систему $n$ уравнений от (1) до $(n)$ можно решить относительно $C_j'$, что даст выражения: $C_j' = \varphi_j(x)$, откуда $C_j = \int \varphi_j(x)\,dx + D_j$, где $D_j$ постоянные произвольные; тогда общий интеграл уравнения (1) примет вид: $y = \sum C_j u_j = \sum u_j \cdot \int \varphi_j(x)\,dx + \sum D_j u_j$, при чем $\sum D_j u_j$ составит общий интеграл $u$ уравнения (2), а $\sum u_j \cdot \int \varphi_j(x)\,dx = Y$ определит частное решение уравнения (1).

*Пример 4.* $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$; для уравнения $u'' + u = 0$ известны два независимых частных решения: $u_1 = \sin x$, $u_2 = \cos x$. Система уравнений $\sum C_j' u_j = 0$, $\sum C_j' u_j' = q$, будет: $C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0$, $C_1' \cos x - C_2' \sin x = \frac{1}{\cos x}$, откуда $C_1' = 1$, $C_2' = -\operatorname{tg} x$, $C_1 = x + D_1$, $C_2 = \log \cos x + D_2$, $y = Y + D_1 \sin x + D_2 \cos x$, где $Y = x \sin x + \cos x \cdot \log \cos x$.

## § 2. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение (2) $u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + p_2 u^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} u' + p_n u = 0$, в котором коэффициенты $p_1, p_2, \ldots p_n$ — постоянные, и, следуя Эйлеру, станем искать частные решения его в виде: $u = e^{kx}$, где $k$ постоянное. Так как $u' = k \cdot u$, $u'' = k^2 \cdot u, \ldots, u^{(n)} = k^n \cdot u$, то найдем $F(e^{kx}) = e^{kx} \cdot \varphi(k)$, где $\varphi(k) = k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \ldots + p_{n-1} k + p_n$ есть целая функция, получаемая при замене в уравнении (2) $u^{(j)}$ на $k^j$ и $u$ на $k^0 = 1$.

Таким образом $u = e^{kx}$ будет решением уравнения (2), если $k$ удовлетворяет уравнению $\varphi(k) = 0$, которое называется характеристическим для данного уравнения (2). Отличим при решении этого уравнения два случая.

*Случай 1.* Все $n$ корней $k_1, k_2, \ldots k_n$ уравнения $\varphi(k) = 0$ различны. Тогда $u_1 = e^{k_1 x}$, $u_2 = e^{k_2 x}, \ldots, u_n = e^{k_n x}$ представят $n$ частных решений уравнения (2), и мы докажем, что они независимы. Для случая $n = 2$ независимость решений $u_1$ и $u_2$ очевидна, ибо тождество $a_1 e^{k_1 x} + a_2 e^{k_2 x} = 0$ приводит к противоречию: $e^{(k_1 - k_2)x} = -\frac{a_2}{a_1}$ (при $k_1 - k_2$ не $= 0$). В случае трех решений, допустив тождество $a_1 e^{k_1 x} + a_2 e^{k_2 x} + a_3 e^{k_3 x} = 0$, мы получаем из него (делением на $e^{k_3 x}$) тождество $a_1 e^{(k_1 - k_3)x} + a_2 e^{(k_2 - k_3)x} + a_3 = 0$, а отсюда, дифференцированием по $x$, новое тождество:

$a_1(k_1 - k_3)\, e^{(k_1 - k_3)x} + a_2(k_2 - k_3)\, e^{(k_2 - k_3)x} = 0$, невозможность которого уже доказана при $n = 2$, откуда следует независимость решений и при $n = 3$. Тем же приемом от $n = 3$ можно перейти к $n = 4$ и т. д. Когда же независимость решений $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots e^{k_n x}$ доказана, то, по теореме 3 §1, общий интеграл уравнения (2) будет: $u = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}$.

*Замечание.* Если характеристическое уравнение $\varphi(k)=0$ имеет пару сопряженных корней: $k_1=\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$, то соответствующую часть общего интеграла $u$ можно преобразовать к вещественному виду:

$$C_1e^{(\alpha+\beta i)x}+C_2e^{(\alpha-\beta i)x}=e^{\alpha x}\left\{C_1(\cos\beta x+i\sin\beta x)+C_2(\cos\beta x-i\sin\beta x)\right\}=$$
$$=e^{\alpha x}\left\{A_1\cos\beta x+A_2\sin\beta x\right\},$$

где положено $C_1+C_2=A_1$, $C_1i-C_2i=A_2$ (преобразование основано на формулах Эйлера: $e^{\pm\theta i}=\cos\theta\pm i\sin\theta$).

*Случай 2.* Среди корней характеристического уравнения $\varphi(k)=0$ находится $l$-кратный корень $k=k_1$. Тогда $l$ частных решений уравнения (2) совпадают, и их нужно заменить следующими $l$ решениями $e^{k_1x}$, $xe^{k_1x}$, $x^2e^{k_1x}$, $\ldots x^{l-1}e^{k_1x}$.

Для доказательства возьмем установленное выше тождество:

$$F(e^{kx})=e^{kx}\cdot\varphi(k)$$

и составим от обеих частей его $j$-е производные по $k$.

Для правой части, по формуле Лейбница, имеем: $\dfrac{\partial^j}{\partial k^j}\left[e^{kx}\cdot\varphi(k)\right]=$

$$=e^{kx}\left\{x^j\cdot\varphi(k)+\frac{j}{1}x^{j-1}\varphi'(k)+\frac{j(j-1)}{1\cdot 2}x^{j-2}\varphi''(k)+\ldots+\frac{j}{1}x\cdot\varphi^{(j-1)}(k)+\varphi^{(j)}(k)\right\};$$

для левой части, меняя порядок дифференцирования по $x$ и по $k$, находим:

$$\frac{\partial^j}{\partial k^j}\left[F(e^{kx})\right]=\frac{\partial^j}{\partial k^j}\left[\sum_{s=0}^{n}p_{n-s}\frac{d^s(e^{kx})}{dx^s}\right]=(\text{при } p_0=1)$$
$$=\sum_{s=0}^{n}p_{n-s}\frac{d^s}{dx^s}\left[\frac{\partial^j}{\partial k^j}(e^{kx})\right]=\sum p_{n-s}\frac{d^s(x^je^{kx})}{dx^s}=F(x^je^{kx}).$$

Таким образом получаем производное тождество:

$$F(x^j\cdot e^{kx})=e^{kx}\left\{x^j\cdot\varphi(k)+\frac{j}{1}x^{j-1}\varphi'(k)+\frac{j(j-1)}{1\cdot 2}x^{j-2}\varphi''(k)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{j}{1}x\varphi^{(j-1)}(k)+\varphi^{(j)}(k)\right\}.$$

Если $k=k_1$ является $l$-кратным корнем уравнения $\varphi(k)=0$, то, как известно из высшей алгебры, оказывается:

$$\varphi(k_1)=0,\ \varphi'(k_1)=0,\ldots\varphi^{(l-1)}(k_1)=0,\ \varphi^{(l)}(k_1)\text{ не }=0,$$

и потому $F(x^j\cdot e^{k_1x})=0$ при $j=1, 2, 3,\ldots l-1$, т.-е. не только $u=e^{k_1x}$, но и $u=x^je^{k_1x}$ при $j=1, 2,\ldots l-1$ будут частными решениями уравнения (2). Эти решения независимы, так как тождество

$$e^{k_1x}(a_1+a_2x+a_3x_2+\ldots+a_lx^{l-1})=0$$

возможно только при $a_1=0$, $a_2=0,\ldots a_l=0$; и потому часть общего интеграла $u$, отвечающая $l$-кратному корню $k=k_1$, будет иметь вид $e^{k_1x}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_lx^{l-1})$.

*Замечание.* Если уравнение $\varphi(k)=0$ имеет пару сопряженных корней $\alpha\pm\beta i$ $l$-й кратности, то соответствующая часть общего интеграла приводится к вещественной форме так:

$$e^{(\alpha+\beta i)x}\cdot\{C_1+C_2x+\ldots+C_lx^{l-1}\}+e^{(\alpha-\beta i)x}\cdot\{D_1+D_2x+\ldots+D_lx^{l-1}\}=$$
$$=e^{\alpha x}\{\cos\beta x\cdot[A_1+A_2x+\ldots+A_lx^{l-1}]+\sin\beta x\cdot[B_1+B_2x+\ldots+B_lx^{l-1}]\},$$

где положено $A_j=C_j+D_j$, $B_j=iC_j-iD_j$.

Из предыдущего анализа вытекает *теорема:* чтобы составить общий интеграл линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами $u^{(n)}+p_1u^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}u'+p_nu=0$, нужно решить характеристическое уравнение $\varphi(k)=k^n+p_1k^{n-1}+\ldots+p_{n-1}k+p_n=0$, и каждому простому вещественному корню $k=k_1$ этого уравнения отвечает член $C_1e^{k_1x}$ общего интеграла $u$, $l$-кратному вещественному корню $k=k_1$ отвечает часть $e^{k_1x}\{C_1+C_2x+\ldots+C_lx^{l-1}\}$ общего интеграла $u$, простой паре сопряженных корней $k=\alpha\pm\beta i$ отвечает часть $e^{\alpha x}\{C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\}$ общего интеграла и $l$-кратной паре сопряженных корней $\alpha\pm\beta i$ отвечает часть общего интеграла

$$e^{\alpha x}\{\cos\beta x\cdot[C_1+C_2x+C_lx^{l-1}]+\sin\beta x\cdot[C_{l+1}+C_{l+2}x+\ldots+C_{2l}x^{l-1}]\};$$

общее число постоянных произвольных, входящих в $u$, равно $n$.

*Пример 1.* $y''+a^2y=0$. Характеристическое уравнение $k^2+a^2=0$ дает простую пару сопряженных корней: $k=\pm ai$ $(\alpha=0,\ \beta=a)$, следовательно $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$.

*Пример 2.* $y'''+y=0$. Характеристическое уравнение

$$k^3+1=(k+1)(k^2-k+1)=0$$

дает

$$k_1=-1,\ k_{2,3}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$y=C_1e^{-x}+e^{\frac{1}{2}x}\left\{C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}.$$

*Пример 3.* $y^{\text{IV}}-a^4y=0$. Уравнение $k^4-a^4=(k^2-a^2)(k^2+a^2)=0$ дает $k_1=-a_1$, $k_2=a$, $k_{3,4}=\pm ai$; $y=C_1e^{-ax}+C_2e^{ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax$.

*Пример 4.* $y^{\text{VI}}+a^6y=0$. Уравнение $k^6+a^6=0$ распадается на $k^2-ak\sqrt{2}+a^2=0$, $k^2+ak\sqrt{2}+a^2=0$ и дает 2 пары сопряженных корней:

$$k=\frac{a}{\sqrt{2}}\pm i\frac{a}{\sqrt{2}},\ k=-\frac{a}{\sqrt{2}}\pm i\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$y=e^{\frac{ax}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{ax}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{ax}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}+C_4\sin\frac{ax}{\sqrt{2}}\right).$$

*Пример 5.* $y^{\text{VI}}+y=0$. Уравнение $k^6+1=0$ разлагается на

$$k^2+1=0,\ k^2-k\sqrt{3}+1=0,\ k^2+k\sqrt{3}+1=0,$$

откуда $\qquad k_{1,2}=\pm i,\ k_{3,4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2},\ k_{5,6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2};$

общий интеграл:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(C_3\cos\frac{x}{2}+C_4\sin\frac{x}{2}\right)+e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(C_5\cos\frac{x}{2}+C_6\sin\frac{x}{2}\right).$$

*Пример 6.* $y'''+3y''+3y'+y=0$. Уравнение $(k+1)^3=0$ дает трехкратный корень: $k=-1$; $y=e^{-x}(C_1+C_2x+C_3x^2)$.

*Пример 7.* $y^{\text{IV}}+6y''+9y=0$. Уравнение $k^4+6k^2+9=(k^2+3)^2=0$ имеет двукратную пару сопряженных корней: $k=\pm i\sqrt{3}$;

$$y=(C_1+C_2x)\cos x\sqrt{3}+(C_3+C_4x)\sin x\sqrt{3}.$$

*Пример 8.* $y^{\text{VI}}+2y^{\text{IV}}+y''=0$. Уравнение $k^6+2k^4+k^2=$ $=k^2(k^4+2k^2+1)=k^2(k^2+1)^2=0$ дает двукратный корень $k=0$ и двукратную пару сопряженных корней $k=\pm i$; отсюда

$$y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)\cos x+(C_5+C_6x)\cdot\sin x.$$

**§ 3. Способ неопределенных коэффициентов для нахождения частных решений линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.**

*Теорема.* Если в линейном неоднородном уравнении (1) с постоянными коэффициентами последний член $q$ имеет форму: $q=e^{\mu x}\cdot f(x)$, где $\mu$ постоянное число и $f(x)$ — целая функция $m$-й степени, то частное решение $Y$ такого уравнения имеет вид: $Y=e^{\mu x}\cdot x^l\cdot(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots$ $\ldots+a_{m-1}x+a_m)$, где $a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_m$ — неопределенные коэффициенты, а $l$ — означает порядок кратности корня $k=\mu$ для характеристического уравнения ($l=0$, если $\varphi(\mu)$ не $=0$). Если $q$ представляет сумму нескольких членов $\sum e^{\mu_j x}f_j(x)$, то $Y$ нужно брать в виде суммы решений вышеуказанного вида; в частности, если $q=e^{\alpha x}\cos\beta x\cdot f(x)$ или $e^{\alpha x}\sin\beta x\cdot f(x)$, где $f(x)$ — целая функция $m$-й степени, то в обоих случаях

$$Y=e^{\alpha x}x^l\{(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m)\cos\beta x+(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m)\sin\beta x\},$$

где $a_0,\ldots a_m, b_0,\ldots b_m$ — неопределенные коэффициенты, а число $l$ указывает кратность корня $k=\alpha\pm\beta i$ для характеристического уравнения ($l=0$, если $\alpha\pm\beta i$ не служит корнем этого уравнения).

Вывод. В §2 установлено выражение для $F(x^je^{kx})$, которое можно переписать так:

$$F(x^je^{kx})=e^{kx}\left\{x^j\cdot\varphi(k)+\frac{1}{1}(x^j)'\cdot\varphi'(k)+\frac{1}{1\cdot2}(x^j)''\cdot\varphi''(k)+\ldots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots j}(x^j)^{(j)}\varphi^{(j)}(k)\right\},$$

при чем в скобках можно добавить члены вида $\frac{1}{1\cdot2\ldots h}(x^j)^{(h)}\cdot\varphi^{(h)}(k)$ при $h>j$, так как они тождественно равны 0. Полагая $\psi(x)=\sum\limits_{j=p}^{0}a_{p-j}\cdot x^j$,

где $p$ некоторое целое положительное число, найдем, на основании двух свойств символа $F$, указанных в теореме 1, § 1:

$$F(C \cdot u) = C \cdot F(u) \text{ и } F(\sum C_j u_j) = \sum F(C_j u_j),$$

следующее тождество:

$$F(\psi(x) \cdot e^{\mu x}) = e^{\mu x} \left\{ \psi(x) \cdot \varphi(\mu) + \frac{1}{1} \psi'(x)\varphi'(\mu) + \frac{1}{1 \cdot 2} \psi''(x)\varphi''(\mu) + \right.$$
$$\left. + \ldots \frac{1}{p!} \psi^{(p)}(x)\varphi^{(p)}(\mu) + \ldots \right\},$$

и так как

$F(\psi(x) \cdot e^{\mu x}) = q = e^{\mu x} \cdot f(x)$, то для частного решения $Y = \psi(x)e^{\mu x}$ функция $\psi(x)$ определится из уравнения:

$$f(x) = \psi(x)\varphi(\mu) + \frac{1}{1} \psi'(x)\varphi'(\mu) + \cdots + \frac{1}{p!} \psi^p(x)\varphi^p(\mu) + \cdots$$

Если $\varphi(\mu)$ не $= 0$, то $\psi(x)$ будет целой функцией той же степени $m$, как и данная функция $f(x)$; если же число $\mu$ является $l$-кратным корнем характеристичесвого уравнения $\varphi(k) = 0$, то $\varphi(\mu) = 0$, $\varphi'(\mu) = 0, \ldots \varphi^{l-1}(\mu) = 0$, но $\varphi^{(l)}(\mu)$ не $= 0$, и предыдущее уравнение перепишется так:

$$f(x) = \frac{1}{l!} \psi^{(l)}(x)\varphi^{(l)}(\mu) + \ldots;$$

поэтому функция $\psi^{(l)}(x)$ будет степени $m$-й, а $\psi(x)$ — степени $(m+l)$-й, положив $\psi(x) = x^l(a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m) + (a_{m+1}x^{l-1} + \ldots + a_{m+l})$, замечаем, что в определяющее функцию $\psi(x)$ уравнение $f(x) = \frac{1}{l!}\psi^{(l)}(x)\varphi^{(l)}(\mu) + \ldots$ вовсе не войдут коэффициенты $a_{m+1}, \ldots a_{m+l}$ и их можно принять равными 0, после чего $\psi(x) = x^l(a_0x^m + \ldots + a_m)$ и частное решение

$$Y = e^{\mu x}\psi(x) = e^{\mu x} \cdot x^l \cdot (a_0x^m + \ldots + a_m),$$

как указано в теореме. Неопределившиеся члены частного решения

$$Y = e^{\mu x}\psi(x),$$

т.-е. члены $e^{\mu x}(a_{m+l} + \ldots + a_{m+1}x^{l-1})$, сольются с частью общего интеграла $u$, отвечающей $l$-кратному корню $k = \mu$ характеристического уравнения и имеющей вид:

$$e^{\mu x}(C_1 + C_2x + \ldots + C_lx^{l-1}).$$

Для полного доказательства теоремы остается добавить, что последние члены $q = e^{\alpha x}\cos\beta x\ f(x)$ или $e^{\alpha x}\sin\beta x f(x)$ представляют алгебраическую сумму двух слагаемых вида:

$$e^{(\alpha+\beta i)x} \cdot \frac{1}{2} f(x) + e^{(\alpha-\beta i)x} \cdot \frac{1}{2} f(x) \text{ или } e^{(\alpha+\beta i)x} \cdot \frac{1}{2i} f(x) - e^{(\alpha-\beta i)x} \cdot \frac{1}{2i} f(x),$$

почему частное решение $Y$ в обоих случаях состоит из суммы:

$e^{(\alpha+\beta i)x} \cdot x^l \cdot \psi_1(x) + e^{(\alpha-\beta i)x} \cdot x^l \cdot \psi_2(x)$, где $\psi_1$ и $\psi_2$ — целые функции той же степени $m$, как $f(x)$, а $l$ указывает кратность корней $\alpha \pm \beta i$ для характеристического уравнения; заменяя, в выражении $Y$, $e^{\pm \beta x i}$ на $\cos\beta x \pm i\sin\beta x$, приходим к тому выражению частного решения, которое дано в теореме.

*Пример 1.* $y^{\text{v}}+4y'''=x^2+\sin 2x+2\cos 2x$. Характеристическое уравнение $k^5+4k^3=0$ имеет корень $k=0$ трехкратный и простую пару сопряженных корней $k=\pm 2i$. Последний член $q=q_1+q_2$, при чем $q_1=x^2=e^{\mu x}f(x)$ при $\mu=0$, $l=3$, $m=2$, что дает $Y_1=(ax^2+bx+c)x^3$, и $q_2=\sin 2x+2\cos 2x=e^{2xi}\left(1+\frac{1}{2i}\right)+e^{-2xi}\left(1-\frac{1}{2i}\right)$ при $\mu=\pm 2i$, $l=1$, $m=0$, что дает $Y_2=(p\cos 2x+n\sin 2x)x$.

Для нахождения неопределенных коэффициентов составляем:

$$Y_1^{\text{v}}+4Y_1'''=240ax^2+96bx+(120a+24c)=x^2,$$

откуда $a=\frac{1}{240}$, $b=0$, $c=-\frac{1}{48}$, и далее:

$$Y_2^{\text{v}}+4Y_2''=32n\sin 2x+32p\cos 2x=\sin 2x+2\cos 2x,$$

откуда $p=\frac{1}{16}$, $n=\frac{1}{32}$. Окончательно

$$Y=\frac{1}{240}x^5-\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{32}x\sin 2x+\frac{1}{16}x\cos 2x,$$

$$u=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos 2x+C_5\sin 2x,\qquad y=Y+u.$$

*Пример 2.* $y^{\text{iv}}+3y'''+4y''+3y'+y=xe^{-x}+\sin x$. Характеристическое уравнение $k^4+3k^3+4k^2+3k+1=(k+1)^2(k^2+k+1)=0$ дает $k=-1$ двукратный корень и $k=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Последний член: $q=q_1+q_2$, где $q_1=xe^{-x}$ дает $\mu=-1$, $l=2$, $m=1$, $Y_1=e^{-x}x^2(ax+b)$, $q_2=\sin x=\frac{1}{2i}e^{-xi}-\frac{1}{2i}e^{-xi}$ дает $\mu=\pm i$, $l=0$, $m=0$, $Y_2=p\sin x+n\cos x$.

Для нахождения $Y_1$ берем формулу общей теории:

$$f(x)=\frac{1}{l!}\psi^{(l)}(x)\varphi^{(l)}(\mu)+\ldots;$$

здесь $f(x)=x$, $l=2$, $\mu=-1$, $\varphi(\mu)=\mu^4+3\mu^3+4\mu^2+3\mu+1$, $\psi(x)=ax^3+bx^2$, следовательно, $\varphi''(-1)=2$, $\varphi'''(-1)=-6$, $\psi''(x)=6ax+2b$, $\psi'''(x)=6a$, $x=(6ax+2b)-6a$, откуда $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{2}$, $Y_1=e^{-x}\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)$. Для $Y_2=p\sin x+n\cos x$ составляем:

$$Y_2^{\text{IV}}+3Y_2'''+4Y_2''+3Y_2'+Y_2=-2p\sin x-2n\cos x=\sin x,$$

откуда $p=-\frac{1}{2}$, $n=0$, $Y_2=-\frac{1}{2}\sin x$. Окончательно

$$Y=Y_1+Y_2,\quad u=e^{-x}(C_1+C_2x)+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_4\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$y=Y+u.$$

## § 4. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами типа Лапласа.

Так называются уравнения вида:

$$(ax+b)^n y^{(n)}+p_1(ax+b)^{n-1}\cdot y^{(n-1)}+p_2(ax+b)^{n-2}\cdot y^{(n-2)}+\ldots+$$
$$+p_{n-1}(ax+b)y'+p_n y=q(x),$$

где $a$, $b$, $p_1$, $p_2$,... $p_{n-1}$, $p_n$ — постоянные, $q$ — функция от $x$.

*Теорема.* Линейные уравнения типа Лапласа введением новой независимой переменной $t$: $t=\log(ax+b)$ приводятся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

Вывод. Из уравнения $e^t=ax+b$ находим: $e^t dt=adx$, $\frac{dt}{dx}=ae^{-t}$; отсюда производные $y', y'', \ldots y^{(n)}$ выразятся через $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots \frac{d^ny}{dt^n}$ формулами:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=ae^{-t}\cdot\frac{dy}{dt};$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=ae^{-t}\cdot\frac{d}{dt}\left\{ae^{-t}\cdot\frac{dy}{dt}\right\}=a^2e^{-2t}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right\};$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{dy''}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=ae^{-t}\cdot\frac{d}{dt}\left\{a^2e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]\right\}=a^3e^{-3t}\left\{\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right\}$$

$$\ldots y^{(n)}=a^ne^{-nt}\left\{\frac{d^ny}{dt^n}+\lambda_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+\lambda_{n-1}\frac{dy}{dt}\right\},$$

где $\lambda_1, \ldots \lambda_{n-1}$ — постоянные числа. Подставляя эти значения $y', y'', \ldots y^{(n)}$ в данное уравнение, замечаем, что произведения

$$(ax+b)^n\cdot e^{-nt},\quad (ax+b)^{n-1}\cdot e^{-(n-1)t}, \ldots (ax+b)\cdot e^{-t}$$

все обратятся в 1, и потому, после разделения на $a^n$ и после приведения подобных членов, уравнение примет вид:

$$\frac{d^ny}{dt^n}+s_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+s_ny=\frac{1}{a^n}Q(t),$$

где $Q(t)=q\left(\frac{e^t-b}{a}\right)$ и $s_1, \ldots s_n$ суть постоянные коэффициенты. По составлении характеристического уравнения $\varphi(k)=k^n+s_1k^{n-1}+\ldots+s_n=0$ общий интеграл $u$ определится по теореме §2, т.-е. простому корню $k=k_1$ будет отвечать член $C_1e^{k_1t}=C_1(ax+b)^{k_1}$ общего интеграла $u$ уравнения без последнего члена и т. д. Зная вид результата, можно для уравнения Лапласа без последнего члена, не вводя новой независимой переменной, искать частные решения вида: $u=(ax+b)^k$, что сразу приведет к характеристическому уравнению $\varphi(k)=0$ и проч.

*Пример 1.*

$$(2x-1)^3y'''+6(2x-1)^2y''+4(2x-1)y'+8y=\frac{\log(2x-1)}{2x-1}.$$

Полагая $2x-1=e^t$, приходим, после деления на 8, к уравнению $\frac{d^3y}{dt^3}+y=\frac{1}{8}te^{-t}$; его общий интеграл $y=Y+C_1e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}\left\{C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right\}$, при чем $Y=e^{-t}(at+b)t$, $a=\frac{1}{48}$, $b=\frac{1}{24}$. Внося $t=\log(2x-1)$, получаем:

$$y=\frac{1}{2x-1}\left\{C_1+\frac{1}{24}\log(2x-1)+\frac{1}{48}\log^2(2x-1)\right\}+$$

$$+\sqrt{2x-1}\left\{C_2\cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\log(2x-1)\right]+C_3\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\log(2x-1)\right]\right\}.$$

*Пример 2.* $(x+1)^2y''+3(x+1)y'+y=x$.

Не вводя новой независимой переменной, ищем для уравнения

$$(x+1)^2u''+3(x+1)u'+u=0$$

решение $u=(x+1)^k$; приходим к характеристическому уравнению

$$k^2+2k+1=0,$$

откуда $k=-1$ двукратный корень; общий интеграл

$$u=e^{-t}(C_1+C_2t)=\frac{1}{x+1}\left\{C_1+C_2\log(x+1)\right\}.$$

Для нахождения частного решения $Y$ замечаем, на основании формы характеристического уравнения, что после подстановки $x+1=e^t$ данное уравнение принимает вид: $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=e^t-1$, поэтому

$$Y=ae^t+b \text{ при } a=\frac{1}{4},\ b=-1;$$

окончательно $y=Y+u=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}+\frac{1}{x+1}\left\{C_1+C_2\log(x+1)\right\}$.

---

Глава V.

## Системы обыкновенных совокупных дифференциальных уравнений.

### § 1. Приведение всякой системы к такой системе, где все производные 1-го порядка.

Пусть даны три уравнения $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$, содержащие независимую переменную $t$, три неизвестные функции ее $x$, $y$, $z$ и производные по $t$ от этих функций, при чем высшие производные будут соответственно $\frac{d^mx}{dt^m}$, $\frac{d^ny}{dt^n}$, $\frac{d^pz}{dt^p}$; сумма $m+n+p$ определяет *порядок* системы.

*Теорема.* Введением новых неизвестных функций можно данную систему заменить другою, где все производные будут только 1-го порядка, и число уравнений будет равно порядку системы.

Вывод. Введем новые неизвестные функции, числом $m+n+p-3$:

$$\frac{dx}{dt}=x',\ \frac{dx'}{dt}=x'',\ \ldots\ \frac{dx^{(m-2)}}{dt}=x^{(m-1)};\ \frac{dy}{dt}=y',\ \frac{dy'}{dt}=y'',\ \ldots$$

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dt}=y^{(n-1)};\ \frac{dz}{dt}=z',\ \frac{dz'}{dt}=z'',\ \ldots\ \frac{dz^{(p-2)}}{dt}=z^{(p-1)};$$

тогда входящие в три данные уравнения $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ производные

$$\frac{d^mx}{dt^m},\ \frac{d^ny}{dt^n},\ \frac{d^pz}{dt^p}$$

заменятся соответственно первыми производными

$$\frac{dx^{(m-1)}}{dt},\ \frac{dy^{(n-1)}}{dt},\ \frac{dz^{(p-1)}}{dt},$$

и данные три уравнения будут связывать $t$, их неизвестные функции (числом $m+n+p$): $x,\ x',\ldots x^{(m-1)};\ y,\ y',\ldots y^{(n-1)};\ z,\ z',\ldots z^{(p-1)}$ и производные

$$\frac{dx^{(m-1)}}{dt},\ \frac{dy^{(n-1)}}{dt},\ \frac{dz^{(p-1)}}{dt};$$

вместе с добавленными нами $(m+n+p-3)$ уравнениями образуется система из $m+n+p$ уравнений со столькими же неизвестными функциями, но все производные неизвестных функций будут только первого порядка, что и требуется доказать.

*Замечание.* Решив приведенную систему относительно производных, мы дадим ей вид:

$$(*)\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,\ x,\ y,\ z,\ u\ldots),\dfrac{dy}{dt}=\varphi(t,\ x,\ y,\ z,\ u\ldots),\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=\psi(t,\ x,\ y,\ z,\ u\ldots),\dfrac{du}{dt}=\omega(t,\ x,\ y,\ z,\ u\ldots)\ldots,\end{cases}$$

где $t$ — независимая переменная, $x,\ y,\ z,\ u\ldots$ — ее неизвестные функции, при чем число уравнений равно числу неизвестных и определяет порядок системы.

## § 2. Интегрирование приведенной системы.

*Теорема.* Интегрирование системы (*) (см. §1, замеч.) порядка $n$-го приводится к интегрированию одного обыкновенного дифференциального уравнения $n$-го порядка или к интегрированию нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений, сумма порядков которых равна $n$; самые общие выражения неизвестных функций через независимое переменное $t$ будут содержать всего $n$ произвольных постоянных $C_1,\ C_2,\ldots C_n$.

Вывод. Беря производные по $t$ от обеих частей уравнения $\frac{dx}{dt}=f(t,x,y,z,u\ldots)$ и заменяя в правой части производные $\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt},\ \frac{du}{dt}\ldots$ их выражениями из данной системы (*), получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\ldots=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot f(t,x,y,z,u\ldots)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\varphi(t,x,y,z,u\ldots)+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\psi(t,x,y,z,u\ldots)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\omega(t,\ x,\ y,\ z,\ u\ldots)+\ldots=f_1(t,\ x,\ y,\ z,\ u\ldots).$$

Тем же приемом можно выразить и все следующие производные до

$$\frac{d^nx}{dt^n}\ \text{через}\ t,\ x,\ y,\ z,\ldots;$$

исключив затем $(n-1)$ букв $y,\ z,\ u\ldots$ из системы $n$ уравнений:

$$(**)\ \frac{dx}{dt}=f(t,x,y,z,u\ldots),\ \frac{d^2x}{dt^2}=f_1(t,x,y,z,u\ldots),\ldots\ \frac{d^nx}{dt^n}=f_{n-1}(t,x,y,z,u\ldots),$$

найдем уравнение: $\quad F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2},\ldots\frac{d^nx}{dt^n}\right)=0,$

обыкновенное дифференциальное уравнение $n$-го порядка; его общий интеграл будет:

$$x = \lambda(t, C_1, C_2, \ldots C_n).$$

Когда $x$ определено, то, внеся его значения в систему:

$$\frac{dx}{dt} = f, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = f_1, \ldots \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-2}} = f_{n-2},$$

из нее можем определить остальные $(n-1)$ неизвестных функций $y, z, u \ldots$ через $t$ и постоянные $C_1, C_2, \ldots C_n$:

$$y = \mu(t, C_1, C_2, \ldots C_n), \; z = \nu(t, C_1, C_2, \ldots C_n), \; u = \rho(t, C_1, C_2, \ldots C_n).$$

Но может случиться, что исключение $y, z, u \ldots$ можно произвести не из полной системы (**), а из укороченной системы, несодержащей одного или нескольких последних уравнений; пусть, например, $y, z, u \ldots$ исключаются из системы

$$\frac{dx}{dt} = f, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = f_1, \ldots \frac{d^px}{dt^p} = f_{p-1};$$

тогда результат исключения будет

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots \frac{d^px}{dt^p}\right) = 0$$

и определит $x$ в виде функции от $t$ и $C_1, C_2, \ldots C_p$: $x = \lambda(t, C_1, C_2, \ldots C_p)$.

В этом случае, чтобы закончить интегрирование системы, определим $(p-1)$ букв из числа $y, z, u \ldots$ (для краткости назовем их буквами 1-й категории) из уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f, \frac{d^2x}{dt^2} = f_1, \ldots \frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}} = f_{p-2}$$

в виде функций от $t, C_1, C_2, \ldots C_p$ и остальных $n-p$ букв из числа $y, z, u \ldots$ (эти $n-p$ букв назовем буквами второй категории), и в те $(n-p)$ уравнений первоначальной системы (*), левые части которых содержат производные от букв 2-й категории, внесем найденные выражения $x$ через $t, C_1, \ldots C_p$ и выражения букв 1-й категории через $t, C_1, \ldots C_p$ и буквы 2-й категории. Тогда система (*) обратится в систему порядка $(n-p)$, где неизвестными будут $(n-p)$ букв 2-й категории и в виде параметров войдут $C_1, C_2 \ldots C_p$. Новая система или приведется к одному уравнению порядка $(n-p)$-го или к уравнению порядка $q$-го и к системе порядка $(n-p-q)$-го и т. д., что и доказывает теорему.

*Пример 1.* $\frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \; \frac{dy}{dt} = x + z, \; \frac{dz}{dt} = -3x + y - z.$

Составляем: $\frac{d^2x}{dt^2} = -y - z, \; \frac{d^3x}{dt^3} = 2x + z - y$ и получаем результат исключения $y$ и $z$: $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{dx}{dt} = 0$, откуда $x = C_1 + C_2e^t + C_3e^{-t}$; затем находим $z = -\frac{1}{2}x'' + \frac{1}{2}x' - x = -C_1 - C_2e^t - 2C_3e^{-t}$ и $y = -x'' - z = C_1 + C_3e^{-t}$.

*Пример 2.* $\frac{dx}{dt} = y + z, \; \frac{dy}{dt} = z + x, \; \frac{dz}{dt} = x + y.$

Составим $\frac{d^2x}{dt^2}=2x-y+z$ и исключаем $(y+z)$ из укороченной системы двух уравнений; находим: $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0$, откуда $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$. Затем берем $z=\frac{dx}{dt}-y$ и вносим во второе уравнение системы: $\frac{dy}{dt}=z+x$, что дает уравнение 1-го порядка для $y$: $\frac{dy}{dt}+y=3C_2e^{2t}$, откуда $y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}$; наконец, $z=\frac{dy}{dt}-x=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}$.

**§ 3. Интегралы системы совокупных дифференциальных уравнений и их свойства.**

Если из уравнений (*) (Замечание §1) можно вывести, как следствие, уравнение $\frac{d}{dt}\Phi(t, x, y, z, u\ldots)=0$, то вытекающая из него зависимость: $\Phi(t, x, y, z, u\ldots)=C$ называется интегралом системы (*).

*Пример 1.* Из системы примера 2, §2 находим:

$$\frac{d(x+y+z)}{dt}=2(x+y+z) \text{ или } \frac{\frac{d}{dt}(x+y+z)}{x+y+z}-2=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\log(x+y+z)-2t\right\}=0, \quad \log(x+y+z)-2t=\log C_1,$$

$$(x+y+z)e^{-2t}=C_1.$$

Другой интеграл:

$$\frac{d(x-y)}{dt}=y-x, \quad \frac{\frac{d}{dt}(x-y)}{x-y}+1=0, \quad \frac{d}{dt}\left\{\log(x-y)+t\right\}=0,$$

$$\log(x-y)+t=\log C_2, \quad (x-y)e^t=C_2.$$

Третий интеграл:

$$\frac{d(y-z)}{dt}=z-y, \quad (y-z)e^t=C_3.$$

*Теорема 1.* Если $\varphi_1=C_1$, $\varphi_2=C_2, \ldots \varphi_k=C_k$ суть интегралы данной системы, то и произвольная функция их $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k)$ представит интеграл системы, ибо

$$\frac{d\Phi}{dt}=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_j}\cdot\frac{d\varphi_j}{dt}=0 \text{ в силу } \frac{d\varphi_j}{dt}=0.$$

*Замечание 1.* Не может быть зависимости $\Phi(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k)=0$, куда, кроме $k$ интегралов, входит явно $t$, ибо тогда

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\sum\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_j}\cdot\frac{d\varphi_j}{dt}=0, \text{ но } \frac{d\varphi_j}{dt}=0, \text{ следовательно}$$

$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$, т.-е. $\Phi$ не содержит $t$.

*Определение.* Интегралы системы: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ называются независимыми, если между ними нет зависимости вида $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k) = 0$.

*Теорема 2.* Система $n$-го порядка имеет $n$ независимых интегралов.

Вывод. Предположим, что система $n$-го порядка проинтегрирована, т.-е. найдены $n$ уравнений вида:

$$x = \lambda(t, C_1, C_2, \ldots C_n),\ y = \mu(t, C_1, C_2, \ldots C_n),\ z = \nu(t, C_1, \ldots C_n) \ldots$$

Решив их относительно $C_1, C_2, \ldots C_n$, найдем $n$ уравнений:

$$C_1 = \varphi_1(t, x, y, z, u \ldots),\ C_2 = \varphi_2, \ldots C_n = \varphi_n,$$

которые представят $n$ интегралов и притом независимых, ибо независимы постоянные $C_1, C_2, \ldots C_n$. Покажем теперь, что при наличности $n$ независимых интегралов всякий новый интеграл $C_{n+1} = \varphi_{n+1}$ будет их функцией. Действительно, внеся в правую часть уравнения

$$C_{n+1} = \varphi_{n+1}(t, x, y, z, u \ldots)$$

выписанные выше значения $x = \lambda(t, C_1, C_2, \ldots C_n)$, $y, z, u \ldots$, получим:

$$C_{n+1} = \Psi(t, C_1, C_2, \ldots C_n) \text{ или } \varphi_{n+1} = \Psi(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n),$$

а так как, согласно замечанию к теореме 1, $t$ в такую зависимость явно входить не может, то получаем: $\varphi_{n+1} = \Psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$, что и требуется доказать.

*Замечание 2.* Для системы $n$-го порядка произвольная функция от $n$ независимых интегралов ее дает самое общее выражение интеграла этой системы.

*Теорема 3.* Если известны $k$ независимых интегралов системы $n$-го порядка, то система приводится к системе $(n-k)$-го порядка, а при $k = n$ выполняется полное интегрирование системы. Действительно, из $k$ уравнений $\varphi_1(t, x, y, z, u \ldots) = C_1$, $\varphi_2 = C_2, \ldots \varphi_k = C_k$ определим $k$ букв из числа $x, y, z, u \ldots$ через $t, C_1, C_2, \ldots C_k$ и остальные $(n-k)$ букв из числа $x, y, z, u \ldots$ и полученные выражения внесем в правые части тех уравнений системы, где стоят слева последние $(n-k)$ букв. Тогда данная система обратится в систему $(n-k)$-го порядка, при чем буквы $C_1, C_2, \ldots C_k$ войдут как параметры. При $k = n$ из системы $n$ независимых интегралов определяются все $n$ функций $x, y, z, u \ldots$ через $t, C_1, C_2, \ldots C_n$.

*Пример.* Для системы примера 2 §2 в примере 1 §3 найдены 3 независимых интеграла:

$$x + y + z = A_1 e^{2t},\ x - y = A_2 e^{-t},\ y - z = A_3 e^{-t};$$

отсюда

$$x = \frac{A_1}{3} e^{2t} + \frac{2A_2 + A_3}{3} e^{-t},\ y = \frac{A_1}{3} e^{2t} + \frac{A_3 - A_2}{3} e^{-t},$$

$$z = \frac{A_1}{3} e^{2t} - \frac{A_2 + 2A_3}{3} e^{-t},$$

и эти результаты совпадают с примером 2 §2, если принять

$$C_1 = \frac{1}{3}(2A_2 + A_3),\ C_2 = \frac{1}{3} A_1,\ C_3 = \frac{1}{3}(A_3 - A_2).$$

# ОГЛАВЛЕНИЕ.

## Введение: некоторые сведения из высшей алгебры.



## ОТДЕЛ I. Интегрирование функций.

### Глава I. Общие приемы интегрирования.



### Глава II. Интегрирование рациональных функций.



### Глава III. Интегрирование иррациональных функций.



### Глава IV. Интегрирование трансцендентных функций.



### Глава V. Интегрирование полных дифференциалов функций от нескольких независимых переменных.

## ОТДЕЛ II. Определенные интегралы.

### Глава I. Соотношение между определенным и неопределенным интегралами.



### Глава II. Различные способы вычисления определенных интегралов.



### Глава III. Эйлеровы интегралы.



### Глава IV. Формулы приближенного вычисления определенных интегралов.



## ОТДЕЛ III. Ряды, составленные из функций одной независимой переменной.

### Глава I. Общие свойства таких рядов.



### Глава II. Степенные ряды.



### Глава III. Тригонометрические ряды.

## ОТДЕЛ IV. Геометрические приложения интегрального исчисления.

### Глава I. Однократные интегралы.



### Глава II. Двукратные интегралы.



### Глава III. Трехкратные интегралы.



## ОТДЕЛ V. Интегрирование дифференциальных уравнений.

### Глава I. Общие свойства.



### Глава II. Уравнения 1-го порядка.



### Глава III. Уравнения высших порядков.



### Глава IV. Линейные уравнения.



### Глава V. Системы обыкновенных совокупных дифференциальных уравнений.