НАУКОВО-ПОПУЛЯРНА БІБЛІОТЕКА

Я. Депман

РОЗПОВІДІ ПРО МАТЕМАТИКУ

«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»
1957

І. ДЕПМАН

РОЗПОВІДІ про МАТЕМАТИКУ

Державне
учбово-педагогічне видавництво
«Радянська школа»
Київ — 1957

Переклад з російського доповненого
і виправленого видання
В. В. Ковалевського

ВСТУП

Розповіді цієї книги стосуються питань математики, які вивчають у п'ятих — сьомих класах середньої школи. У книзі говориться про те, як з трудової діяльності людини виникли найголовніші поняття і основні розділи початкової математики, як вони розвивались та удосконалювались і досягли їх сучасного стану.

Для скільки-небудь повного викладу історичного розвитку найголовніших ідей основних розділів початкової математики — арифметики, алгебри та геометрії — потрібні були б кілька товстих книжок. В одній маленькій книжечці вміщаються тільки короткі розповіді про основні ступені розвитку цих ідей. Автор ставить своєю метою розповісти насамперед про зародження математики у найдавніших народів, історія яких нам відома. У першому розділі книги даються короткі відомості про математику вавілонян, єгиптян, греків та індійців. На жаль, історія стародавньої китайської математики, яка нас дуже цікавить, європейській науці поки що майже невідома.

У другому розділі книги розповідається про розвиток математики у народів Радянського Союзу — вірмен, узбеків, таджиків та інших народів Середньої Азії і російського народу — до XVIII століття. Цей огляд закінчується розповіддю про «Арифметику» Л. П. Магніцького, 1703 року, яка мовби підбила підсумок розвиткові математики у російського народу до XVIII століття. Бажаючи підкреслити той факт, що деякі риси народної математики, які історично розвинулись, продовжували бути в ужитку і в XVIII і XIX століттях, у цей розділ включено розповідь про математичні розваги в підручниках пізнішого періоду.

У третьому розділі книги даються відомості про виникнення основних понять арифметики, алгебри та гео-

метрії і наводяться способи розв'язання окремих питань початкової математики.

Видатні російські математики поряд з найвищими питаннями математики цікавились і основами цієї науки, тобто питаннями, які мають безпосередній зв'язок з початковою математикою, що вивчається в школі. Ця обставина дає можливість у плані книги повести розповідь про визначних вітчизняних математиків: про геніального математика XVIII століття, члена Петербурзької Академії наук Леонарда Ейлера та його учнів, про творця нової геометрії — Миколу Івановича Лобачевського, про Пафнутія Львовича Чебишева, який створив ряд нових галузей математики і надав могутнього поштовху розвиткові тієї вищої арифметики, що, з одного боку, близька до шкільної арифметики, а з другого боку — порушує питання виняткової трудності. Видатний радянський математик Герой Соціалістичної Праці Іван Матвійович Виноградов, створивши метод розв'язання питань, до яких безрезультатно підходили визначні математики сучасності, є безпосереднім продовжувачем Петербурзької математичної школи, створеної П. Л. Чебишевим. У цьому самому розділі дано нарис про славну російську жінку-математика — Софію Василівну Ковалевську.

Школярі щодня звертаються до книг Андрія Петровича Кисельова і Миколи Олександровича Шапошнікова. Наприкінці книги дано короткі нариси про цих авторів, на книгах яких учились математиці багато поколінь молоді нашої країни.

Для тих, хто зацікавився окремими питаннями, порушеними в книзі, наприкінці її дано покажчик літератури, в якій можна знайти докладніші відомості.

ЗАРОДЖЕННЯ МАТЕМАТИКИ

Математика у стародавніх народів

В основі розвитку математики, як і будь-якої іншої науки, лежать потреби практичної діяльності людини.

Виникнення і розвиток наук обумовлені виробництвом. У Ф. Енгельса ми читаємо: «Як і всі інші науки, математика виникла з практичних потреб людей: з вимірювання площ земельних ділянок і місткості посудин, з обчислення часу та з механіки»[1].

Кожна сторінка цієї книги підтверджує висловлювання Енгельса. Не тільки початкові поняття математики, але й найвищі і найабстрактніші ідеї математичної науки походять від практики людини.

Особливо повчальною щодо цього є діяльність великого російського математика — Пафнутія Львовича Чебишева. Його найоригінальніші, зовсім нові для математики того часу, ідеї виникли з вивчення недосконалостей вітряків, різних заводських установок, з розв'язання інших суто практичних завдань.

Математика, як і кожна інша наука, виростає з практики, нею живиться і перевіряється.

Окремі математичні знання, що виросли з практичної діяльності людини, із спостереження нею явищ природи, існували у всіх відомих нам народів стародавніх часів.

У найвіддаленіші часи люди в своїй практичній діяльності не могли обходитись без математичних відомостей. Є книги, що відображають життя людини на перших ступенях розвитку. Такою є, наприклад, книжка «Як люди без коваля жили».

---

[1] Ф. Енгельс, Анти-Дюрінг, Держполітвидав, К., 1953, стор. 36.

Колись було оголошено велику премію за книгу на тему: «Як людина без математики жила». Премію нікому не видали. Певно, жоден письменник не зумів відобразити життя людини, позбавленої будь-яких математичних понять.

Математичні відомості нагромаджувались в результаті практичної діяльності народів протягом тисячоліть, в епохи, про які не існує письмових пам'яток. І в історичні епохи життя різних народів ми маємо великі періоди, які не залишили імен мудреців або вчених, і наукові, зокрема й математичні, досягнення можна приписати тільки всьому народові, його практичній діяльності.

Нині ми добре ознайомлені з математичними знаннями жителів стародавнього Вавілона (частина сучасного Іраку) і стародавнього Єгипту (береги ріки Нілу). Найвищого свого розвитку діяльність цих народів у створенні математики досягла близько чотирьох тисяч років тому.

Про математику цих народів і треба розповісти перш за все.

Єгипет

Сучасна наука знає порівняно невелике число єгипетських математичних документів. Їх усіх близько п'ятдесяти.

Найдавнішою пам'яткою єгипетської математики є так званий «Московський папірус»[1], що належить до епохи близько 1850 року до початку нашого літочислення. Розміри Московського папірусу: довжина — 544 сантиметри, ширина — 8 сантиметрів.

Папірус був придбаний російським збирачем Голенищевим у 1893 році, а в 1912 році перейшов у власність Московського музею образотворчих мистецтв.

У цьому папірусі серед інших задач розв'язується задача про обчислення об'єму зрізаної піраміди з квадратною основою. Таких задач не знаходимо в інших єгипетських пам'ятках. Цю пам'ятку було вивчено радянськими вченими — академіками Б. О. Тураєвим і В. В. Струве.

Більшим за об'ємом від Московського є папірус Ахмеса, знайдений і придбаний англійським збирачем Райндом у 1858 році,— через те його часто називають папірусом

[1] Папірус — матеріал, подібний до дуже цупкого паперу.

Ієрогліфічний напис єгиптян і його значення.

Райнда. Він відноситься до 1700 року до нашої ери. Російською мовою цей папірус описаний В. В. Бобиніним (див. покажчик літератури наприкінці книги).

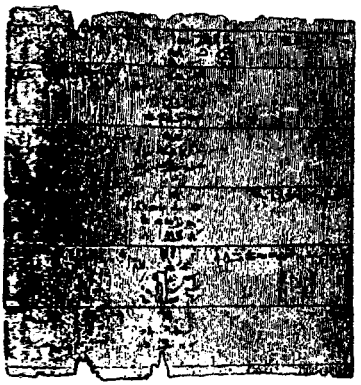
Слово «терези», написане єгипетськими ієрогліфами.

Папірус Райнда являє собою полосу в 544 сантиметри завдовжки і 33 сантиметри завширшки. Він містить розв'язання 84 задач і має заголовок, в якому автор дав свою оцінку математики:

«Настановлення, як досягнути знання всіх темних [важких, незрозумілих] речей... [клапоть папірусу видерто].

Єгипетське ієратичне, тобто спрощене, письмо.

усіх таємниць, які ховають у собі речі. Твір цей написано в 33-му році в 4-му місяці часу вод за царювання царя Ра-а-ус. З старих рукописів часів царя... [клапоть папірусу видерто] ...ат. Писець Ахмес написав це».



Уривок папірусу Ахмеса.

Усі інші математичні документи Єгипту, останній з яких належить до тисячного року нашого літочислення, повторюють ті самі правила обчислень, що є вже в названих основних документах.

Виявляється, що єгиптяни чотири тисячі років тому розв'язували багато задач нашої практичної математики (арифметики, геомет-

Геометрична задача з Московського папірусу. Трапеція прямокутна; в застосуванні до неї дане в папірусах правило обчислення площі вірне.

рії і деяких розділів алгебри). Вони мали нумерацію з десятковою основою, володіли обчисленнями за допомогою дробових чисел.

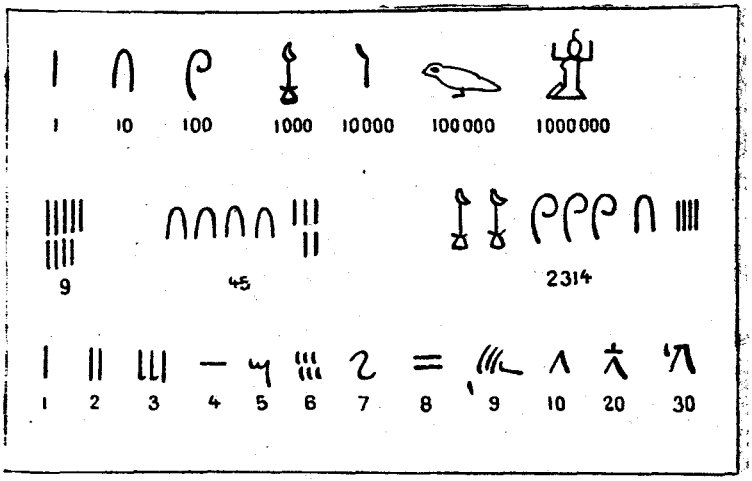
Задачі, які ми розв'язуємо за допомогою рівнянь першого степеня, вони розв'язували способом, що в нашій школі набув назви «способу припущення». Цей спосіб застосовували до XVIII століття в арифметиці всіх народів під назвою «способу фальшивого положення», або «хибного правила».

У чому саме полягає цей спосіб, буде показано далі.

Єгиптяни уміли обчислювати площі прямолінійних фігур і круга. Відношення довжини кола до його діаметра — наше число π — за правилами єгипетської геометрії дорівнює 3,16. На думку деяких дослідників, єгиптяни знали правило для обчислення об'єму кулі і, безперечно, уміли обчислювати об'єм зрізаної піраміди з квадратною основою.

Вавілон

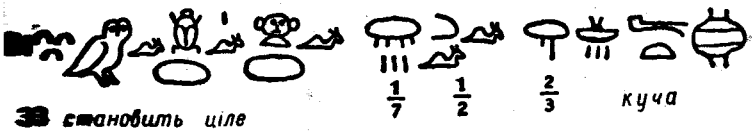
Одночасно із зародженням математики в Єгипті жителі стародавнього Вавілона — шумери і аккади — самостійно створили свою математику. Ці народи писали знаками, складеними з клиноподібних рисок, на глиняних плитках, які після сушіння на палючому сонці набували великої міцності. Нині ці глиняні плитки тисячами знаходять під час розкопок.



Єгипетські цифри: верхні два рядки написано ієрогліфами, нижній рядок — ієратичними знаками.

У Ленінграді в Ермітажі і в Московському музеї образотворчих мистецтв є чимало єгипетських і вавілонських пам'яток з оригінальними написами. Єгипетські написи збереглись і на сфінксах, що стоять у Ленінграді на березі Неви перед будинком Академії художеств.

Ці сфінкси (зображення царів у вигляді лева з людською головою) знайдені під час розкопок у Єгипті в 1819 році і привезені до Петербурга в 1832 році. Вони зображають єгипетського царя, який царював у 1419—1383 роки до нашого літочислення,— отже, цим сфінксам близько 3500 років. Вирізьблено їх з найміцнішого червоного граніту і знесли вони жахливу спеку Єгипту та холод.



Рівняння, записане ієрогліфічним письмом.

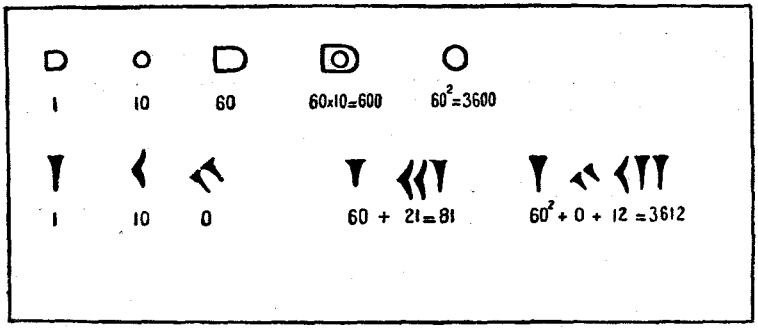
Читається справа наліво: «Куча [невідоме], $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$, ціле [кучі] становить 33», тобто $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33$.

Один із сфінксів на набережній Неви в Ленінграді.

Півночі. Розміри: довжина 4,88 метра, висота 3,66 метра, ширина близько 1,55 метра; вага сфінкса — 23 тонни. За сфінкси було сплачено 64 000 карбованців асигнаціями; перевезення коштувало ще половину цієї суми. Академік О. М. Крилов із здивуванням відзначив той факт, що єгиптяни тієї епохи мали зубила, якими можна було вирізьблювати в твердому граніті тонкі фігури письма.

За останні двадцять —тридцять років знайдено і вивчено дуже багато вавілонських математичних пам'яток.

Знайдено математичну енциклопедію вавілонян на сорока чотирьох таблицях, що становить начебто зведення всіх математичних досягнень вавілонян і відноситься до



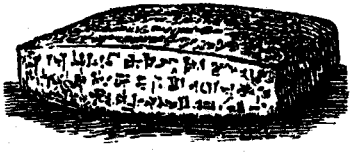
Вавілонські цифри: верхній рядок — шумерські цифри, нижній — вавілонські.

часу близько двохтисячного року до нашого літочислення, тобто до моменту найвищого розквіту вавілонської культури. З цієї енциклопедії видно, що вавілоняни за тих далеких часів мали досить зручні способи обчислення для розв'язування практичних задач, які ставило практичне життя: землеробство, врегулювання зрошування землі, торгівля.

Вавілоняни були основоположниками науки астрономії. Від них походить семиденний тиждень, поділ круга на 360 градусів, поділ години на 60 хвилин, хвилини — на 60 секунд, секунди — на 60 терцій. У них зародилась і астрологія — уявна наука про визначення майбутнього за зірками.

Вавілоняни створили досконале для свого часу числення, в основі якого лежало не число 10, як у нас, а число 60, що в багатьох випадках полегшувало найважчу арифметичну дію — ділення. Вони ж створили і систему мір та ваги, в якій кожна міра була в 60 раз більша від попередньої. Звідси походить наше ділення мір часу — години, хвилини та секунди — на 60 частин.

Вавілоняни розв'язували рівняння другого степеня і деякі види рівнянь третього степеня (останні — за допомогою спеціальних таблиць).



Вавілонська глиняна плитка з написами.

Від другої половини другого тисячоліття до початку

нашого літочислення на території, що лежить між царствами Вавілонським і Ассірійським, яке замінило його,— з одного боку,— і Закавказзям, з другого боку, існувало Ванське царство, або царство Урарту, яке в VIII столітті охоплювало області південного Закавказзя.

Народи Урарту, засвоївши вавілонську математику, переробили її. Установлено, що вони перейшли до десяткової нумерації, близької до нинішньої позиційної десяткової (в якій одна й та сама цифра означає різні розряди, залежно від свого місця) і різко відмінної від єгипетської десяткової нумерації, яка не знала позиційного принципу.

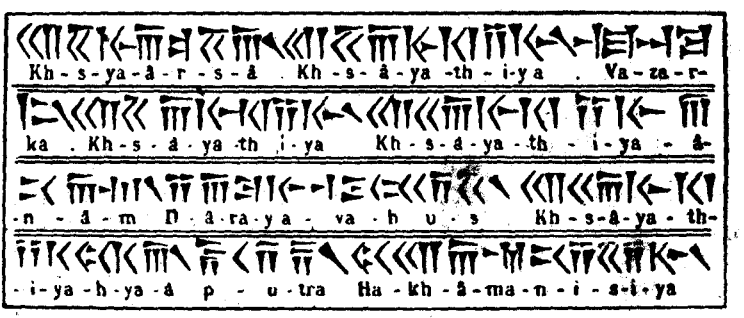
Урартська арифметика багато в чому подібна до старовірменської. Таким чином, математика стародавніх вавілонян через народи Урарту мала вплив на найдавнішу математичну культуру закавказьких народів, особливо вірменську, сприявши винятково ранньому її розквітові.

Індія

Паралельно з Єгиптом та Вавілоном розвивалась математика в Індії.

За дві або півтори тисячі років до початку нашого літочислення було написано стародавні індійські книги, що набули назви вед.

У цих книгах і їх переробках, у так званих сутрах, містяться докладні правила для заміни однієї фігури рівновеликою їй іншою, для поділу та складання цих фігур. При цьому користуються, головним чином, прямокутними трикутниками, сторони яких виражаються цілими



Підпис царя Ксеркса клинописом.

числами. Ведам відомі цілочислові прямокутні трикутники таких видів:

1) з сторонами 3, 4, 5 і йому подібні, одержувані від множення чисел 3, 4, 5 на одно і те саме число;

2) з сторонами 5, 12, 13 і йому подібні;

3) з сторонами 8, 15, 17 і 12, 35, 37.

Прямокутні трикутники мають ту властивість, що сума квадратів катетів дорівнює квадратові гіпотенузи (теорема Піфагора). Цю вимогу задовольняють трикутники з зазначеними вище сторонами. Наприклад:

$$12^2 + 35^2 = 144 + 1225 = 1369 = 37^2.$$

Вавілонське письмо.

Побудова фігури іншої форми, яка була б точно рівновелика даній, і подібні до цієї задачі становлять також значну частину грецької геометрії і вивчаються в нашому шкільному курсі.

Будівельне мистецтво вимагало складання фігур квадратної, трикутної або многокутної форми з квадратних плит або цеглин. Ця задача, цілком очевидно, дала початок вченню про трикутні, квадратні і взагалі многокутні числа. Це вчення було широко розвинене і в Греції.

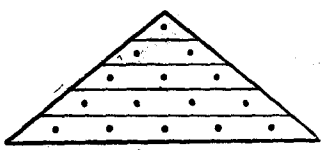
Трикутними називають числа: 1, 3, 6, 10, 15 і так далі; квадратними — 1, 4, 9, 16, 25 і так далі. Якщо зобразити цеглини точками, то ці числа являють собою кількість точок (цеглин), потрібних для побудови трикутної або квадратної фігури при поступовому збільшенні сторін їх, як показують рисунки.

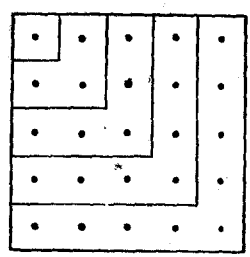
Квадратні плити (цеглини) були основним будівельним матеріалом в Індії і особливо в сусідньому з нею Вавілоні, де зовсім не було каменю та дерева. Рівновеликість фігур визначалась за числом цих плит.

Ця практична задача будівельного мистецтва висунула питання про визначення числа плит, потрібних для діставання трикутної, квадратної або многокутної фігури із заданою величиною площі.

Розв'язання цієї задачі вимагало вивчення властивостей послідовностей чисел натурального ряду: 1, 2, 3, 4, ... трикутних: 1, 3, 6, 10, 15, ... квадратних: 1, 4, 9, 16... Ці питання вивчали вавілоняни, індійці, а пізніше — грецькі математики, особливо Піфагор (VI століття до початку нашого літочислення) і його школа.

У життєписах Піфагора розповідається про перебування





Підрахунок точок у трикутниках дає «трикутні» числа: 1, 3, 6, 10, 15..., у квадратах — «квадратні» числа: 1, 4, 9, 16, 25...

його в Єгипті, Вавілоні та Індії. Мабуть, багато відкриттів, що йому приписуються, серед них вчення про так звані фігурні числа (трикутні, квадратні і т. д.), були ним винесені з Вавілона та Індії, де це вчення виникло із завдань будівельного мистецтва тих країн.

Найціннішим внеском індійців у скарбницю математичних знань людства є застосовуваний ними спосіб запису чисел за допомогою десяти знаків: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Основа цього способу полягає в ідеї, що одна й та сама цифра позначає одиниці, десятки, сотні або тисячі, залежно від того, на якому місці ця цифра стоїть. Місце цифри, якщо немає яких-небудь розрядів, визначається нулями, що приписуються до цифр.

Остаточна розробка такої позиційної системи нумерації, ідея якої була у вавілонян, є визначна заслуга індійців.

Великий французький математик Лаплас (1749—1827) пише з цього приводу: «Думка — виражати всі числа небагатьма знаками, надаючи їм, крім значення за формою, ще значення за місцем, настільки проста, що саме через

цю простоту важко оцінити, наскільки вона гідна подиву. Як нелегко прийти до цього, ми бачимо ясно на прикладі видатних геніїв грецької вченості — Архімеда і Аполлонія, від яких ця думка лишилась прихованою».

Велике відкриття позиційної системи нумерації зробила не одна якась геніальна людина. Це відкриття індійців, як і всі відкриття єгиптян і вавілонян, є результатом тривалого, поступового збагачення досвіду і спостереження цілого народу. Такими самими є численні, на перший погляд дуже абстрактні, досягнення математики.

Грецька математика

Дуже велика частина шкільного курсу математики, особливо геометрії, була відома грецьким математикам.

У галузі математики про греків можна навести слова Енгельса, сказані відносно філософії:

«Це одна з причин, які примушують нас все знов і знов повертатись у філософії, як і в багатьох інших галузях, до досягнень того маленького народу, універсальна обдарованість і діяльність якого забезпечили йому в історії розвитку людства місце, на яке не може претендувати жоден інший народ...»[1].

Ряд імен грецьких математиків зустрічається в підручниках арифметики і геометрії. Про них і скажемо кілька слів.

Найбільш раннім грецьким математиком є Фалес (VII і VI століття до нашого літочислення).

Йому приписують кілька початкових теорем геометрії (про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника, про рівність трикутників за стороною і двома прилеглими до неї кутами та інші). Він передбачив сонячне затемнення.

У VI столітті до нашого літочислення жив згаданий вище Піфагор. Крім названих уже відкриттів, йому приписують ще дуже багато, між іншим математичну теорію музики, сучасний вигляд якої дав член Петербурзької Академії наук Леонард Ейлер (1707—1783).

Близько 300-го року до нашого літочислення Евклід склав «Начала» (геометрії), зміст яких охоплює більшу частину шкільного курсу геометрії. Про це йтиме мова

[1] Ф. Енгельс. «Діалектика природи», 1953, стор. 24.

в різних місцях нашої книги, так само як про заслуги Евкліда в арифметиці.

Математик і механік Архімед (287—212) є найвидатнішим математиком усіх часів. У нього є начала багатьох ідей математики, до яких європейські народи прийшли тільки через 2000 років.

У підручнику арифметики згадується ім'я Ератосфена, математика і географа, який дав спосіб виділення простих чисел у натуральному ряді чисел і обчислив довжину меридіана[1].

Греки перетворили математику в абстрактну теоретичну науку, в якій досягли великої точності. У них, між іншим, виникли чотири варті уваги задачі, які людство розв'язувало понад два з половиною тисячоліття. Задачі ці такі:

1. Поділити коло або дугу на довільне число рівних частин (побудувати в колі правильний многокутник з будь-яким числом сторін).

2. Подвоїти куб, тобто побудувати куб, який мав би об'єм у два рази більший, ніж даний куб.

3. Поділити будь-який кут на три рівні частини.

4. Побудувати квадрат, який має площу, що дорівнює площі даного круга.

Усі ці задачі треба було розв'язувати точно, користуючись тільки циркулем і лінійкою, на якій немає поділок. Незважаючи на уявну простоту, ці задачі, як виявилось, були нерозв'язні, що було встановлено тільки наприкінці першої половини XIX століття.

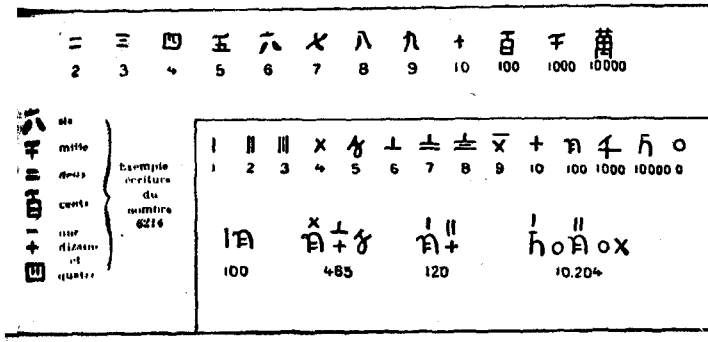
До того часу, а почасти й пізніше, багато хто, особливо ж із числа любителів математики, які не вивчили серйозно цієї науки, витрачали час і сили на безнадійні спроби розв'язання цих задач.

Історія цих задач, що про них написано багато книг та брошур усіма мовами, потребувала б окремої книги, і з неї можна було б бачити, як спроби розв'язати ці, на перший погляд дуже прості, задачі допомогли виробити методи, за допомогою яких створені важливі галузі сучасної математичної науки.

Грецька наука занепала в V столітті нашого літочислення. Після цього протягом 1000 років європейські

---

[1] Про те, як він виміряв довжину меридіана, розповідається в книзі «Міри і метрична система».



Китайські цифри: верхній рядок — цифри вчених трактатів; унизу ліва — запис числа 6214; у відокремленій частині — китайські комерційні цифри.

народи не тільки не робили ніяких успіхів у математиці, але й не знали про досягнення грецької математики.

Східні народи (Індії, Китаю, Середньої Азії) продовжували розвивати математику. Їх досягнення поступово проникають і в Європу: близько 1000-го року — наша сучасна нумерація, близько 1200-го року — індійська арифметика, що майже збігається з нашою. Тільки з XVI століття починається самостійний розвиток алгебри в Європі, а в XVII столітті зароджується сучасна вища математика. У зародженні математики у європейських народів великою є роль деяких народів Радянського Союзу, до розповіді про математику яких ми й перейдемо.

МАТЕМАТИКА У НАРОДІВ НАШОЇ БАТЬКІВЩИНИ

Математика у вірмен

Найдавніші відомості про математику у народів нашої Батьківщини відносяться до першого тисячоліття нашого літочислення.

На першому місці щодо давності математичної культури серед народів Радянського Союзу стоять вірмени.

У вірмен у VII столітті був визначний учений Ананія з Шірака, праці якого у великій кількості дійшли до нашого часу.

Ананія з Шірака був математиком, астрономом, метеорологом, істориком та географом. Він розглядає в своїх творах, крім суто арифметичних задач, питання про кулястість Землі, про затемнення Місяця і Сонця, про вживання нуля в математиці, про многокутні числа, про календарні обчислення, про сонячний годинник,— усе це в таку епоху, коли серед європейських народів цими питаннями ще майже ніхто не цікавився.

Як стверджують історики вірменського народу, наукова література для Ананії не була самоціллю. Коли його батьківщині загрожувала небезпека, він був безпосереднім учасником у визвольній боротьбі проти візантійських загарбників.

Боєць-вірменин воював за батьківщину мечем, а вчений-патріот — пером. Таким був Ананія з Шірака, перший вірменський математик.

З творів Ананії особливий інтерес для нас становлять підручник з арифметики і задачник.

На початку задачника вміщено теоретичний вступ і таблиці додавання, віднімання, множення та ділення чисел,

подібні до таблиць наших шкільних підручників молодших класів.

Ці таблиці належать до найдавніших з відомих у науці.

От приклади задач Ананії:

«№ 11. Один купець пройшов через три міста, і стягнули з нього в першому місті мита: половину і третину майна, і в другому місті половину і третину (від того, що в нього лишилось), і в третьому місті знову стягнули половину і третину (від того, що в нього було); і коли він прибув додому, в нього залишилось 11 дахеканів (грошових одиниць). Отже, знайди, скільки всього дахеканів мав купець спочатку». *Відповідь:* 2376.

«№ 22. Фараон, цар Єгипту, святкував день свого народження, і він мав звичай роздавати в цей день десяти вельможам, відповідно до достоїнства кожного, сто мірок вина. Отже, розподіли це відповідно до достоїнства всіх десяти».

(Смисл слів: «відповідно до достоїнства кожного» означає, що частина першого відноситься до частини другого, як 1 : 2, частина другого — до частини третього, як 2 : 3, і т. д.)

Відповідь (у сучасному способі письма): перший дістав $1\frac{9}{11}$, другий — $3\frac{7}{11}$, ... , сьомий — $12\frac{8}{11}$, ...

Ананія дає відповідь у єгипетській формі дробів: перший — $1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{55}$, тобто $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{55}$, сьомий — $12\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{22}\,\frac{1}{30}\,\frac{1}{33}\,\frac{1}{55}$.

«№ 24. У місті Афінах була водойма, в яку проведено три труби. Одна з труб може наповнити водойму протягом однієї години, друга, тонша, — за дві години, третя, ще тонша, — за три години. Отже, знайди, за яку частину години всі три труби разом наповнюють водойму».

Відповідь: $\frac{1}{4}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{22}=\frac{6}{11}$ години.

Висота рівня математичних знань Ананії стає ясною, якщо відзначити, що сучасник його, англійський монах Беда, «вельмиповажний», якого вважали в Європі найбільш вченою людиною свого часу, говорить: «У світі є багато важких речей, але немає нічого такого важкого, як чотири

дії арифметики». А Ананія розв'язує задачі (наприклад, № 21 його задачника), що потребують додавання восьми дробів, серед знаменників яких є 7, 8, 9, 13, 14, 16, 20, що зводиться до дуже великого спільного знаменника[1]. Для порівняння відзначимо, що автор англійського підручника арифметики 1735 року пише: «В ім'я інтересів учнів... ми викладаємо окремо (наприкінці книги) правила дій над ламаними числами, що їх звичайно називають дробами, при вигляді яких частина учнів так засмучується, що спиняється і виголошує: «Тільки не далі!»

Таким чином, дії над дробами, які через одинадцять століть ще викликають жах у тих, хто навчається арифметиці в Англії, для Ананії з Шірака не становлять нічого важкого.

Цей факт добре ілюструє стан математичних знань у вірмен в епоху VII століття, далеку від нашого часу.

В XI столітті (1051) було перекладено з грецької мови на вірменську скорочені «Начала» геометрії грецького математика Евкліда. Переклад цей зберігається до нашого часу в Єреванському музеї, що є одним з найзнаменитіших у всьому світі.

«Начала» Евкліда — першоджерело нашої геометрії і єдиний посібник з геометрії протягом двох тисяч років у всіх народів. Багато сотень разів цю книгу перекладали різними мовами. Вірменський переклад «Начал» був за часом другим (після перекладу арабською мовою). Латинською мовою, міжнародною для вчених Європи, «Начала» були перекладені з арабської в 1120 році, а перший переклад з грецького оригіналу в Європі було здійснено тільки в 1533 році, майже на п'ять століть пізніше від перекладу на вірменську мову.

Крім Ананії з Шірака і гаданого перекладача «Начал» Евкліда Грегора Магістра, відомі й інші вірменські математики середніх віків, наприклад, Ованес Саркава-Вардапет (вардапет — учитель), який помер у 1129 році. Ованес Саркава викладає вчення грецького математика Нікомаха (I століття нашої ери) про числа, поліпшує календар установленням року в 365 днів і обстоює знання, що спирається на досвід. «Без досвіду ніяка думка не може бути імовірною і прийнятною, бо тільки досвід є безсумнівним»,— пише він.

---

[1] Прочитайте баладу Я. П. Полонського «Беда-проповідник».

Усі ці факти свідчать про високий рівень культури у Вірменії за давнини і в середні віки. Відомі є вірменські вчені, які були професорами в грецькій академії в перші століття нашого літочислення.

Наводимо наприкінці слова першого вірменського математика — Ананії з Шірака про цю науку: «І сильно полюбивши мистецтво чисельне, помислив я, що без числа ніяке міркування філософське не складається, всієї мудрості матір'ю його вважаючи».

Такі висловлювання про математику ми багато разів знаходимо в старих руських пам'ятках.

Математика у народів Середньої Азії

Ми розповіли про зародження математичної науки у вавілонян, єгиптян та індійців і про те, що згодом, протягом тисячі років, починаючи з VII століття до нашого літочислення, математика розвивалась, головним чином, у Греції. Від кінця V століття нашого літочислення, коли припинилась грецька математична творчість, у наступні за цим століття, приблизно до 1200 року, про математику в європейських народів немає майже ніяких відомостей. Всесильні на той час служники церкви ставились вороже до всякої науки, зокрема й до математики. Не відставали від церковників і світські власті.

Візантійський імператор Юстініан вміщує в своєму кодексі законів 529 року розділ під заголовком: «Про зловмисників, математиків і подібних до них», в якому є параграф: «Саме ж варте засудження мистецтво математики забороняється зовсім». А втім, тут під поняттям «математики» мали на увазі і ворожбитів та астрологів, які провіщали майбутнє по зірках, що видно із закону імператора Феодосія: «Ніхто хай не радиться з ворожбитом або математиком».

Впливовий монах Качіні, один з головних переслідувачів великого вченого Галілео Ґалілея (1564—1642), ще в XVII столітті заявляє, що математики, як творці всіляких єресей, повинні бути спалені на всій землі християнській. Церковникам, однодумцям монаха Качіні, удалося позбавити старого вченого свободи і піддати катуванню, але вони не змогли примусити Галілея відмовитись від вчення польського астронома і математика Коперніка (1473—

1543), згідно з яким не Сонце рухається навколо Землі, а Земля обертається навколо Сонця.

Науки було перетворено на служниць богослов'я, чимало передових вчених закінчили своє життя на багатті за рішенням церковних судилищ (інквізиції). Глава інквізиції в Іспанії («великий інквізитор») Томас Торквемада в 1486 році відправив на багаття іспанського математика Вальмеса за утверджування, що він знайшов розв'язання рівняння четвертого степеня (рівняння, що містить x^4), яке, за словами Торквемади, з волі бога недоступне людському розумові. Відзначимо, що спосіб розв'язання цих рівнянь знайшов італійський математик Феррарі в середині XVI століття.

Результатом такого ставлення до науки було не тільки припинення поступу науки,— кращі вчені люди того часу перестали розуміти попередню науку.

У VII столітті серед попередніх народів починають відігравати визначну роль араби. Вони провадили грандіозні завойовницькі війни і загарбали поступово більшість колишніх культурних країн.

Торгівля, мореплавство, промисловість, військова справа потребували наукових знань. Від початку IX століття починається посилений переклад арабською мовою культурної спадщини підкорених народів.

Багато математичних праць грецьких вчених ми знаємо тепер тільки з їх арабських перекладів. Час від часу в арабських рукописах і за наших днів знаходяться невідомі до того часу роботи грецьких математиків. Одним з останніх таких визначних відкриттів було знайдення в 1924 році твору Архімеда про правильний семикутник. Перед цим важливим відкриттям з історії грецької математики російський вчений А. І. Попадопуло-Керамевс відкрив понад п'ятдесят років тому невідому доти дуже важливу працю Архімеда. Її було опубліковано в 1905 році під назвою «Новий твір Архімеда».

Важливими центрами наукового життя в східних країнах були міста наших середньоазіатських республік: Самарканд, Хорезм (Ургенч), Бухара, Мерв та інші.

Тут від IX століття розквітає математична думка, з'являються місцеві — узбецькі і таджицькі — вчені, які збагатили науку, а в ряді випадків здобули славу в науці на віки вічні. Серед цих учених були: математик Мухаммед ал-Хорезмі (Мухаммед з Хорезма), астроном Абуль ал-

Фергані (Абуль з Фергани), також ферганці астрономи ат-Тюркі і його син Абдуль Хасан, ал-Сагані з околиць міста Мерва, ал-Ходженді і ал-Джаухарі з берегів Сир-Дар'ї, ал-Біруні з Хорезма і Ібн-Сіна з Бухари (IX—X століття), Омар Хайям, життя якого пов'язане з Самаркандом (XI століття), ал-Каші — директор обсерваторії вченого самаркандського князя Улугбека (XV століття).

Улугбек.

Хорезмієць Мухаммед ал-Хорезмі, який народився в другій половині VIII століття і помер між 830 і 840 роками, написав підручник арифметики, з латинського перекладу якого європейські народи ознайомились з індійським способом числення за допомогою десяти цифр.

На початку IX століття цей самий Мухаммед-ал-Хорезмі написав підручник алгебри, що став родоначальником європейських підручників.

Книга ал-Хорезмі з алгебри дала цій науці не тільки назву, а й надала їй зовсім нового характеру.

У греків алгебра, яку називали арифметикою, охоплювала важкі, абстрактні питання теорії чисел. А ал-Хорезмі пише в передмові до своєї книги, що він «склав цей невеликий твір з найлегшого і найкориснішого в науці числення і до того ж такого, що потрібне постійно людям у справах про спадкування, спадкові мита, при розподілі майна, в судових процесах, у торгівлі і в усіх їх ділових взаєминах, у випадках вимірювання земель, проведення каналів, у геометричних обчисленнях та інших предметах різного роду та сорту...»

Три чверті книги відведено розв'язуванню практичних задач, чого зовсім уникали грецькі математики. Теоретична частина книги пройнята розумінням того, що алгебра є наука загального характеру, яка розв'язує питання «різного роду та сорту» (загальними методами,— додаємо ми).

Від імені цього видатного узбецького вченого походить математичний термін «алгорифм» (але не слово «логарифм»), який нині означає всяку послідовність обчислень для розв'язання певного роду питань. Так, наприклад, можна говорити про алгорифм розв'язання рівнянь, про алгорифм розв'язання певного типу задач і так далі.

Колись алгорифмом, або алгоризмом, називалась арифметика, викладена за допомогою десяткової позиційної системи числення, бо про цю арифметику європейські вчені вперше дізналися з тільки що згаданого перекладу «Арифметики індійськими цифрами» ал-Хорезмі. Переклад починався словами «ал-Хорезмі про індійську лічбу»; слово «ал-Хорезмі» і набуло форми «алгоризм».

Ал-Хорезмі відомий також своїми астрономічними і географічними працями (вимірювання довжини меридіана).

Славетний філософ, астроном і математик ал-Біруні (також з Хорезма) народився в 973 році.

Як філософ, він цікавий тим, що за тих давноминулих часів обстоював права людського розуму. Він пише, що з приводу астрономічних поглядів з ним «сперечались деякі люди, які приписують божій премудрості те, чого вони не знають у науках. Вони виправдують своє неуцтво заявою, що тільки аллах всемогутній і всезнаючий».

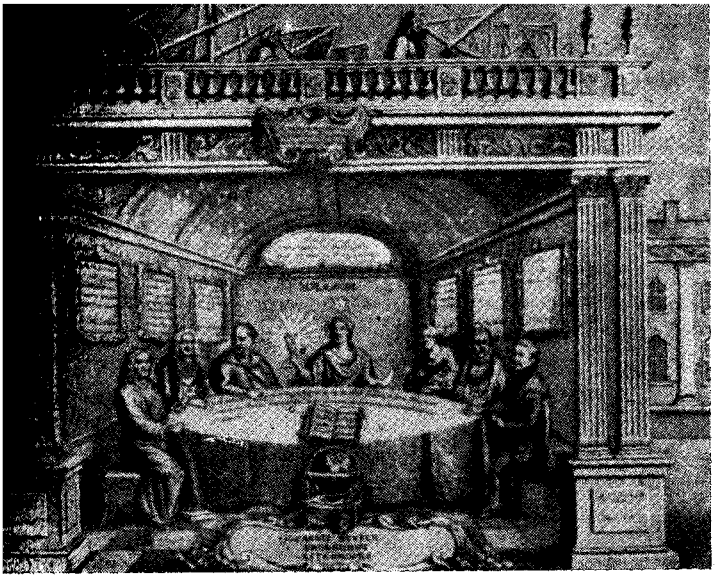
Ал-Біруні не задовольняється тим, що та чи інша астрономічна теорія зручна для пояснювання явищ. Однаково зручно можуть пояснювати явища і кілька теорій. Учений, на його думку, повинен ставити питання: яка з цих теорій істинна?

У вартій уваги математичній «Книзі про хорди» ал-Біруні зіставляє різні способи доведення окремих тверджень, що були у давніших учених. Він говорив:

«Я зібрав усе це для тебе, читачу, і за своїм звичаєм відніс кожне доведення до його автора, щоб ти охопив їх власним оком і зрозумів, що всі вони збігаються в одній точці, і щоб ти сам вирішив, що треба вивести звідси для пізнання хорд».

За змістом книга відноситься до вчення про складніші питання геометрії і тригонометрії — розділу математики, який вивчають у школі, починаючи від VIII класу. В астрономічних роботах ал-Біруні передбачає сучасні способи складання точних карт (метод тріангуляції).

Внук монгольського володаря Тамерлана — Улугбек (1393—1449), сам визначний астроном, побудував у Самар-



Гравюра XVII століття, яка зображує Улугбека серед найславетніших астрономів: за столом у центрі — муза астрономії Уранія. Перший від Уранії праворуч — Улугбек.

канді кращу на ті часи в усьому світі обсерваторію, зібравши в ній видатних учених для разробки астрономії та математичних наук.

Тригонометрія багато чим зобов'язана діяльності цієї групи вчених.

Першим директором цієї обсерваторії був узбек Джемшід бен Масуд ед-Дін ал-Каші, який помер близько 1436 року. Його вклад у математичні науки дуже великий. Він знайшов правило для обчислення суми четвертих степенів послідовності натуральних чисел від 1 до будь-якого числа m:

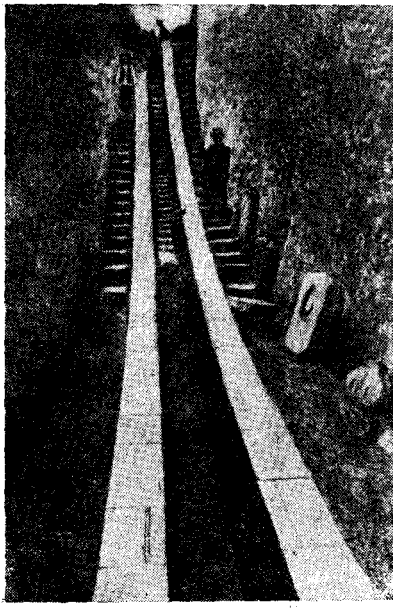
$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + m^4 = \frac{1}{30}(6m^5 + 15m^4 + 10m^3 - m),$$

удосконалив тригонометричні обчислення, дав правила наближеного розв'язання рівнянь вищих степенів, спосіб визначення відстаней небесних тіл, винайшов дотепний механічний прилад для вивчення положень планет. Усі ці

відкриття європейці зробили наново тільки через декілька століть.

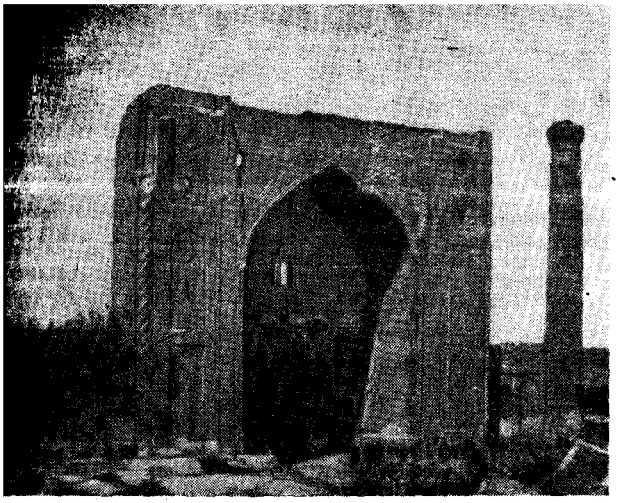
Ал-Каші на початку XV століття написав книгу «Повчання про коло», на яку посилається в своїй книзі (1427 року) — «Ключ до мистецтва лічби». У «Повчанні про коло» ал-Каші виконує обчислення з точністю, що дивує нас: якщо результати, які він знаходить у шістдесятковій системі числення, перевести в десяткові дробі, то дістаємо 17 точних десяткових знаків після коми. У своїй книзі ал-Каші знаходить наближене відношення довжини кола до радіуса (число, яке ми позначаємо символом 2π), обчислюючи для цього сторону правильного многокутника, в якого сторін 800 335 168. Як побачимо далі, ал-Каші дістає для числа π 16 точних знаків після коми.

У тій самій книзі ал-Каші серед ряду інших дуже важливих нових результатів уперше запроваджує в науку десяткові дроби, без яких неможливо уявити собі сучасні математику і техніку. Це було за 175 років до появи десяткових дробів у Європі.



Дуга великого радіуса, поділена на градуси; сучасні залишки обсерваторії Улугбека в Самарканді.

Славетний таджицький поет, філософ, математик і астроном Омар Хайям народився близько 1048 року, помер близько 1122 року. З біографії його відомо, що самаркандський його друг Абу Тагір дав йому можливість вивчати математику. Саме йому Омар Хайям і присвятив свою алгебру, написану в роки 1069—1074. У цій книзі автор дає розв'язання геометричними методами рівнянь третього степеня (які містять x^3), що є найвищим досягненням алгебри середніх віків. Алгебраїчні методи розв'язання цих рівнянь було знайдено в Європі тільки в середині XVI століття.



Залишки будинку в Самарканді, де працював Улугбек.

До геометрії відноситься знайдена за наших днів ро-ота Омара Хайяма — «Ключ до важких місць Евкліда». ній Омар Хайям розглядає питання про паралельні лінії підходить до деяких вихідних ідей тієї самої побудови геометричної думки, яка була в першій половині XIX століття створена найгеніальнішим геометром усіх часів — М. І. Лобачевським.

У 1079 році Омар Хайям складає новий дуже точний календар. Математичні розрахунки календаря Омара Хайяма, який ще за життя свого творця запроваджується в деяких країнах Азії, були використані для французького революційного календаря наприкінці XVIII століття.

Відзначення імен ал-Хорезмі, ал-Біруні, ал-Каші і Омара Хайяма досить для характеристики того винятково високого рівня, якого досягли математичні науки у наших середньоазіатських народів у середні віки.

В Європі передові вчені та мислителі за тих часів, і навіть пізніше, нерідко закінчували своє життя на багатті (Джордано Бруно в 1600 році) або зазнавали загроз та катування інквізиції (Коперник, 1473—1543, Галілей, 1564—1642).

Заносячи книгу Коперніка, від якого ведуть початок наші сучасні погляди на сонячну систему, до списку за-

боронених для католиків книжок, цензура римської церкви в 1616 році писала: «Ці книги для уникнення поширення подібного вчення на шкоду католицькій істині припиняються друком надалі до виправлення». У «цивілізованій» Європі наукова книга повинна була зважати не на наукову істину, а на католицьку, тобто на забобони католицької релігії, тоді як узбецькі і таджицькі вчені того часу обстоюють свободу наукової думки.

Буржуазні історики звичайно відносять середньоазіатських вчених до арабських, бо вони здебільшого писали свої вчені праці арабською мовою. Проте це були не араби, і ряд їх рукописів зберігся тільки їх рідною мовою. Арабська мова була на ті часи лише міжнародною мовою вчених, як в Європі в той час і довго ще після того панувала латинська мова.

Математика у російського народу

Письмові пам'ятки математичних знань російського народу ми маємо починаючи приблизно з тисячного року нашого літочислення. Ці знання є результатом тривалого попереднього розвитку і грунтуються на практичних потребах людини.

Рано виник на Русі інтерес до науки в окремих верствах населення. Збереглись відомості про школи за часів Володимира Святославовича (978—1015), за Ярослава Мудрого (1036—1054). Були в дуже ранню епоху «числолюбці», які цікавились математикою не тільки в тій мірі, в якій вона була потрібна безпосередньо для практичної діяльності.

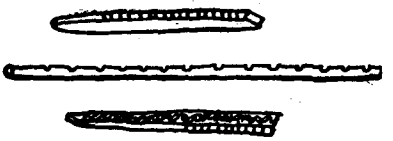
Прикладом таких «числолюбців» на початку XII століття був новгородський монах Кирик.

Говорячи про інтерес руського народу до математики за тих далеких від нашого часу століть, ми не повинні забувати, що йдеться тут про передових людей, які прагнули знання, будували національну культуру, що пишно розквітла в наступні століття.

Поряд з цими прогресивними елементами були й значні кола духовенства та експлуататорів, які ставились до знання взагалі і до математики зокрема вороже. Свідчення про вороже ставлення до знання ми зустрічаємо ще в XVII і XVIII століттях.

Основною передумовою для всіх математичних знань

є нумерація, яка у різних стародавніх народів мала різний вигляд.



Бирки — розрахункові палички.

Очевидно, всі народи спочатку позначали числа зарубками на паличках,— росіяни називали їх бирками. Такий спосіб запису боргових зобов'язань або податків застосовувався малописьменним населенням різних країн. На паличці робили нарізи, що відповідали сумі боргу або податку. Паличку розколювали пополам: одну половину залишали у боржника або платника, друга зберігалась у позикодавця або в казначействі.

Під час розплати обидві половинки перевіряли, додаючи їх одна до одної. В Англії цей спосіб запису податків існував до порівняно недавнього часу. При ліквідації старих податкових зобов'язань селян було вирішено спалити назбирані бирки в печах будинку парламенту. Від цього сталась пожежа і згорів сам будинок парламенту (1834), а разом з ним загинув і укріплений у стіні зразок англійської міри довжини, отже, відтоді англійці не знають точної довжини свого фута. У тривалій роботі над відновленням довжини фута, що загинув, брав участь найближчий помічник Д. І. Менделєєва в справах упорядкування наших мір — професор Ф. І. Блумбах. Англійці спокушали Блумбаха залишитись на роботі в Англії. З розповіді самого Блумбаха, який помер у 1949 році, будучи почесним членом Академії наук Латвійської РСР, відомо, що з приводу його відмови від пропозиції англійців Д. І. Менделєєв із задоволенням зауважив: «Ти був і лишився російським латишем...»

Історію пожежі будинку англійського парламенту описав великий письменник Ч. Діккенс (An address on Administrative Reform)[1].

Греки в VI столітті до нашого літочислення стали позначати числа буквами, над якими ставили спеціальний значок.

Таким самим способом писали числа наші предки за допомогою букв слов'янського алфавіту, над якими ставили спеціальний значок, титло. Наведена таблиця показує,

[1] У повному англійському виданні творів Діккенса.

а҃	в҃	г҃	д҃	є҃	ѕ҃	з҃	и҃	ѳ҃
аз	веди	глагол	добро	есть	зело	земля	иже	фита
1	2	3	4	5	6	7	8	9
і҃	к҃	л҃	м҃	н҃	ѯ҃	о҃	п҃	ч҃
и	како	люди	мыслете	наш	кси	он	покой	червь
10	20	30	40	50	60	70	80	90
р҃	с҃	т҃	ѹ҃	ф҃	х҃	ѱ҃	ѿ	ц҃
рцы	слово	твердо	ук	ферт	хер	пси	о	цы
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Слов'янська нумерація.

якими буквами яке число позначалось у слов'янській нумерації. Впливом цієї нумерації пояснюється походження деяких термінів російської мови. У старих підручниках граматики буква «и» називалась «*и* осьмиричне», буква «і» — «*і* десятиричне». Пояснюються ці назви тим, що в слов'янській нумерації буква «и» позначала 8, буква «і» — 10.

У господарському житті далекого минулого люди задовольнялись порівняно невеликими числами — так званим «малим численням» наших предків. Воно доходило до числа 10 000, що в найдавніших пам'ятках називається «тьма», тобто темне число, яке не можна виразно уявити.

Згодом межу малого числення було відсунуто до 10^8, до числа «тьма тем». Старовинний рукопис з цього приводу зазначає, що «больше сего числа несть человеческому уму разумети». Але поряд з цим «малим численням», «коли прилучалося велике числення і лічба», застосовувалась друга система, яка називалась «великим числом або численням», або «числом великим словенським». У ньому застосовувались вищі розряди: тьма — 10^6, легеон — 10^{12}, леодр — 10^{24}, ворон — 10^{48}, іноді ще колода — десять воронів — 10^{49} (хоч треба було за колоду прийняти, ідучи

за системою, 10^{96}). Автор рукопису знову зазначає, що «того числа несть больше».

Для позначення цих великих чисел наші предки застосовували оригінальний спосіб, який не зустрічається ні в одного з відомих нам народів: число одиниць будь-якого з перелічених вищих розрядів позначалось тією самою буквою, що й прості одиниці, але обведеною для кожного числа відповідним бордюром (див. таблицю).

а	Тысяща
а	Тьма
а	Легеон
а	Леодр
а	Ворон
а	Колода

Слов'янський запис великих чисел.

Найвизначніші грецькі математики не додумались до цього способу письма чисел.

Таких великих чисел не потребувала на той час, і не потребує і тепер, жодна практична задача. Архімед, найвидатніший грецький математик, підрахував, що число піщинок в усьому світовому просторі, як це розуміли за тих часів, не перевищує 10^{63}.

Слов'янський «числолюбець» сказав би, що це число піщинок не більше від тисячі легеонів воронів

$$(10^{63} = 10^3 \cdot 10^{12} \cdot 10^{48}).$$

Число піщинок у всьому світовому просторі людині тих часів справді могло здаватись найбільшим можливим числом, чим і виправдуються зазначення авторів рукописів того, що «больше сего не дано человеку разумети». Розглядання великого слов'янського числення неодноразово в руських математичних рукописах свідчить про те, що «числолюбці» були досить численні в древній Русі.

У першому друкованому російському підручнику математики, в «Арифметике» Л. П. Магніцького [1] (1703), даються

[1] У 1699 році в Амстердамі І. Ф. Копієвський надрукував «Руководение в арытметику, сиречь во всякий счет», в якому на шістнадцяти маленьких сторінках викладено основи числення. Книжка поширення Росії не набула.

вже інтернаціональні терміни для великих чисел (мільйон, більйон, трильйон, квадрильйон). Доходячи до 10^{24} (квадрильйона), автор заявляє:

«Число есть бесконечно,
Умом нам не дотечно,
И никто не знает конца...
. . . . . .
. . . . . бездельно
Множайших чисел искати
И больше сей писати
Превосходной таблицы[1].
. . . . . .
И еще кому треба
Счисляти, что внутрь неба,
Довлеет числа сего
К вещем всем мира всего».

Останні рядки явно нагадують задачу Архімеда про обчислення піщинок у світовому просторі.

Слов'янська нумерація після запровадження індійської втратила будь-яке практичне значення.

Характерним «числолюбцем» древньої Русі був згадуваний уже нами монах Кирик, який написав у 1134 році книгу «Кирика — диакона Новгородского Антониева монастыря учение, им же ведати человеку числа всех лет».

Він підраховує з азартом, скільки місяців, скільки днів, скільки годин він прожив. Церковне літочислення вело свою лічбу від уявного «сотворіння світу», яке відносилось до 5510 року до початку нашого літочислення. 1134 рік, в якому Кирик писав свою книгу, був за церковним численням 6644. Кирик обчислює в місяцях, тижнях і в днях час, що минув до цього року, виконує різні обчислення днів церковних свят на майбутній час. При обчисленні часу Кирик вживає «дробові години», розуміючи під ними п'яті, двадцять п'яті, сто двадцять п'яті (і так далі) частини дванадцятигодинного дня. Доходячи в цьому рахунку до сьомої дробової години, яких у дні, виявляється, буде 937 500, він зазначає: «больше сего не бывает»,— це, мабуть, означає, що дрібніших поділів дня не вживали.

У «Руській правді», знаменитій правовій пам'ятці древньої Русі, складання якої відносять до періоду часу між XI і XV століттями, є статті, присвячені обчисленню потомства деякої початкової кількості овець, кіз та свиней.

---

[1] Тобто таблиці, що доходить до 10^{24}.

Обчислювач припускає, що наявне число овець за рік подвоюється, і тоді, наприклад, від двадцяти двох овець через 12 років буде отара в $22 \cdot 2^{12} = 90112$ овець,— цей результат і дається в «Руській правді». Тут ми маємо задачу, яка приблизно того самого часу дається в посібниках арифметики різних народів то про потомство кролів, то у вигляді задачі про винагородження винахідника шахової гри. Ці обчислення, мабуть, були створені такими «числолюбцями», як згадуваний уже Кирик з Новгорода.

Природним буде зіставити з сказаним про математичну культуру наших предків стан математичних знань у народів, що населяли Західну Європу. Арифметичні дії там виконують за допомогою лічильної дошки (абака), на яку кладуть камінці (боби) або кружечки з рисками[1]. Наша рахівниця, про яку скажемо далі, є найдосконалішим видом абака.

Запис чисел виконується за допомогою громіздкої римської нумерації, в якій навіть малі числа потребують великої кількості знаків (наприклад, 888 записується так: (DCCCLXXXVIII), а запис великих чисел набагато складніший, ніж у «великому словенському численні». Наші сучасні цифри в Західній Європі з'являються в книгах тільки в XIII столітті, натрапляючи на великий опір прибічників старого способу лічби на абаку або за допомогою римської нумерації.

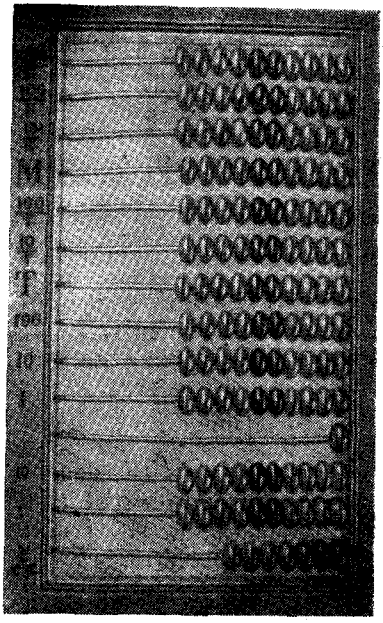
Російська рахівниця

У першому розділі ми розповіли про те, що індійський народ запровадив спеціальний знак для позначення відсутнього розряду числа. «Індійці винайшли щось, щоб позначити ніщо». Без цього знака — нинішнього нуля — наша система числення не мала б тих переваг перед усіма колишніми та існуючими іншими системами числення, які вона має.

Винайдення нуля індійцями відбулось за тих дуже давніх часів, коли про російський народ тієї епохи ми не маємо ніяких вірогідних відомостей.

---

[1] Вважають, що приказка «залишився на бобах» походить звідси. Людина, яка програла всі свої гроші, залишилася з своєю лічильною дошкою та з бобами,—«залишилась на бобах».



Російська рахівниця. На лівій стороні рамки позначення розрядів, відкладуваних на кожному з дротиків: одиниці, десятки, сотні, тисячі і т. д.; униз — гривеники, копійки, півшаги; С. Ч.— ініціали власника.

Російський народ винайшов ідеальний пристрій — рахівницю для полегшення числення за десятковою системою.

Ця рахівниця справедливо називається **російською**.

У книгах можна зустріти вказівку на те, що рахівницю винайшли китайці, що вона від китайців перейшла до сибірських народів і що відомі в російській історії купці та промисловці Строганови привезли її у Росію.

Зазначається і час, коли нібито з'явилась рахівниця в Росії: за одними джерелами — за часів Дмитрія Донського (XIV століття), за іншими — за часів Петра Першого (на рубежі XVII і XVIII століть).

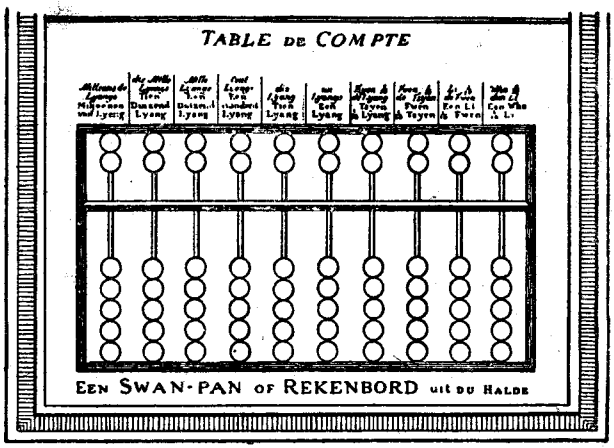
Ці розповіді не мають під собою жодних підстав, так само як і переказ про те, що предок Строганових був татарським королевичем. На жаль, розповіді про східне походження російської рахівниці потрапили до «Истории государства Российского» М. М. Карамзіна (том IX, примітка 651) і звідси до більшості підручників.

Щоправда, китайці мають лічильний пристрій, який відповідає нашій рахівниці, але в його основі лежить інша ідея. Цей пристрій дістав назву «суан-пан» і являє собою неглибокий ящик здовженої форми, поділений по довжині на нерівні частини перегородкою. Впоперек ящика, від однієї довшої стінки до протилежної, розміщені дротики, укріплені кінцями в стінках. На всіх дротиках у ширшому відділі ящика, ближчому до людини, яка лічить, є по п'ять кульок; у верхньому, вужчому відділі ящика, на кожному дротику — по дві кульки. Кульки нижньої частини суан-

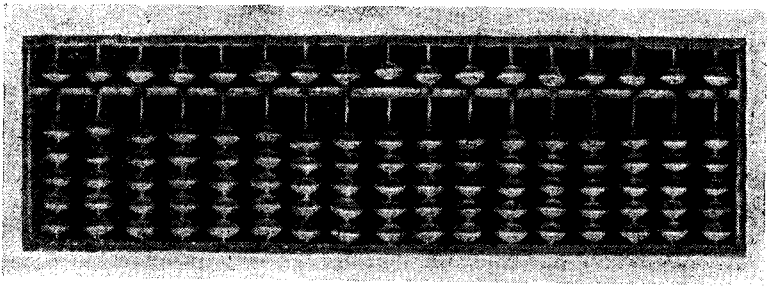
пана застосовуються для лічби до п'яти, з двох кульок верхньої частини суан-пана кожна відповідає п'ятірці.

На рисунку показано суан-пан XVII століття (тепер він має точнісінько такий самий вигляд). Якщо треба покласти на ньому 1, 2, 3, 4 одиниці, то на тому дротику, на якому зображуються одиниці (на нашому рисунку на п'ятому дротику справа), пересуваємо стільки кульок до перегородки. Замість пересування п'яти кульок до перегородки присувається з верхньої частини пристрою до перегородки одна кулька. Якщо таким самим способом додали ще п'ять одиниць, то замість них у верхній частині пристрою присувають другу кульку. Але дві ці кульки, як такі, що позначають дві п'ятірки, дають разом 10, і десяток зображується однією кулькою нижньої частини пристрою на наступному зліва дротику. На дальших дротиках зліва ставляться сотні, тисячі і т. д., а на дротиках вправо від дротика для одиниць — десяті, соті, тисячні та інші частини. На кожному дротику лічба виконується так само, як з одиницями на середньому дротику.

У XVI столітті китайський суан-пан був засвоєний японцями, тільки з тією відміною, що у верхньому відділі пристрою японці ставили на кожний дротик по одній кульці. Пристрій цей в Японії називається «сорубан». Зміна, внесена японцями в будову пристрою, є правильною,



Китайська рахівниця — суан-пан.



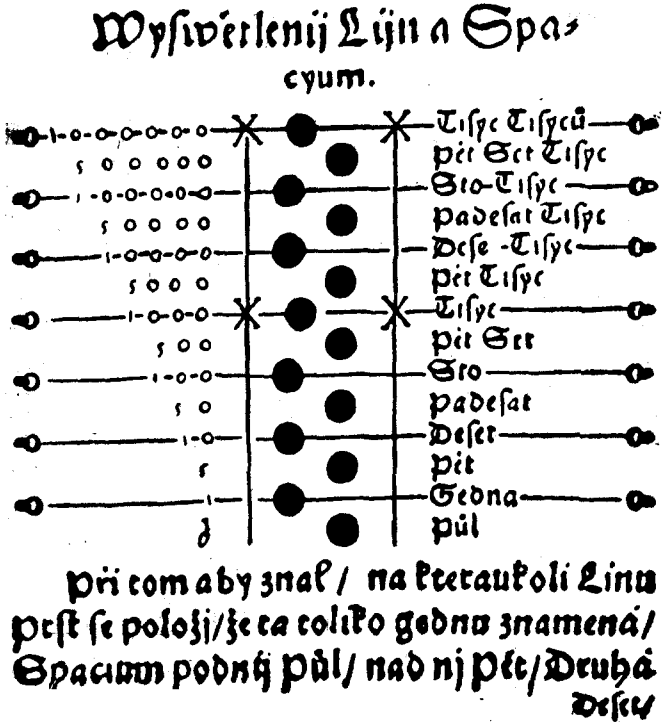
Японська рахівниця — сорубан.

бо друга кулька зайва: щоразу, коли у верхній частині дротика треба присунути до перегородки другу кульку, дістаємо десяток, і дві кульки, які опинились біля перегородки, треба відкинути і замінити однією кулькою в нижній частині дротика, що йде далі зліва. Таким самим способом слід було б викинути з нижнього відділу суан-пана і сорубана п'яті кульки, а в російській рахівниці — з кожного дротика десяті кульки.

Тут треба відзначити, що один з найбільш ранніх описів російської рахівниці, зроблений датським математиком-богословом Петером ван-Хавеном у 1743 році, як і деякі інші старі джерела, цілком виразно вказує на те, що в рахівниці на кожному дротику є по дев'ять кульок. Таким чином можна твердити, що цей російський народний лічильний пристрій самим народом був доведений до досконалого вигляду. Зайва десята кулька з'явилась пізніше і збереглась досі, хоч автори XIX століття неодноразово відзначали, що вона навіть заважає.

З цього опису видно, що в китайській і японській рахівниці число 5 стоїть на особливому місці серед інших чисел, чого немає в російській рахівниці. Російська рахівниця грунтується в чистому вигляді на десятковому численні, тоді як у китайському суан-пані збереглись ще пережитки п'ятіркового числення,— лічби за допомогою пальців однієї руки. Сліди п'ятіркового числення збереглись і в римській нумерації, в якій маємо:

шість — VI — п'ять та один,
сім — VII — п'ять та два,
вісім — VIII — п'ять та три,
дев'ять — VIIII — п'ять та чотири (римляни звичайно писали так),
чотири — IV — п'ять без одного.



«Лічба на лініях» з старої чеської книжки.

До XVI століття включно західноєвропейські народи користувались способом лічби, що відповідає конструкції суан-пана. Називався цей спосіб «лічбою на лініях» і полягав він у такому.

Обчислювач мав перед собою дошку з паралельними лініями, що йдуть зліва направо. На першій лінії ставились кісточки, які позначають одиниці. Замість 5 одиниць ставилась кісточка між першою і другою лініями. На другій лінії ставились кісточки, що відповідають десяткам, між другою і третьою лініями кісточки позначали 50 і т. д. Це цілком відповідає римській нумерації і користуванню суан-паном.

Аналогічний спосіб лічби був і в російського народу, але його рано зовсім усунуло винайдення десяткової рахівниці, тоді як у китайців і японців він зберігся до цього

часу. Тому ми ніяк не можемо вважати нашу десяткову рахівницю запозиченою від східних народів, а повинні визнати її російським винаходом, а саму рахівницю справедливо називати «російською рахівницею».

Відзначимо, що в західноєвропейському побуті не застосовують рахівницю, і швидкість користування нею росіян багато разів викликала здивування іноземців.

Шкільна рахівниця як посібник при викладанні арифметики потрапила до Західної Європи в двадцятих роках минулого століття таким чином.

Під час наполеонівського походу в Росію в 1812 році в бою під Красним (Смоленської губ.), за який фельдмаршал Кутузов дістав титул «князя Смоленського», потрапив у полон поручик саперного батальйону Жан Віктор Понселе (1788—1867). Партію полонених було відправлено до Саратова пішки, при морозах до 30°. Серед небагатьох французів, що перенесли чотиримісячний перехід, був і Понселе. У Саратові Понселе створив нову галузь геометрії, яка під назвою «проективної геометрії» вивчається у наші дні всіма, хто здобуває вищу математичну освіту.

Від'їжджаючи після закінчення війни на батьківщину, де Понселе здобув славу визначного геометра, батька прикладної механіки і військового інженера, він повіз до Франції і російську рахівницю. Під назвою бульє рахівниця увійшла до вжитку у французькій школі, а звідти і в школах інших країн.

Багато зворотів нашої мови свідчать про те, що рахівницю російський народ застосовує з давніх-давен. «Скидати з рахунка», «прикидати», «накидка», «скидка», «зводити рахунки», «скостити» та багато аналогічних висловів у народній мові з'явились унаслідок користування рахівницею протягом тривалого часу.

Найчастіше на рахівниці доводиться лічити гроші. Велике поширення російської рахівниці пов'язане з тим, що в Росії раніше, ніж в інших країнах, виникла десяткова грошова система: карбованець дорівнює десяти гривеникам, гривеник — десяти копійкам, червонець — десяти карбованцям (а втім, у XVIII столітті червонець не одразу дорівнював десяти карбованцям). Історики буржуазних країн віддають пріоритет запровадження десяткової грошової системи Сполученим Штатам Америки. Проте там поділ долара на 100 центів установився тільки наприкінці XVIII століття. А в Росії перехід до десяткового поділу грошо-

вих одиниць було закінчено в 1704 році, отже, на 100 років раніше від Сполучених Штатів Америки. Англія й досі продовжує користуватись недесятковою грошовою системою, про яку визначний англійський фізик Томсон сказав, що «англійська система мір була б найбезглуздішою з усіх, якби англійська монетна система не була ще безглуздіша».

Не будемо далі повторювати вигадки буржуазних авторів про чужоземне походження російської рахівниці, вигадки, іноді дуже кумедні. Так, наприклад, американський історик математики Д. Е. Сміт у спеціальному «дослідженні» про лічильні пристрої, виданому в 1921 році, пише, що російська рахівниця прийшла в Росію через вірмен від турків і що цей пристрій у турків нібито називається «к у л б а», а у вірмен — «х о р а б». Проте ні та ні друга з названих мов не знає цих слів, які Сміт їм накидає. У турецькій мові є слово «хораб», а у вірменській — слово «кулба», і обидва ці слова означають одне й те ж, а саме — «панчохи». Цей приклад «вченого обгрунтування» східного походження російської рахівниці ще раз нагадує нам про необхідність критичного ставлення до тверджень буржуазних «вчених».

До російської рахівниці ми не повинні ставитись зневажливо, як до примітивного лічильного апарата. Цей пристрій так довго і з такою честю служив російському народові, що заслуговує на нашу подяку і повагу. Ми закликаємо школярів добре засвоїти застосування російської рахівниці і повторюємо слова великого поета нашої епохи — В. В. Маяковського, який закликáв нас до боротьби проти купця-приватника тридцять років тому:

«На арену!
З купцем воювати йди!
Рахівницею бить його вчися».

Геометричні відомості в старих російських пам'ятках

Потреби землеробства, будівельної та військової справи породили основи геометрії у всіх народів, зокрема і в слов'ян. Запити практичного життя продовжували підштовхувати розвиток геометрії.

Уже в найдавніших пам'ятках російської історії ми зустрічаємо початкові відомості з геометрії.

М. В. Остроградський (1801—1862).

Старим російським посібником, що викладає способи вимірювання площ, є «Книга сошного письма», найдавніший примірник якої відноситься до 1629 року, хоч існують вказівки, що оригінал був складений за Івана Грозного в 1556 році.

У цій книзі при обчисленні площ фігур рекомендується поділяти їх на квадрати, прямокутники, трикутники, трапеції. Площі квадрата і прямокутника обчислюються за нашими правилами, а площа трикутника знаходиться як половина добутку основи на бокову сторону, і площа трапеції — як добуток півсуми основ на бокову сторону (хобот). Останні правила, якщо буквально розуміти їх, неточні.

Можливо, що російська землемірна практика мала справу тільки з трикутниками і трапеціями, прямокутними або майже прямокутними, і в такому випадку ми не маємо підстави закидати нашим предкам незнання правил початкової геометрії. За тих далеких часів земля не була предметом купівлі-продажу, і точність результатів вимірювання відігравала незначну роль.

Виявляється, що в південноросійських губерніях такі примітивні способи оцінювання площ застосовувались ще в XIX столітті, що відбилось у біографічних нарисах про славетного російського математика XIX століття — М. В. Остроградського[1]. Він мав звичай жартувати з сво-

---

[1] Михайло Васильович Остроградський (1801—1862), який успішно вивчав математику в тільки що відкритому Харківському університеті, не міг одержати там диплома через проявлену ним недостатню ретельність з богослов'я.

За Остроградського заступився ректор університету, також видатний математик, Т. Ф. Осиповський, але справа закінчилась звільненням з університету самого ректора.

Остроградський змушений був поїхати до Парижа і там став слухати лекції математиків, які незабаром помітили, що довговолосий студент, який сидів на останній лаві, вмить розв'язував усі задачі, що пропонувались з кафедри. Остроградський став улюбленцем усіх

їми слухачами і, між іншим, поділяти їх на «землемірів» та «геометрів».

Коли його спитали про значення такого поділу, він розповів таке:

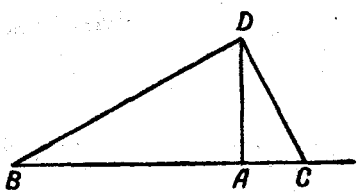
«Їду я якось по своїй Полтавській губернії. Бачу — чоловік у полі з чимсь возиться. Виявляється, землю міряє. Питаю,— як він трикутну ділянку вимірює. Каже, що перемножує довжини двох сторін трикутника і ділить добуток на 2. Питаю: «Чи всі у вас так роблять?»

Дістаю відповідь,— у повітах усі роблять так, тільки в губернії (губернські землеміри) вимірюють якось інакше».

Нема чого дивуватись, що такі способи землемірства були у вжитку 500 років тому в древній Русі.

У 1607 і 1621 роках видається «Устав ратных, пушечных и других дел, касающихся до воинской науки». У цій книзі серед інших відомостей даються і геометричні знання. От як визначається віддаль від точки спостереження A до другої, недоступної точки B.

У точці A треба забити жердину AD, приблизно на зріст людини. До верхнього кінця жердини прикладається трикутник так, щоб вершина прямого кута злилась з кінцем жердини D, а продовження одного з катетів проходило через точку B. Відмічається точка C на землі, через яку проходить продовження другого катета. Якщо виміряти віддаль AC, то шукана віддаль відноситься до довжини жердини так, як остання довжина відноситься до віддалі AC.



За Івана Грозного, в 1556 році, було складено перший російський посібник з землемірства під назвою: «Книга, именуемая геометрия или землемерие радиксом и циркулем... глубокомудрая, дающая легкий способ измерять места самые недоступные, плоскости, дебри». А на середину XVI століття було складено першу загальну карту Європейської Росії,— цю карту, разом з «Чертежами Сибирских земель» 1667 року, вважають найвизначнішою пам'ят-

---

паризьких уславлених математиків, які влаштували йому професорську кафедру в Парижі, але його потягло на батьківщину, де він незабаром став академіком і професором.

кою російської картографії. В одному з рукописів XVI століття вперше згадується «премудрий Клідас», тобто основоположник нашої сучасної геометрії — Евклід.

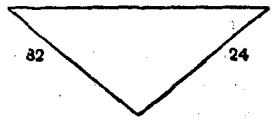
Піфагорова теорема є одним з найважливіших тверджень усієї геометрії. Вона стверджує, що в прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадратові гіпотенузи, або, інакше кажучи, що сума площ квадратів, сторонами яких є катети прямокутного трикутника, дорівнює площі квадрата, стороною якого є гіпотенуза. Цю істину містять ранні російські рукописи, хоч у них немає явної вказівки на те, що теорема має місце тільки в прямокутному трикутнику. Можливо, що нею користувались для наближеного знаходження віддалі і в тому випадку, коли трикутник майже прямокутний.

В усякому разі, в рукопису початку XVII століття ми зустрічаємо такі, наприклад, задачі:

«Хошь узнати промежь какими местами, не ходя и не меревь, что будет промежь верст, или сажен, или аршин. И ты познавай: как ходил будто к Троице в Сергиев монастырь и тут 32 версты. Ходил же в Воскресенский монастырь, и тут будто 24 версты. Что будет промежь теми монастырями, скажи не меревь?

И те числы с таких же чисел умножь. И те оба перечни сложи вместе и раздели на радикс [тобто добувай квадратний корінь]. И что из делу выдет, столько будет промежь теми местами верст».

Наведено рисунок та обчислення:



$$\begin{array}{rr} 24 & 32 \\ 24 & 32 \\ \hline 96 & 64 \\ 48 & 96 \\ \hline 576 & 1024 \\ & 576 \\ \hline & 1600 \end{array} \qquad \sqrt{1600} = 40.$$

Відповідь: 40.

Друга задача такого самого роду:

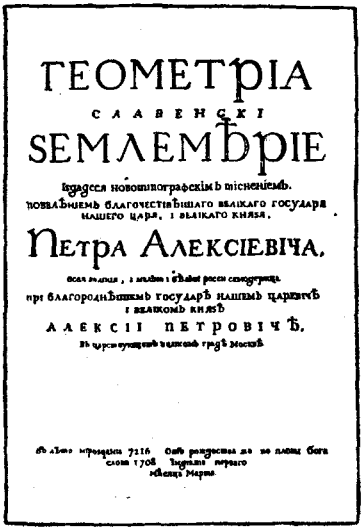
«Ходил с Москвы в Новгород и тут 600 верст. Ходил в Шуйский город и тут 500 верст. Что будет промежь теми городами: зри 781 верста».

Легко перевірити, що $\sqrt{600^2 + 500^2} \approx 781$.

У 1625 році було перекладено з англійської мови книгу з геометрії, доведену до вчення про коло. Цей рукопис є,

очевидно, переробкою «Начал» Евкліда, тобто першою частиною нашого звичайного шкільного підручника геометрії.

Книга Евкліда вперше в друку російською мовою з'явилась у 1739 році під заголовком «Евклидовы элементы восьмь книг через профессора математики Андрея Фархварсона[1] сокращенные. С латинского на российский язык хирургусом Иваном Сатаровым преложенные. В Санкт-Петербурге, 1739». Продовженням цієї книги були «Архимедовы теоремы» в перекладі того самого Івана Сатарова, що видані в 1745 році.


ГЕОМЕТРІА
СЛАВЕНСКІ
SEMLEMѢPIE
Тщаніемъ новопечатнаго тисненіемъ.
Повелѣніемъ благочестивѣйшаго великаго государя нашего царя, и великаго князя,
Петра Алексіевича,
всеа Великія, и Малыя и Бѣлыя Россіи самодержца.
при благородѣйшемъ государѣ нашемъ царевичѣ и великомъ князѣ
АЛЕКСІИ ПЕТРОВИЧѢ.
въ царствующемъ великомъ градѣ Москвѣ.
Въ лѣто отъ Рождества 7216 Отъ рождества же по плоти бога слова 1708 Іюня первого мѣсяца Марта.

Заголовна сторінка першої книги з геометрії російською мовою.

Через ці книги російському читачеві стало доступне все істотне, що було в класичній спадщині з елементарної геометрії.

Крім того, ще в 1708 році видано було перший російською мовою друкований підручник геометрії під заголовком: «Геометріа славенскі землемеріе».

Менш ніж за рік було надруковано друге видання цієї книги під заголовком: «Приемы циркуля и линейки или избраннейшее начало во математических искусствах, им же возможно легким и новым способом вскоре доступити землемерия и иных из оного происходящих искусств».

Нове видання книги вийшло з оригінальними російськими ілюстраціями, бо малюнки першого видання, що відтворювали сцени іноземного життя, не відповідали вимогам російського читача.

Цей приклад показує, що в тих випадках, коли наші предки користувались іноземними джерелами, вони їх

---

[1] Андрій Фархварсон — професор Ебердінського університету — був запрошений Петром I наприкінці XVII століття до Росії для викладання у морських учбових закладах.

переробляли і пристосовували до свого життя. А самий факт неодноразового перевидання книги свідчить про великий інтерес до геометрії і до математики взагалі з самого початку XVIII століття.

На цей час у російських любителів математики вже була велика оригінальна енциклопедія математики, присвячена в основному арифметиці та алгебрі, складена Л. П. Магніцьким.

Л. П. Магніцький і його «Арифметика»

1703 рік є важливим моментом в історії математичного розвитку в Росії. У цьому році видано величезну книгу під довгим заголовком:

«Арифметика, сиречь наука числительная
С разных диалектов на славенский язык преведеная, и во едино собрана, и на две книги разделена... Сочинися сия книга чрез труды Леонтия Магницкого».

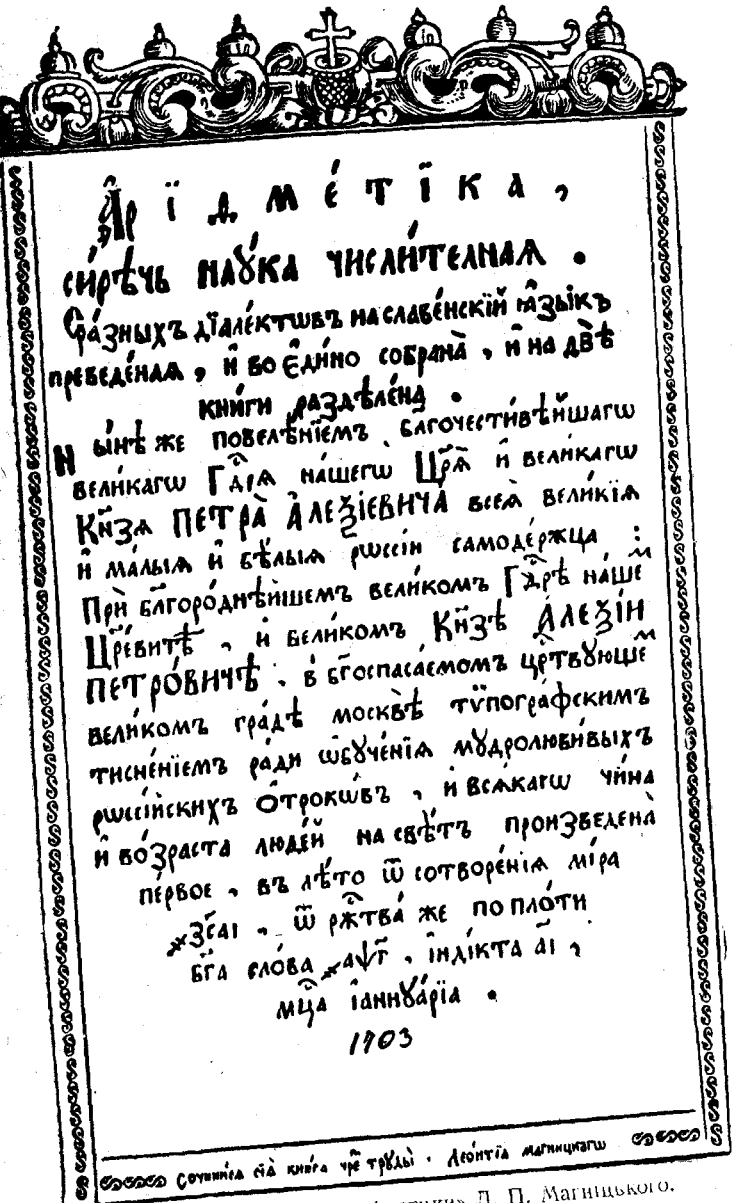
Книга ця містить основи математичних знань того часу: арифметики, алгебри, геометрії і тригонометрії. Наприкінці книги є відділ з великим числом таблиць, присвячений морській справі. Більшу частину місця, як вказує і заголовок книги, автор присвячує арифметиці.

Використавши, крім російської рукописної літератури, те, що йому здавалось корисним з іноземних джерел, Магніцький весь матеріал пристосовує до потреб російського читача і надає своєму викладові багато де в чому характеру російських рукописних математичних книг, у зв'язку з якими й слід розглядати «Арифметику» Магніцького.

За часів царювання Петра I, коли книга побачила світ, в Росії швидко зростали промисловість та торгівля і відбувався переворот у військовій техніці.

Країні стали потрібні освічені люди в значно більшому числі, ніж у попередні десятиліття. Було створено ряд технічних учбових закладів, першим з яких була школа математичних и навігацьких наук, відкрита в Москві, в Сухаревій башті, в 1701 році.

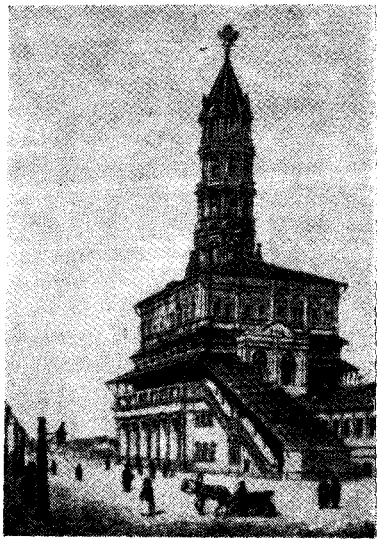
Для учнів цієї школи насамперед і було призначено книгу Магніцького. Вона була відповіддю палкого патріота на запити батьківщини.



Арїдмєтїка,
сирѣчь наука числительная.
Сразныхъ дїалєктовъ на славєнскій языкъ
преведєна, и во єдино собрана, и на двѣ
книги раздѣлєна.
Нынѣ же повелѣнїємъ благочестивѣйшаго
великаго Гдⷭ нашего Цⷭ и великаго
Кнзⷭ Петра Алєксїєвича всєя великїя
и малыя и бѣлыя россїи самодержца:
При благороднѣйшемъ великомъ Гдⷭ наше
Цєвитѣ, и великомъ Кнзѣ Алєксїи
Петровичѣ. в бгоспасаємомъ цвѣтущемъ
великомъ градѣ москвѣ тѵпографскимъ
тиснєнїємъ ради ѡбѵчєнїя мѵдролюбивыхъ
россїйскихъ отрокѡвъ, и всякаго чина
и возраста людєй на свѣтъ произведєна
первое, въ лѣто ѿ сотворєнїя міра
ѯзаі, ѿ рѫтва же по плоти
бга слова ѯаѱт, індїкта аі,
мца іаннѵарїа.
1703

Сочинєна сїа книга чрⷭ трѵды. Леонтїа магницкаго

Титульна сторінка «Арифметики» Л. П. Магницького.



Сухарева башта в Москві (нині не існуюча), в якій розміщалась навігацька школа.

Протягом півстоліття книга з честю виконувала свою роль, ставши посібником для всіх росіян, які прагнули до математичної освіти.

Про автора цієї чудової книги ми знаємо дуже небагато.

Леонтій Пилипович Магніцький народився 9 червня 1669 року, помер у 1739 році.

Надгробний напис на могилі Магніцького, зроблений його сином, розповідає, що «Петро I многократно розмовляв з ним про математичні науки і був такий захоплений глибокими знаннями його, що називав його магнітом і наказав писатись Магніцьким». «Яке він мав прізвище до цього, то навіть близьким його не відомо», читаємо в ранньому його життєписі.

Де і як Магніцький вивчав математику, ми не знаємо. Довгий надгробний напис говорить: «Він навчився наукам дивним і нелегковірогідним способом».

Цілком правдоподібним є те, що Магніцький був самоучкою, і, можливо, саме через те йому пощастило написати книгу, яка стала корисною для величезного числа самоучок. В усякому разі він мав на думці самоучок, коли писав у передмові своєї книги:

«И мню аз, яко то имать быть,
Что сам себя всяк может учить».

Але Магніцький знав мови латинську, грецьку, німецьку та італійську і зазначає, що він матеріал для своєї книги

«Из многих разных книг собравше —
Из грецких убо и латинских,
Немецких же и итальянских».

Великий російський учений М. В. Ломоносов називав «Арифметику» Магніцького і «Грамматику» Мелетія Смотри-

АРІѲМЕТІКА-ПРАКТІКА
ИЛИ ДѢЯТЕЛНАЯ.
ЧТО ЄСТЬ АРІѲМЕТІКА;
Арѳметика или числителница, єсть художество
честное, независтное, и всѣмъ чудогопофтное,
многополезнѣйшее, и многохвалнѣйшее, ѿ древ-
нѣйшихъ же и новѣйшихъ, въ разная времена
іаблшихся изряднѣйшихъ арѳметікъ, изобрѣ-
тенное, и изложенное.
К ЛИКОГУБА ЄСТЬ АРІѲМЕТІКА ПРАКТІКА;
ЄСТЬ ЛУГУБА.
1 Арѳметика політика, или гражданская.
2 Арѳметика логістика, не ко гражданствѣ
токмо, но и к дѣйствіямъ инѣмъ, ко кругомъ принадлежащая.

Сторінка з «Арифметики» Л. П. Магніцького.

цького «вратами своєї вченості». «Арифметику» Ломоносов вивчив напам'ять.

«Вратами вченості» ця книга була для всіх росіян першої половини XVIII століття, які прагнули до освіти.

Магніцький розумів як потребу російської громадськості в математичній літературі, так і те, що не можна російському читачеві пропонувати переклад іноземної математичної книги, яка не враховує вікового самобутнього розвитку російського народу.

Саме тому Магніцький широко використав російську рукописну літературу, додаючи до неї досягнення світової наукової думки, перероблені і пристосовані до потреб російського читача, і підкреслював, що

«Разум весь собрал и чин[1]
Природно русский, а не немчин».

В результаті всього цього виник перший оригінальний російський підручник математики. Російська математична література не знає іншої книги, яка мала б таке значення в історії російської математичної освіти.

Написана як підручник для спеціальної школи, книга Магніцького набула поширення серед набагато більшого кола споживачів, як на це й сподівався автор, що зазначив у передмові до книги:

«И желаем, да будет сей труд
Добре пользовать русский весь люд».

Магніцький до самої своєї смерті був учителем навігацької школи — цього першого розсадника математичних і морських знань у Росії.

Фактичний начальник школи дяк Курбатов, що сам походив з кріпаків, пише у звіті по школі за 1703 рік:

«По 16 июля прибрано и учатся 200 человек. Англичане учат их науке чиновно, а когда временем и загуляются, или, по своему обыкновению, по часту и долго проспят. Имеем еще определенного им помоществователем Леонтия Магницкого, который непрестанно при той школе бывает и всегда имеет тщание не только к единому ученикам в науке радению, но и к иным ко добру поведениям...»

[1] «Зібрав і виклав у порядку»; в книгах XVIII століття часто зустрічається зворот: «математичний чин» у розумінні «математичний виклад».

Титульна сторінка перших виданих російською мовою таблиць логарифмів, у складанні яких брав участь Магніцький.

З цієї характеристики бачимо, що роль Магніцького в навігацькій школі була значно більша, ніж того вимагала його скромна посада учителя початкових класів.

Літературна діяльність Л. Магніцького не обмежилась його «Арифметикою».

У тому самому 1703 році Магніцький спільно з своїми англійськими товаришами видає — вперше російською мовою — «Таблицы логарифмов и синусов, тангенсов и секансов к научению мудролюбивых тщателей».

У 1722 році вони ж видали мореплавний довідник: «Таблиц горизонтальных северные и южные широты».

Коли Андрієві Фархварсону в 1737 році було присвоєно чин бригадира, офіціальна характеристика вказувала: «Понеже через него первое обучение математики в России введено». З більшим ще правом ці слова можна віднести до першого російського учителя математики в Росії — Леонтія Пилиповича Магніцького.

Як цінили математику наші предки

«Арифметика» Магніцького дуже багато в чому схожа з рукописними математичними книгами попередніх століть.

Майже кожний старовинний російський посібник з математики починається з роз'яснення значення цієї науки для людини.

Винайдення арифметики і геометрії приписується «остропаримого разума древним философам», найчастіше Піфагору (грецькому філософу і математикові VI століття до нашого літочислення).

Цю традицію продовжує і Магніцький. У своїй «Арифметике» на заголовному аркуші він відобразив Піфагора та Архімеда і написав:

«Архимедес же тут представлен,
Древний филосóф велик явлен,
Где с ним и другой равный ему
Лицу представлен есть твоему.
Оный Архимед и Пифагор
Излйша яко вóды от гор,
Первые были снискатели,
Сицевых наук писатели,
Равно бо вóдам излияша,
Многи науки в мир издаша».

Магніцький запевняє свого читача, що арифметика потрібна всім, не тільки купцям,

«Цену товаров обретати
И достойно ее исчисляти»,

але й людям

«Ремесленным и художным,
Подданным всяким и вельможным».

Її повинен вивчати кожний,

«Хотящий быть морской пловец,
Навигатор ли, или гребец»,

і що

«Ныне и всяк лучший воин
Эту науку знать достоин».

Таку саму роз'яснювальну роботу проводить і перший друкований підручник геометрії — «Приемы циркуля и линейки» (1709):

«Кто хвалит только теорию, укладывает лишь хорошее основание, на котором он ничего не строит; это подобно пушкам, которые не вывозятся на поле сражения, или кораблям, гниющим в гавани. Такой теоретик подобен ремесленнику, знающему свое дело, но знаний своих не применяющему, инженеру, который строит крепости только на бумаге, корабельщику, ездящему в своем доме по карте в Америку.... Не лучше и тот, что одну только практику признает: это человек, строящий крепость на песке, подводящий подкоп под Дунай-реку и думающий на кой-как сколоченном плоту совершить путешествие в Индию».

Магніцький також високо цінить теорію. Він поділяє свою «Арифметику» на дві книги: першу називає «арифметика-політика», другу — «арифметика-логістика».

Перша призначається для тих, хто хоче тільки навчитись розв'язувати практичні питання — «исчисляти всякое исчисление в продаже и куплях». Цю частину викладено без доведень, розказуванням і показом — розв'язуванням прикладів.

Друга частина — «арифметика-логістика» — розв'язує абстрактні питання, «токмо уму нашему подлежащие»; і Магніцький заявляє, що їх розв'язувати за допомогою простих засобів арифметики-політики не можна, бо коли «основания и откуду что взято не будем знати, будет весь последующий чин не известен и не полезен, паче же действовати тако безместно есть», тобто без обгрунтування правил уся наступна побудова нетривка і некорисна, і так робити буде недоречно.

Негативне ставлення самобутньої російської думки до схоластики і формалізму в викладанні математики яскраво висловлює один рукопис часів Магніцького.

На той період у Москві були пансіони для російських юнаків, в яких навчали іноземці за привезеними з собою підручниками, сповненими різних штучних правил.

У російському математичному рукописі викладено трійне правило, із застереженням: «Есть и иные многие регулы [правила] в сей науке, которых употребляют больше на Москве, но мы всё оставляем, для того, что в тех регулах никакие помощи ни в чем не сыщет никто, и все те бездельные регулы родятся из их же настоящих фундаментов

[основ науки], и кто хорошо вызнает всех регул фундаменты, может сам тех безделиц делать сколько похочет. Только мы своим учением этого не позволяем. Лучше голову ломать о деле, неже о безделье».

Геніальний російський учений Михайло Васильович Ломоносов (1711—1765) є творцем ідей нової науки в багатьох галузях. Він визначний хімік, фізик, геолог та одночасно історик, мовознавець і навіть поет.

О. С. Пушкін сказав про нього: «Ломоносов створив перший російський університет, він, краще сказати, сам був нашим першим університетом».

Ломоносов глибоко розумів значення математики для вивчення інших наук і для розвитку розуму. Він неодноразово говорить про свої заняття математикою.

Про значення математики, як предмета шкільного викладання, М. В. Ломоносов мав нагоду висловитись у 1752 році, коли йому було доручено дати пояснювальну записку про викладання фізики, хімії та математики в одній з небагатьох існуючих тоді шкіл — у кадетському корпусі. Це був учбовий заклад, з якого в XVIII столітті вийшли майже всі відомі російські діячі — письменники, вчені, військові, адміністратори.

Діставши доручення написати для поновлюваного корпусу навчальні програми з фізики, хімії та математики і обгрунтувати необхідність їх вивчення, Ломоносов після докладної розмови про значення викладання кадетам фізики і хімії, про математику пише тільки одну фразу: «*А математику вже для того вчити слід, що вона розумові лад дає*».

Ця коротка, виразна фраза Ломоносова не є набором слів ревнителя математики, які у великій кількості можна знаходити в літературі. Висловлювання Ломоносова про математику в різних його творах показують, що він розумів значення математики для практики і для вивчення інших наук. Але він розумів і те, що школа повинна давати учням не тільки фактичні знання з різних предметів навчання, але і вміння міркувати, вміння доводити. Учень доводить на уроках теореми для того, щоб, доводячи відомі теореми, навчитись доводити потім і нові теореми. Це завдання розумового розвитку учнів у школі і має на увазі Ломоносов, говорячи, що «математику в ж е д л я т о г о вчити слід, що вона розумові лад дає».

Сторінка букваря Каріона Істоміна 1692 року. Перше відтворення в російській книзі індійських цифр.

Із змісту старовинних російських посібників з математики

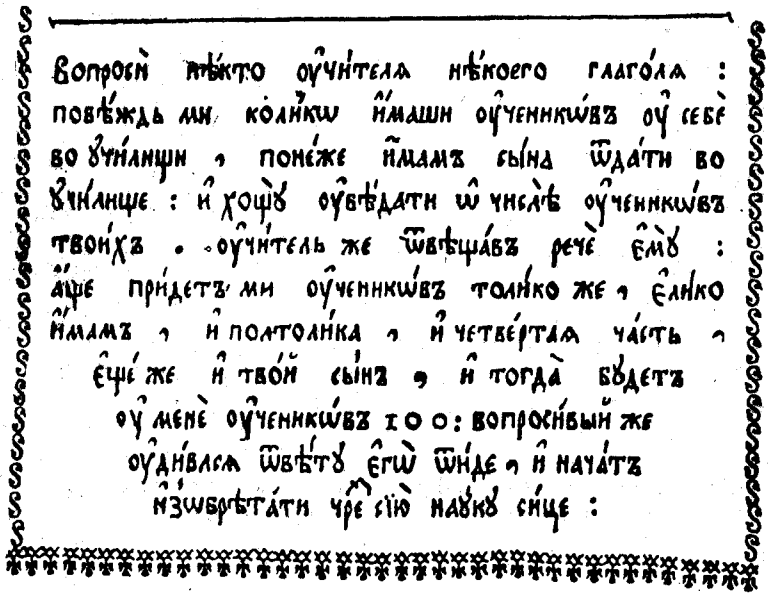
Старовинні російські посібники з математики, рукописні і друковані, містять багато такого, що корисно знати кожному, хто вивчає математику і в наш час. Спинимось на трьох питаннях: на правилі хибного положення, на цікавих задачах і на математичних розвагах.

«Фальшиве правило» — так називають старі російські посібники спосіб розв'язування задач, який тепер відомий під назвою «правила хибного положення».

За допомогою цього правила в старовинних посібниках розв'язуються задачі, що зводяться до рівнянь першого степеня.

Розділу «Рівняння першого степеня» в цих посібниках немає. Сучасні способи розв'язання рівнянь першого степеня передбачають ознайомлення з поняттям від'ємного числа, яке поширювалось повільно.

Ще наприкінці XVIII століття визначні математики висловлювали про від'ємні числа думки, які для нас неприйнятні.


Вопросѝ нѣкто оучи́теля нѣкоего глаго́ля :
повѣ́ждь ми, колѝкѡ и҆́маши оучениковъ оу҆ себѐ
во оучи́лищи ҂ поне́же и҆́мамъ сы́нъ ѿда́ти во
оучи́лище : и҆ хощѹ оу҆вѣ́дати ѿ числѣ оу҆ченикѡ́въ
твои́хъ . оучи́тель же ѿвѣща́въ речѐ ѥ҆мѹ :
а҆́ще при́детъ ми оу҆ченикѡ́въ толѝко же ҂ ѥ҆лѝко
и҆́мамъ ҂ и҆ полтоли́ка ҂ и҆ четве́ртая ча́сть ҂
ѥ҆ще́ же и҆ твои́ сы́нъ ҂ и҆ тогда́ бѹ́детъ
оу҆ мене оу҆ченикѡ́въ ѯоо: вопросѝвый же
оу҆дивлся ѿвѣтѹ ѥ҆гѡ ѿиде ҂ и҆ нача́тъ
и҆зѡбрѣта́ти чре҆ сїю наѹ́кѹ си́це :

Задача з «Арифметики» Л. П. Магніцького.

Ознайомлення з тим, як через відсутність знань про від'ємні числа доводилось прості задачі розв'язувати штучним «фальшивим правилом», показує нам, що нудноваті вправи над від'ємними числами, які ми виконуємо в перших розділах курсу алгебри, дають можливість згодом розв'язувати задачі на рівняння першого степеня набагато простіше, ніж це робили ще наші прадіди.

От розв'язання задачі способом «хибного положення» або «фальшивим правилом» у Магніцького:

«Спитав хтось учителя: скільки у тебе в класі учнів, бо хочу віддати до тебе в навчання свого сина. Учитель відповів: якщо прийде ще учнів стільки ж, скільки маю, і півстільки і четверта частина і твій син, тоді буде у мене учнів 100. Запитуємо: скільки було в учителя учнів?» Магніцький дає такий спосіб розв'язання:

Робимо перше припущення: учнів було 24.

Тоді за змістом задачі до цього числа треба додати «стільки, півстільки, чверть стільки і 1»; мали б:

$$24 + 24 + 12 + 6 + 1 = 67,$$

тобто на $100 - 67 = 33$ менше (ніж потрібно було за умовою задачі); число 33 називаємо «першим відхиленням».

Робимо друге припущення: учнів було 32.

Тоді мали б:

$$32 + 32 + 16 + 8 + 1 = 89,$$

тобто на $100 - 89 = 11$ менше; це «друге відхилення».

На той випадок, коли при обох припущеннях дістали менше, дається правило: помножити перше припущення на друге відхилення, а друге припущення на перше відхилення, відняти від більшого добутку менший і різницю поділити на різницю відхилень:

$$\frac{32 \cdot 33 - 24 \cdot 11}{33 - 11} = 36.$$

Учнів було 36.

Таким самим правилом треба керуватись, якщо при обох припущеннях дістали більше, ніж треба було за умовою. Наприклад:

Перше припущення: 52.

$$52 + 52 + 26 + 13 + 1 = 144.$$

Дістали на $144 - 100 = 44$ більше (перше відхилення).

Друге припущення: 40.

$$40 + 40 + 20 + 10 + 1 = 111.$$

Дістали на $111 - 100 = 11$ більше (друге відхилення).

$$\frac{40 \cdot 44 - 52 \cdot 11}{44 - 11} = 36.$$

Якщо при одному припущенні дістанемо більше, а при другому менше, ніж потрібно за умовою задачі, то треба при зазначених вище обчисленнях брати не різниці, а суми. Наприклад:

Перше припущення: 60.

$$60 + 60 + 30 + 15 + 1 = 166.$$

Дістали на $166 - 100 = 66$ більше (перше відхилення).

Друге припущення: 20.

$$20 + 20 + 10 + 5 + 1 = 56.$$

Дістали на $100 - 56 = 44$ менше (друге відхилення).

$$\frac{60 \cdot 44 + 20 \cdot 66}{66 + 44} = 36.$$

За допомогою початкових відомостей алгебри ці правила легко обгрунтовуються.

Треба розв'язати рівняння $ax + b = c$. (*)

Перше припущення: $x = x_1$; $ax_1 + b = c_1$. (1)

Друге припущення: $x = x_2$; $ax_2 + b = c_2$. (2)

Віднімаємо рівності (1) і (2) почленно з рівняння (*):

$$a(x - x_1) = c - c_1 = d_1 \text{ (перше відхилення);}$$
$$a(x - x_2) = c - c_2 = d_2 \text{ (друге відхилення).}$$

Поділивши почленно дві останні рівності, дістаємо:

$$\frac{a(x - x_1)}{a(x - x_2)} = \frac{d_1}{d_2} \text{ або } \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

За правилами алгебри виконуємо такі перетворення:

$$(x - x_1)\, d_2 = (x - x_2)\, d_1;$$
$$d_2x - d_2x_1 = d_1x - d_1x_2;$$
$$d_2x - d_1x = d_2x_1 - d_1x_2;$$
$$(d_2 - d_1)\, x = x_1d_2 - x_2d_1;$$
$$x = \frac{x_1d_2 - x_2d_1}{d_2 - d_1}. \qquad (3)$$

Якщо відхилення d_1 і d_2 обидва від'ємні числа, $d_1 < 0$ і $d_2 < 0$, то в правій половині рівності (3) у чисельника

і знаменника перші члени будуть числами від'ємними, другі члени — додатними; правило знаходження значення числа x залишається те саме, що і в першому випадку.

Рівність (3) виражає правило хибного положення для тих випадків, коли обидва відхилення додатні або обидва від'ємні.

Коли ж d_2 додатне, а d_1 від'ємне (або навпаки), то рівність (3) перетвориться в

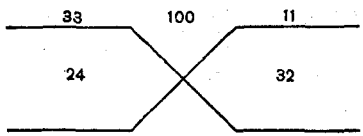
$$x = \frac{x_1 d_2 + x_2 d_1}{d_2 + d_1},$$

і ми маємо правило хибного положення для випадків, коли відхилення мають різні знаки.

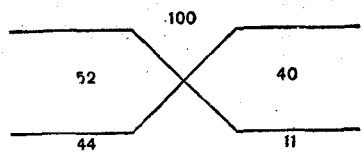
Середньовічні математики дали зручний механічний спосіб застосування цього правила під назвою «способу терезів». От як вони радять робити.

«Малюй терези. Над точкою опори пиши число, яке за умовою задачі дістаємо після дій над шуканим числом. На шальки терезів пиши обидва припущення. Відхилення «більше» пиши під терезами, відхилення «менше» — над терезами. Виконай множення навхрест припущень і відхилень. Якщо відхилення записано обидва по один бік від терезів, то треба брати різниці добутків і відхилень; коли ж відхилення записано по різні сторони від терезів, то треба брати суми їх і виконати ділення».

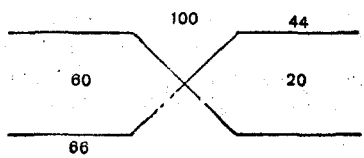
Запис наших розв'язань за цим способом такий:



$$\frac{32 \cdot 33 - 24 \cdot 11}{33 - 11} = 36;$$



$$\frac{40 \cdot 44 - 52 \cdot 11}{44 - 11} = 36;$$



$$\frac{60 \cdot 44 + 20 \cdot 66}{66 + 44} = 36.$$

Цікаві задачі. У більшості російських математичних рукописів і друкованих посібників старих часів зустрічаються цікаві задачі. Так, наприклад, в них ми зустрічаємо задачу, що є вже в єгипетському папірусі Ахмеса у вигляді задачі про сім кішок, які поїдають сім мишей, і т. д.

Відповідна російська народна задача читається так:

Ішли сім старих чоловіків.
У кожного старого по сім костурів;
на кожному костурі по сім сучків;
на кожному сучку по сім кошиків;
у кожному кошику по сім пирогів;
у кожному пирозі по сім горобців.
Скільки всіх?

Відповідь: 117649.

Відомим є збірник цікавих задач XVIII століття під назвою «Предложения для изощрения ума юношества». Цю саму мету «загострення розуму» має на меті і Магніцький, даючи свої задачі.

От кілька прикладів цікавих задач з ранніх російських джерел.

З рукопису XVII століття: «Лев съел овцу одним часом, а волк съел овцу в два часа, а пес съел овцу в три часа. Ино хочешь ведати: все три — лев, волк и пес — овцу съели вместе вдруг, и сколько бы они скоро ту овцу съели, сочти ми?»

Автор рукопису пропонує такий спосіб розв'язання: за 12 годин лев з'їдає 12 овець, вовк — 6, а собака — 4. Усього ж вони з'їдять за 12 годин 22 вівці; отже, за годину вони з'їдають $\frac{22}{12} = \frac{11}{6}$ вівці, а одну вівцю всі разом — за $\frac{6}{11}$ години.

З «Арифметики» Магніцького: «Един человек выпьет кадь пития в 14 дней, а со женою выпьет тое же кадь в 10 дней, и ведательно есть, в колико дней жена его особно выпьет тое же кадь».

Відповідь: 35 днів.

«Некий человек нанял работника на год, обещав ему дати 12 рублев и кафтан. Но той, работав 7 месяцев, восхотел уйти и просил достойной платы с кафтаном. Он же [хазяїн] дал ему по достоинству расчет 5 рублев и кафтан, и ведательно есть, коликие цены оный кафтан был».

Відповідь: 48 гривеників.

«Некий человек продае коня за 156 рублев; раскаявся же, купец нача отдавати продавцу, глаголя: «Яко несть мне лепо взяти сицевого коня, недостойного такие высокие цены».

Продавец предложил ину куплю, глаголя: «Аще те мнится велика цена сему коню быти, убо купи гвоздие, их же сей конь имать в подковах своих ног, коня же возьми за тою куплею в дар себе. А гвозди во всякой подкове по шести и за един гвоздь даждь ми полушку[1], за другой же две полушки, а за третий копейку, и тако все гвозди купи». Купец же, видя столь малую цену и коня хотя в дар себе взяти, обещал таку цену платити, чая не больше 10 рублев за гвоздие дати. И ведательно есть, колико купец-он проторговался?»

Відповідь: $4194303\frac{3}{4}$ коп. = 41943 крб. $3\frac{3}{4}$ коп.

Задача ця міститься в рукописах XVII століття. Вона аналогічна задачі про винахідника гри в шахи, який погодився на скромну винагороду, а саме — щоб йому на першу клітину шахової дошки поклали одну зернину, на другу — дві зернини, на третю — чотири зернини і так далі, подвоюючи число зернин щоразу.

Виявляється, для виконання цієї умови потрібний був би багатий урожай з поля, що перевищило б своєю величиною всю сушу земної кулі в 28 раз.

У знаменитій «Божественній комедії» Данте (1265—1321) читаємо:

«І мчали іскри спільною юрбою,
І незліченніші були вогні,
Ніж поле шахове, що множиться удвоє».

«Множиться удвоє» означає наростання чисел за допомогою подвоєння попереднього числа, тобто ми маємо тут згадування про ту саму стару задачу.

Ця задача, як виявляється, зустрічається і в наше століття не тільки в збірниках цікавих задач. За повідомленням однієї газети 1914 року в судді в місті Новочеркаську розглядалось справу про продаж отари з 20 овець за умовою — сплатити за першу вівцю 1 копійку, за другу — 2 копійки, за третю — 4 копійки і т. д. Очевидно,

[1] Тобто $\frac{1}{4}$ копійки.

покупець спокусився на цю купівлю, сподіваючись дешево купити отару, — і прорахувався. Полічіть, яку суму він мав сплатити. Виявляється, Магніцький не без підстави при розв'язанні цієї задачі дав попередження:

«Хотяй туне притяжати,
От кого что приимати,
Да зрит то себе опасно...»

З «Курса чистой математики» (1786) Юхима Войтяховського[1]:

«На вопрос: который час? — ответствовано: $\frac{2}{5}$ прошедших часов от полуночи до сего времени равны $\frac{2}{3}$ остальных до полудни. Спрашивается число часов того времени».

Відповідь: 7 годин 30 хвилин.

«У приезжего гасконца оценили богатство: модный жилет с поношенным фраком в три алтына [алтин — 3 копійки] без полушки; но фрак в полтретья $\left[2\frac{1}{2}\text{ раза}\right]$ дороже жилета. Спрашивается каждой вещи цена».

Відповідь: $6\frac{1}{4}$ і $2\frac{1}{2}$.

«Нововыезжей в Россию французской мадаме
Вздумалось ценить свое богатство в чемодане:
Новой выдумки нарядное фуро́ [плаття]
И праздничный чепец а ла фигаро́.
Оценщик был русак, сказал мадаме так:
Богатства твоего первая вещь фуро́
Вполчетверта $\left[3\frac{1}{2}\text{ раза}\right]$ дороже чепца фигаро́;
Вообщем стоят не с половиною четыре алтына,
Но настоящая им цена только сего половина.
Спрашивается каждой вещи цена,
С чем француженка к россам привезена».

Відповідь: $5\frac{1}{4}$ і $1\frac{1}{2}$.

Про задачі в «Арифметике» Магніцького. У Магніцького ми знаходимо багато оригінальних розв'язань задач, які повчальні для нас і донині. Наведемо як приклад одно з таких розв'язань.

---

[1] Войтяховський Юхим Дмитрович (помер близько 1812 року) — штик-юнкер і благородного юнацтва партикулярний учитель — видав великий «Курс математики» в чотирьох томах.

Задача.

Знайти число, яке при діленні на 2 дає в остачі 1, при діленні на 3 дає в остачі 2, при діленні на 4 дає в остачі 3, при діленні на 5 дає в остачі 4.

Розв'язання.

Позначимо шукане число буквою x. Будемо шукати число, яке на одиницю більше від шуканого, тобто шукатимемо число $x + 1$.

Це нове число поділиться без остачі на 2, на 3, на 4 і на 5, отже, буде спільним кратним чисел 2, 3, 4 і 5. Таких спільних кратних нескінченно багато. Найменше спільне кратне чисел 2, 3, 4 і 5 є 60. Таким чином, найменше значення числа $x + 1$ є 60, найменше значення шуканого числа x є 59.

Загальна формула чисел, що задовольняють умову задачі, є

$$x = 60к - 1,$$

в якій $к$ може набирати значення 1, 2, 3... без обмеження.

Відзначимо, що такого роду задачі на знаходження числа за остачами при діленні його на різні інші числа дуже поширені в китайській народній математиці.

Математичні розваги в «Арифметике» Магніцького. Розваги в «Арифметике» Магніцького утворюють окремий розділ «О утешных некиих действах, чрез арифметику употребляемых», який починається з вказівки, що, йдучи за прикладом арифметиків, автор вміщує його в свою книгу для утіхи і особливо для загострення розуму учнів, хоч ці розваги, на його думку, «и не зело нужные».

Перша розвага. Один з присутніх у компанії восьми чоловік бере кільце і надіває його на один з пальців на певний суглоб. Треба вгадати, у кого, на якому пальці і на якому суглобі надіто кільце.

Нехай кільце буде в четвертої людини на другому суглобі п'ятого пальця (треба умовитись, що суглоби та пальці нумеруються всіма однаково).

У книзі дається такий спосіб угадування. Той, хто вгадує, просить когось із компанії виконати такі дії, не називаючи чисел, які дістане:

1) номер особи, яка має кільце, помножити на 2; запитуваний, у думці або на папері, виконує:

$$4 \cdot 2 = 8;$$

2) до добутку додати 5:

$$8 + 5 = 13;$$

3) добуту суму помножити на 5:

$$13 \cdot 5 = 65;$$

4) до добутку додати номер пальця, на якому буде кільце:

$$65 + 5 = 70;$$

5) суму помножити на 10:

$$70 \cdot 10 = 700;$$

6) до добутку додати номер суглоба, на якому буде кільце:

$$700 + 2 = 702.$$

Результат називають угадуючому.

Від одержаного числа угадуючий віднімає 250 і дістає: $702 - 250 = 452$.

Перша цифра (ідучи зліва направо) дає номер людини, друга цифра — номер пальця, третя цифра — номер суглоба. Кільце буде в четвертої людини на п'ятому пальці на другому суглобі.

Неважко знайти для цього способу пояснення, якого Магніцький не дає.

Нехай кільце було в людини № a на пальці № b на суглобі № c.

Виконаємо зазначені дії над числами a, b, c;

1) $a \cdot 2 = 2a$;
2) $2a + 5$;
3) $(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25$;
4) $10a + 25 + b = 10a + b + 25$;
5) $(10a + b + 25) \cdot 10 = 100a + 10b + 250$;
6) $100a + 10b + 250 + c = 100a + 10b + c + 250$;
7) $100a + 10b + c + 250 - 250 = 100a + 10b + c$.

Дістали число, в якому номер людини є цифра сотень, номер пальця — цифра десятків, номер суглоба — цифра одиниць. Правила гри можна застосовувати при будь-якому числі учасників.

Третя розвага Магніцького. Відлічуємо дні тижня, починаючи з неділі: перший, другий, третій і так далі, до сьомого (суботи).

Хто-небудь задумав день. Угадати, який день він задумав.

Нехай задумано п'ятницю — шостий день.

Угадуючий пропонує виконати про себе такі дії:

1) помножити номер задуманого дня на 2:

$$6 \cdot 2 = 12;$$

2) додати до добутку 5:

$$12 + 5 = 17;$$

3) помножити суму на 5:

$$17 \cdot 5 = 85;$$

4) приписати в кінці добутку нуль і назвати результат:

850.

Від цього числа угадуючий віднімає 250 і дістає:

$$850 - 250 = 600.$$

Було задумано шостий день тижня — п'ятницю.

Обгрунтування правила таке саме, як у попередньому випадку.

У Магніцького є також ряд складніших математичних розваг.

Математична розвага М. Ю. Лермонтова

Математична розвага, подібна до щойно наведеної, фігурує в біографії великого поета М. Ю. Лермонтова.

Відомо, що Лермонтов дуже любив математику і завжди возив з собою підручник математики під час переїздів — з своєї волі чи проти волі — з одного місця служби на інше.

Тут відтворено його власноручний напис на підручнику математики Безу, дуже поширеного в Росії в першій половині XIX століття.

Наведемо розповіді деяких сучасників, що близько знали Лермонтова, про ставлення його до математики:

«На початку 1841 року Тенгінський полк стояв в Анапі. Нудьгуючі офіцери, серед них і Лермонтов, збирались один у одного. Якось мова зайшла про вченого кардинала, що міг розв'язувати в думці найскладніші математичні задачі.

— Що ви скажете на це, Лермонтов? — звернувся до нього поважний батальйонер, старик з Георгієм.— Кажуть, що ви теж добрий математик?

Михаила Лермантова

Изъ книгъ

Михаилъ Лермантовъ

Напис М. Ю. Лермонтова на підручнику математики французького автора Безу.

— Нічого тут дивного немає,— відповів поет. — Я теж можу продемонструвати вам, якщо хочете, дуже цікавий приклад математичних обчислень.

— Будь ласка.

— Задумайте яке завгодно число, і я за допомогою простих арифметичних дій визначу це число.

— Ну що ж, спробуйте,— розсміявся старий, який, мабуть, відчував сумнів. — Але яке ж велике має бути задумане число?

— А це вже байдуже. Та на перший раз, щоб швидше обчислювати, обмежтесь числом з двох цифр.

— Гаразд, я задумав,— сказав батальйонер, підморгнувши офіцерам, які стояли довкола, і сказав задумане число дамі, що сиділа поруч нього.

— Будьте ласкаві додати до нього,— почав Лермонтов,— ще 25 і лічіть в думці або записуйте.

Старий попросив олівець і став записувати на папірці.

— Тепер не відмовте додати ще 125.

Старий додав.

— Зараз відніміть 37.

Старий відняв.

— Ще відніміть те число, яке ви задумали спочатку.

Старий відняв.

— Тепер остачу помножте на 5.

Старий помножив.

— А зараз одержане число поділіть на 2.

Старий поділив.

— Тепер поглянемо, що у вас повинно вийти... Здається, якщо не помиляюсь, число $282\frac{1}{2}$?

Батальйонер навіть підскочив,— так вразила його точність обчислення.

— Так, цілком вірно: $282\frac{1}{2}$. Я задумав число 50.— І він знову перевірив обчислення.— Справді, виходить $282\frac{1}{2}$. Пху, та чи не ворожбит ви?..

— Ворожбит не ворожбит, а математику вивчав, — посміхнувся Лермонтов.

— Але дозвольте... — старий, мабуть, відчував сумнів: чи не підгледів Лермонтов його цифри, коли він виконував обчислення. — А не можна повторити?

Старий записав задумане число, нікому не показавши, поклав під свічника і став лічити в думці числа, які називав поет. І цього разу остачу Лермонтов визначив правильно.

Усі зацікавились. Старий тільки розвів руками. Господарка дому попросила повторити ще раз цей експеримент, і ще раз експеримент удався.

По кріпості пішли чутки. Де б поет не з'явився, до нього стали звертатись з просьбами вгадати підраховане число. Кілька разів він виконував ці просьби, та зрештою йому набридло, і через кілька днів, теж на одному з вечорів, Лермонтов відкрив секрет; він полягав у тому, що людині, яка задумала число, яке б воно не було, дають відняти це число від суми того самого числа і деяких інших підказаних чисел, отже диктуючому легко підрахувати результат, наприклад:

$$[(x + 100 + 206 + 310 - 500 - x) : 2] \cdot 3 = 174».$$

О. О. Лопухін, товариш Лермонтова по кавалерійському училищу, який близько знав поета, розповідає про нього таке:

Лермонтов завжди шукав нової діяльності і ніколи не поринав весь у ту високу поетичну творчість, яка вкрила вічною славою його ім'я і яка, здавалось, повинна була забирати всю його увагу. Постійно змінюючи заняття, Лермонтов з властивою йому пристрасністю, з цілковитим захопленням поринав у нову справу.

Таким чином він якийсь час цікавився тільки математикою.

І. О. Лаппо-Данилевський (1896—1931).

Одного разу, приїхавши в Москву до Лопухіна, Лермонтов замкнувся в кабінеті і до пізньої ночі сидів над розв'язанням якоїсь математичної задачі. Не розв'язавши її, Лермонтов, змучений, заснув.

Задачу цю він розв'язав уві сні. Йому приснилось, що прийшов якийсь математик і підказав йому розв'язання задачі. Лермонтов навіть намалював портрет цього математика.

Виявилось, що портрет дуже схожий на винахідника логарифмів — шотландського математика Джона Непера (1550—1617). Очевидно, до того Лермонтов читав про роботи Непера і бачив його портрет. Цей портрет злився в уяві Лермонтова з його помічником при розв'язанні задачі.

Портрет фантастичного математика, написаний пензлем Лермонтова, надійшов після Великої Жовтневої революції до Пушкінського Будинку Академії наук, де й зберігається донині. Цей портрет відтворено в книгах про Лермонтова і в повній збірці його творів.

З біографій математиків відомі випадки розв'язування ними уві сні задач, яких вони ніяк не могли розв'язати наяву. Навіть уві сні мозок ученого продовжує працювати над питанням, що лишилось нерозв'язаним.

Такий випадок відомий з біографії геніального радянського математика Івана Олександровича Лаппо-Данилевського (1896—1931).

Відмітимо побіжно, що математикою, крім Лермонтова, захоплювались і багато інших поетів. Таким любителем математики був, наприклад, російський поет Бенедіктов (1807—1873), який присвячував своє дозвілля заняттям математикою і залишив рукопис «Увеселительная арифметика»,— очевидно, одну з перших спроб викладу математики російською мовою в цікавій формі.

З ІСТОРІЇ РОЗВИТКУ ПОЧАТКОВОЇ МАТЕМАТИКИ

На попередніх сторінках розповідалось про те, як закладались основи математики. Тут буде дано короткі історичні відомості про основні розділи шкільної математики, яка охоплює арифметику і основи алгебри та геометрії. Ми вже знаємо про величезну роль, яку відігравали середньоазіатські математики в історії середньовічної математики. Тепер розкажемо ще про те, як великі російські математики довели до кінця розв'язання ряду питань, що виникли дуже давно і залишались нерозв'язаними, незважаючи на зусилля найвидатніших представників світової науки.

АРИФМЕТИКА

Шкільний курс арифметики складається з трьох основних частин: учення про нумерацію, вчення про дії над цілими числами та властивості їх і вчення про дроби. По кожному з цих трьох розділів і поведемо нашу розповідь.

Усна нумерація

Чисел є нескінченно багато. Ми не могли б запам'ятати назви їх, якщо кожне число позначати окремим словом.

Установлено, що твори Шекспіра мають у собі сімнадцять тисяч різних слів. Під час читання творів цього письменника навіть для тих, хто добре знає англійську мову, потрібний спеціальний словник.

Усі народи дуже давно розв'язали завдання усної нумерації тим, що стали лічити не окремими одиницями, а групами, які позначали тими самими словами, що й окремі предмети: один, два, три і так далі.

За лічильну групу можна взяти будь-яке число. Переважна більшість народів вибрала число 10, бо десять пальців були природною підмогою для лічби.

Проте у різних народів і за різних часів була лічба і іншими групами. Досі в північній і середній Африці існують народи, які лічать групами в дванадцять, або дюжинами. Така лічба, певно, була колись поширенішою, про це свідчить той факт, що в недавньому ще минулому ми деякі предмети, наприклад, пера, лічили дюжинами; дванадцять дюжин називали «грос» (німецьке слово: «велика»), що означало: «велика дюжина» (подібно до того, як сотню називали «великим десятком», а мільйон — «великою тисячею»).

У стародавніх вавілонян існувала лічба групами в шістдесят, або шістдесяткова система числення.

Системи числення з основою, відмінною від десяти, можуть бути використані для розв'язання деяких задач.

Двійкова система числення

Число в десятковій системі числення, наприклад, 7438, можна написати так:

$$7438 = 7 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1,$$

або

$$7438 = 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1.$$

Запис числа в системі з іншою якою-небудь основою r має вигляд:

$$a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + a_{n-2} r^{n-3} + \ldots + a_3 r^2 + a_2 r + a_1.$$

Тут a_1 є цифра одиниць; a_2— цифра одиниць другого розряду; a_3 — цифра одиниць третього розряду і т. д.

Числа в системах з основою 2 або 3 (в двійковій або трійковій системі) пишуться у вигляді:

$$a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_3 \cdot 2^2 + a_2 \cdot 2 + a_1 \cdot 1,$$
$$a_n \cdot 3^{n-1} + a_{n-1} \cdot 3^{n-2} + \ldots + a_3 \cdot 3^2 + a_2 \cdot 3 + a_1 \cdot 1.$$

Кількість одиниць будь-якого розряду в числі, написаному за десятковою системою, не може бути більшим від 9; в числі, написаному за трійковою системою, в кожному розряді може бути одиниць тільки 0 або 1 чи 2, а в двійковій системі — тільки 0 або 1.

Кожне число десяткової системи можна написати в системі будь-якою іншою основою, наприклад, у двійковій. Нехай, наприклад, потрібно число 743 написати в двійковій системі.

Поділимо дане число на 2. Остача покаже, скільки одиниць першого розряду буде в шуканому виразі даного числа в двійковій системі. Якщо частка від ділення більша від одиниці, то цю частку, своєю чергою, треба ділити на 2; друга остача дасть число одиниць *другого розряду шуканого* числа, а частку знову треба ділити на 2 доти, поки вона не буде менша від 2, після чого дальша частка вже дорівнюватиме 0.

Це перетворення числа десяткової системи в двійкову зручно розмістити так, виконуючи ділення в думці і складаючи таблицю з правої руки.

X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I		№ ділення
0	1	2	5	11	23	46	92	185	371	743	Частки в десятковій системі
	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	Остачі від ділення, вони ж цифри числа в двійковій системі
	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I	Розряди в двійковій системі

У даному прикладі IX частка дорівнює 1, ділення її на два дає цілу частку 0 і остачу 1. Одержувані остачі є цифри шуканого числа в двійковій системі, що йдуть у тому самому порядку, як і остачі при діленні. Таким чином, маємо

$$743_{10} = 1011100111_2.$$

Індекси 10 і 2 при цих числах позначають, що число 743 написано за десятковою системою, а число *1011100111* — за двійковою.

Та обставина, що при користуванні двійковою системою числення потрібні тільки дві цифри — 0 і 1, — стала підставою для дуже важливого використання цієї системи числення.

За останні роки збудовані електронні лічильні машини, які можуть протягом однієї секунди виконати десятки тисяч

Заголовна сторінка книги славетного обчислювача Лудольф-ван-Цейлена, за ім'ям якого число π називається «лудольфовим числом». Під портретом дано число π з 20 цифрами.

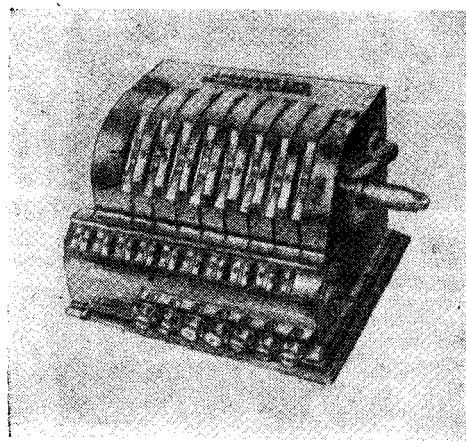
обчислювальних операцій. Числа в такі машини треба «подавати» в двійковій системі числення. Про величезні можливості цих машин можна дістати уявлення з таких фактів.

Відношення довжини кола до його діаметра, позначуване буквою π (читай: пі), є число, яке може бути обчислене тільки наближено. Найпростіші його значення є $3\frac{1}{7}$ і 3,14. У всі часи математики шукали точніше значення цього відношення. Дуже відомий математик-обчислювач Лудольф-ван-Цейлен (1540—1610) усе життя присвятив цьому обчисленню і наприкінці життя знайшов 34 цифри цього числа, які й були вирізьблені на його надмогильному камені. До 1596 року Цейлен встиг обчислити тільки 20 цифр значення і вмістив їх під своїм портретом на обкладинці книжки.

Кілька років тому, коли були збудовані перші дуже недосконалі електронні обчислювальні машини, така машина протягом 75 годин дала число π з 2035 цифрами після коми!

Лічильні машини, які виконують звичайні арифметичні викладки, існують давно. Арифмометр ви можете знайти у рахівника в будь-якій конторі і навіть у канцелярії школи. Звичайно це арифмометр системи Однера,— лічильна машина, винайдена російським інженером В. Т. Однером

у 1874 році в Петербурзі[1]. Перший у світі обчислювальний автомат, що виконує набагато складніші операції, був сконструйований визначним нашим математиком П. Л. Чебишевим у 1878 році. За царських часів цей винахід не набув застосування і навіть єдиний примірник його, виготовлений самим П. Л. Чебишевим, зберігається в Парижі, в Музеї мистецтв і ремесел. Через вісім років, у 1886 році, німець Зеллінг, професор математики у Вюрцбурзькому університеті, випустив у вжиток машину, система якої цілком подібна до механізму Чебишева. У 1894 році було прилюдно доведено, що Зеллінг не є винахідником цієї машини, що на вісім років раніше від Зеллінга П. Л. Чебишев здійснив ідею, яку Зеллінг запропонував, як оригінальну. Модель машини Чебишева всі ці роки була в Парижі на виставці всім доступна.



Арифмометр російського інженера Однера.

Багато російських математиків — академік О. М. Крилов, професор С. А. Гершгорін та інші — винаходили машини для виконання операцій вищої математики. У 1947 році бригада винахідників (М. В. Корольков, Б. А. Волинський і В. П. Лебедев) на чолі з професором математики Л. І. Гутенмахером одержала державну премію за винайдення такої обчислювальної машини. У 1951 році за винахід машини, що виконує найрізноманітніші і найскладніші обчислення, державну премію одержав професор В. С. Лук'янов.

Машини нових конструкцій (електронні) виконують з надзвичайною швидкістю обчислювальні операції. Так,

---

[1] В. Т. Однер був не тільки жителем Петербурга, а й службовцем — головним інженером — Експедиції заготовлення державних паперів.

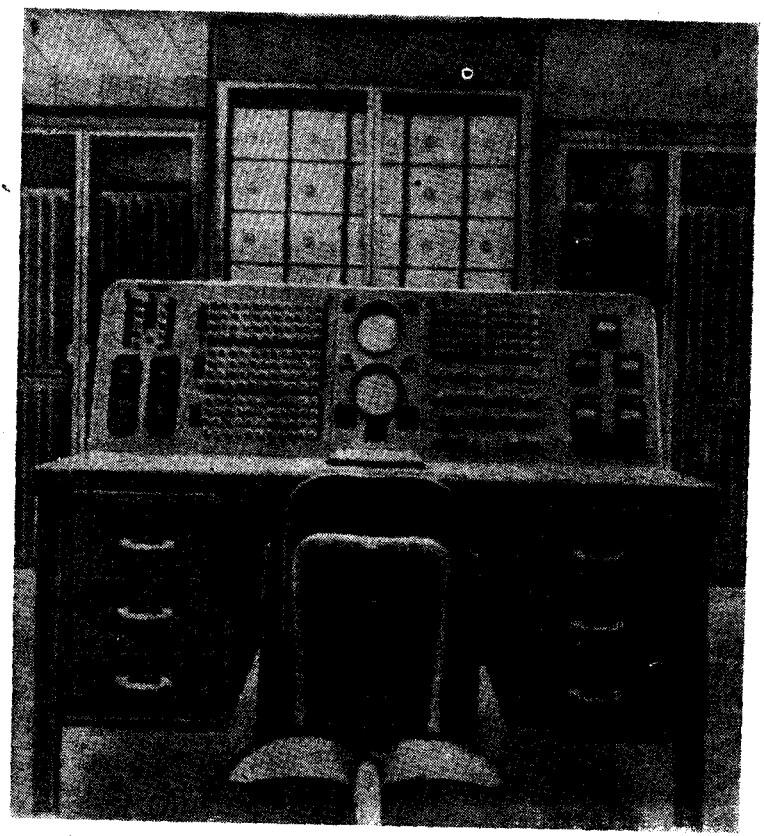
21 серпня 1952 року електронна машина протягом $13\frac{1}{2}$ хвилини обчислила число

$$2^{1279} - 1$$

і перевірила, що це 386-значне число є число просте. У жовтні того самого року та сама машина обчислила число

$$2^{2281} - 1$$

і перевірила, що воно просте. Це найбільше відоме за наших часів просте число. Перевірка одного з арифметичних здо-



Сучасна електронна лічильна машина.

гадів потребувала 20 мільйонів множень. Машина виконала цю роботу протягом 6 годин. Метеорологічний прогноз, який вимагає 800000 множень, машиною виконується протягом години.

Через те, що електронні машини працюють у системі числення з основою 2, то питання про системи числення з основами, відмінними від 10, набуває серйозного значення.

Відзначимо побіжно, що перетворення числа десяткової системи в двійкову або трійкову розв'язує стару задачу про найзручнішу систему гир. Якщо гирі класти тільки на одну шальку терезів, то найзручнішою є двійкова система гир (в 1, 2, 4, 8, 16, ... грамів); коли ж гирі класти на обидві шальки терезів, то найзручнішою буде трійкова система гир (в 1, 3, 9, 27, 81, ... грамів).

Член Петербурзької Академії наук Л. Ейлер (1707—1783).

Питання про системи гир детально викладено в нашій книзі «Міри і метрична система», тому тут на цьому не будемо спинятись. Відмітимо тільки, що розв'язання питання вимагає перетворення числа в двійкову або трійкову систему, що своєю чергою підкреслює значення цього перетворення.

Очевидно, єдиний приклад користування трійковою системою гир дає наша Батьківщина, де ця

Пам'ятник Леонарду Ейлеру на Ленінградському Смоленському (лютеранському) кладовищі. Напис «Леонарду Ейлеру Петербурзька Академія MDCCCXXXVII».

система була запроваджена законом про міри 1797 року і застосовувалась до 1842 року. Закон про міри 1797 року був підготовлений славетним нашим академіком Л. Ейлером, про участь якого в роботах комісії мір та ваг збереглось багато документів. Те, що в торговій практиці трійкова система гир не потрібна, в зв'язку з дешевістю виготовлення застосовуваних гир, не позбавляє трійкову систему гир наукового, а також і практичного інтересу, як найекономнішу при застосуванні точних гир з дорогого металу. Факт запровадження цієї системи гир до вжитку в Росії наприкінці XVIII століття свідчить про передовий характер науки про міри на нашій Батьківщині.

Письмова нумерація

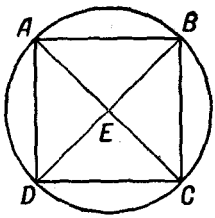
Завданням письмової нумерації є зображення всіх чисел за допомогою якнайменшого числа знаків (цифр).

Різні народи, як ми вже бачили, розв'язували це завдання різно.

Ідеальним розв'язанням питання стало винайдення позиційної нумерації, в якій завдяки існуванню нуля можна записати будь-яке число за допомогою десяти цифр.

Сучасна форма цифр установилась від часу відкриття книгодрукування в середині XV століття. До того цифри, як показують наші таблиці, не мали стандартної форми.

Існує багато теорій для пояснення нинішньої форми цифр. Деякі теорії пов'язували форму цифр з числом паличок, точок, кутів у цифрі, але всі ці теорії не мають наукового значення.



У зв'язку з цим питанням ми можемо згадати ім'я великого нашого поета О. С. Пушкіна.

У повній збірці його творів є нотатка з рисунком:

«Форма цифр арабських складена з такої фігури –

AD (1), *ABDC* (2), *ABECD* (3), *ABD* + *AE* (4)».

Здогад О. С. Пушкіна являє собою теорію, зображену в наведеній на сторінці 76 таблиці під цифрою VII.

Багато сучасних підручників називають наші цифри

арабськими. Це помилка; їх треба називати індійськими, бо араби були тільки передавачами індійських цифр в Європу. На те, що роль арабів обмежувалась тільки передачею в Європу індійських цифр, уперше вказав російський сходознавець Кер у середині XVIII століття.

У Росії індійські цифри в математичних рукописах з'являються наприкінці XVII століття паралельно з слов'янськими цифрами, як ми бачимо на знімку, вміщеному на сторінці 77 Зустрічались індійські цифри на деяких гравюрах XVII століття (див. стор. 53).

Усі наші математичні книги, починаючи з «Арифметики» Магніцького (1703), користуються тільки індійськими цифрами.

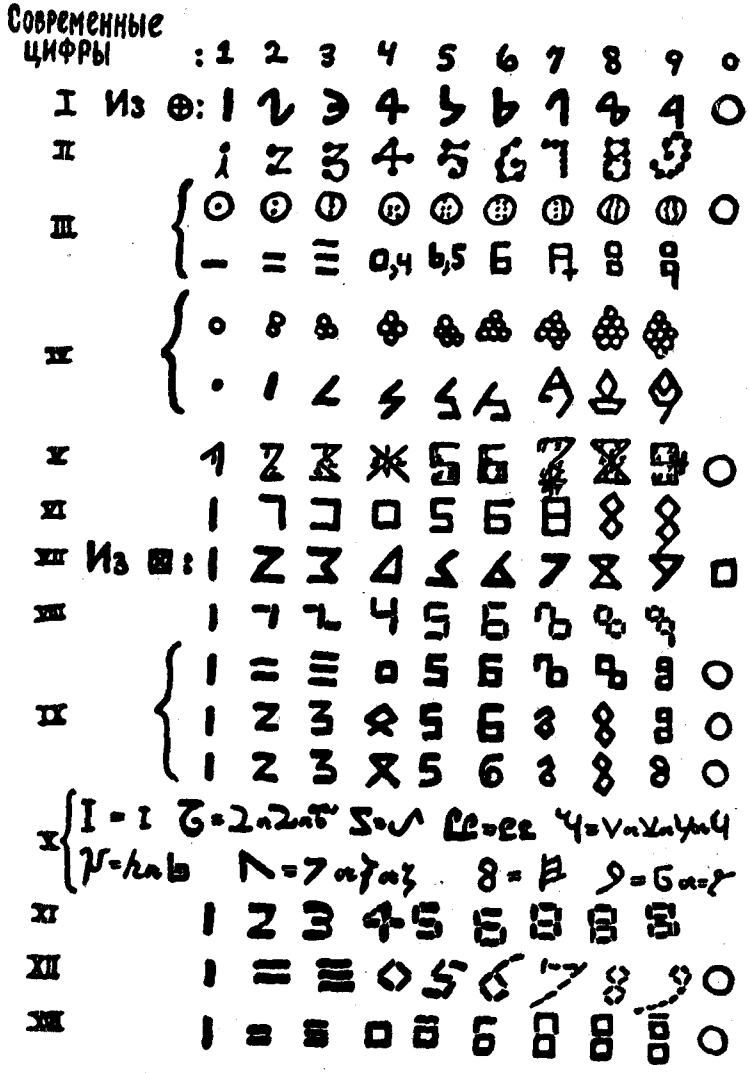
Про деякі арифметичні терміни

Слово «цифра» походить від арабського слова «цифр», що означає «порожнє» (місце). Араби переклали цим словом індійське слово «сунья» — «порожнє» (місце), яким індійці називали знак відсутності розряду в числі. Аж до XVIII століття наш нуль і називався «цифрою». Так, наприклад, Магніцький пише в своїй «Арифметике», що знак 0 «цифрою або нічим називається». В англійській мові слово «цифра» (cipher) і донині означає нуль; незнання цього приводило перекладачів з англійської мови на російську до прикрих перекручень змісту перекладуваного.

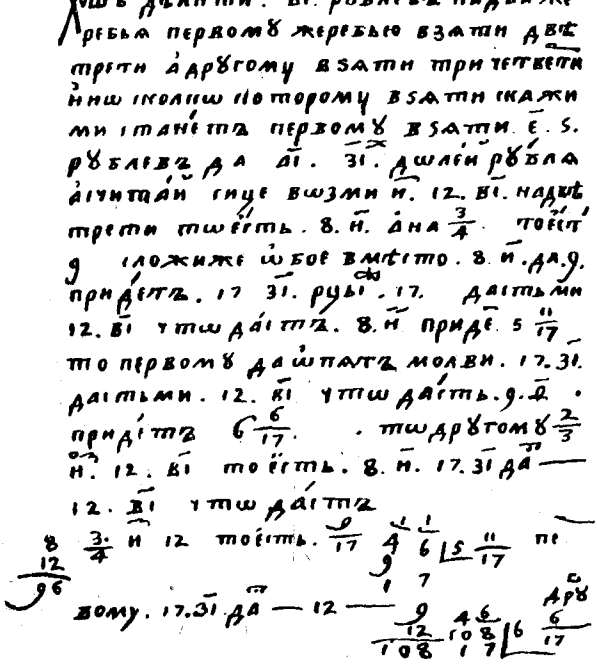
Коли в XIII столітті індійські цифри з'явились в Європі і для більшості людей були незрозумілі, їх вважали якимись потайними знаками, тайнописом. Тайнопис (письмо якими-небудь умовними знаками) називається шифром. Слово «шифр» походить від того самого кореня: «цифр».

Таке словотворення пояснюється тим, що суттю індійської нумерації, немовби «тайнопису» для європейців, був знак нуля; тому його первісна назва «цифр» стала назвою всього арифметичного «тайнопису», що його становили індійські цифри. Теперішня назва «нуль» походить від латинського слова «nulla» (figura), «ніяка» (цифра). Правильною формою слова буде «нуль», а не «ноль».

Індійці позначали порожній розряд у числі спочатку точкою, потім кружечком. У багатьох мовах нуль довго називали кружечком. Правдоподібним є утворення форми нуля, як позначення порожнього місця в записі числа,



Різні спроби пояснення походження форми наших цифр.
Під цифрою VII — здогад О. С. Пушкіна.



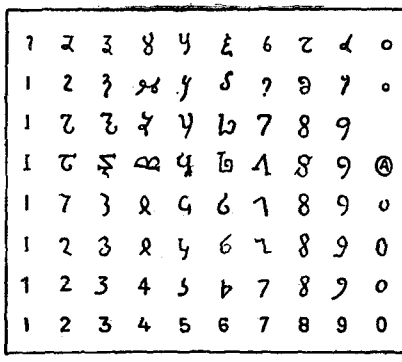
Індійські цифри в російських рукописах XVII століття супроводжуються слов'янськими цифрами.

з первісного знака □, який було замінено зручнішим для писання кружечком.

Легко зрозуміти походження назв чисел: одинадцять = = один-на-десять, дванадцять = два-на-десять і так далі, двадцять=двадесять, тридцять=тридесять і так далі.

На відміну від загального правила числа 40 і 90 набули назви «сорок» і «дев'яносто». Як виникли ці назви?

У деяких книгах слово «сорок» пояснюється походженням від грецької назви числа 40 — тессара́конта. Це пояснення викликає дуже великий сумнів. Чому росіяни, давши числам 20, 30, 50 та іншим російські назви, для числа 40 раптом звернулись до грецької назви? До того ж утворення з слова «тессара́конта» слова «сорок» зовсім неймовірне вже за вимовою і положенням наголосу.



Індійські цифри IX століття.
Цифри західних арабів X століття.
Іспанські цифри 976 року.
Французькі цифри XII століття.
Французькі цифри XIII століття.
Готичні цифри близько 1400 року.
Цифри епохи Відродження, близько 1500 року
Сучасні цифри.

Поступове перетворення індійських цифр у сучасні.

Відомо, що за давнини вживались як гроші хутра — пізніше шкіряні гроші (клаптики шкіри з клеймами). Указ Петра I ще в 1700 році підтверджує, що «В Калузі і в інших містах замість срібних грошей торгують шкіряними».

За «Толковым словарем живого великорусского языка» Володимира Даля, 40 соболевих хутр складали повну шубу і вкладались у «чохол або в сорочку». Звідси назва числа «сорок». Аналогічне утворення числівників спостерігається і в інших мовах. У Данії, наприклад, продають рибу партіями в 80 голів, надітими на жердину. Назва «жердина» й стала назвою числа 80.

Числівник «дев'яносто» пояснюють утворенням від слів «дев'ять до ста»: між числами 90 і 100 в натуральному ряді стоять дев'ять чисел. З таким тлумаченням не всі філологи згодні, проте, іншого, кращого пояснення вони не дають.

Необгрунтоване пояснення походження слова «сорок» з грецької мови нагадує таке ж незадовільне пояснення походження слова «сажéнь» або «сáжень» від англійського кореня (fathom). За словником Даля слово с а ж е н ь, або старе с я ж е н ь, походить від дієслова с я г а т и, що означає діставати до чого-небудь. Звідси вислови: «рука не сягає»; «розум сягає, та воля не владає» і так далі. Форми «досяжний», «недосяжний» від дієслова «сягати» вживаються і в сучасній мові. Природне пояснення слова «сажень», або «сяжень»: «досяжна (рукою при косому сажні, відмірюваному від каблука лівої — правої — ноги до кінчика витягнутої вгору правої — лівої — руки) відстань». Слово «сажень» зустрічається в старих документах 1017 року.

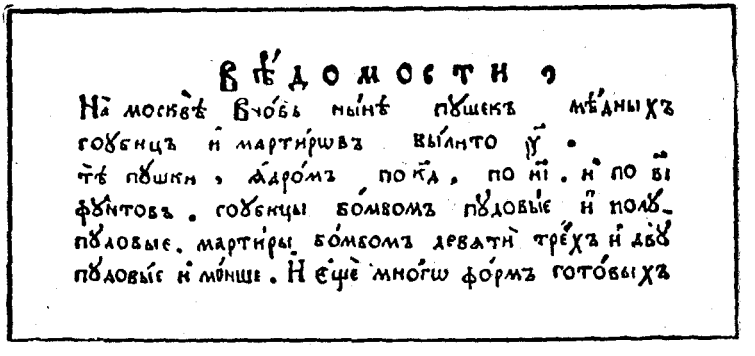
Арифметика цілих чисел

Застосовувані нині способи виконання арифметичних дій над цілими числами виробились поступово в Індії в зв'язку з поширенням там раніше, ніж в інших країнах, позиційної десяткової нумерації. Найдавніше письмове свідчення про існування цієї індійської арифметики відноситься до середини VII століття. Близько 660 року вчений грек Север Себокт пише: «Високі відкриття індійців в астрономії більш геніальні, ніж відкриття греків і вавілонян; їх цінні методи обчислення перевищують будь-який опис. Скажу лише, що обчислення виконуються за допомогою дев'яти цифр...» Перші сліди проникнення цих способів в Європу можна констатувати в рідких пам'ятках кінця X століття.

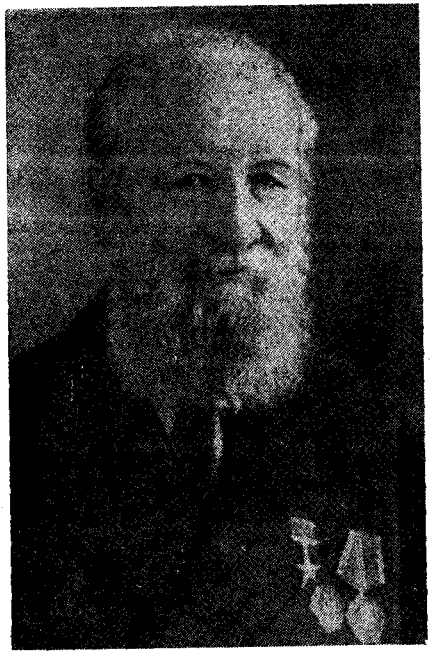
Ширше ознайомлення з ними в Європі почалось від XIII століття, після того як у XII столітті латинською мовою було перекладено книгу узбецького математика Мухаммеда ал-Хорезмі — «Арифметика індійськими цифрами».

Індійські правила дій над цілими числами відрізнялись від наших тільки тим, що всі дії починалися зліва, з вищих розрядів.

Індійці писали на дощечках, посипаних порошком, через те їм легко було «стерти» написану цифру і замінити новою, якщо дія над наступним розрядом давала результат, частину якого треба було додати до вищого розряду.


Вѣдомости
На москвѣ вновь нынѣ пушекъ мѣдныхъ
гаубицъ и мартиршвъ вылито у.
тѣ пушки, ядромъ по 24, по 18, по 12
фунтовъ. гаубицы бомбомъ пудовые и полу-
пудовые. мартиры бомбомъ девати трехъ и двуо
пудовые и мѣнше. И еще многш формъ готовыхъ

Перша російська газета «Ведомости» ще в 1703 році вживає слов'янські цифри: «На Москве вновь ныне пушек медных, гаубиц и мортиров вылито 400. Те пушки ядром по 24, по 18, по 12 фунтов» і так далі.



О. М. Крилов (1863—1945).

При нашому способі письма на папері це стирання незручне. Проте професіональні обчислювачі і за наших днів виконують дії, починаючи з вищих розрядів. Так, наприклад, при додаванні кількох чисел вони додають два числа, починаючи з вищих розрядів, і пишуть одержану суму поряд. Потім до цієї суми таким самим способом додають третій доданок, до нової суми — четвертий доданок і так далі.

Академік О. М. Крилов (1863—1945), видатний математик нашого часу і, безперечно, кращий обчислювач серед математиків, рекомендував такий спосіб виконання арифметичних дій. Якщо так роблять професіональні обчислювачі, то, очевидно, такий порядок обчислення є зручнішим і точнішим, ніж застосовуваний у шкільному викладанні.

Л. П. Магніцький у розділі про множення вказує, що «нецыи помножують дивним якимсь способом», розміщаючи дії так:

$$\begin{array}{r} \times\ 481 \\ 399 \\ \hline 1443 \\ 4329 \\ 4329 \\ \hline 191919. \end{array}$$

«Дивність» цього способу множення полягає тільки в тому, що множення починається з множення на вищий розряд множника.

Так діяти природно вже тому, що найважливішу частину добутку дістаємо від множення на вищий розряд множника. При множенні наближених чисел цей спосіб незрівнянно зручніший, ніж звичайний.

Взагалі арифметичні дії в різні епохи виконувались різними способами.

Про число арифметичних дій

Число арифметичних дій в різні часи і у різних народів було різне. Середньовічні посібники дають дев'ять арифметичних дій. Це є: 1) нумерація, 2) додавання, 3) віднімання, 4) подвоєння, 5) множення, 6) роздвоєння (ділення на 2), 7) ділення, 8) прогресія (звичайно знаходження суми чисел натурального ряду), 9) добування кореня (звичайно тільки квадратного).

«Подвоєння» чисел широко застосовували єгиптяни, які всяке множення зводили до цієї простішої операції.

Нехай, наприклад, треба обчислити

$$37 \cdot 19$$

$$19 = 1 + 2 + 2^4;\ 37 \cdot 19 = 37 \cdot (1 + 2 + 2^4) =$$
$$= 37\,(1 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$$
$$37 \cdot 1 = 37\ (*)$$
$$37 \cdot 2 = 74\ (*)$$
$$37 \cdot 2 \cdot 2 = 148$$
$$37 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 296$$
$$37 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 592\ (*)$$
$$37 \cdot (1 + 2 + 2^4) = 37 + 74 + 592 = 703$$

Множення звелось до подвоєнь і додавання. Це можливо завжди, бо множник можна завжди виразити у вигляді суми степенів числа 2 (і одиниці, якщо число непарне): для цього досить множник виразити в двійковій системі.

Неодноразово згадуваний нами узбецький математик IX століття Муха́ммед ал-Хорезмі визнав подвоєння і роздвоєння окремими арифметичними діями. Після перекладу його книги латинською мовою в XII столітті всі європейські підручники включили до числа арифметичних дій подвоєння і роздвоєння. Тільки наприкінці XV століття італійський автор Лука Пачіоло вперше відзначає, що подвоєння і роздвоєння є лише окремими випадками множення і ділення, і відкидає їх. Виключені з підручників, як окремі арифметичні дії, подвоєння і роздвоєння продовжували застосову-

ватись у практичних обчисленнях. Щодо цього особливу живучість проявив один спосіб множення, який і за наших днів неодноразово описувався в літературі під назвою:

«Спосіб множення чисел, застосовуваний російськими селянами»

Нехай потрібно помножити 37 на 32. Складемо два стовпчики чисел,— один подвоєнням, починаючи з числа 37, другий роздвоєнням, починаючи з числа 32:

37	32
74	16
148	8
296	4
592	2
1184	1

Добутки всіх пар відповідних чисел одні й ті самі, отже

$$37 \cdot 32 = 1184 \cdot 1 = 1184.$$

Другий приклад: знайти добуток $47 \cdot 37$.

Виконуємо так само, як у наведеному вище прикладі, тільки в другому стовпчику при роздвоєнні пишемо лише цілу частину частки (коли ділене непарне) і відмічаємо зірочкою ті рядки, в яких ділення виконувалось з остачею, і останній. Маємо:

47	37	(*)
94	18	
188	9	(*)
376	4	
752	2	
1504	1	(*)

Якби при діленні на 2 чисел другого стовпчика остач не було, то добуток дорівнював би числу 1504. У даному ж випадку ми діяли так, ніби на початку було не $47 \cdot 37$, а $47 \cdot 36$, а в третьому рядку не $188 \cdot 9$, а $188 \cdot 8$. Ми відкинули по одному разу 47 і 188, а тому правильний добуток дістанемо, якщо до числа 1504 додати 188 і 47, тобто

$$47 \cdot 37 = 1504 + 188 + 47 = 1739.$$

Правило множення: добуток даних чисел дорівнює сумі тих чисел першого стовпчика, які відповідають непарним числам другого стовпчика.

Цей спосіб множення є практичним, якщо доводиться

одне й те саме число помножати на різні числа. Нехай, наприклад, рахівник колгоспу, який не має арифмометра, обчислює суми, що їх мають одержати різні люди, при умові, що кожний робітник даного розряду дістає на день 35 карбованців.

Перший стовпчик, одержуваний послідовним подвоєнням, є спільним при всіх множеннях і обчислюється раз назавжди. Для одержання сум, які треба сплатити за різні числа трудоднів, досить складати тільки для кожного числа днів другий стовпчик чисел діленням на 2, що легко виконується усно.

Деякі властивості цілих чисел

У початковій арифметиці розглядаються деякі властивості натуральних чисел, що утворюють послідовність,— 1, 2, 3, 4,... і так далі, яку називають натуральним рядом.

Тепер дитина вже в молодших класах школи засвоює уміння лічити числа натурального ряду необмежено. Засвоєння цього уміння лічити вимагало від первісної людини довгого періоду розвитку. Про це свідчать різні факти.

У російській мові, як і в переважній більшості сучасних мов, є окремі форми слів для однини і множини, тобто для випадків, коли йдеться про один предмет або про більш ніж один предмет.

Але в слов'янській мові, що така близька до російської мови, було три форми слів: форми однини, двоїни та множини. Інакше кажучи, коли говорилось про два предмети, назва предметів ставилась в особливій формі, відмінній від форм однини і множини. Таке явище має і мало місце і в деяких інших мовах. Існують мови, що мають і особливі форми троїни, тобто назва ставиться в особливій формі, коли мова йде про три предмети. Це явище в мові виникло в ту давноминулу епоху, коли людина вміла лічити тільки один, два, або один, два, три, після чого вона вже не розрізняла числа предметів, а називала кількість предметів словом «багато». Можливо, забобонні уявлення про деякі числа (7, 13) пояснюються тим, що ці числа були або найбільшими числами, засвоєними людиною на деякому ступені її розвитку, або були тими числами, до засвоєння яких вона ще не дійшла, через те ці числа здавались людині незвичайними, незрозумілими, такими, що навіювали острах.

Коли ж людина дійшла до вміння лічити числовий ряд необмежено?

Ми згадували вже про твір Архімеда (287—212 роки до нашого літочислення) — «Обчислення піщинок», в якому він доводить, що чисел вистачить і для підрахування піщинок, які заповнюють весь світовий простір,— за тих часів його уявляли у вигляді кулі певного розміру. Архімед доводить цілком обгрунтовано, що він може підрахувати за допомогою чисел будь-яку кількість предметів.

Піфагор у VI столітті до нашого літочислення запровадив в арифметиці поділ чисел на прості і складені. Простими називаються числа, які діляться без остачі тільки на одиницю і самого себе; складеними — числа, які, крім одиниці і самого себе, діляться ще хоч на яке-небудь одно третє число. Далі в арифметиці показується, що кожне складене число єдиним способом розкладається на добуток простих множників. Таким чином, прості числа є ніби тими цеглинами, з яких складаються всі інші числа. Звідси є зрозумілим інтерес до простих чисел.

Поділ чисел на прості й складені, запроваджений Піфагором, вважають важливим моментом у розвитку математики. Цей поділ чисел є початком теоретичного вивчення властивостей чисел, що становить предмет значної частини математики в цілому.

Сучасна арифметика серед натуральних чисел розрізняє числа трьох різних видів:

1) число 1, що має тільки одного дільника;

2) прості числа, які мають тільки двох дільників: одиницю і само число;

3) складені числа, що мають більше двох дільників.

Виділення числа 1 в окремий вид натуральних чисел грунтується на тому, що 1 має багато спеціальних властивостей, відмінних від відповідних властивостей інших чисел. Приклад. Назвемо дріб $\frac{1}{n}$ числом, оберненим для числа n. У числа 1 обернене йому число буде також 1; для всіх інших чисел така рівність не має місця. Сума всіх дільників будь-якого числа, відмінного від 1, більша від самого числа, якщо вважати дільником і само число; для числа 1 сума дільників дорівнює самому числу. Якщо включити число 1 в групу простих чисел, як це іноді робилось, то в багатьох теоремах треба було б застерегти окремо властивості числа 1. Щоб цих застережень не робити, виділили число 1 в окремий вид натуральних чисел. Старогрецькі математики цього не робили, бо вони називали числом су-

купність одиниць: для них 1 не було числом, а тільки елементом, атомом, з якого складаються числа. Вони не вважали числом і дроби, а розглядали дріб як відношення двох натуральних чисел.

Грецький математик Евклід (близько 300-го року до нашого літочислення) довів, що простих чисел необмежено багато, що не існує найбільшого простого числа. Близько ста років після нього інший грецький математик Ератосфен дав спосіб («решето Ератосфена»), яким можна з чисел натурального ряду виділити прості числа. І доведення Евкліда і опис «решета Ератосфена» даються в підручниках.

«Решето Ератосфена» тепер доведене до 12 мільйонів; є друковані таблиці всіх простих чисел між 1 і 12 000 000.

За межами цієї таблиці відомо багато простих чисел, але це числа певного виду, наприклад, числа виду $2^n - 1$ або $2^n + 1$. Так, наприклад, чудовий математик-самоучка І. М. Первушин (1883 р.) довів, що число

$$2^{61} - 1 = 2305843009213693951 \text{ — число просте.}$$

Це число протягом ряду десятиліть було найбільшим відомим простим числом [1].

І. М. Первушин, крім того, довів (1878 р.), що складеним є число

$$2^{2^{23}} + 1, \text{ бо ділиться на } 167772161 = 5 \cdot 2^{25} + 1.$$

Число $2^{2^{23}} + 1$ має 2525223 цифри. Коли б його надрукувати звичайним шрифтом, потрібний був би рядок завдовжки з 5 кілометрів або книга звичайного формату в 1000 сторінок. Результати Первушина було перевірено в Петербурзькій і Паризькій академіях наук і підтверджено.

Існуючі таблиці простих чисел показують, *що прості* числа в міру віддалення від початку натурального ряду зустрічаються в ньому все рідше й рідше, але уважний розгляд деталей таблиці виявляє великі неправильності в розподілі простих чисел.

Наведена таблиця (стор. 86) дає деяке загальне уявлення про ці неправильності.

Нерівномірність розподілу і спадання простих чисел добре видно з другого стовпчика таблиці.

---

[1] Нині найбільшим відомим простим числом є число $2^{2281} - 1$, як відзначено було вище. Це число в багато, багато разів більше від числа Первушина.

Проміжок натурального ряду	Простих чисел у цьому проміжку	Простих чисел між 1 і кінцем проміжку
1	2	3
від 1 до 10	4	4
від 10 до 20	4	8
від 20 до 30	2	10
від 30 до 40	2	12
від 40 до 50	3	15
від 50 до 60	2	17
від 60 до 70	2	19
від 70 до 80	3	22
від 80 до 90	2	24
від 90 до 100	1	25
від 1 до 100	25	25
від 100 до 200	21	46
від 200 до 300	16	62
від 300 до 400	16	78
від 400 до 500	17	95
від 500 до 600	14	109
від 600 до 700	16	125
від 700 до 800	14	139
від 800 до 900	15	154
від 900 до 1000	14	168
перший мільйон	78 498	78 498
другий мільйон	70 435	148 933
третій мільйон	67 883	216 816
четвертий мільйон	66 330	283 146
п'ятий мільйон	65 367	348 513
шостий мільйон	64 336	412 849
сьомий мільйон	63 799	476 648
восьмий мільйон	63 129	539 777
дев'ятий мільйон	62 712	602 489
десятий мільйон	52 090	664 579

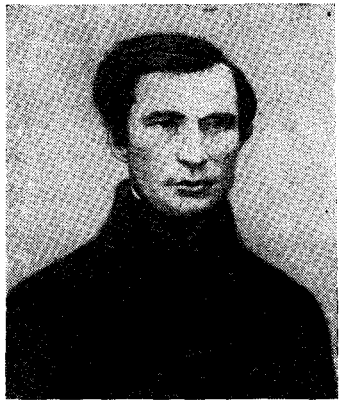
Строкатість картини розподілу простих чисел ще більше посилиться, якщо відзначимо, що існують пари простих чисел, які в натуральному ряді відділені одне від одного тільки одним числом (такі прості числа називаються «близнятами»), як, наприклад, 3 і 5, 5 і 7, 11 і 13 або 10016957 і 10016959; з другого боку, існують пари послідовних простих чисел, між якими в натуральному ряді є багато складених чисел. Так, наприклад, усі 153 послідовних числа натурального ряду від 4652354 до 4652506 є складеними числами. Можна довести, що в продовженому натуральному ряді існують ділянки, що складаються з будь-якого числа послідовних складених чисел.

Найвидатніші математики прагнули розгадати загадку розподілу простих чисел. Вони шукали формул, за допомогою яких можна було б, хоча б наближено, визначити число простих чисел, що не перевищують певного натурального числа. Інакше кажучи, вони шукали формул для розв'язання питання: скільки простих чисел є в натуральному ряді чисел від 1 до 1000, від 1 до 100000, від 1 до 1000000 і т. д. У розв'язанні цього найважчого питання математики найзначніший результат належить Пафнутію Львовичу Чебишеву, одному з найгеніальніших математиків не тільки в Росії, а і в усьому світі.

П. Л. Чебишев

Пафнутій Львович Чебишев народився 16 травня 1821 року, помер 8 грудня 1894 року (за новим стилем). Вихованець Московського і професор Петербурзького університетів, член Петербурзької і Паризької академій наук, Чебишев зробив багато надзвичайно важливих відкриттів у різних галузях математики і створив цілі нові розділи її. До дуже визначних досягнень відносяться і його роботи про прості числа.

У 1849 році П. Л. Чебишев вивів формулу, яку безрезультатно шукали найславетніші математики, для визначення з великою точністю кількості простих чисел, що містяться між 1 і будь-яким числом x. Через те, що тепер є таблиця простих чисел, які містяться між 1 і 12000000, то легко перевірити міру точності формули Чебишева в цих межах.



П. Л. Чебишев (1821—1894).

Позначивши, як це прийнято в математиці, кількість простих чисел між 1 і числом x символом $\pi(x)$ (читається пі від x), а кількість їх, обчислену за формулою Чебишева, символом $\mathrm{Li}(x)$ (лі від x), знаходимо різницю між ними, тобто $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$, для різних значень x. Ці різниці

показують, на скільки результат, обчислений за формулою Чебишева, відхиляється від справжнього значення шуканого числа простих чисел.

x	$\pi(x)$	$\mathrm{Li}(x)$	$\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$
10	4	6	2
100	25	29	4
1 000	168	178	10
10 000	1 229	1 246	17
100 000	9 592	9 630	38
500 000	41 538	41 606	68
1 000 000	78 498	78 628	130
1 500 000	114 149	114 263	114
2 000 000	148 933	149 055	122
2 500 000	183 072	183 245	173
3 000 000	216 816	216 971	155
4 000 000	283 146	283 352	206
5 000 000	348 513	348 638	125
6 000 000	412 849	413 077	228
7 000 000	476 648	476 827	179
8 000 000	539 777	540 000	223
9 000 000	602 489	602 676	187
10 000 000	664 579	664 918	339

Таблиця показує, що числа, одержувані за формулою Чебишева, в межах 10000000 завжди трохи більші від дійсних кількостей простих чисел, але це відхилення становить для 500000 лише близько 0,16%, а для 10000000 тільки 0,05%. Точність формули Чебишева дуже велика і збільшується із зростанням числа x.

Відзначимо, що нині доведено таку несподівану властивість чисел Чебишева. У натуральному ряді, дуже далеко за межами 10000000, існує число, близько якого $\mathrm{Li}(x)$ буде вже не більше, а менше від числа $\pi(x)$. У 1933 році було встановлено, що це має місце для числа x, яке визначається наближеною рівністю

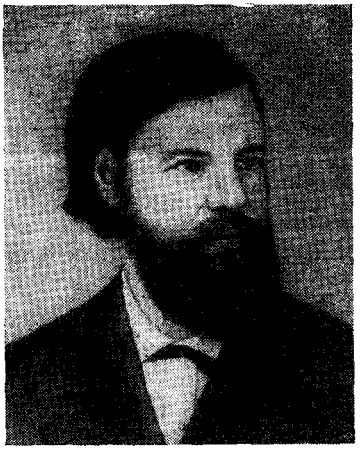
$$x \approx 10^{10^{10^{34}}}$$

Це число (так зване число Ск'юза) є найбільшим числом, яке коли-небудь зустрічалось у науці. Це число, в якому за одиницею іде

$$10^{1000000000000000000000000000000000000}$$ нулів.

Про враження, яке справило відкриття Чебишевим формули для визначення числа простих чисел, можна судити з відзивів найвідоміших математиків.

Славетний англійський математик Сільвестер (1814—1897) назвав Чебишева «переможцем простих чисел, який перший стіснив їх примхливий потік в алгебраїчні межі», і додав, що «дальших успіхів у теорії простих чисел можна сподіватись тільки тоді, коли народиться той, хто настільки перевищить Чебишева своєю проникливістю і вдумливістю, наскільки Чебишев перевищував цими якостями звичайних людей».



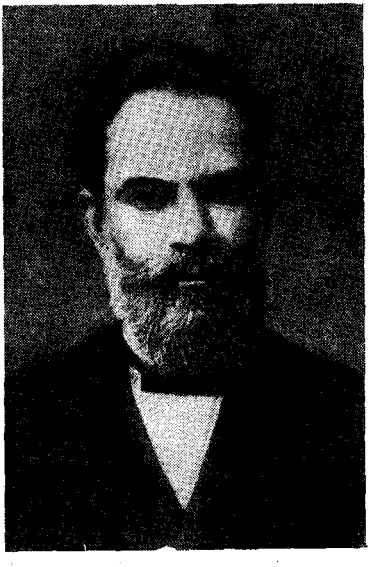
Є. І. Золотарьов (1847—1878).

П. Л. Чебишев одночасно розв'язав і іншу, що доти була не розв'язаною, задачу.

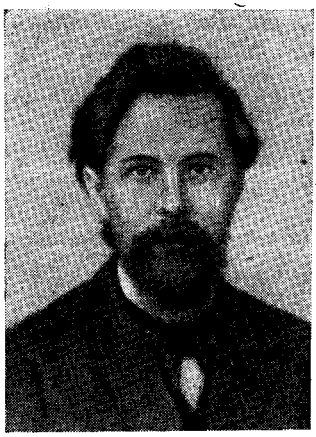
Французький математик Бертран (1822—1900) перевірив на всіх числах, до 6000000, існування такої закономірності: для всіх чисел x, починаючи з 4, між числами x і $2x-2$ міститься, принаймні, одно просте число. Це твердження було відоме за назвою «припущення (постулату) Бертрана». П. Л. Чебишев довів твердження Бертрана і перетворив його в теорему.

З усього сказаного про П. Л. Чебишева можна подумати, що це був теоретик, який вивчав найабстрактніші галузі математики, далекий від будь-якої практики.

Тим часом Чебишев є вченим, який частіше, ніж будь-хто з математиків,



О. М. Ляпунов (1857—1918).



А. А. Марков (1856—1922).

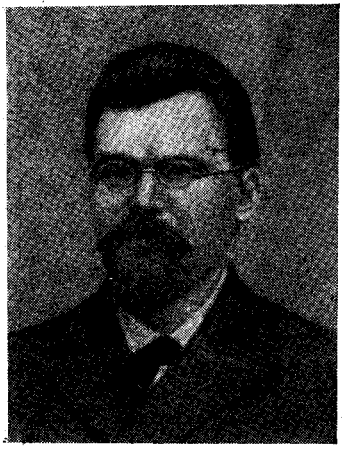
розв'язував задачі, що випливали з практичних потреб людини.

Про це можна судити вже із заголовків його праць, серед яких зустрічаємо такі: «Про один механізм», «Про зубчасті колеса», «Про найпростіші зчленування», «Про крій плаття» і т. д. Він вивчав будову вітряків, різних заводських установок і, за його словами, всюди наштовхувався на питання математики, про які наука його часу знала мало.

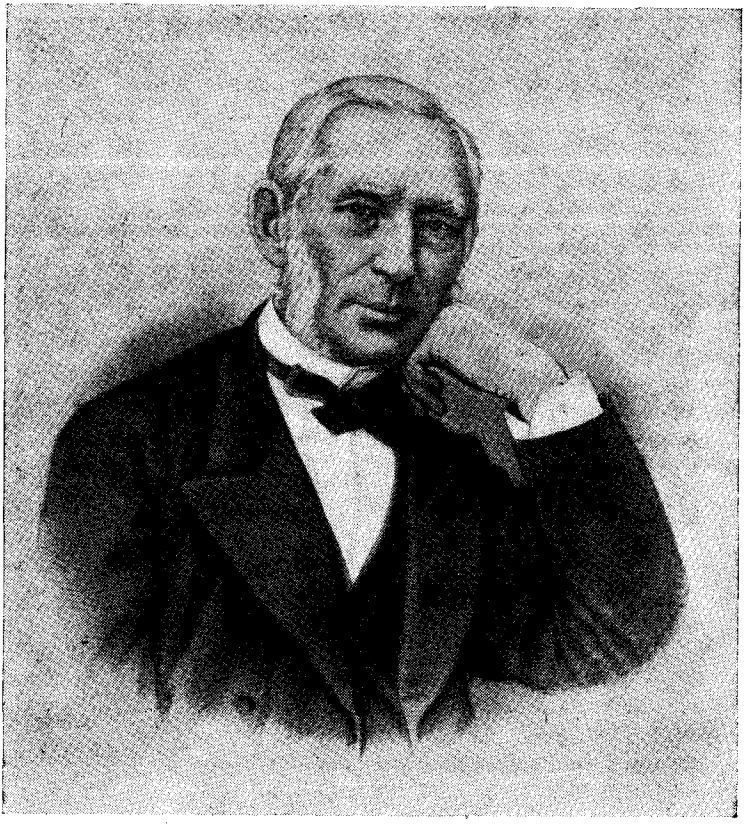
Ці прогалини в науці П. Л. Чебишев і поповнив своїми геніальними теоретичними працями.

Паралельно з цим він усе життя вивчав практичну механіку, винайшов велике число механізмів, проводив досліди з стрільби і багато чим сприяв тому, що російська артилерія досягла такої високої досконалості, яка ставила її вище за артилерії всіх європейських держав.

Уся діяльність Чебишева являє собою постійне поєднання теорії і практики; керувала цією діяльністю одна й та сама ідея, яка, на думку Чебишева, лежить в основі всякої людської діяльності: як з найменшою затратою сил дістати найкращі результати, як застосувати свої засоби для того, щоб досягти по змозі більших результатів. Застосовуючи цю ідею до поліпшення способів обчислення, він дав формули, застосування яких одним з його талановитих послідовників, академіком О. М. Криловим, дало можливість у такій мірі поліпшити розрахунки кораблебудування, що Росія і в цій



Г. Ф. Вороной (1868—1908).



П. Л. Чебишев у старості.

галузі вже багато десятиліть стоїть вище від інших країн світу.

Нарешті, треба відзначити, що П. Л. Чебишев створив першу російську математичну наукову школу, відмінною рисою якої є розв'язування якнайпростішими засобами конкретних питань, з доведенням розв'язання до формули, за якою можна дістати числовий результат.

До цієї школи належать майже всі славні російські математики другої половини XIX і початку XX століття: О. М. Коркін, Є. І. Золотарьов, О. М. Ляпунов, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной, В. А. Стєклов, О. М. Крилов. Безпо-

В. А. Стєклов (1863—1926).

середніми продовжувачами школи Чебишева є радянські математики, академіки І. М. Виноградов, С. М. Бернштейн та інші.

Теорема Ейлера — Гольдбаха — Виноградова про прості числа

Про прості числа є ряд теорем, які вражають своєю видимою простотою і трудністю доведення. Одна з найвідоміших із них — теорема Гольдбаха. Протягом двохсот років, до роботи академіка Івана Матвійовича Виноградова, всі зусилля дуже багатьох визначних математиків, спрямовані на доведення цієї теореми, не дали ніякого результату.

Задача Гольдбаха виникла так.

У члени заснованої в 1725 році Петербурзької Академії наук вступив у 1727 році двадцятилітній Леонард Ейлер, який став одним з найвидатніших математиків XVIII століття.

Його ім'ям названі десятки теорем та формул в усіх розділах математики і механіки. Зібрання його творів охоплює 80 величезних томів. На відміну від ряду академіків-іноземців XVIII століття, Ейлер здобув повагу і любов перших російських академіків, серед них М. В. Ломоносова.

У листі до свого товариша по Академії Гольдбаха в 1742 році Ейлер на запитання Гольдбаха відповідає, що він вважає справедливою таку теорему, яку, проте, не може довести: «Будь-яке парне число, починаючи з шести, є сума двох непарних простих чисел»:

$$6 = 3 + 3, \quad 8 = 3 + 5, \quad 10 = 3 + 7 = 5 + 5 \text{ і т. д.}$$

Якщо ця теорема справедлива, то з неї випливає, що будь-яке непарне число є сума трьох простих чисел. Ці твердження набули назви теореми Гольдбаха. Щодо парних чисел її перевіряло багато математиків. У 1940 році перевірку було доведено до 100000.

Перевірку правильності теореми Ейлера — Гольдбаха — Виноградова для парних чисел можна провести так. Візьміть дві смужки з цупкого паперу і нанесіть на них рівні кліточки. У кліточки однієї смужки вписуйте непарні числа в спадному порядку, починаючи з якогось числа, наприклад, з п'ятдесяти. На другій смужці напишіть непарні числа у зростаючому порядку, починаючи з одиниці. Підкресліть на обох смужках усі прості числа за «решетом Ератосфена» або таблицею простих чисел (на нашій таблиці прості числа надруковано жирним шрифтом).

Прикріпіть смужки поруч так, щоб число 49 однієї смужки було на однаковій висоті з 1 другої смужки. У такому випадку підкреслені числа (жирні), що стоять поруч на обох смужках, дають уявлення про число 50 у вигляді суми двох непарних простих чисел.

Таких «розбиттів» числа 50 буде 4, а саме: $3 + 47$, $7 + 43$, $13 + 37$, $19 + 31$.

Цими самими смужками можна скористатися для «розбиттів» будь-якого парного числа, що не перевищує 50, на суму двох простих чисел. Для цього треба другу смужку помістити поруч з першою так, щоб сума чисел, які стоять поруч, дорівнювала числу, що його розбивають.

На нашій табличці *показано «розбиття»* чисел 50, 48 і 40 (див. стор. 94).

Робилось надзвичайно багато спроб довести теорему Гольдбаха, але всі вони не дали результатів.

Ще в 1922 році видатний англійський математик Харді змушений був заявити, що для доведення цієї теореми існуюча нині математика недостатня. Як завжди в таких випадках, для розв'язання питання треба було створити нові методи в математиці.

Початок створенню цих нових методів математики поклав у 1930 році радянський математик Л. Г. Шнірельман (1905—1938), а виробив необхідні нові методи академік Іван Матвійович Виноградов (народився в 1891 році).

У 1937 році І. М. Виноградов довів, що будь-яке д о с т а т н ь о в е л и к е непарне число є сума трьох непарних простих чисел. Таким чином, задачу, яку дуже багато видатних математиків марно намагались розв'язати, було розв'язано для всіх непарних чисел, починаючи з якогось числа С. Це число дуже велике. Дальші дослідження цього питання, напевно, знизять межу, починаючи з якої теорему Гольдбаха для непарних чисел можна вважати розв'язаною.

49	1
47	3
45	5
43	7
41	9
39	11
37	13
35	15
33	17
31	19
29	21
27	23
25	25

49	
47	1
45	3
43	5
41	7
39	9
37	11
35	13
33	15
31	17
29	19
27	21
25	23
23	25
21	27

49	
47	
45	
43	
41	
39	1
37	3
35	5
33	7
31	9
29	11
27	13
25	15
23	17
21	19

Перевірка теореми Гольдбаха для чисел 50, 48 і 40.

Інтерес цього питання полягає в тому, що радянські математики створили нові наукові методи, які, звичайно, будуть застосовані й при розв'язуванні інших питань. У зв' язку з цим буде корисним навести слова академіка О. М. Крилова:

І. М. Виноградов.

«Митрофанушка в комедії «Недоросль» говорив, що двері, припасовані на своєму місці є прикметник (Неперекладна гра слів. *В. Б.*), а двері, які лежать у коморі і не навішені на місце, є іменник. Багато математичних тверджень довгий час залишались «іменниками» в розумінні Митрофанушки: вони іменувались, але не застосовувались. Але рано чи пізно кожна правильна математична ідея набувала застосування в тій чи іншій справі».

У розвитку будь-якого розділу математики найважливішим є створення нових методів. Застосування вже існуючих методів є набагато легшою роботою.

Відкриття І. М. Виноградовим його методу доведення було подією, яка привернула увагу всього світу.

Л. Г. Шнірельман (1905—1938).

Дробове число

В історії розвитку дробового числа ми зустрічаємо дроби трьох видів:

1) частини або одиничні дроби, в яких чисельник одиниця, а знаменником може бути яке завгодно число;

2) дроби систематичні, в яких чисельниками можуть

бути які завгодно числа, а знаменниками — тільки числа деякого окремого виду, наприклад, степені десяти або шістдесяти;

3) дроби загального виду, в яких і чисельники і знаменники можуть бути якими завгодно числами.

Винайдення цих трьох різних видів дробів становило для людства різні ступені трудності, через те різні види дробів з'являлись у різні епохи.

Ознайомлення людини з дробовими числами почалося з одиничних дробів з малими знаменниками.

Поняття «половина», «третина», «чверть», «восьмушка» вживаються часто людьми, які ніколи не вчили арифметики дробових чисел. Ці найпростіші дроби кожний народ винайшов самостійно в ході свого розвитку.

Одиничні дроби. Стародавні єгиптяни, незважаючи на те, що вони протягом кількох тисячоліть своєї історії розвинули високу культуру, залишили після себе прекрасні пам'ятники мистецтва, володіли багатьма галузями техніки, проте в арифметиці дробових чисел не пішли далі від винайдення одиничних дробів $\left(\text{і дробу } \frac{2}{3}\right)$. Якщо задача приводила до відповіді, яку ми виражаємо дробовим числом, єгиптяни подавали цю відповідь у вигляді суми одиничних дробів або частин. Якщо, наприклад, відповідь по-нашому була $\frac{7}{8}$, єгиптянин подавав її у вигляді суми $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ і писав без знаків додавання: $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$. Не вживали знака додавання також багато пізніших народів, розуміючи писання дробів поруч як додавання. Цей єгипетський спосіб письма частково зберігся і у нас. Ми пишемо мішані числа, ставлячи поруч, без будь-якого з'єднуючого знака, число цілих одиниць та дріб, і розуміємо запис, як суму: пишемо $3\frac{1}{2}$ замість $3+\frac{1}{2}$.

Може здатись, що єгипетський спосіб користування самими тільки одиничними дробами ускладнював розв'язування задач. Не завжди це так.

Єгипетський автор розв'язує задачу: треба поділити 7 хлібин порівну між вісьмома особами. Ми сказали б, що кожна людина дістане $\frac{7}{8}$ хлібини.

Для єгиптянина не було числа $\frac{7}{8}$, але він знав, що від ділення 7 на 8 буде $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Цей факт підказує йому, що для поділу семи хлібин між вісьмома особами треба мати 8 половинок, 8 чвертей і 8 восьмушок. Він ріже 4 хлібини пополам, 2 хлібини — на чверті і 1 хлібину — на восьмушки і поділяє частини між одержувачами. Для поділу довелось зробити всього $4+6+7=17$ розрізів.

Комірник, який працює за наших часів, діставши завдання поділити хлібини і зміркувавши, що кожному одержувачеві треба дати сім восьмушок, можливо, вважатиме за потрібне розрізати всі 7 хлібин спочатку на восьмушки, для чого йому треба буде зробити $7\times 7=49$ розрізів. Як бачимо, в цій задачі єгипетський спосіб є практичнішим.

Єгипетський учень, розв'язуючи задачі, що приводили до дробового числа, повинен був мати перед собою таблицю, щоб знати, у вигляді суми яких частин виражатиметься результат ділення (дробове число). Таку таблицю ми й знаходимо на початку єгипетського посібника математики, що відомий нам під назвою «папірусу Ахмеса» або «папірусу *Райнда*».

Як можна представити будь-який дріб у вигляді суми частин? Маючи наші знання арифметики, це легко зробити.

Можна переконатись (перевірте!), що рівність

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{n+1}+\frac{(n+1)a-b}{(n+1)b} \qquad (*)$$

є справедлива.

Якщо n є ціла частина дробу $\frac{b}{a}$ (в математиці це позначають знаком $E\left(\frac{b}{a}\right)$, тобто, якщо $n=E\left(\frac{b}{a}\right)$, то користуючись рівністю (*), ми можемо дріб $\frac{a}{b}$ представити у вигляді суми частин. Покажемо це на прикладі $\frac{13}{20}$.

$$n=E\left(\frac{20}{13}\right)=1\left(\text{ціла частина дробу}\ \frac{20}{13}\right).$$

За рівністю (*)

$$\frac{13}{20}=\frac{1}{1+1}+\frac{(1+1)\cdot 13-20}{(1+1)\cdot 20}=\frac{1}{2}+\frac{2\cdot 13-20}{2\cdot 20}=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{6}{40}=\frac{1}{2}+\frac{3}{20}.$$

Над дробом $\frac{3}{20}$ виконаємо ті самі перетворення:

$$n = E\left(\frac{20}{3}\right) = 6;$$

$$\frac{3}{20} = \frac{1}{6+1} + \frac{(6+1)\cdot 3 - 20}{(6+1)\cdot 20} = \frac{1}{7} + \frac{21-20}{7\cdot 20} = \frac{1}{7} + \frac{1}{140}$$

Підставляючи це значення замість $\frac{3}{20}$, маємо:

$$\frac{13}{20} = \frac{1}{2} + \frac{3}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{140}.$$

Задача: представити $\frac{17}{18}$ у вигляді суми частин.

Відповідь: $\frac{17}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$.

Розв'язування задач практичного життя за допомогою самих тільки частин (єгипетський спосіб) мало місце майже у всіх європейських народів, починаючи з греків.

Систематичні дроби. Одночасно з одиничними дробами з'явились і систематичні дроби. Найбільш ранній щодо часу вид таких дробів є шістдесяткові дроби, що застосовувались у стародавньому Вавілоні. У цих дробах знаменниками є числа 60, $60^2 = 3600$, $60^3 = 216\,000$, 60^4, 60^5 і т. д., і вони схожі з нашими десятковими дробами.

Шістдесятковими дробами користувались усі культурні народи до XVII століття, особливо в наукових працях, через що вони й називались фізичними або астрономічними дробами, а дроби загального виду, на відміну від них,—звичайними або народними. Сліди користування цими дробами залишились у нас і досі: хвилина є $\frac{1}{60}$, секунда $\frac{1}{60^2} = \frac{1}{3600}$, терція $\frac{1}{60^3} = \frac{1}{216000}$ частина години.

Десяткові дроби. Десяткові дроби являють собою також вид систематичних дробів.

Винахідником їх майже в усіх книгах називають фламандського (бельгійського) інженера Сімона Стевіна (1548—1620). Стевін у 1585 році видав брошуру, в якій палко агітував за впровадження до вжитку нових, десяткових, дробів, за допомогою яких, з його слів, «можна розв'язувати всі життєві задачі без ламаних» (так називались дроби у всіх народів). Проте, як ми вже знаємо, десяткові дроби були

запроваджені в наукову літературу приблизно за 175 років до нього узбецьким математиком і астрономом ал-Каші. Обчислюючи відношення довжини кола до радіуса (2π) у шістдесятковій системі, за тих часів загальновживаній у наукових дослідженнях, ал-Каші дістає результат у вигляді запису:

цілі	перші частини	другі частини	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
6	16	59	28	1	34	51	46	14	50

що означає:

$$6+\frac{16}{60}+\frac{59}{60^2}+\frac{28}{60^3}+\frac{1}{60^4}+\frac{34}{60^5}+\frac{51}{60^6}+\frac{46}{60^7}+\frac{14}{60^8}+\frac{50}{60^9}.$$

Під цим числом він пише:

цілих 6 283 185 307 179 586 5.

Це число є переведення написаного вище значення числа 2π з шістдесяткової системи числення в десяткову і воно являє собою десятковий дріб:

6,2831853071795865.

Поділивши це число на 2, дістанемо наближене значення числа π — відношення довжини кола до діаметра:

3,1415926535897932.

У цьому дробові всі 16 знаків після коми точні.

Десяткові частини ал-Каші називає: десяткові мінути, десяткові секунди, десяткові терції і так далі.

У написаному в 1427 році «Ключі до мистецтва лічби» ал-Каші дає правила обчислень у десятковій системі, тобто вчить множенню і діленню десяткових дробів.

Сказане дає нам цілковиту підставу вважати узбецького вченого початку XV століття ал-Каші основоположником застосування десяткових дробів і тим ученим, який також обгрунтував теорію цих дробів.

Крім того, в тих самих книгах ал-Каші показує ясне розуміння правил

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},\ a^m : a^n = a^{m-n},$$

що є великим кроком уперед у цьому питанні порівняно із застосовуваними в Західній Європі незграбними правилами, які походять від Архімеда.

Дріб загального виду. Дроби загального виду $\frac{m}{n}$, в яких і m, і n можуть бути довільними цілими числами, з'являються вже в деяких творах Архімеда. Найпростіші з таких дробів $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$ поступово починають застосовуватись у життєвій практиці. Індійці вже в перші століття нашого літочислення встановили сучасні правила дій над звичайними дробами. Ці правила через посібники середньоазіатських математиків — ал-Хорезмі та інших — увійшли в європейські підручники арифметики. Це відбулось раніше від поширення десяткових дробів.

В «Арифметике» Магніцького (1703) звичайні дроби подаються докладно, а десяткові дроби — в спеціальному розділі, як певний новий вид числення, що не мав за тодішньої системи мір великого практичного значення. Тільки із запровадженням метричної (десяткової) системи мір десяткові дроби здобули належне їм місце в нашому вжитку.

АЛГЕБРА

Алгебра як мистецтво розв'язувати рівняння зародилась у вавілонян, у яких була для нього спеціальна назва, що перейшла в арабську мову.

У нарисі про вавілонську математику було вже сказано, що вавілоняни розв'язували рівняння першого і другого степеня, а за допомогою таблиць — також деякі види рівнянь третього степеня.

Узбецький математик ал-Хорезмі свою книгу початку IX століття, яка, перекладена в XII столітті латинською мовою, стала родоначальником європейських підручників алгебри, називає «Кітаб-ал-джебр вал-му-кабала», що в перекладі означає: «Книга про відтворення і протиставлення». «Відтворення» означає перетворення відніманого (по-сучасному «від'ємного») числа в додатне при перенесенні з однієї половини рівняння в другу. Через те що за тих часів від'ємні числа не вважали справжніми числами, то операція ал-джебр (алгебра), яка ніби повертає число з небуття в буття, здавалась чудом цієї науки, що її в Європі довго після цього називали «великим мистецтвом» поряд з «малим мистецтвом» — арифметикою.

Термін «алгебра» як назва науки відтворення в арабів також перейшов у медицину. Вправляння кістки переламаної руки або ноги також було відтворенням втраченого органу, і мистецтво лікаря, що повертає людині руку або ногу, теж стали називати алгеброю.

Такий подвійний зміст слова «алгебра» пояснює нам один дивний на перший погляд факт. У другій частині відомого романа Сервантеса «Дон Кіхот» (розділ XV) розповідається, як Дон Кіхот збив з коня свого противника, як той лежав на землі, неспроможний поворушити ні руками, ні ногами, і як Дон Кіхоту пощастило знайти алгебриста для подання допомоги переможеному противникові.

Так сказано в іспанському оригіналі романа, так точно говориться в більш ранніх російських виданнях «Дон Кіхота»; тільки в останньому виданні «алгебрист» замінено «костоправом». Пояснюється це тим, що в іспанській і португальській мовах слово «алгебра», як і в арабській мові, означає не тільки частину математики, але й «мистецтво вправляти вивихи»; словом «алгебрист» називається не тільки той, хто знає алгебру, а й лікар — фахівець з лікування переломів рук та ніг.

Араби протягом кількох століть володіли частиною Піренейського півострова і принесли туди основи своєї культури і культури, запозиченої ними в інших народів, зокрема у народів нашої Середньої Азії. Араби занесли в підкорені ними країни твори з математики Мухаммеда ал-Хорезмі, Абдуль ал-Фергані та інших вчених, а також переклади грецьких авторів. Багато арабських слів увійшло в іспанську та португальську мови, серед них і слова «алгебра» та «алгебрист» у тих двох значеннях, що їх мали ці слова у арабів.

Єгиптяни розв'язували методом хибного положення задачі, які ми тепер розв'язуємо за допомогою рівнянь першого степеня.

Грецьким геометрам були відомі основні алгебраїчні операції, але вони застосовували їх тільки до відрізків прямої. Лише в пізнього грецького математика Діофанта (III і IV століття нашого літочислення) ми знаходимо числове розв'язання рівнянь першого і другого степеня. Грецька математика в цей період уже занепадає.

Як тепер відомо, індійці приблизно в той самий час почали розробляти алгебру, але Європа ознайомилась з оригінальними індійськими математичними роботами тільки

в XIX столітті, через те вони на розвиток європейської математики не мали впливу.

Основи алгебри як уміння розв'язувати рівняння вже з XII століття через книгу ал-Хорезмі дійшли до Європи, і в наступні століття європейські математики розвинули їх далі.

Буквена символіка алгебри. Уже ал-Хорезмі вбачав характерну особливість алгебри в тому, що вона в загальному вигляді розв'язує задачі, які розглядаються і в арифметиці. За наших часів досягається це тим, що числа позначаються буквами, які, залежно від умов задачі, можуть набувати різних числових значень.

Тому алгебру часто називали загальною або універсальною арифметикою.

Вживання букв в алгебрі з'явилось внаслідок дуже довгого розвитку.

Уже стародавні вавілоняни почали вживати спеціальні знаки для позначення шуканих чисел та операцій над ними, так звану буквену символіку в алгебрі.

Особливий знак для позначення невідомого шуканого числа, що називалось «кучею», був у єгиптян.

Грецький математик Діофант має знаки для позначення невідомого і його степенів, дії віднімання та рівності. Він також знає, що можна виконувати множення виразів, таких, як-от (5—3) (4—2), не знаходячи попередньо різниць, причому добуток чисел, перед якими стоять однакові знаки, треба писати доданком, тобто з плюсом, а добуток чисел, перед якими стоять різні знаки, треба писати від'ємником, тобто з мінусом. Від'ємного числа у Діофанта ще немає.

Індійські математики при розв'язуванні рівнянь сміливіше застосовували ті самі правила, що і Діофант, і при розв'язуванні рівнянь стали розглядати і від'ємні корені,— їх вони тлумачили як борг або витрату і позначали точкою над числом або хрестиком поруч з ним. Але ще індійський математик XII століття заявляє, що «люди таких чисел не схвалюють». Рівноправність додатних і від'ємних чисел була визнана в математиці тільки в XVII столітті.

Математики, які писали арабською мовою, серед них часто і середньоазіатські, невідоме шукане число називали «річчю» (буквеної символіки вони не мали). Перша буква цього слова в європейській транскрипції і дала наше позначення невідомого буквою x.

Проте до XVI століття виклад алгебри був словесним.

Французький математик Вієт (1540—1603) і його сучасники запроваджують буквені позначення і символи в широкому масштабі, хоч не одразу в такому вигляді, як ми робимо це зараз.

Уже на початку XVI століття окремі математики запровадили позначення степеня числа за допомогою показника степеня, але ще в XVIII столітті зустрічаються записи *aa, aaa* або *aaaa* замість a^2, a^3 і a^4. Навіть знак $=$, такий зручний і зрозумілий, набув загального вжитку тільки у XVIII столітті[1], і ще на початку цього століття навіть автори наукових книг вважають за потрібне пояснювати, що знаки $+$ і $-$ позначають додавання та віднімання, знак $\times$ — множення.

Походження вживаних нами в арифметиці і алгебрі знаків не завжди можна точно встановити.

Вважають, що знаки $+$ і $-$ виникли в торговельній практиці. Виноторговець рисочками відмічав, скільки мірок вина він з бочки продав. Приливаючи в бочку нові запаси, він перекреслював стільки видаткових рисочок, скільки мірок він долив. Так нібито виникли знаки $+$ і $-$ в XV столітті.

Походження знака $-$ таким чином здається правдоподібним.

Щодо походження знака $+$ існує інше пояснення, не менш правдоподібне. Замість $a + b$ писали «*a* і *b*», по-латині: «*a et b*». Через те що слово «et» («*i*») доводилось писати дуже часто, то його стали скорочувати: писали спочатку одну букву *t*, яка кінець кінцем виродилась у знак $+$. У книгах з арифметики замість них довго писали латинські букви *p* (плюс) і *m* (мінус).

Знаки $\times$ і $\cdot$ для позначення множення і знак $:$ для ділення починають набувати вжитку тільки в XVII столітті. До запровадження цих знаків вживали для позначення множення і ділення букви *M* і *D*, як перші букви латинських назв цих дій.

Про знак $\sqrt{\ }$ звичайно зауважується, що він походить від букви r (першої букви латинського слова «radix» — «корінь»). Це пояснення не є загальноприйнятим. У найста-

---

[1] Знак $=$ для позначення рівності двох виразів запропонував англійський автор Роберт Рікорд у 1557 році в підручнику алгебри, першому англійською мовою, присвяченому компанії купців, які провадили торгівлю з Москвою і яким він «бажає здоров'я та постійного зростання прибутків в їх славних поїздках».

Заголовна сторінка «Арифметики» Л. П. Магніцького.

ріших рукописах перед числом, з якого треба добути корінь, ставилась точка, а пізніше точка або вузенький ромбик з рисочкою, спрямованою вправо і вгору. Так утворився знак $\sqrt{\ }$.

Дужки в сучасному вигляді почали вживатись тільки в XVIII столітті і насамперед набули широкого застосування у виданнях Петербурзької Академії наук.

Сама російська назва дужок — «скобки» була запроваджена нашим академіком Ейлером (1770). Раніше замість взяття виразу в дужки над ним або під ним проводили риску. Якщо з алгебраїчного виразу треба було добути корінь, то перед ним ставили знак кореня — ромбик з косою

рисочкою — і над виразом проводили риску; із злиття знака кореня з рискою утворився знак кореня $\sqrt{}$ з рискою, який у зарубіжних книгах майже не вживається. Замість нашого способу письма $\sqrt{x^2 + axy + y^2}$ там пишуть: V $(x^2 + axy + y^2)$.

Невідомі числа з XVII століття стали позначати останніми буквами латинського алфавіту x, y, z. Проте довго ще невідоме в рівнянні писали буквою R (від «Radix» — «корінь»), а квадрат його — буквою q («quadratus»). Розгляньте знімок частини заголовної сторінки «Арифметики» Магніцького. У руці Архімеда — дошка з таким записом.

$$\begin{array}{l} 2R \div 1 \\ 3R \div 2 \\ \hline 6q + 3R \\ \quad \div 4R \div 2 \\ \hline 6q \div 1R \div 2 \end{array}$$

Тут знак $\div$ є старовинний знак віднімання. Запис Магніцького в наших позначеннях такий:

$$\begin{array}{l} 2x + 1 \\ 3x - 2 \\ \hline 6x^2 + 3x \\ \quad - 4x - 2 \\ \hline 6x^2 - x - 2. \end{array}$$

Після запровадження буквеної символіки в алгебру і засвоєння поняття від'ємного числа розв'язання рівнянь першого степеня звелось до законів дій над числами. Ніякого «відкриття» способу розв'язання цих рівнянь не треба було робити, і таке відкриття ніким не відзначено.

Усі існуючі способи розв'язання систем рівнянь першого степеня вже є в книзі Ньютона «Загальна арифметика», яка була видана в 1707 році і в 1948 році вийшла друком у російському перекладі під назвою «Всеобщая арифметика».

Першою оригінальною російською книгою з алгебри є: «Начальное основание математики, сочиненное Николаем Муравьевым, капитан-порутчиком от инженеров, часть I, Петербург, 1752». Найзначнішим оригінальним російським посібником з алгебри в XIX столітті була

«Алгебра или вычисление конечных. Сочинил Н. Лобачевский. Казань, 1834». У цій книзі наш великий математик М. І. Лобачевський як з наукового, так і з методичних поглядів передбачив багато такого, до чого західноєвропейські вчені та педагоги прийшли вже згодом.

ГЕОМЕТРІЯ

Геометричні знання, що виникали у всіх народів з їх практичної діяльності, об'єднав у систематичну науку грецький математик Евклід, який спирався при цьому на праці своїх попередників: Фалеса, Піфагора, Гіппократа, Евдокса та інших.

Евклід близько 300 року до початку нашого літочислення написав книгу «Начала», яка є однією з найвизначніших у всій математичній літературі. Вона й досі не втратила свого значення. За наших днів вийшов новий переклад цієї книги російською мовою, з дуже цінними і повчальними примітками.

Цей величезний твір, що містить 465 тверджень (означень, аксіом, теорем), викладено в стрункому логічному порядку, і протягом багатьох століть ця книга була майже єдиним підручником геометрії.

Усі пізніші автори в тій чи іншій мірі наслідували Евкліда.

Значну частину змісту підручників геометрії повністю взято в Евкліда.

Незважаючи на найвищу досконалість твору Евкліда, він в окремих частинах викликáв критичне ставлення до себе. Головним чином ця критика спрямовувалась проти вчення про паралельні лінії в «Началах» Евкліда.

Протягом довгого часу були численні спроби поліпшити виклад учення про паралельні лінії, але ці спроби до початку XIX століття ніякого поліпшення в геометрію не внесли. Тільки геніальний російський математик Микола Іванович Лобачевський здійснив те, чого не зуміли зробити протягом більш ніж двох тисячоліть найвидатніші математики.

Здійснення цього наукового подвигу вимагало цілої революції в поглядах на основи геометрії і в філософських поглядах на простір.

М. І. Лобачевський

Серед тверджень, які Евклід приймав без доведення, було таке: «Якщо дві прямі, які лежать в одній площині, при перетині їх якою-небудь третьою утворюють внутрішні односторонні кути, сума яких менша від двох прямих, то ці прямі перетинаються по той бік від третьої прямої, на якому сума вказаних кутів менша від двох прямих».

На початку XIX століття цій аксіомі було надано тієї формуліровки, яка дається в підручнику: «На площині через дану точку можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій».

Протягом більш ніж 2000 років дуже багато математиків, серед них і найвидатніші, робили численні спроби довести це твердження на підставі інших аксіом та припущень Евкліда. Усі ці спроби не дали результатів, проте це не відібрало у людей віри в те, що твердження Евкліда все-таки є теоремою і рано чи пізно його можна буде довести.

М. І. Лобачевський поклав край цим шуканням. Він довів, що твердження Евкліда про паралельні є незалежна аксіома, яку не можна вивести з інших аксіом.

Лобачевський робить припущення, що в площині, в якій лежать дана пряма і точка поза цією прямою, через цю точку можна провести нескінченну множину прямих, які не перетинають даної прямої.

Виходячи з такого припущення, Лобачевський побудовує свою геометрію з тригонометрією без жодної суперечності з іншими аксіомами геометрії, що сталося б, коли б евклідова аксіома паралельних була висновком цих аксіом.

Це відкриття Лобачевського було цілим переворотом у геометрії і філософії.

Лобачевського називали Коперніком або Колумбом геометрії, бо в галузі геометрії це відкриття здійснило революцію, подібну до тих, які здійснили в астрономії Коперник і в географії Колумб.

У геометрії Лобачевського, як уже сказано, через точку, взяту поза «прямою», можна провести нескінченну множину прямих, що лежать у тій самій площині, в якій лежать пряма і точка, і не перетинають дану пряму.

Так само через цю точку можна провести і нескінченну множину прямих, що перетинають дану пряму. Дві лінії, які відділяють пучки ліній, що перетинають і не перети-

нають дану пряму і проходять через задану точку, Лобачевський називає паралельними до даної прямої. Звідси бачимо, що у Лобачевського слово «паралельна», як і багато інших слів, мають інший смисл, ніж у геометрії Евкліда.

Сума внутрішніх кутів трикутника в геометрії Лобачевського завжди менша від двох прямих кутів і залежить від довжини сторін. У цій геометрії не існує подібних фігур.

Проте, незважаючи на ці «дивні властивості» з погляду звичайної, евклідової геометрії, в геометрії Лобачевського ряд теорем евклідової геометрії залишається справедливим, а всі інші утворюють струнку систему тверджень.

Виявилось, що взагалі можлива геометрія, відмінна від раніше прийнятої, яку до Лобачевського вважали єдино можливою єдино мислимою.

У цьому і є переворот, здійснений Лобачевським у геометрії і філософії.

Геометричні ідеї Лобачевського нині лежать в основі дуже багатьох нових теорій фізики та астрономії. Розміри і завдання нашої книги не дають змоги подати тут виклад цих ідей. За останні роки видано багато книг та брошур на цю тему. Обмежимось короткою характеристикою особистості великого революціонера в науці — М. І. Лобачевського.

Микола Іванович Лобачевський народився 1 грудня (за новим стилем) 1792 року в Нижньому Новгороді (нині місто Горький).

Батько його, Іван Максимович, службовець межової контори, помер у 1802 році. Мати, Парасковія Олександрівна, залишившись з трьома малолітніми синами без коштів, домоглась прийняття синів на казенний кошт до Казанської гімназії.

У 1805 році в Казані було відкрито університет, і в 1807 році М. І. Лобачевського було зараховано студентом.

В університеті М. І. Лобачевський незабаром привернув до себе увагу професорів своїми винятковими успіхами в математиці.

У 1811 році він закінчує університет, і його залишають при університеті для допомоги професорам.

Від 1819 по 1826 рік молодий Казанський університет пережив важкий час. Попечитель Казанського учбового округу М. Л. Магніцький запровадив в університеті порядки

М. І. Лобачевський (1792—1856).

похмурого середньовіччя: переслідував кожну вільну думку, насаджував лицемірство, ханжество, шпигунство.

Замість занять наукою від студентів вимагали удаваного благочестя і шанування начальства. Значну частину професорів було звільнено.

Тільки після вигнання цього заповзятого «попечителя», буквально через кілька днів, Лобачевський виступив з першою доповіддю про нову геометрію. Це було в 1826 році. Але, на жаль, його ідей не зрозуміли ні в університеті, ні в інших вчених колах.

Усе довге життя професора і ректора Казанського університету М. І. Лобачевського було присвячене служінню Батьківщині. Він закликáв своїх студентів любити

науку, любити Батьківщину та її славу. Він суворо засуджував тих людей, хто жив за рахунок чужої праці, задовольнявся рослинним життям, не мав любові до слави своєї Батьківщини.

Піклуючись про школу, Лобачевський писав підручники (алгебри і геометрії), відвідував уроки в школах і давав учителям методичні вказівки.

Для піднесення освіти широких верств населення він читав публічні лекції, а для підвищення рівня сільськогосподарської культури в краї сам організував зразкове господарство в своєму придбаному маєтку.

Промова Лобачевського, яку він виголосив, приступаючи до посади ректора, виявляє його прогресивні педагогічні, філософські та політичні погляди.

Усе життя він різко критикував модні на той час ідеалістичні течії у філософії, стверджуючи, що «в основу математики можуть бути прийняті всі поняття, якими б вони не були, узяті з природи», що «цих понять ми набуваємо за допомогою наших чуттів», що «всі ті поняття, яких не могли набути нашими чуттями..., повинні бути відкинуті».

Студенти університету глибоко поважали свого професора і ректора. Поважали його і професори. Він протягом майже двадцяти років був виборним ректором університету.

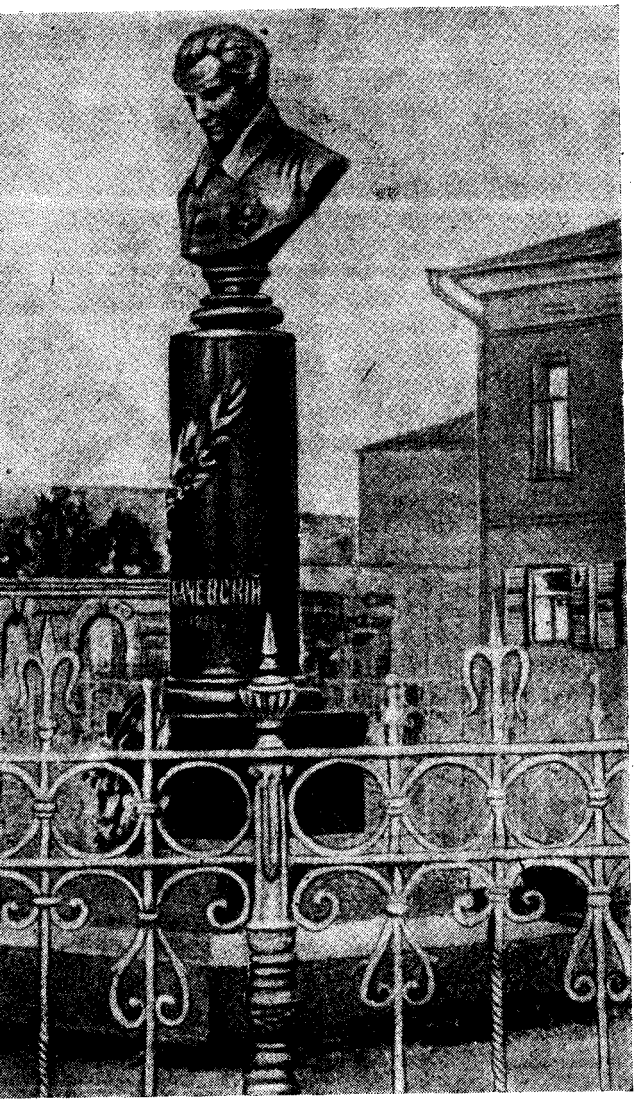
Усе в Казанському університеті досі нагадує цього незабутнього ректора — будинки, клініки, обсерваторії, бібліотека. Проте безплідність усіх спроб Лобачевського домогтись розуміння та визнання його наукових ідей передчасно зістарила геніальну людину. Втративши зір, він в останні дні свого життя ще раз продиктував основи нової геометрії і помер 12 лютого 1856 року, не дочекавшись визнання і підтримки.

Незабаром після його смерті прийшла і слава.

Ідеї Лобачевського найшли витлумачів та послідовників.

Різні вчені встановили можливість конкретного здійснення формул геометрії Лобачевського, які на перший погляд здавались такими дивними.

На початку нашого століття ідеї Лобачевського стали основою майже всіх нових теорій в астрономії та фізиці, всього теоретичного природознавства. Виправдалось його сміливе висловлювання про те, що «немає жодної галузі математики, хоч яка б абстрактна вона була, що коли-небудь



Пам'ятник М. І. Лобачевському в Казані.

не буде застосована до явищ дійсного світу». Ім'я Лобачевського нині є найславнішим у галузі точної науки.

Величним є образ Лобачевського, як людини, громадянина, патріота.

Кілька вчених приходили до ідеї про можливість нової, неевклідової, як тепер кажуть, геометрії. Вони або побоялись опублікувати свої погляди, як Гаусс, або, опублікувавши, не стерпіли глузувань і закінчували відмовленням від боротьби за свої ідеї.

М. І. Лобачевський мав мужність неодноразово виступати, висловлюючи свої революційні погляди в науці. Він обстоював їх до останнього подиху і не впав у відчай, не здобувши розуміння від сучасників.

Ще в 1893 році, до століття з дня народження, Лобачевському в Казані було поставлено пам'ятник. Це був перший пам'ятник математикові в усьому світі.

Під час відкриття його було повторено слова відомого письменника: «Жодна рослина не виходить із землі з більшим трудом, ніж статуя великої людини, але зате жодна рослина не розростається пишніше, не дає більше плодів і не сіє більше добрих насінин навколо себе». Цими словами прекрасно характеризуються і життєві труднощі, і великі плоди діяльності цієї геніальної людини.

Відкриття пам'ятника Лобачевському, поставленого на зібрані добровільні пожертвування, було загальнонародною і світовою оцінкою геніальності російського математика. Як відгукнулися на ці події руські люди того часу, видно з таких телеграм:

«Нерозривний зв'язок наук порсджує в кожному, причетному до них, почуття радості при всякому великому успіху їх, в якій би галузі знання успіх не був. Але думка про створення співвітчизником цілої нової науки збуджує в тому, хто підписався, щире захоплення, і з глибини серця лине крик: хай прославляється ім'я Лобачевського всюди, де є місце для науки, і нехай слава його осяює і нашу батьківщину, і Казанський університет.

Професор механіки Петров»[1].

---

[1] Микола Павлович Петров (1836—1920), професор механіки Інституту інженерів шляхів сполучення, почесний член Академії наук, визначний авторитет в галузі прикладної механіки, товариш міністра шляхів сполучення, генерал-інженер.

Медаль пам'яті М. І. Лобачевського.

Інша, менш докладна, але не менш виразна, телеграма говорить:

«Геометричні знання становлять основу всієї точної науки, а самобутність геометрії Лобачевського — світанок самостійного розвитку науки в Росії. Посів науковий зійде для врожаю народного.

Почесний член Казанського університету
Дмитро Менделеєв».

Ми маємо щастя жити під час збирання цього врожаю у вигляді розквіту радянської математики.

Ім'я Миколи Івановича Лобачевського є найбільшою гордістю російської наукової і філософської думки.

С. В. Ковалевська

Усім читачам нашої книги, певно, багато разів доводилось чути ім'я найвидатнішої жінки-математика, університетського професора Софії Василівни Ковалевської. Хоч її творчість захоплювала галузі науки, які стоять дуже далеко не тільки від шкільного курсу математики, але й від курсів вищих учбових закладів, проте життя і особистість С. В. Ковалевської такі цікаві й повчальні, а її ім'я становить таку гордість російської науки, що необхідно присвятити їй кілька сторінок у нашій книзі.

Софія Василівна Ковалевська народилась 15 січня 1850 року в Москві, в родині генерала В. В. Корвін-Кру-

ковського (в метричному свідоцтві С. В. Ковалевської прізвище передається у формі «Крюковської»), який незабаром вийшов у відставку і оселився в своєму маєтку в Вітебській губернії. Дочки генерала, молодша Софія і старша Ганна, виховувались під наглядом гувернанток, вивчали іноземні мови та музику, щоб стати добре вихованими дворянськими панночками. Проте генерал, сам учень славетного математика М. В. Остроградського, вирішив дати молодшій дочці серйознішу освіту, для чого запросив прекрасного учителя — Йосипа Гнатовича Малевича. Учениця була кмітлива і старанна, але до арифметики спочатку не виявила особливого інтересу. Тільки на п'ятому році навчання тринадцятилітня учениця при знаходженні відношення довжини кола до діаметра (числа π) проявила свої математичні здібності: вона дала свій самостійний вивід потрібного відношення. Коли Малевич зауважив на дещо кружний шлях виведення, застосований Софією, вона заплакала.

Сама Софія Василівна розповідає в своїх спогадах, що великий вплив на пробудження в неї інтересу до математики мали розповіді її дядька про квадратуру круга (нерозв'язна задача про побудування циркулем та лінійкою квадрата, що має площу, яка дорівнює площі даного круга) та інші захоплюючі математичні питання. Ці розповіді впливали на фантазію дівчинки і створили в ній уявлення про математику, як науку, що містить у собі багато цікавих загадок.

Софія Василівна розповідає ще про інший випадок, який зміцнив у ній інтерес до математики. Дитяча кімната через нестачу шпалер була обклеєна аркушами лекцій з вищої математики, що їх слухав замолоду батько Софії. Таємничі формули, загадкові слова та фігури від частого огляду їх врізались у пам'ять дівчинки. Коли, маючи п'ятнадцять років, вона стала брати уроки вищої математики у дуже відомого педагога О. М. Страннолюбського і слухала виклад тих самих питань, про які вона, не розуміючи змісту, читала на «шпалерах», то нові поняття, пояснювані учителем, здавались старими знайомими, і вона засвоювала їх, на здивування учителя, дуже легко.

Але ще до цього чотирнадцятилітня Софія здивувала приятеля батька, професора фізики Н. П. Тиртова, своїми здібностями. Професор привіз Софії свій підручник фізики. Незабаром з'ясувалось, що Софія, яка ще не закінчила

С. В. Ковалевська (1850—1891).

курсу шкільної математики, самостійно розібралась у смислі застосовуваних у підручнику математичних (тригонометричних) формул. Після цього генерал, пишаючись з успіхів своєї дочки, дозволив їй під час перебування взимку в Петербурзі брати уроки математики і фізики, — і п'ятнадцятилітня Софа поспішила соористатись з цього дозволу.

Але цього було для неї замало. Софія Василівна прагнула здобути вищу освіту в повному обсязі.

Двері вищих учбових закладів у Росії для жінок за тих часів було закрито. Залишався тільки шлях, до якого вдавалось тоді чимало дівчат, а саме — шукати можливості здобуття вищої освіти за кордоном.

На поїздку за кордон потрібний був дозвіл батька, а він про це й слухати не хотів. Тоді Софія Василівна, якій минуло вже вісімнадцять років, фіктивно одружилась з Володимиром Онуфрійовичем Ковалевським, славетним згодом природознавцем, і як його «дружина» їде разом з сестрою до Німеччини, де їй щастить, не без подолання труднощів, вступити до Гейдельберзького університету. Професори університету, серед яких були видатні вчені, захоплювались здібностями своєї учениці. Вона стала знаменитістю маленького міста. Зустрічаючи її на вулицях, матері вказували на неї своїм дітям, як на гідну подиву російську дівчину, що вивчає в університеті математику.

Протягом трьох років Софія Василівна, ретельно і посилено вивчаючи улюблені предмети, пройшла курс університету з математики, фізики, хімії та фізіології. Їй хотілось удосконалитися в галузі математики у найвидатнішого на той час в Європі математика Карла Вейєрштрасса в Берліні. Але до Берлінського університету жінок не приймали, через те Вейєрштрасс, захоплений винятковими здібностями Софії Василівни, протягом чотирьох років проводив з нею окремі заняття, повторюючи їй лекції, які читав в університеті. У 1874 році Геттінгенський університет, центр математичної науки в Німеччині, на подання Вейєрштрасса, присудив Софії Василівні ступінь доктора без захисту дисертації за три її роботи. У своєму поданні Вейєрштрасс відзначав, що він не знає серед своїх численних учнів, які з'їжджалися до нього з усіх країн, нікого, кого він «міг би поставити вище від пані Ковалевської».

Одержавши диплом «доктора філософії з вищою похвалою», двадцятичотирилітня Софія Василівна разом з чоловіком повернулась до Росії.

Сестра її Ганна, яка мала письменницький талант, визнаний Ф. М. Достоєвським, ще з Гейдельберга поїхала до Парижа і там одружилась з революціонером Віктором Жакляром. У діяльності Паризької комуни (1871) Ганна Василівна і її чоловік брали активну участь. Під час розгрому Комуни Віктора Жакляра було схоплено. Йому загрожував розстріл. Софія Василівна, пробравшись з

своїм чоловіком в обложений Париж, працювала в госпіталі для поранених комунарів. Щоб врятувати чоловіка сестри, Софія Василівна викликала до Парижа свого батька, якому вдалося, використавши колишні знайомства з впливовими діячами нового буржуазного уряду, влаштувати «втечу» зятя.

Є. Ф. Литвинова (1845—1918).

Софія Василівна з чоловіком оселилась у Петербурзі. Ніякого застосування своїм знанням вона не могла знайти. На кілька років вона відійшла від математики, беручи найдіяльнішу участь у політичному та культурному житті батьківщини. Завдяки П. Л. Чебишеву в 1880 році С. В. Ковалевська повернулась до занять математикою. Її прохання про дозвіл тримати екзамени на здобуття вченого ступеня в Росії було міністерством відхилено. Не дала наслідків також спроба професора Гельсінгфорського університету Міттаг-Леффлера влаштувати Софію Василівну викладачем цього університету.

У 1881 році в Стокгольмі було відкрито новий університет, кафедру математики якого очолив професор Міттаг-Леффлер. Після дуже великих зусиль йому удалося схилити ліберальні кола Стокгольма до рішення запросити С. В. Ковалевську на посаду доцента нового університету. Після трагічної загибелі чоловіка в квітні 1883 року Софія Василівна в листопаді того самого року переїхала до Стокгольма. Демократична газета зустріла приїзд її словами:

«Сьогодні ми повідомляємо про приїзд не якого-небудь банального принца... Принцеса науки, пані Ковалевська, вшанувала наше місто своїм відвіданням і буде першим доцентом жінкою в усій Швеції».

Консервативні кола вчених та населення зустріли Софію Василівну вороже, а письменник Стріндберг доводив, що жіночий професор математики є явище дивовижне, шкідливе і незручне. Проте талант ученого і талант педагога,

В. Й. Шіфф (померла в 1918 р.).

якими була обдарована Софія Василівна, примусили замовкнути всіх противників. Через рік її обрали штатним професором і доручили, крім математики, також і тимчасове читання лекцій з механіки.

На 1888 рік Паризька Академія наук оголосила для здобуття однієї з найбільших своїх премій тему: «Задача про обертання твердого тіла навколо нерухомої точки». Цю задачу було розв'язано до кінця тільки в двох окремих випадках. Розв'язання ці належали визначним математикам свого часу: петербурзькому академікові Л. Ейлеру (1707—1783) і французькому математикові Ж. Лагранжу (1736—1813). Треба було «удосконалити задачу в якому-небудь істотному пункті». На конкурс серед 15 робіт надійшла також праця під девізом: «Говори, що знаєш, роби, що мусиш, хай буде, що буде». Ця праця була настільки вища від усіх інших, що академічна комісія, до складу якої входили найвидатніші математики Франції, присудила авторові збільшену з 3000 до 5000 франків премію. Автором праці була Софія Василівна Ковалевська. Вона ж, прийшовши для одержання премії,— відзначає французький журнал того часу,— була першою жінкою, що переступила поріг Академії.

Зрозумілою є радість Софії Василівни, яка з цього приводу писала:

«Задача, що вислизала від найвизначніших математиків, задача, яку назвали математичною русалкою, була спіймана... ким? Сонею Ковалевською!»

Спроба друзів Софії Василівни «повернути С. В. Ковалевську Росії і російській науці» закінчилась лицемірною відпискою царської Академії наук про те, що «в Росії пані Ковалевська не може дістати становища такого почесного і добре оплачуваного, як те, що його вона посідає в Сток-

гольмі». Тільки наприкінці 1889 року академікам-математикам удалося домогтись обрання Софії Василівни членом-кореспондентом Петербурзької Академії, причому перед тим Академії довелось розв'язати принципіальне питання про «допущення осіб жіночої статі до обрання в члени-кореспонденти». Але це почесне звання не давало ніяких матеріальних коштів, отже, повернення Ковалевської на батьківщину залишалось по-старому неможливим.

На початку 1891 року Софія Василівна, повертаючись після зимових канікул, які вона провела в Італії, застудилась; 10 лютого вона померла в Стокгольмі і похована там.

С. В. Ковалевська надрукувала дев'ять наукових робіт, одержавши за одну з них ще премію Шведської Академії наук. Роботи її відносяться до галузі чистої математики, механіки, фізики та астрономії (про кільце Сатурна). У роботі з механіки вона закінчила те, що почали знамениті Ейлер і Лагранж, у математиці завершила ідеї Коші, в питанні про кільце Сатурна доповнила і виправила теорію Лапласа. Ейлер, Лагранж, Лаплас, Коші — це найвидатніші математики кінця XVIII і початку XIX століття. Щоб доповнити або виправляти роботи таких корифеїв науки, треба бути дуже великим ученим. Таким вченим була С. В. Ковалевська. Нові наукові результати, здобуті нею, викладаються у великих університетських курсах.

Софія Василівна в той самий час була визначним письменником-белетристом. Її автобіографічні «Спогади дитинства», роман «Нігілістка» та уривки незакінчених або загублених повістей дають цікаву картину суспільного і політичного життя Росії другої половини XIX століття. Критика відзначала, що з сторінок її повістей «віє Тургенєвим». С. В. Ковалевська написала також спільно з шведською письменницею Міттаг-Леффлер цікаву драму «Боротьба за щастя», єдиний у світовій літературі

К. О. Наришкіна (1895—1940).

Н. М. Гернет (1876—1943).

твір, написаний за математичним планом.

С. В. Ковалевській, крім її наукових і літературних заслуг, належить виняткове місце в історії боротьби за рівноправність жінок. Вона неодноразово говорить у своїх листах, що її успіх чи неуспіх є не тільки її особистою справою, а пов'язаний з інтересами всіх жінок. Тому вона була надзвичайно вимоглива до себе. В одному з своїх віршів вона пише:

«Людина повинна й зробити багато,
Якщо їй багато талантів дано!»

Софія Василівна усвідомлювала, що їй дано багато талантів, що вона вклала їх у справу всіх жінок і що вона повинна й зробити багато.

Коли Софія Василівна у восьмидесятих роках клопоталась про визнання її вчених прав у Росії, царський міністр відповів, що пані Ковалевська та її дочка не доживуть до того часу, коли в Росії жінка здобуде доступ на професорську кафедру.

Царські міністри були не тільки поганими політиками, але й поганими пророками. Дочка Софії Василівни — лікар Софія Володимирівна Ковалевська, яка померла в 1952 році в Москві,— прожила 35 років при Радянській владі, коли жінці відкрито все поле діяльності.

До Софії Василівни Ковалевської історія математичних наук знає лише кількох жінок-математиків. Це гречанка Іпатія в Александрії, замучена в 415 році нашого літочислення юрбою християн, збуджених агітацією ченців, які побоювались впливу на начальника міста вродливої та вченої язичниці Іпатії; маркіза дю Шатле (1706—1749), перекладачка творів Ньютона французькою мовою; вона вчилась у Вольтера історичним наукам і вчила Вольтера математичним; біографія її відмічає, що для обох це навчання не дало результатів; професор математики Болонського

університету італійка Марія Аньєзі (1718—1799), ім'я якої надано у вищій математиці кривій лінії «локон Аньєзі»; француженка Софія Жермен (1776—1831), ім'я якої зустрічається в теорії чисел і вищому аналізі; француженка Гортензія Лепот (1723—1788), ім'ям якої названо квітку гортензію, що її відома обчислювачка привезла з Індії.

П. Я. Полубаринова-Кочина.

У Радянському Союзі багато жінок — професорів математики, серед них можна відзначити таких видатних професорів, як Віра Йосипівна Шіфф (померла в 1918 р.), Надія Миколаївна Гернет (1876—1943), Катерина Олексіївна Наришкіна (1895—1940); подруга С. В. Ковалевської Єлизавета Федорівна Литвинова (1845—1918) і багато нині працюючих. Та не можна не погодитися з членом-кореспондентом Академії наук СРСР, доктором фізико-математичних наук Пелагією Яковлівною Полубариновою-Кочиною, що «Ковалевська перевищувала своїх попередниць талантом і значністю здобутих результатів. Разом з тим вона випередила загальний рівень жінок, які прагнули до науки за її часу».

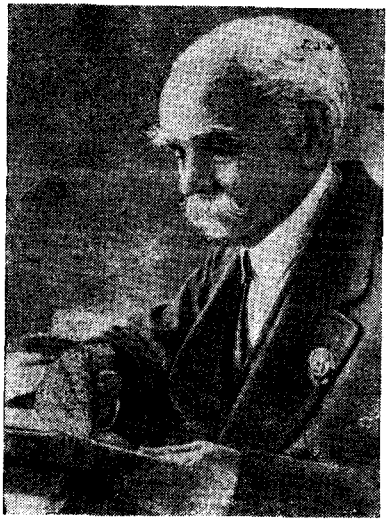
С. В. Ковалевська залишається на всі часи гордістю російської науки.

Видатні російські математики-педагоги

Було б невдячним з нашого боку, коли б ми поруч з блискучими іменами творців математики не згадали імен тих скромних трудівників, які «подають у руки школяреві» досягнення науки.

Це імена авторів підручників, з яких назвемо А. П. Кисельова і М. О. Шапошнікова. Учень повинен знати про них.

Андрій Петрович Кисельов народився 30 листопада 1852 року в Орловській губернії, у бідній родині. Уже



А. П. Кисельов (1852—1940).

під час навчання в Орловській гімназії він утримував себе уроками. Після закінчення гімназії в 1871 році він на гроші від продажу одержаної золотої медалі поїхав учитись до Петербурга. В університеті він слухає лекції академіків П. Л. Чебишева, Є. І. Золотарьова і О. І. Сомова, Д. І. Менделеєва та інших визначних учених. У 1875 році Андрій Петрович закінчує університет і йде працювати педагогом Воронезького реального училища.

Після п'ятнадцяти років роботи царські чиновники визнали його в політичному відношенні підозрілим за його діяльність у Товаристві допомоги бідним учням. А. П. Кисельов іде на роботу в Воронезький кадетський корпус, де працює до виходу в відставку в 1910 році. Від 1884 року виходять з друку один за одним підручники Кисельова з арифметики, алгебри, геометрії, фізики, з основ вищої математики.

Усі підручники математики, укладені Кисельовим, незабаром витіснили старі підручники і витримали багато видань.

Після революції Андрій Петрович повернувся до викладання.

26 грудня 1933 року Президія ЦВК ухвалила Андрія Петровича Кисельова, найстарішого викладача математики і автора підручників, які протягом десятиліть були основними посібниками в російській школі, за його плодотворну багаторічну педагогічну діяльність нагородити орденом Трудового Червоного Прапора. До самої смерті, що сталась 8 листопада 1940 року, Андрій Петрович продовжував працювати над поліпшенням своїх підручників.

Інший визначний педагог-математик, добре відомий учням школи,— Микола Олександрович Шапошніков. Народився він у 1851 році в Москві, де закінчив гімназію із

золотою медаллю і університет у 1874 році, одержавши золоту медаль за наукову роботу. Протягом чотирнадцяти років Микола Олександрович працював у своїй рідній гімназії і одночасно на Вищих жіночих курсах.

М. О. Шапошніков (1851—1920).

У 1880 році М. О. Шапошніков захищає дисертацію на ступінь магістра чистої математики, після чого його запрошують доцентом, пізніше професором, Московського технічного училища, де він працює до 1893 року. Після Великої Жовтневої соціалістичної революції Микола Олександрович був професором і ректором Північно-Кавказького політехнічного інституту, де й працював до останніх днів свого життя. Помер Микола Олександрович Шапошніков 24 лютого 1920 року.

У 1876 році М. О. Шапошніков написав підручник алгебри, який, внаслідок відхилень від звичних способів викладу тодішніх підручників, був розкритикований вченим комітетом Міністерства народної освіти, з складу якого за кілька років до цього вийшов П. Л. Чебишев.

Така сама участь спіткала підручники тригонометрії М. О. Шапошнікова (два різних виклади).

Бойовий характер Миколи Олександровича призвів його до надрукування цілого ряду дуже гострих брошур проти міністерських чиновників.

Незважаючи на те, що книги М. О. Шапошнікова не були допущені в школи, вони витримали ряд видань, бо в усіх цих книгах був свіжий струмінь, який вигідно відрізняв їх від інших.

Спільно з учителем М. К. Вальцевим М. О. Шапошніков уклав задачник з алгебри, який стояв настільки вище від попередніх, що навіть міністерство, яке вороже ставилось до автора, допустило задачник до вжитку в школах. Понад п'ятдесят років задачник цей обслужував російську

школу. Такі самі підручники були М. О. Шапошніковим укладені з арифметики.

У будуванні величних споруд радянської математики мають заслуги скромні трудівники, якими були А. П. Кисельов і М. О. Шапошніков.

ПІСЛЯМОВА

Перед нами пройшли десятки імен учених, які ми зустрічаємо в курсі математики середньої школи.

Порівнюючи внески, вкладені ними в скарбницю світової культури, не можна не бачити особливого характеру російського генія.

Над проблемою про паралельні працювали найрозумніші сили всіх націй. Розв'язання її удалось знайти Миколі Івановичу Лобачевському.

Проблема простих чисел... «Перший, хто після Евкліда пішов вірним шляхом і досягнув успіху, був Пафнутій Львович Чебишев», стверджує кращий зарубіжний знавець цього питання.

«Для розв'язання задачі Гольбаха існуючої математики недосить», визнає найвидатніший англійський математик XX століття.

У відповідь на це Іван Матвійович Виноградов створює ті нові методи математики, які потрібні для розв'язання цього питання.

Таких прикладів величі російської математики можна було б навести ще багато.

За всіх часів математична наука в Росії стояла дуже високо.

Якого розквіту вона досягла за наших, радянських, часів, видно хоча б з того, що огляд наукових робіт з математики, виданих за перші тридцять років радянської влади, являє собою величезну книгу розміром з тисячу сторінок («Математика в СССР за тридцать лет». Москва, 1948).

Ці роботи є великим науковим вкладом, а наші вчені в більшості галузей математики посідають провідне місце в світовій науці. Більшість цих робіт має величезне практичне застосування.

Комуністична партія і Радянський Уряд ставляться з великою увагою до вчених і створюють у нашій країні всі необхідні умови для розвитку наук. Виділяються великі кошти для проведення науково-дослідної роботи і для преміювання видатних робіт з усіх галузей знання.

Хотілося б, щоб юний читач сам запалився бажанням стати активним борцем за дальший розквіт передової радянської математичної науки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

для бажаючих поглибити свої знання з питань, порушених у книзі

Зірочкою (*) відзначено більш доступні роботи.

ЗАГАЛЬНІ ПОСІБНИКИ

СТАРОДАВНІ НАРОДИ

Нейгебауэр О., Лекции по истории античных математических наук, т. 1. Догреческая математика, Москва, 1937.

МАТЕМАТИКА В РОСІЇ

Юшкевич А. П.*, Математика и её преподавание в России XVII—XIX вв. Журнал «Математика в школе», 1947, № 1 і наступні.
За редакцією С. І. Вавілова*, Люди русской науки, 2 томи, 1948.

ПОСІБНИКИ З ОКРЕМИХ ПИТАНЬ

в порядку розміщення їх у нашій книзі

ЄГИПЕТ

Бобынин В. В., Математика древних египтян, Москва, 1882. Поновлена редакція цієї самої роботи: «Журнал Министерства народного просвещения», 1909, жовтень — листопад.
Цинзерлинг Д. П., Геометрия у древних египтян (Московский папирус). «Известия Российской Академии наук», 1925.

ВАВІЛОН І УРАРТУ

Выгодский М. Я.*, Арифметика и алгебра в древнем мире, Москва, 1941.
Петросян Г., Арифметика в Урарту. «Известия Армянской Академии наук», 1945, № 3—4 і 1946, № 4.

ІНДІЯ

Бобынин В. В., Древнеиндусская математика и отношение к ней древней Греции. «Известия Казанского физико-математического общества», 2-а серія, 1917, т. XXII.

ГРЕЦІЯ

Выгодский М. Я.*, Арифметика и алгебра в древнем мире, Москва, 1941.

ЗНАМЕНИТІ ЗАДАЧІ СТАРОДАВНІХ ЧАСІВ

Лебедев В. И.*, Очерки по истории точных наук, вип. IV (Знаменитые задачи древности), Москва, 1917.
Депман И. Я., Недавно найденное сочинение Архимеда. Журнал «Математика в школе», 1940, № 6.

МАТЕМАТИКА У ВІРМЕН

«Вопросы и решения Анании Ширака, армянского математика VII века. Издал и перевёл И. А. Орбели». Петроград, 1918.
Туманян Т. Г., «Начала» Евклида по древнеармянским источникам. «Историко-математические исследования», вип. VI, Москва, 1953.

МАТЕМАТИКА У НАРОДІВ СЕРЕДНЬОЇ АЗІЇ

Омар Хайям и его математические труды. Текст и примечания Юшкевича А. П. и Розенфельда Б. А. «Историко-математические исследования», вип. VI, Москва, 1953.

Переклади віршів Омара Хайяма

Омар Хайям, Робайят, вид. «Academia», Ленінград, 1935.
Омар Хайям, Четверостишия, избранное. Таджицьке державне видавництво, Сталінабад, 1948.
Персидские лирики X—XV вв., Москва, вид. Собашникових, 1916.
Райнов.*, Великие ученые Узбекистана, Ташкент, 1943.
Юшкевич А. П., О математике народов Средней Азии в IX—XV вв. «Историко-математические исследования» вип. IV, Москва, 1951.
Бируни, Сборник Академии наук СССР, Москва, 1950.
Бартольд В. В.*, История культурной жизни Туркестана, вид. Академії наук СРСР, Ленінград, 1927.
Бартольд В. В.*, Улугбек и его время, вид. Академії наук СРСР, 1923.
Леонов*, Улугбек — великий астроном XV века, Москва, 1949.
Кары-Ниязов, Астрономическая школа Улугбека, Москва, 1950.

МАТЕМАТИКА У РОСІЙСЬКОГО НАРОДУ

Гнеденко Б. В.*, Краткие беседы о зарождении и развитии математики, Москва, 1946.
Гнеденко Б. В., Очерки по истории математики в России, Москва, 1946.
Юшкевич А. П., О некоторых статьях «Русской правды». Труды Института истории естествознания Академии наук СССР, т. II.
Кирик Новгородец, Його статті з примітками В. П. Зубова. «Историко-математические исследования», вип. VI, Москва, 1953.

Спасский И. Г., Русские счеты. «Историко-математические исследования», вип. V, Москва, 1952.
Депман И. Я.*, Л. Ф. Магницкий. Журнал «Математика в школе», 1940, № 5.
Депман И. Я.*, Леонтий Магницкий. «Морской сборник», 1940, № 1.

АРИФМЕТИКА

Беллюстин В.*, Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики, Москва, 1940.
Лебедев В. И.*, Очерки по истории точных наук, вип. III. Как постепенно обобщалось понятие о числе, Москва, 1917.
Филиппов А.*, Великий счет, Одеса, 1923.
Берман Н. Г.*, Число и наука о нём.
Депман И. Я.*, Меры и метрическая система, Дитвидав, Ленінград, 1953.

АЛГЕБРА

Лебедев В. И.*, Очерки по истории точных наук, вип. I. Кто изобрел алгебру, Москва, 1916, вип. III. Как постепенно обобщалось понятие о числе, Москва, 1917.
Раик А. Е., Из ранней истории алгебры. «Ученые записки Молотовского Государственного университета», т. VIII, вип. I, 1953.

ГЕОМЕТРІЯ

Лебедев В. И.*, Очерки по истории точных наук, вип. II. Кто автор первых теорем геометрии, Москва, 1916.
«Начала» Евкліда. Переклад з грецької на російську мову і коментарі Д. Д. Мордухай-Болтовського, в 3 томах, Москва, 1948—1950. Винятково цінними є історичні примітки редактора.

М. І. ЛОБАЧЕВСЬКИЙ

Каган В. Ф.*, Великий ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке, Москва, 1943.
Александров П. С.*, Н. И. Лобачевский — великий русский математик. Вид. «Молодая гвардия», Москва, 1946.
Каган В. Ф., Лобачевський, вид. 2, М.—Л., 1948.
Лобачевский Н. И., «Историко-математические исследования», вип. III, Москва, 1950.

П. Л. ЧЕБИШЕВ

Крылов А. Н.*, П. Л. Чебышев, Москва, 1944.
Отрадных Ф. П., П. Л. Чебышев, Москва, 1953.
Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, Москва, 1947.
Прудников В. Е., П. Л. Чебишев — ученый и педагог, Москва, 1950.

С. В. КОВАЛЕВСЬКА

Полубаринова-Кочина П. Я.*, Жизнь и деятельность С. В. Ковалевской, Москва, 1950. «Памяти С. В. Ковалевской». Збірник статей, видання Академії наук СРСР, Москва, 1951.

Бобынин В. В., Древнейшая из женщин-математиков. Сборник статей по вопросам физико-математических наук и их преподавания, т. I, Москва, 1924.

Л. ЕЙЛЕР

Леонард Эйлер. Збірник Академії наук СРСР до 150-річчя з дня смерті, 1935.

Юшкевич А. П., Эйлер и русская математика XVIII века. Труды Института истории естествознания Академии наук СССР, т. III Біографія* Ейлера в серії «Жизнь замечательных людей», вид. Павленкова.

О. М. КРИЛОВ

Писаржевский О.*, Адмирал корабельной науки. Ленвидав, 1945.

Штрайх С. Я., А. Н. Крылов, Москва, 1950.

Лучанинов С.*, Великий кораблестроитель, Москва, 1951.

І. М. ПЕРВУШИН

Раик А. Е., Уральский математик Иван Михеевич Первушин. «Историко-математические исследования», вип. VI, Москва, 1953.

М. О. ОСТРОГРАДСЬКИЙ

Марон И. А., Академик М. В. Остроградский. «Историко-математические исследования», вип. III і IV, Москва, 1950—1951.

Гнеденко Б. В., М. В. Остроградський, Москва, 1952.

Гнеденко Б. В.*, Выдающийся русский ученый М. В. Остроградский, Москва, 1952. (Брошура).

Отрадных Ф. П., М. В. Остроградский, Ленінград, 1953.

ЗМІСТ

Иван Яковлевич Депман
Рассказы о математике
(на украинском языке).
Государственное учебно-педагогическое издательство
«Радянська школа»

Іван Яковлевич Депман
Розповіді про математику

Редактор *В. Є. Бичков*
Технічний редактор *О. Г. Калашникова* Коректор *Л. М. Кардаш*

Здано до набору 5/IV 1956 р. Підписано до друку 26/X 1956 р. Папір 84×
×108¹/₃₂. Друк. арк. 4,125, умовн. арк. 6,765, видавн. арк. 6,8. Тираж 7 000.
Державне учбово-педагогічне видавництво «Радянська школа».
Київ, Ново-Павлівська, 2. Видавн. № 8121.
Ціна без оправи 2 крб. 5 коп. Оправа 1 крб.

Надруковано з матриць Харківської фабрики ім. Фрунзе на книжковій фабриці
Головвидаву Міністерства культури УРСР. Одеса, Купальний зав. 5.
Зам. № 7140