

В С Е У К Р А Ї Н С Ь К А   А К А Д Е М І Я   Н А У К  
І Н С Т И Т У Т   Ф І З И К И

—  
A C A D É M I E   D E S   S C I E N C E S   D ' U K R A I N E  
I N S T I T U T   D E   P H Y S I Q U E

У К Р А Ї Н С Ь К І  
Ф І З И Ч Н І   З А П И С К И

Т О М   І І І ,   В И П .   2

M É M O I R E S   D E   P H Y S I Q U E  
U K R A I N I E N S

V O L .   I I I ,   L I V R .   2

В И Д А В Н И Ц Т В О   В С Е У К Р А Ї Н С Ь К О Ї   А К А Д Е М І Ї   Н А У К  
К И Ї В — 1 9 3 5 — К У І V

ВСЕУКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ НАУК  
ІНСТИТУТ ФІЗИКИ

ACADÉMIE DES SCIENCES D'UKRAINE  
INSTITUT DE PHYSIQUE

УКРАЇНСЬКІ  
ФІЗИЧНІ ЗАПИСКИ

За редакцією акад. О. Г. ГОЛЬДМАНА

MEMOIRES DE PHYSIQUE  
UKRAINIENS

VOL. III, LIVR.

Rédigé par A. GOLDMANN, membre de l'Académie.

КИЇВ



1935

ВИДАВНИЦТВО ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ АКАДЕМІЇ НАУК

Бібліографічний опис цього видання  
вміщено в „Літопису українського друку“,  
„Картковому репертуарі“ та інших покаж-  
чиків Української Книжкової Палати.

Відповідальний редактор акад. О. Гольдман  
Літредактор і коректор Є. Біганівська  
Техкер Є. Ц. Каганов

Друкується з розпорядження Всеукраїнської Академії Наук.  
Неодмінний секретар акад. О. В. Палладін.

З друкарні-літографії Всеукраїнської Академії Наук, Київ.

Інститут фізики Всеукраїнської Академії Наук (Київ)

## Визначення прозорості скла „Гетан“ для ультрафіолетових променів

(Доповідає на засіданні Інституту фізики ВУАН 3. V 1934 р.)

С. Герцрікен і М. Буцик

Досліджено пропусканість ультрафіолетових променів склом „Гетан“ різних гатунків. Це скло, наприклад, № 2, пропускає ще проміння коротше за  $2200 \text{ \AA}$ , а довжину хвилі  $2537 \text{ \AA}$  пропускає більше 90%.

Це скло при товщині 0,2 мм і діаметрі 30–35 мм витримує тиск в одну атмосферу; таким чином, фотоелемент з віконцем „Гетан“ можна використати для дослідження глибокого ультрафіолетового обшару.

Показано можливість застосування мідь-оксидних фотоелементів для фотометрування.

В червні 1933 року на Фізично-хімічному циклі ВУАН один з нас <sup>1)</sup> зробив доповідь про одержання скла „Гетан“, яке добре пропускає ультрафіолетове проміння. В цій роботі подано результати дослідження різних гатунків цього скла.

Користувались ртутною кварцовою дугою, від якої світло падало на щілину кварцового спектрографа. При цьому половина щілини закривалась склом відповідного гатунку і певної товщини, а решта щілини залишалась вільна. Таким способом на спектрограмі одержували дві лінії з різним ступенем почорніння. Слабкіша лінія одержувалась від світла, яке проходило крізь скло, а чорніша — від світла, яке безпосередньо, вільно, проходило крізь щілину. Порівняння абсолютного почорніння з ліній дає можливість обрахувати процент ультрафіолетового проміння певної довжини хвилі, що пропускає кожний гатунок скла. Експозиція давалась в 30, 15 і 10 секунд, але потім обмежилися експозиціями в 30 секунд: абсолютне почорніння  $s$  для лінії  $2537 \text{ \AA}$  бувало 0,5–0,8 і в рідких випадках сягало 1.

Скло брали п'яти гатунків: № 1–4, 4а, одержане стоплюванням карбонатів і оксидів бору, берилію і літію, і при цьому, ми думаємо, утворюються борати літію і берилію у відповідних відношеннях. У склі № 4а, на нашу думку, можливе утворення моноборату літію  $\text{Li}_2\text{B}_2\text{O}_4$  і борату берилію  $\text{Be}_3\text{B}_2\text{O}_8$ .

Із скла видували віконця, з яких потім виломлювали кусочки для затулювання щілини. В дальшому з скла робили кружалки, які шліфувались, а потім полірувались. З такими плоскими кружечками скла було дуже зручно працювати.

<sup>1)</sup> С. Герцрікен і К. Танчаківський, „Журнал Фіз.-хім. циклу ВУАН“, т. I, № 4, 1933 р.

Мідь-оксид фотоелемента, яким користувалися, мав чутливість 150 мА, , поверхня фотоелемента становила 10 см<sup>2</sup> Гальванометр мав чутливість  $1,5 \cdot 10^{-9} \text{A}^\circ$ .

Світло від лампи на 12—12,5 В, 8—8,5 А (приблизно 100—110 свічок), проходило крізь щілину 0,15 мм шириною і приблизно 3 мм висою. Лампу приміщували від щілини на віддаленні приблизно 50 мм. До щілини пристосовувалась спектрограма так, щоб світло проходило через спектральну лінію, і в залежності від її почорніння фотоелемент, що був на віддаленні 40 см від джерела світла, освітлювався з силою 0,5—3,0 люксів.

На гальванометрі одержувався струм певної величини, певна кількість поділок. Для невеликих освітлень фотоелемента одержуємо силу струму (кількість поділок) строго пропорціональну до освітлення, а освітлення фотоелемента зв'язане з почорнінням спектральної лінії на фотопластинці.

Зазначимо через  $I_1$  інтенсивність світла певної довжини хвилі від ртутної дуги, що проходить безпосередньо крізь щілину спектрографа, а через  $I_2$  — інтенсивність для тієї ж довжини хвилі  $\lambda$ , але після проходження крізь скло відповідної товщини.

Тоді

$$\frac{I_2}{I_1} \cdot 100 = P$$

дає пропусальність у процентах. На спектрограмі маємо відповідні почорніння  $s_1$  і  $s_2$ , від яких треба відкинути почорніння  $s_\phi$  і  $s'_\phi$  фону.

$$\begin{aligned} I_1 &= k(s_1 - s_\phi) \\ I_2 &= k(s_2 - s'_\phi) \\ \frac{I_2}{I_1} \cdot 100 &= P = \frac{s_2 - s'_\phi}{s_1 - s_\phi} \cdot 100 \\ s_1 &= \lg \frac{i_0}{i_1} = \lg \frac{n_0}{n_1} \end{aligned}$$

де  $i_0$  та  $i_1$  — сила світла, що падає на фотоелемент від освітлювальної лампи,  $i_0$  — сила світла, що проходить щілину вільну, без спектрограми, а  $i_1$  — сила світла, що проходить відповідну спектральну лінію на спектрограмі,  $n_0$  — кількість поділок на гальванометрі, коли світло проходить щілину вільну,  $n_1$  — кількість поділок при проходженні крізь відповідну спектральну лінію.

Таксамо:

$$s_2 = \lg \frac{n_0}{n_2}$$

тут знову  $n_0$  — кількість поділок, так би мовити, вільного проходження, а  $n_2$  — кількість поділок при проходженні світла крізь спектральну лінію, яка одержалась через половину щілини спектрографа, затулену склом.

$$s_{\phi} = \lg \frac{n_0}{n_{\phi}}; \quad s'_{\phi} = \lg \frac{n_0}{n'_{\phi}}$$

$n_{\phi}$  і  $n'_{\phi}$  — кількість поділок при проходженні світла крізь фон біля відповідної лінії. Дійсну пропускарність одержуємо, відкинувши фон, отже:

$$P = \frac{s_2 - s'_{\phi}}{s_1 - s_{\phi}} \cdot 100 = \frac{\lg \frac{n_0}{n_2} - \lg \frac{n_0}{n'_{\phi}}}{\lg \frac{n_0}{n_1} - \lg \frac{n_0}{n_{\phi}}} \cdot 100 \quad (1)$$

Наводимо приклад: скло № 3, товщина його 0,55 мм,  $\lambda = 2537 \text{ \AA}$ :

$$n_0 = 276; \quad n_1 = 50; \quad n_{\phi} = 117; \quad n_2 = 54; \quad n'_{\phi} = 118;$$

звідси абсолютне почорніння буде:

$$s_1 = \lg \frac{n_0}{n_1} = \lg \frac{276}{50} = 0,742$$

$$s_{\phi} = \lg \frac{n_0}{n_{\phi}} = \lg \frac{276}{117} = 0,373$$

$$s_2 = \lg \frac{n_0}{n_2} = \lg \frac{276}{54} = 0,708$$

$$s'_{\phi} = \lg \frac{n_0}{n'_{\phi}} = \lg \frac{276}{118} = 0,369$$

Звідси формула (1) дає:

$$P = \frac{s_2 - s'_{\phi}}{s_1 - s_{\phi}} \cdot 100 = \frac{0,708 - 0,369}{0,742 - 0,373} \cdot 100 = 92\%$$

Виміри робилися на двох пластинках по кілька раз, розходження між вимірами не перевищувало 5%. Для порівняння на деяких фотопластинках робилися визначення пропускарності не тільки з фотоелементом, а й на мікрофотометрі Гартмана<sup>2)</sup>.

Розходження між окремими спостереженнями на мікрофотометрі були значно більші, ніж при роботі з мідь-оксидом.

Наводимо дані:

<sup>1)</sup> Коли б нас не цікавили окремі почорніння, а лише різниці, що входять в остаточну формулу (1), тоді

$$P = \frac{\lg \frac{n'_{\phi}}{n_2}}{\lg \frac{n_{\phi}}{n_1}}$$

<sup>2)</sup> Користуємося тут з нагоди висловити щирю подяку завідувачеві фізичним відділом Рент. інст. і. Доманському І. В., що дав нам можливість зробити ці виміри на мікрофотометрі Рент. інституту.

Т а б л и ц я I

№ скла	Товщина в <i>mm</i> <i>d</i>	Довжина хвилі $\lambda$ в $\text{Å}^\circ$	Прозорість визначено у процентах	
			фотоелементом $P_{ph}$	мікрофонометром $P_m$
1	0,55	2485	51	
		2537	75	77
2	0,60	2485	94	
		2537	91	95
3	0,55	2485	91	
		2537	92	88
4	0,63	2485	89	
		2537	85	
4	1,00	2485	59	
		2537	80	76
4a	0,74	2485	68	
		2537	88	

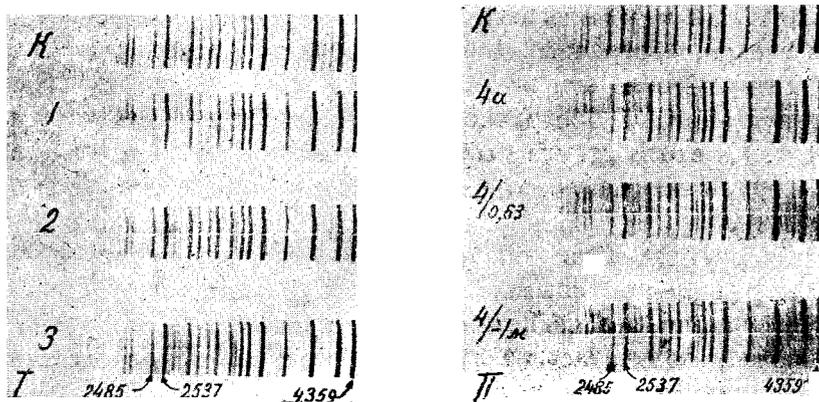
З наведеної таблиці видно, що зразок № 1 найгірше пропускає ультрафіолетове проміння. При товщині в 0,55 мм для  $\lambda = 2537$   $P = 75\%$ , а зразок № 4 майже при подвійній товщині дає  $P = 80\%$ . Решта зразків великої різниці не дають.

Коли перейти до коротших хвиль (див. рис. 1), то видно, що № 1, наприклад, довжину хвилі в 2300  $\text{Å}^\circ$  вже не пропускає, тоді як, скажімо, № 3, пропускає її ще чималою мірою; на негативі видно ще лінії при проходженні крізь скло, які відповідають довжині хвилі, коротшої за 2200  $\text{Å}^\circ$ . На спектрограмі на око непомітно різниці в інтенсивності між лініями від вільної щілини спектрографа та затуленої склом „Гетан“. Всі довжини хвилі, що є в контрольній смугі, є і при проходженні крізь скло № 2 товщиною 0,6 мм.

В наведених спектрограмах маємо на пластинці I контрольну смугу, де вся щілина освітлена і незатулена склом. Контрольна смуга показує, чи рівномірно освітлено щілину. В решті смуг посередині маємо переріз горизонтальною лінією. Верхня половина кожної смуги відповідає світлу, що пройшло крізь незатулену половину щілини спектрографа, а нижня половина — хвилям, що пройшли крізь другу половину щілини спектрографа, затулену склом різних гатунків. Збоку маємо зазначення 1; 2; 3; 4a; 4/0,63; 4/1.—1; 2; 3; 4; 4a—це є гатунки скла, а 4/0,63 і 4/1 означає скло № 4 товщиною в 0,63 і 1 мм. На спектрограмі відмічаємо й довжину хвиль. III спектрограма наведена для порівняння, але щілина зату-

лена звичайним склом товщиною 0,63 мм. Бачимо, що скло не пропускає хвиль менше  $\sim 3000 \text{ \AA}$

Дослід показав, що віконце „Гетан“ товщиною 0,20—0,25 мм при діаметрі 30—35 мм витримує тиск в одну атмосферу. Отже, зробивши



фотоелемент з віконцем із скла „Гетан“, можна досліджувати глибокий ультрафіолетовий обшир з дуже незначними втратами інтенсивності. Щодо використання міді-оксидів для фотометрування, то це досить зручний метод при відносних вимірах, як це у нас і робилося, де порів-

Освітлювальна лампа крізь вузьку щілину освітлює спектральну лінію, почорніння якої нам потрібно знати. Світло після проходження крізь чорну лінію та фон дає  $n_0$  і  $n_1$  поділок на гальванометрі, потім пускаємо світло крізь клин, пересуваючи його, поки не одержимо ту саму кількість поділок  $n_0$  і  $n_1$ , і по клину, наперед проградуйованому, безпосередньо прочитуємо почорніння.

Наприкінці вважаємо за свій приймний обов'язок висловити шире подяку директорові Інституту фізики ВУАН акад. О. Г. Гольдману за постійний інтерес до нашої роботи.

нювалось почорніння крізь вільну і затулену щілину.

У випадках, де нас цікавлять абсолютні величини почорніння, щоб бути цілком незалежними від характеристики фотоелемента, від потреби враховувати зміну його чутливості з часом та ін., доцільно вживати такий спосіб.

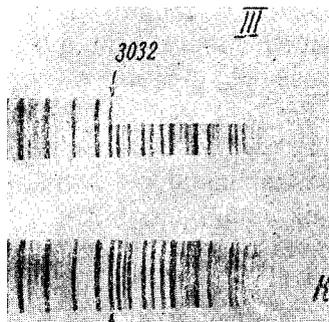


Рис. 1.

Институт физики Всеукраинской Академии Наук (Киев)

## Определение прозрачности стекла „Гетан“ для ультрафиолетовых лучей

С. Герцрикен и М. Буцик

Резюме

Герцрикен и Танчаковский разработали ряд рецептов для получения стекол, прозрачных для мягких рентгеновских лучей, типа стекла Линдемана. Стекла эти названы „Гетан“

Была исследована прозрачность стекла „Гетан“ для ультрафиолетовых лучей. Из этого стекла были приготовлены полированные пластинки разных сортов и разной толщины. Источником света была кварцевая ртутная дуга.

Свет от ртутной дуги попадал на щель кварцевого спектрографа. При этом половина щели закрывалась стеклом „Гетан“

На фотографической пластинке получалась линия, половина которой, более черная, получалась от лучей, прошедших непосредственно щель кварцевого спектрографа, а более светлая часть получалась при прохождении света через стекло.

Определением почернений обеих линий можно найти прозрачность  $P$  стекла „Гетан“. Для фотометрирования использовали купроксный фотоэлемент. Результаты поданы в таблице I ( $d$  — толщина пластинки;  $\lambda$  — длина волны в  $\text{Å}^\circ$ ;  $P_{ph}$  — прозрачность, измеренная фотоэлементом, в процентах пропускаемого света;  $P_m$  — та же величина, определенная микрофотометром Гартмана. № 1—4 обозначают стекла различного состава).

Окошки из стекла „Гетан“ толщиной в 0,20—0,25 мм при диаметре в 30—35 мм выдерживают давление в 1 атмосферу. Таким образом, изготовивши фотоэлемент с окошком из стекла „Гетан“, можно исследовать глубокую ультрафиолетовую область с незначительными потерями интенсивности.

Institute of Physics of the AllUkrainian Academy of Sciences

## The determination of transparence of the „Hetan“ glass for ultraviolet rays

S. Herzrücken and M. Bootsik

Summary

Herzrücken and Tanchakovsky have worked out numerous receipts for the preparation of glasses transparent for soft X-rays of the type of Lindemann's glass. These glasses have been named „Hetan“ glasses.

The transparence of the „Hetan“ glass for ultraviolet rays has been determined. From this glass have been prepared polished plates of different kind and different thickness. As a source of light served a quartz mercurium arc lamp.

The light from the mercurium lamp fell on the slit of a quartz spectrograph. The slit was closed to the half by a Hetan glass.

On a photographic plate was reproduced a line, the half of which was blacker because the rays passed directly through the slit of the quartz spectrograph; the other more brighter part of the line had been obtained owing to the passing of light through the glass.

By determining the blackenings of both lines there can be found the transparency  $P$  of the Hetan glass. For photometric determination a vitriolic photoelement was used. The results are given in the table ( $d$  is the plate thickness;  $\lambda$ —the wave length in  $\text{A}^\circ$ ;  $P_{ph}$ —the transparency measured with the photoelement in percent of the passing light;  $P_m$ —the same value determined with the microphotometer of Hartmann. № 1—4 represent the glasses with different composition).

Peepholes from Hetan glass with a thickness of 0,20—0,25 mm and a diameter of 30—35 mm support a pressure of 1 atm. The preparation of a photoelement with a peephole from Hetan glass gives the possibility to investigate the deep ultraviolet domain with small losses in intensity.

Інститут фізики Всеукраїнської Академії Наук (Київ)

## Спроби визначення подвійного заломлення рентгенових променів

С. Герцрікен і К. Котляревська

Спроба визначення подвійного заломлення рентгенових променів для довжини хвилі Fe  $K_{\alpha}$  в кварці не дала позитивних результатів. Одержані значення:

$$\delta = 1 - \mu = (13 \cdot 730 \pm 0,010) \cdot 10^{-6}$$

$$\delta = 1 - \mu = (13 \cdot 719 \pm 0,010) \cdot 10^{-6}$$

для двох положень дзеркала відрізняються на 0,010, що не перевищує похибок вимірювання.

В 1933 році ми визначили з досить великою точністю показник заломлення рентгенових променів для довжини хвилі Cu  $K_{\alpha}$  для кварцу. З восьми серій знімків ми одержали

$$\delta = 1 - \mu = (8,556 \pm 0,005) \cdot 10^{-6}$$

Така точність виміру показника заломлення дала можливість поставити спробу визначення подвійного заломлення рентгенових променів.

Для цієї мети в Ленінградському оптичному інституті було виготовлено плоскопаралельну кварцову пластинку (відхил від плоскопаралельності менше 1'), вирізану паралельно до оптичної осі. Методика, застосована в цій роботі, та сама, що і в попередній.

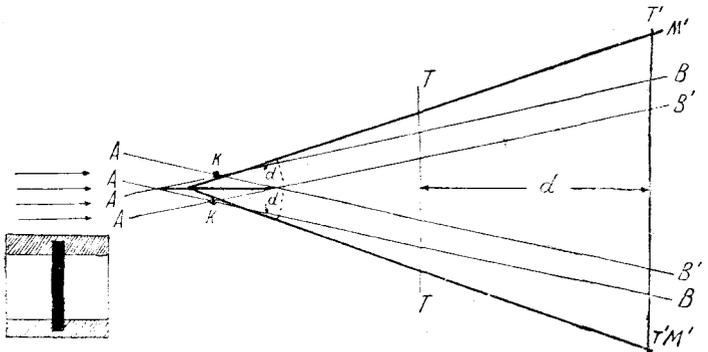


Рис. 1.

На кварцову пластинку, одполіровану з обох боків, накладались сталеві голки так, що між ними і поверхнею дзеркала утворювалася щілина в 0,01 мм (рис. 1). Промені падали з рентгенівської трубки на дзеркало під різними кутами, але повне внутрішнє відбивання давали лише промені, які попадали на дзеркало під кутом, не більшим за граничний. Прямі  $AB$  та  $AB'$  дають напрямок променів, що пройшли без відбивання крізь щілину, а прямі  $AM$  та  $AM'$  дають хід граничних променів повного внутрішнього відбивання.

1) S. Herz rücken u. E. Kotljarewska, Phys. Zs. d. Sowjetunion. 4, 50, 1933.

$TT$  і  $TT'$  — дві фотографічні пластинки, віддалення між якими точно фіксувалося. Одержували спочатку знімок на ближчій, а потім на дальшій пластинці.

Щоб уникнути помилки, яка зв'язана з неповною плоскопаралельністю пластинки, дзеркало обертали на  $180^\circ$  і знову робили два знімки. Чотири знімки разом складали одну серію. Було зроблено вісім серій знімків в положенні, коли промені падали паралельно до оптичної осі дзеркала, і вісім серій для перпендикулярного положення. Це досягалось тим, що дзеркало ставили на одну грань і, знявши вісім серій, обертали дзеркало на  $90^\circ$  в його площині. Граничний кут повного внутрішнього відбивання  $\alpha$  обраховувався з формули

$$\alpha = \frac{a_1 - a_2 + a'_1 - a'_2}{4d}$$

де  $a_1$  — віддалення між зовнішніми краями смуг на дальшій пластинці,  
 $a_2$  — віддалення між зовнішніми краями смуг на ближчій пластинці,  
 $a'_1$   
 $a'_2$  } — те саме при повороті,  
 $d$  — віддаль між фотопластинками.

Тотальрефлектометр, який складався з кварцової пластинки і двох сталених голок, приміщували на столику, який міг пересуватися як в горизонтальному, так і в вертикальному напрямі.

Віддалення між фотографічними пластинками дорівнювало 500,76 мм.

Працювали з трубкою Хадінга з напругою 35 кВ і силою струму 15—18 мА.

Знімки робилися на скляних рентгенових пластинках. Експозиція на дальшій пластинці тривала одну годину 30 хв., на ближчій 5 хв. Віддалення між зовнішніми краями смуг на фотопластинках вимірялось за допомогою компаратора Société Générale з невеликим збільшенням. Хід гвинта 0,5 мм. Барабан мав 100 поділок. Установку пластинки на кожному місці робили 5—6 раз. Виміряли кожену пластинку в п'ятьох місцях. Виміри робилися різними особами. Протягом роботи декілька разів міняли щілини й робили установку наново.

Одержані результати подано в табл. I.

Як видно з поданих таблиць, значення

$$\delta = 1 - \mu = (13,720 \pm 0,010) \cdot 10^{-6}$$

$$\delta = 1 - \mu = (13,730 \pm 0,010) \cdot 10^{-6}$$

для двох положень дзеркала відрізняється на 0,010, що не перевищує похибки вимірювання. Виходячи з одержаних нами результатів, можна зробити такі припущення:

1. Показник заломлення в обох положеннях відрізняється не більше як на 0,08%, що збігається з похибкою наших вимірів.

2. Шліфовка й поліровка дзеркала, тобто штучне оброблення, могло порушити кристалічну структуру на поверхні, перетворивши поверхневий

Т а б л и ц я I

## Перша група знімків

№№ серій	$a_1 - a_2 + a'_1 - a'_2$ в мм	$\alpha$ в радіанах	$\delta \cdot 10^{-6}$
1	10 · 504	0,00524 <sub>4</sub>	13 · 749 <sub>7</sub>
2	10 · 489	0,00523 <sub>6</sub>	13 · 707 <sub>3</sub>
3	10 · 511	0,00524 <sub>7</sub>	13 · 765 <sub>5</sub>
4	10 · 520	0,00525 <sub>2</sub>	13 · 791 <sub>2</sub>
5	10 · 487 <sub>3</sub>	0,00523 <sub>5</sub>	13 · 702 <sub>6</sub>
6	10 · 477 <sub>5</sub>	0,00523	13 · 692 <sub>1</sub>
7	10 · 517	0,00525 <sub>0</sub>	13 · 783 <sub>3</sub>
8	10 · 465	0,00522 <sub>4</sub>	13 · 650
		0,00524	(13 · 730 ± 0,010) · 10 <sup>-6</sup>

## Друга група знімків

(Одержано поворотом на 90° в площині дзеркала)

№№ серій	$a_1 - a_2 + a'_1 - a'_2$ в мм	$\alpha$ в радіанах	$\delta \cdot 10^{-6}$
1	10 · 519	0,00525 <sub>1</sub>	13 · 783 <sub>9</sub>
2	10 · 497	0,00524	13 · 728 <sub>3</sub>
3	10 · 489	0,00523 <sub>6</sub>	13 · 707 <sub>3</sub>
4	10 · 471	0,00522 <sub>7</sub>	13 · 660 <sub>7</sub>
5	10 · 479	0,00523	13 · 681 <sub>6</sub>
6	10 · 492	0,00523 <sub>3</sub>	13 · 718 <sub>3</sub>
7	10 · 498 <sub>3</sub>	0,00524 <sub>7</sub>	13 · 765 <sub>5</sub>
8	10 · 492	0,00523 <sub>3</sub>	13 · 718 <sub>3</sub>
		0,00523 <sub>3</sub>	(13 · 720 ± 0,010) · 10 <sup>-6</sup>

шар на аморфний, а тому, що явище повного внутрішнього відбивання відбувається на невеликій глибині, то подвійного заломлення для штучно обробленого кварцу одержати не можна, і коли б це припущення вважати правильним, то треба було б використати поверхню сколу.

3. Подвійного заломлення для рентгенових променів не існує.

Теоретичних обрахунків щодо можливості одержання подвійного заломлення рентгенових променів нема. Це питання, над яким ми думаємо далі працювати.

Одержане дуже точне експериментальне значення  $\delta$  ми порівняли із значеннями за класичною формулою дисперсії Друде — Лоренца:

$$\delta = 1 - \mu = \frac{e^2 c^2 N}{2\pi m} \sum \frac{Z}{v^2 - v_i^2}$$

де  $\mu$  — показник заломлення,  
 $e$  і  $m$  — заряд і маса електрона,  
 $N$  — число атомів в 1 см<sup>3</sup>,  
 $Z$  — атомний номер,  
 $c$  — швидкість світла,  
 $v$  — частота коливання падаючих променів,  
 $v_i$  — частота відповідної абсорбційної смуги.

Через те, що

$$\frac{Ne\omega}{\rho} = F$$

де  $F$  — число Фарадея, одержуємо:

$$\delta = \frac{F\rho e c^2}{2\pi \omega m} \frac{Z_{\text{Si}} - K_{\text{Si}} + 2(Z_{\text{O}} - K_{\text{O}})}{v^2} + \frac{K_{\text{Si}}}{v^2 - v_{\text{Si}}^2} + \frac{2K_{\text{O}}}{v^2 - v_{\text{O}}^2}$$

або:

$$\delta = \frac{F\rho e}{2\pi \omega m} \left\{ \left[ Z_{\text{Si}} - K_{\text{Si}} + 2(Z_{\text{O}} - K_{\text{O}}) \right] \cdot \lambda^2 + \frac{K_{\text{Si}}}{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{\text{Si}}^2}} + \frac{2K_{\text{O}}}{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{\text{O}}^2}} \right\}$$

де  $\omega$  — молекулярна вага,  
 $\rho$  — густина досліджуваної речовини,  
 $F$  — число Фарадея:

$F = 9648,9$	$Z_{\text{Si}} = 14$	$\lambda = 1,933_{\text{в}}$
$\omega = 60,06$	$Z_{\text{O}} = 8$	$\lambda_{\text{Si}} = 6,741$
$\rho = 2,6485$	$K_{\text{Si}} = 2$	$\lambda_{\text{O}} = 24,41$
	$K_{\text{O}} = 2$	$e/m = 1,761 \cdot 10^7$

У зв'язку з тим, що є розходження між значенням  $\lambda$  — довжини хвилі, яке одержано з вимірів із кристалічної ґратки, та значенням, одержаним з вимірів з оптичної ґратки, ми обрахували  $\delta = 1 - \mu$  для обох довжин хвиль і одержали значення:

$$\begin{aligned} \delta = 1 - \mu &= 13,46 \cdot 10^{-6} && \text{для } \lambda \text{ кр.} = 1,933_{\text{в}} \\ \delta = 1 - \mu &= 13,53 \cdot 10^{-6} && \text{для } \lambda \text{ аб.} = 1,938 \end{aligned}$$

Експериментальне значення було також порівняно із значенням, обрхованим за квантовою формулою дисперсії, яку дали Калман і Марк. Коли не враховувати коефіцієнта затухання, який має вплив лише поблизу абсорбційної смуги, то формула ця матиме такий вигляд:

$$\delta = \frac{e^2 N \lambda^2}{2\pi m c^2} \frac{\rho}{A} \sum Z_k \left\{ 1 + \left( \frac{\lambda}{\lambda_k} \right)^2 \ln \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^2 \right] \right\}$$

де  $\rho$  — густота,

$A$  — атомна вага,

$\lambda$  — довжина падаючого променя в ангстремах,

$\lambda_k$  — довжина хвилі абсорбційної смуги.

Інші букви мають такі самі значення, як і в попередній формулі.

За цією формулою одержано значення:

$$\begin{aligned} \delta = 1 - \mu &= 13,62 \cdot 10^{-6} && \text{для } \lambda \text{ кр.} = 1,933\text{э} \\ \delta = 1 - \mu &= 13,69 \cdot 10^{-6} && \text{для } \lambda \text{ аб.} = 1,938 \end{aligned}$$

Розходження між експериментальними й обрахованими теоретичними значеннями від 0,3 до 2%, при чому, як видно, найближче до експериментального значення лежить значення, одержане з формули Калмана і Марка, приймаючи  $\lambda \text{ аб.} = 1,938$ .

Остаточні висновки щодо того, яка формула вірніша, зараз робити передчасно через відсутність в літературі прецизійних вимірів показника заломлення з довгими хвилями.

12. V 1934

Институт физики Всеукраинской Академии Наук (Киев)

### Попытки определения двойного преломления рентгеновых лучей

С. Герцрикен и К. Котляревская

Резюме

Методом полного внутреннего отражения по способу, опубликованному в 1931 году был определен показатель преломления излучения  $Fe K_{\alpha}$  для кварца.

Плоско-параллельная пластинка кварца была вырезана параллельно оптической оси и хорошо отполирована.

Показатель преломления был определен для двух положений пластинки кварца, полученных поворотом пластинки в собственной плоскости на 90

Результаты следующие:

1-ое положение:

$$\delta = 1 - \mu = (13,720 \pm 0,010) \cdot 10^{-6}$$

2-ое положение:

$$\delta = 1 - \mu = (13,730 \pm 0,010) \cdot 10^{-6}$$

где  $\mu$  — показатель преломления, т. е. показатели преломления для двух разных положений зеркала равны в пределах ошибок наблюдений.

Можно заключить, что отклонение в показателях если и есть, то не превышает 0,08%.

Возможно, что полировка кристалла нарушила эффект двойного преломления.

При вычислении показателя преломления по формуле Друде — Лоренца:

$$\delta = 1 - \mu = \frac{e^2 c^2 N}{2\pi m} \sum \frac{Z}{v^2 - v_i^2}$$

и также по формуле Калмана и Марка:

$$\delta = \frac{e^2 N \lambda^2}{2\pi m c^2} \frac{\rho}{A} \sum Z_k \left\{ 1 + \left( \frac{\lambda}{\lambda_k} \right)^2 \ln \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^2 \right] \right\}$$

оказалось, что экспериментальное значение  $\delta$  ближе к значению, вычисленному по формуле Калмана и Марка, если принять  $\lambda$  абс. = 1,938 Å.

Institute of Physics of the AllUkrainian Academy of Sciences

### An attempt of Determination of the Double Refraction of X-rays

S. Herzrücken and K. Kotlarevska

#### Summary

With the help of the method of total internal reflection published in 1931 was determined the index of refraction of the Fe  $K_\alpha$  radiation for quartz.

A plane-parallel quartz plate was cut out parallel to the optical axis and was well polished.

The index of refraction was determined for two positions of the quartz plate obtained by turning the plate in its own plane 90°.

The results were the following:

1-st position

$$\delta = 1 - \mu = (13,720 \pm 0,010) \cdot 10^{-6}$$

2-nd position

$$\delta = 1 - \mu = (13,730 \pm 0,010) \cdot 10^{-6}$$

where  $\mu$  is the index of refraction: i. e. the indexes of refraction for two different positions of the mirror are the same in the limits of observation errors.

It is possible to infer that the fluctuations in the indexes did not exceed 0,08%, if observed at all.

Perhaps, the polishing of the crystal disturbed the effect of double refraction.

The computation of the index of refraction by the formula of Drude—Lorentz

$$\delta = 1 - \mu = \frac{e^2 c^2 N}{2\pi m} \sum \frac{Z}{v^2 - v_i^2}$$

and also by the formula of Kalman and Mark

$$\delta = \frac{e^2 N \lambda^2}{2\pi m c^2} \frac{\rho}{A} \sum Z_k \left\{ 1 + \left( \frac{\lambda}{\lambda_k} \right)^2 \ln \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^2 \right] \right\}$$

showed that the experimental value was near to the value calculated by the formula of Kalman and Mark if  $\lambda$  abs. = 1,938 Å

Інститут фізики Всеукраїнської Академії Наук (Київ)

**Про енергію утворення нейтрона й протона**

(Доповідано на засіданні Інституту фізики ВУАН 3. V 1934 р.)

**Л. Я. Штрум**

Д. Д. Іваненко<sup>1)</sup>, виходячи з припущення про елементарну природу як протона, так і нейтрона, приходять до висновку, що сума енергій зв'язку нейтрона і протона дорівнює  $2mc^2$  (де  $m$  — маса електрона), і що різниця цих величин не може бути більшою за  $mc^2$ , а тому дефект маси нейтрона (або протона) не може перевищувати цього значення.

Експериментальні дані<sup>2)</sup> примушують припустити, що перетворення протона в нейтрон, або навпаки може відбуватися тільки як результат взаємодії ядерних часточок з фотонами, при чому відбувається „розщеплення“ фотона на електрон і позитрон<sup>3)</sup>.

Отже, енергетичний баланс процесів перетворення протона в нейтрон або нейтрона в протон виражається рівняннями:

$$n + 2mc^2 = n + e^+ + e^- = p + E_p + e^- \quad (1)$$

$$p + 2mc^2 = p + e^+ + e^- = n + E_n + e^+, \quad (2)$$

де  $n$  — енергія нейтрона,  $p$  — енергія протона,  $e^+$  — позитрона,  $e^-$  — електрона,  $m$  — маса електрона (або позитрона),  $E_n$  — енергія утворення нейтрона,  $E_p$  — енергія утворення протона.

Додавши рівняння (1) і (2), одержимо безпосередньо рівняння Іваненка:

$$E_n + E_p = 2mc^2 \quad (3)$$

Віднявши рівняння (1) і (2), одержимо:

$$E_n - E_p = 2(p - n) \quad (4)$$

Рівняння (3) і (4) дають:

$$E_n = mc^2 + (p - n) \quad (5)$$

$$E_p = mc^2 - (p - n) \quad (6)$$

Отже, енергію утворення нейтрона або протона можна визначити, якщо точно відомі маси протона й нейтрона.

За Чедвіком<sup>3)</sup>, маса нейтрона дорівнює 1,0067 (в шкалі  $O^{16} = 16$ ) що дає:

$$p - n = mc^2 \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Д. Іваненко, Доклады Академии Наук СССР, 1933, с. 1.

<sup>2)</sup> F. Joliot, C. R., 197, 1623, 1933; J. Thibaud, C. R., 197, 1629, 1933.

<sup>3)</sup> Пор. M. N. Saha a. D. S. Kothari, Nature, 132, 747, 1933; 133, 99, 1934.

<sup>3)</sup> J. Chadwick, Proc. Roy. Soc., A, 142, 1, 1933.

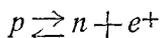
Якщо це визначення маси нейтрона правильне<sup>1)</sup>, то з рівнянь (5), (6) і (7) маємо:

$$E_n = 2mc^2; \quad E_p = 0 \quad (8)$$

З того, що

$$E_p = 0$$

не слід робити висновку про нестійкість протона або про можливість спонтанної реакції



Якщо прийняти раніше згадане припущення, що процеси взаємного перетворення протона й нейтрона можуть відбуватися тільки за участю фотонів, то рівняння (1) і (2) треба переписати так:

$$n + 2mc^2 = n + e^+ + e^- = p + e^- \quad (1')$$

$$p + 2mc^2 = p + e^+ + e^- = n + 2mc^2 + e^+ \quad (2')$$

Фізичний зміст цих рівнянь такий. Припустимо, що часточка взаємодіє з фотоном, енергія якого дорівнює  $h\nu$ . Зазначимо через  $\nu_0$  частоту такого фотона, що енергія його

$$h\nu_0 = 2mc^2, \quad (9)$$

тобто  $1,02 \cdot 10^6 eV$ .

Тоді енергетичний баланс перетворення нейтрона в протон і електрон напишеться так:

$$n + h\nu = n + e^+ + e^- + E' = p + e^- + E', \quad (10)$$

де

$$E' = h\nu - h\nu_0 = h\nu - 2mc^2 \quad (11)$$

Енергія  $E'$  може виявитися або в формі кінетичної енергії протона й нейтрона, або в вигляді кванта, енергія якого

$$h\nu' = h\nu - h\nu_0 = h\nu - 1,02 \cdot 10^6 eV \quad (12)$$

(якщо кінетична енергія протона й електрона дорівнює нулеві)

Баланс перетворення протона в нейтрон і позитрон:

$$p + h\nu = p + e^+ + e^- + E' = n + e^+ + E' + h\nu_0, \quad (13)$$

де  $E'$  також визначається рівнянням (11).

Звідси висновок:

Якщо процес розсіяння  $\gamma$ -променів супроводиться перетворенням нейтрона в протон і електрон, то найбільша жорсткість розсіяних променів визначається рівняннями (11) і (12).

Якщо процес розсіяння  $\gamma$ -променів супроводиться перетворенням протона в нейтрон і позитрон, то виникає розсіяння компонента з енергією  $1,02 \cdot 10^6 eV^2$ .

<sup>1)</sup> Див. також I. R. Dunning, Phys. Rev., 45, 584, 1934; E. Feenberg, Phys. Rev., 45, 649, 1934; R. Ladenburg, Phys. Rev., 45, 224, 495, 1934.

<sup>2)</sup> Пор. L. H. Ray, G. T. P. Farrant, Proc. Roy. Soc., A, 143, 681, 766, 1934.

Институт физики Всеукраинской Академии Наук (Киев)

### Об энергии образования нейтрона и протона

Л. Я. Штрум

Резюме

Энергетический баланс процессов превращения протона в нейтрон или нейтрона в протон [уравнения (1), (2), (1'), (2')] приводит к заключению: при превращении нейтрона в протон и электрон в результате взаимодействия фотона с ядром наибольшая жесткость рассеянных лучей определяется уравнениями (11) и (12). При превращении протона в нейтрон и позитрон возникает рассеяние компонента с энергией в  $1,02 \cdot 10^6 eV$ .

Institute of Physics of the Allukrainian Academy of Sciences

### On the energy of formation of neutrons and protons

L. J. Strum

Summary

The energetical balance of the processes of transmutation of protons into neutrons or neutrons into protons [equations (1), (2), (1'), (2')] leads to the following conclusions: if the scattering of X-rays is accompanied by the transmutation of a neutron into a proton and an electron, the maximum hardness of the scattered rays is determined by the equation (11) and (12). If the scattering of the gamma-rays is attended by the transmutation of a proton into a neutron and a positron, then there appears a dispersed component of  $1,02 \cdot 10^6 eV$ .

Інститут фізики Всеукраїнської Академії Наук (Київ)

## Про інтегральний ефект Джоуля-Томсона

Л. Я. Штрум

Ефект Джоуля-Томсона, тобто зміна температури під час ізотропічного розширення газу, кількісно обчислюється за термодинамічною формулою:

$$dt = A \frac{T \frac{\partial v}{\partial t} - v}{c_p} dp, \quad (1)$$

де  $dt$  — зміна температури, що відповідає зміні тиску  $dp$ ,  $T$  — абсолютна температура,  $v$  — об'єм,  $c_p$  — теплоємність при сталому тиску,  $A$  — термічний еквівалент роботи.

Застосувавши рівняння стану реального газу в формі рівняння Ван-дер-Ваальса, одержують формулу:

$$dt = \frac{\frac{2a}{RT} - b}{c_p} dp, \quad (2)$$

де  $R$  — газова константа,  $a$  і  $b$  — константи рівняння Ван-дер-Ваальса.

Розраховуючи технічне застосування ефекту Джоуля-Томсона в машинах для охолодження газів (процес Лінде), обчислюють зміну температури за емпіричною формулою Джоуля-Томсона, або обчислюють коефіцієнт при  $dp$  формули (2) для початкової температури, а потім екстраполюють його для скінченних змін тиску й температури. Але таке обчислення зміни температури наближено правильне лише для відносно малих змін тиску.

Для точного ж обчислення повного (інтегрального) ефекту Джоуля-Томсона потрібно проінтегрувати диференціальне рівняння (2)

Перелишемо рівняння (2) в такій формі:

$$dp = \frac{c_p}{Ab} \cdot \frac{T}{\frac{2a}{Rb} - T} dT \quad (3)$$

Дріб  $\frac{2a}{Rb}$  виражає температуру інверсії. Отже, зазначивши

$$T_i = \frac{2a}{Rb}, \quad (4)$$

маємо:

$$dp = \frac{c_p}{Ab} \cdot \frac{T}{T_i - T} dT \quad (5)$$

Припускаючи, що  $c_p$  — стала, одержимо в першому наближенні інтеграл рівняння (5):

$$p_0 - p = -\frac{c_p}{Ab} (T_0 - T) + \frac{2ac_p}{ARb^2} \ln \frac{T_i - T}{T_i - T_0}, \quad (6)$$

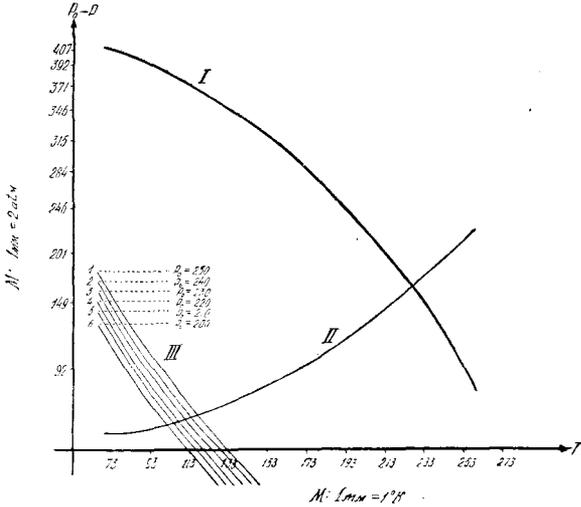


Рис. 1.

де  $p_0$  і  $T_0$  — початкові значення тиску й температури.

Маючи графічне відображення рівнянь (6) (крива I, рис. 1), можна, за даною зміною тиску  $p_0 - p$ , визначити кінцеву температуру газу  $T$ . Крива II накреслена за даними для азоту, при чому  $T_0$  відповідає нулеві за шкалою Цельсія.

Точніше наближення одержимо, розглядаючи  $c_p$  як лінійну функцію температури:

$$c_p = c + \alpha T \quad (7)$$

Тоді замість диференціального рівняння (5) матимемо:

$$dp = \frac{c}{Ab} \cdot \frac{T}{T_i - T} dT + \frac{\alpha}{Ab} \frac{T^2}{T_i - T} dT \quad (8)$$

Інтеграл рівняння (8):

$$p_0 - p = \frac{c_{pi}}{Ab} (T_0 - T) + \frac{T_i c_{pi}}{Ab} \ln \frac{T_i - T}{T_i - T_0} - \frac{\alpha}{2Ab} (T_0^2 - T^2), \quad (9)$$

де

$$c_{pi} = c + \alpha T_i, \quad (10)$$

тобто теплоємність, яку газ мав би при температурі інверсії, якби вигляд функції (7) залишився незмінним для цієї температури.

Обчислення третього члена правої частини (9) показує, що значення його не перевищує 1,5% всієї правої частини. Отже, для практичних потреб достатнє перше наближення рівняння (6), що за ним і збудовано графік.

Дальше наближення можна одержати, підставивши в рівняння (3):

$$c_p = c + \alpha T + \beta T^2 \quad (11)$$

Відповідний інтеграл дорівнює:

$$p_0 - p = -\frac{c_{pi}}{Ab} (T_0 - T) + \frac{T_i c_{pi}}{Ab} \ln \frac{T_i - T}{T_i - T_0} - \frac{\alpha + \beta T_i}{2Ab} (T_0^2 - T^2) - \frac{\beta}{3Ab} (T_0^3 - T^3) \quad (12)$$

З диференціального рівняння (9) і його інтегралів (6), (9) і (12) безпосередньо виходить, що для початкової температури, меншої за температуру інверсії, зниження температури буде тим значніше, чим більше буде падіння тиску. Отже, найвигідніше було б мати якнайнижчий кінцевий тиск.

Але в техніці скраплювання газів справа стоїть інакше. Під час одного розширення конденсується лише певна частина газу (коло  $\frac{1}{10}$ ), решта ж знову переводиться в компресор, де на стискання її витрачається певна робота. Отже, кількість фрігорій, одержаних в одному циклі, дорівнює:

$$Z = c_p x - kART \ln \frac{p_0}{p}, \quad (13)$$

де

$$x = T_0 - T \quad (14)$$

Другий член правої частини рівняння (13) виражає роботу стискання решти газу, відносна кількість якої дорівнює  $k$  (коло 0,9).

Знайдемо те значення кінцевого тиску  $p$ , для якого ефект охолодження  $Z$  має найбільше значення, тобто:

$$\frac{dZ}{dp} = 0$$

З рівняння (13) маємо:

$$c_p \frac{dx}{dp} + k \frac{ART}{p} = 0 \quad (15)$$

Зазначивши

$$T - T_0 = x_0,$$

перепишемо рівняння (6) в такій формі:

$$p_0 - p = -\frac{c_p x}{Ab} + \frac{T_i c_p}{Ab} \ln \frac{x_0 + x}{x_0} \quad (16)$$

З рівнянь (15) і (16) маємо:

$$b(x_0 + x) \left( p_0 + \frac{c_p x}{Ab} - \frac{T_i c_p}{Ab} \ln \frac{x_0 + x}{x_0} \right) - kRT(T_0 - x) = 0$$

або, в попередніх зазначеннях температури:

$$p_0 + c_p \frac{T_0 - T}{Ab} - \frac{T_i c_p}{Ab} \ln \frac{T_i - T}{T_i - T_0} = \frac{kR}{b} \cdot \frac{T^2}{T_i - T} \quad (17)$$

Значення  $T$ , яке є розв'язком рівняння (17), визначає, за рівнянням (6), найвигіднішу величину кінцевого тиску  $p$ .

Рівняння (17) розв'язуємо графічно в такий спосіб. Будуємо криву II, яка виражає функцію, що стоїть у правій частині (17) (графік накреслено для  $k=0,9$ ) і систему кривих III, що виражають ліву частину (17) при різних значеннях початкового тиску  $p_0$ . Ординати точок перетину кривої II з кривими III безпосередньо визначають найвигіднішу величину кінцевого тиску  $p$  для різних значень початкового тиску  $p_0$ .

Висловлюю щирю подяку аспірантові Інституту фізики ВУАН т. Л. М. Череднику за допомогу в обчисленні й кресленні графіків.

7. VI 1934

Институт физики Всеукраинской Академии Наук (Киев)

**Об интегральном эффекте Джоуля-Томсона**

**Л. Я. Штрум**

Р е з ю м е

Интегрирование дифференциального уравнения эффекта Джоуля-Томсона дает зависимость между изменением давления и изменением температуры. Различные приближения (6), (9) и (12) получаются для различных допущений  $c_p = \text{const}$ , (7) и (11). График дан на основании уравнения (6). Дан метод определения конечного давления, при котором эффект охлаждения наибольший [уравнение (17) и кривая II].

Institut de Physique de l'Académie des Sciences d'Ukraine

**Sur l'effet intégral de Joule-Thomson**

**L. J. Strum**

R é s u m é

L'intégration de l'équation différentielle de l'effet Joule-Thomson donne la dépendance fonctionnelle entre les variations finies de la pression et de la température. Les diverses approximations (6), (9) et (12) sont obtenues avec diverses suppositions:  $c_p = \text{const}$ , (7) et (11). Le graphique est tracé pour l'équation (6). L'auteur indique une méthode pour obtenir la grandeur de la pression finale, dont l'effet de refroidissement [est [maximum [équation (17) et courbe II].

З лабораторії Фіз.-техн. відділу Всеукраїнського держ. рентгено-радіологічного та онкологічного інституту ім. Чубаря (Харків)

## Про інтенсивність ультразвуків, одержаних за допомогою магнітних вібраторів

(Доповідано на засіданні Фізично-технічного відділу)

А. І. Даниленко

Ультразвукові коливання збуджувались магнітними вібраторами. Щоб одержати більшу інтенсивність, застосовано і випробувано трубчасті вібратори. Знято криві інтенсивності ультразвуків, одержаних від суцільного та трубчастих вібраторів залежно від амплітудного значення напруженості електромагнітного поля високої частоти.

У зв'язку з вивченням біологічних діянь ультразвукових коливань, частот, які лежать близько порогу сприймання нормальним ухом людини (20 000 колив. на сек.), що провадиться в лабораторіях Інституту, виникло питання підвищити інтенсивність ультразвуків цих частот.

Щоб розв'язати це питання, випробували три магнітних вібратори при різних значеннях амплітуд напруженості поля високої частоти, утворюваного котушкою самоіндукції коливального контура.

*Схема установки.* Щоб дістати ультразвукові коливання, були використані магнітострикційні властивості нікелю. Цей метод збудження коли-

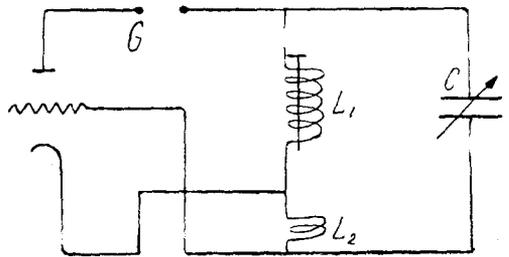


Рис. 1.

вань, застосований уже в роботах інших дослідників, полягає в тому, що в котушку самоіндукції  $L_1$  (рис. 1) генератора  $G$ , зібраного за звичайною точковою схемою, вміщується підмагнічуваний полем постійного магніту нікельовий стрижень, один кінець якого має дисковий променювач коливань, що до того дає їм гостру спрямованість. Енергія коливань стає особливо помітною тоді, коли частота коливань генератора збігається з власною частотою магнітного вібратора. Коли настає резонанс, звукове тиснення навіть відбитих коливань таке велике, що викликає рух піщинок, насипаних на папері на віддаленні до двох метрів од вібратора. Такий індикатор дозволяв легко виявити настання резонансу.

Частота коливань у цій роботі визначалась за допомогою Кундтової труби, встановленої спочатку горизонтально. Енергія коливань була

достатня, щоб у пучностях скинути не лише легку коркову тирсу, а й досить великі зерна піску. У процесі роботи, коли вібратор був у вертикальному положенні, частота контролювалась за допомогою тої самої труби, встановленої вертикально, — при цьому спостерігались підкидання легкої металевої пластинки, переміщуваної вздовж осі труби так, що зберігалась паралельність поверхень пластинки й дискового променювача.

Довжини хвиль, одержані від вібраторів, застосованих у цій роботі, хитались у межах 1,64—1,70 см, що відповідає частотам 20 000—20 700 коливань на секунду; відносна похибка вимірів при цьому була не більша за 1,4%.

*Вимір інтенсивності.* Хоч власні коливання диску до деякої міри міняють плоский фронт хвилі, але, в умовах досліду, автор вираховував інтенсивність коливань за формулою Rayleigh-а для плоского фронту хвилі:

$$I = \frac{2Pc}{\gamma + 1},$$

де  $P$  — звукове тиснення у дин/см<sup>2</sup>;  $\gamma = 1,4$ ;  $c$  — швидкість розповсюдження звукових коливань у повітрі — в умовах досліду дорівнює 340 м/сек.

Величина звукового тиснення визначалась за допомогою терезів (Torsion Vage) з чутливістю 1 мг на поділку.

На терезах зрівноважувалась кругла металева пластинка з діаметром 2 см, поверхня якої була паралельна до поверхні дискового променювача. Обидва диски, встановлені один над одним, містилися в скляній трубці 2,15 см діаметром. Різниця ваги, яку відраховували на шкалі терезів, давала значення величини звукового тиснення.

Дуже нескладний спосіб визначати наближено порядок величини енергії коливань застосував у своїй роботі з стрижнями Є. А. Копилович; він спостерігав висоту  $h$ , на яку підкидалась піщинка дисковим променювачем. Величина  $h$  зв'язана з початковою швидкістю піщинки, а також максимальною швидкістю вібратора рівністю:

$$v = \sqrt{2gh} = \omega A$$

Інтенсивність тоді обраховувалась за формулою

$$I = 2\pi^2 v^2 \delta c A^2,$$

де  $\nu$  — частота,  $\delta$  — густина середовища,  $c$  — швидкість звука 340 м/сек,  $A$  — амплітуда коливань.

У цій роботі для порівняння наведено дані, одержані обома методами, при чому для точнішого визначення  $h$  автор застосував фотографування; при цьому на фотопластинці фіксувались шкала й положення піщинки.

*Об'єкти дослідження.* Енергія коливань магнітних вібраторів залежить від пружних властивостей матеріалу, що своєю чергою міняються

в залежності від оброблення, — тому об'єкти дослідження були виготовлені з нікелю м'якого оброблення. З другого боку, на пружні властивості вібратора впливає температура. Підвищення температури стрижня при коливанні його в повітрі помітно впливало на стійкість коливань та віддавання енергії зовнішньому середовищу, — тому довелося охолоджувати його трансформаторною олією, куди його занурювали разом з ко-тушкою.

Об'єкти дослідження такі:

№ 1. Нікельовий суцільний стрижень з діаметром поперечного перерізу 0,3 см і довжиною 11,2 см; маса його становила 7 г.

№ 2. Нікельова трубка, виготовлена з аркуша нікелю товщиною 0,5 мм, такої самої довжини, з зовнішнім діаметром 0,5 см (маса її 5,2 г).

№ 3. Нікельова трубка тої ж довжини, з того самого аркуша нікелю і зовнішнім діаметром 1 см (маса 10,5 г).

Трубчасті вібратори були застосовані для того, щоб по можливості зменшити витрати на вихрові струми і тим самим підвищити енергію коливань вібратора. З цією метою нікельові трубки згинались, а не зварювались, так що вздовж трубки залишався зазор близько 0,3 мм. З другого боку, така форма вібратора дозволяла охолоджувати його як з зовнішнього, так і з внутрішнього боку, а це повинно сприяти більшій стійкості коливань. Дійсно, такий вібратор міг бути під навантаженням до півтори години.

Енергія коливань магнітних вібраторів залежить від напруженості постійного підмагнічуючого поля та амплітудного значення напруженості накладеного змінного поля котушки  $L_1$ . У цій роботі інтенсивність ультразвуків, збуджених зазначеними вібраторами, була виміряна при різних значеннях амплітуд змінного електромагнітного поля при незмінній силі постійного підмагнічуючого.

Тому, що автор не мав точних даних магнітних властивостей досліджуваних об'єктів у полях різної сили, то амплітуди напруженості накладеного змінного поля схарактеризовані числом амперзвоїв  $i\omega$  на 1 см.

## Наслідки вимірів

Т а б л и ц я I

Інтенсивність ультразвуків, збуджених вібратором № 1

$i_m\omega$	25	44	61	83	103	123	139	157	196
$P \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}$	4,2	6,6	8,5	14,3	21,5	23,6	24,5	25,6	23,5
$I \frac{\text{ерг}}{\text{см}^2 \text{сек}}$	$1,2 \cdot 10^5$	$1,9 \cdot 10^5$	$2,6 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^5$	$6,1 \cdot 10^5$	$6,5 \cdot 10^5$	$6,9 \cdot 10^5$	$7,1 \cdot 10^5$	$6,4 \cdot 10^5$

Т а б л и ц я II  
Інтенсивності ультразвуків, збуджених вібратором № 2

Ампер- звої $i_m \omega$	$P \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}$	$I \frac{\text{ерг}}{\text{см}^2 \text{сек}}$	Висота стрибка піщинки $h \text{ см}$	$I \frac{\text{ерг}}{\text{см}^2 \text{сек}}$
25	7,0	$2,0 \cdot 10^5$	5,5	$2,3 \cdot 10^5$
44	10,3	$2,9 \cdot 10^5$	10,5	$4,3 \cdot 10^5$
61	16,6	$4,7 \cdot 10^5$	14,0	$5,7 \cdot 10^5$
83	27,5	$7,8 \cdot 10^5$	16,0	$6,7 \cdot 10^5$
103	30,3	$8,6 \cdot 10^5$	19,0	$7,9 \cdot 10^5$
123	35,3	$10,0 \cdot 10^5$	22,0	$9,0 \cdot 10^5$
139	40,6	$11,5 \cdot 10^5$	24,0	$9,8 \cdot 10^5$
157	47,0	$13,4 \cdot 10^5$	30,0	$12,3 \cdot 10^5$
224	40,5	$11,5 \cdot 10^5$	26,0	$10,7 \cdot 10^5$

В табл. II наведено дані для інтенсивності ультразвуків, обчислені за формулою для звукового тиснення і зіставлені з даними обчислень інтенсивності з спостережень висоти  $h$ . Останні подано на рис. 2 пунктиром.

Т а б л и ц я III  
Інтенсивності ультразвуків, збуджених вібратором № 3

Амперзвої $i_m \omega$	25	44	61	83	103	123	139	157
$P \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}$	12,5	26,6	43,0	55,0	66,0	73,0	67,0	64,0
$I \frac{\text{ерг}}{\text{см}^2 \text{сек}}$	$3,6 \cdot 10^5$	$7,5 \cdot 10^5$	$12,2 \cdot 10^5$	$15,8 \cdot 10^5$	$19,0 \cdot 10^5$	$20,6 \cdot 10^5$	$19,3 \cdot 10^5$	$18,2 \cdot 10^5$

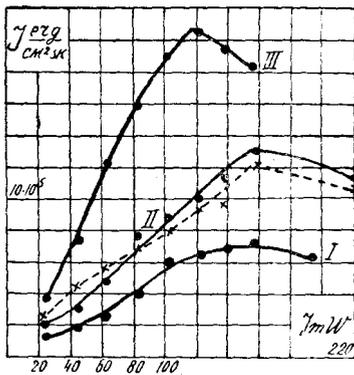


Рис. 2.

Наслідки обчислень, поданих у таблицях I, II та III, нанесені на криві рис. 2. На осі абсцис відкладені амперзвої  $i_m \omega$  накладеного змінного електромагнітного поля, на осі ординат — інтенсивності ультразвуків.

Одержані наслідки показують, що при інших однакових умовах інтенсивності ультразвуків, збуджених трубчастими вібраторами, більші ніж збуджених суцільними стрижнями. Тут гостро виявляється вплив магнітного „skin effect-у“; в наслідок цього магнітострикційні властивості внутрішніх шарів суцільного вібратора інші ніж зовнішніх, а це веде до гальмування коливань.

Тому що зміна довжини стрижня при намагнічуванні зв'язана з протилежною зміною поперечних розмірів, — тут має місце відношення поперечних розмірів до повздовжніх, величина якого аналогічна коефіцієнтові Пуассона.

Розбіжні результати відносно зміни об'єму нікелю при намагнічуванні, одержані Nagaoka й Honda, що спочатку виявили зменшення об'єму, а потім збільшення, дозволяють вважати об'єм майже незмінним. Тоді величина згаданого відношення може бути прийнята сталою, близькою до 0,5. Можливо, що тому амплітуда коливань вібратора з більшим поперечним перерізом більша. Почасти цим можна пояснити значну інтенсивність ультразвуків, одержаних від вібратора № 3. Крива інтенсивностей для нього йде ще більш круто, ніж крива II. З другого боку, дисковий променювач для вібратора № 3 є навантаження менш помітне і тому в меншій мірі сприяє затуханню його коливань.

На підставі одержаних даних можна встановити, що, зменшивши вплив магнітного „skin effect-у“, а також втрати та вихрові струми, надавши відповідну форму вібраторові, — можна досягти підвищення енергії коливань. Це лише один крок у розв'язанні питання про збільшення енергії ультразвуків, збуджених цим методом.

Енергія коливань магнітних вібраторів залежить як від напруженості накладеного змінного електромагнітного поля, так і від сили постійного підмагнічуючого поля, а також і від співвідношення між ними, яке зв'язане з магнітними властивостями матеріалу вібратора; дослідити це і є наступне завдання автора.

Вкінці вважаю за свій обов'язок висловити щире подяку Є. А. Копиловичу за практичні поради, а також проф. А. В. Желехівському за допомогу апаратурою.

27. V 1934

Харків

#### ЛІТЕРАТУРА

Zernow, „Annalen d. Phys.“, 21, 131, 1906; 26, 79, 1908.

Малов, У. Ф. Н., 1929, т. 9, с. 859.

Копилович, „Вестник электротехники“, 1931, II, с. 49.

Gaines N., „Science Abstracts Physics“, 1933, Abstr., № 678.

Из лаборатории Физ.-технич. отдела Всеукраїнськ. госуд. рентг.-радиолог. и онколог. института им. Чубаря (Харьков)

#### Про інтенсивність ультразвуков, полученных при помощи магнитных вибраторов

А. И. Даниленко

Резюме

Сравнены интенсивности ультразвуков (20 000 герц), полученных от магнитострикционных вибраторов в зависимости от амплитудного значения возбуждающего электромагнитного поля высокой частоты.

Полученные результаты изображены кривыми (рис. 2).

Кривая *I* соответствует значениям интенсивностей, полученных от сплошного цилиндрического стержня, кривые *II* и *III* — от трубчатых стержней из того же материала (Ni).

Трубчатообразные вибраторы вследствие меньших потерь на токи Фуко, а также вследствие уменьшения влияния магнитного „skin effect-a“ возбуждают ультразвуковые колебания большой интенсивности и более пригодны для длительных нагрузок.

Характер хода кривых не изучен, — однако можно предполагать, что доминирующим фактором, снижающим кривые, является тепловая.

Laboratorium der physikalisch-technischen Abteilung des Tschubar Charkower Allukrainischen Röntgen-Radium Instituts.

## Über die Intensität des mittels Magnetostriktionsvibratoren erzeugten Ultraschalles

A. I. Danilenko

### Zusammenfassung

Es werden die Intensitäten von Ultraschall (20 000 Herz) verglichen, die sich in Abhängigkeit vom Amplitudenwert eines erzeugenden elektro-magnetischen Feldes von hoher Frequenz aus magnetostriktischen Vibratoren ergeben. Die gewonnenen Ergebnisse sind in Kurven dargestellt (Abb. 2).

Kurve *I* entspricht den bei zylindrischem massivem Stäbchen erhaltenen Intensitätswerten, Kurve *II* und *III*, — denjenigen, die sich bei Röhrenstäbchen aus dem gleichen Material (Nickel) ergeben. Die röhrenförmigen Vibratoren erzeugen dank den geringeren Verlusten an Foko'schem Strom, wie auch infolge des verminderten Einflusses des magnetischen „Skin-effektes“ Ultraschallschwingungen von höherer Intensität, die sich gleichzeitig für Daueraufladung geeigneter erweisen. Die Natur dieser Kurven ist noch nicht erforscht, doch kann man annehmen, dass die Wärme den dominierenden Faktor für die abfallenden Kurven darstellt.

Інститут фізики Всеукраїнської Академії Наук (Київ)

## Тепловіддача бетонних і асбошиферних калориферів

Акад. О. Г. Гольдман, А. М. Павленко і М. Т. Бойко

З доручення „Головпроекту“ було досліджено тепловіддачу бетонних і асбошиферних калориферів (теплоприладів) в системі центрального безметалевого опалення. Для цієї мети в Інституті фізики ВУАН було побудовано дослідну установку, що складалась з електричної печі на 50 кіловат та системи каналів з асбошиферу, що сполучали піч з калориферами; нагріте повітря продувалось за допомогою вентилятора системи „Сирокко“, що працював від двосилового двигуна.

Було досліджено п'ять калориферів різних типів (див. рис. 7); з них 1—2 бетонні, 3—5 асбошиферні. Дані щодо тепловіддачі калориферів подано в табл. I—V.

Тепловіддача калорифера вираховувалась за формулою:

$$Q = vs(t_1 - t_2)(\gamma c_p + qc_p) \left[ \frac{\text{в. кал}}{\text{сек}} \right], \quad (1)$$

де  $Q$  — число кг кал тепла, відданого калорифером за секунду,  $v \frac{\text{м}}{\text{сек}}$  — середня швидкість руху повітря в місці виміру,  $s$  — переріз каналом в місці виміру,  $\gamma$  — питома вага повітря  $\left( \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$ ,  $c_p$  — питома теплоємність повітря  $\left( \frac{\text{в. кал}}{\text{кг } 1^\circ} \right)$  при даній температурі,  $q$  — кількість водяної пари (абсолютна вогкість) продуваного повітря  $\left( \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$ ,  $c_p$  — питома теплоємність водяної пари при даній температурі,  $t_1$  — температура повітря, що входить у калорифер, а  $t_2$  — температура повітря, що виходить з нього.

Швидкість руху повітря вимірювалась за допомогою трубки Піто, з'єднаної з мікроманометром, і обраховувалась за формулою:

$$v = \sqrt{\frac{2g\Delta P}{\gamma}} \left[ \frac{\text{м}}{\text{сек}} \right]$$

де  $g$  дорівнює 9,81,  $\Delta P$  — різниця між динамічним і статичним тиском в  $\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$  або в мм водяного стовпа (тобто покази мікроманометра, з'єднаного з трубкою Піто).

Абсолютна вогкість  $\left( \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$  вимірювалась способом поглинання водяної пари хлористим вапном, що ним наповнювалась U-подібна трубка, через

яку, за допомогою аспіратора, просмоктувалося повітря з калорифера в момент виміру.

Результати одержано залежно від а) типу калорифера і б) трьох параметрів, а саме: вологості повітря, що продувалося через прилад, середньої величини різниці температури  $\Delta T$  (тобто різниці між температурою повітря всередині калорифера і температурою кімнати) і середньої швидкості руху нагрітого повітря; остання обраховувалась з рівняння:

$$v = \frac{v_{вх} \cdot S_{в}}{S_{к}}$$

де  $v_{вх}$  — швидкість руху повітря в подавальній трубі,  $S_{вх}$  — переріз її, а  $S_{к}$  — сума перерізів каналів калорифера.

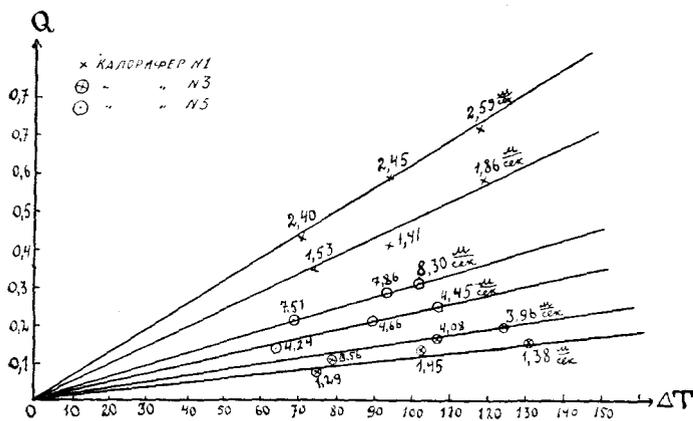


Рис. 1.

З цих параметрів зміна вологості, як про це сказано далі, в межах значень, що були одержані в цій роботі (від 7 до 100 г в куб. метрі), мало впливає на результати. Основними параметрами є  $\Delta T$  і  $v$ .

Щоб дістати значення тепловіддачі залежно від одного з параметрів при сталому другому параметрі, опрацьовано метод зведення. Суть його така: відклавши на графіку значення тепловіддачі  $Q$  якогось калорифера (одержані при приблизно однаковій швидкості) в залежності від  $\Delta T$  (рис. 1 і 2), знаходимо, що точки розташовуються з достатньою точністю (в межах досліджуваних температур) на прямих лініях, які проходять через початок координат. Як видно з рисунків, відхилення точок від прямої лінії спостерігається саме у випадках, коли швидкість значно не збігається з середньою швидкістю, для якої відкладається значення  $Q$ . На підставі цих рисунків приходимо до висновку, що для даного калорифера при сталій середній швидкості повітря, що проганяється через прилад, тепловіддача прямо пропорційна різниці температури повітря в калорифері і в приміщенні, тобто:

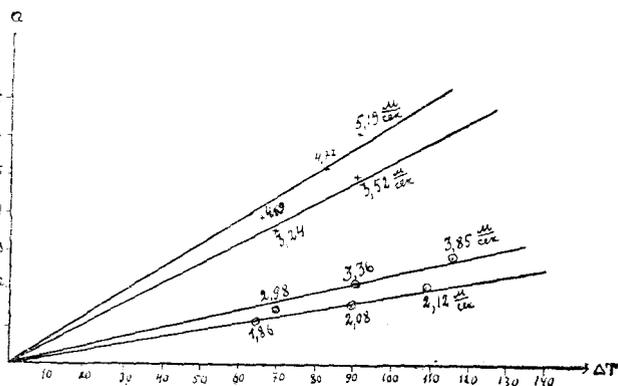


Рис. 2.

$$Q = c \Delta T, \quad (2)$$

де  $c = \varphi(v)$ .

Взагалі кажучи,  $c$  є функція не тільки від  $v$ , а й від  $\Delta T$ , і коли  $\Delta T > 150^\circ$ , залежність  $Q = c \Delta T$  вже не є прямолінійна, а значно викривлюється<sup>1)</sup>.

Але через те, що в наших дослідах  $\Delta T$  не перевищувала  $130^\circ$ , залежність  $Q$  від  $\Delta T$  з великим ступенем точності можна прийняти за прямолінійну.

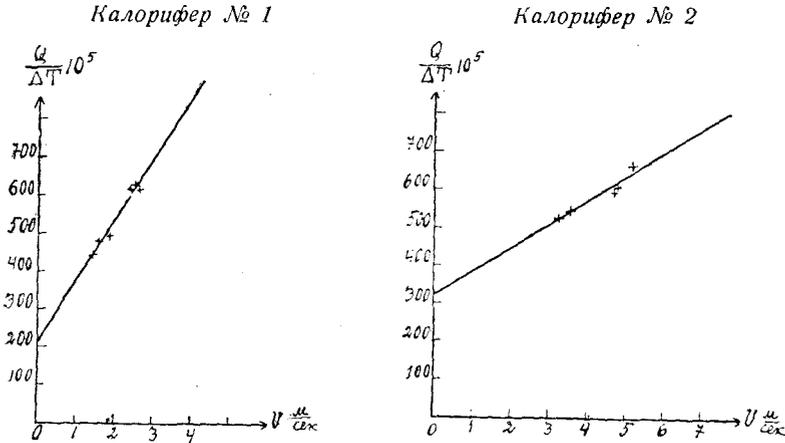


Рис. 3.

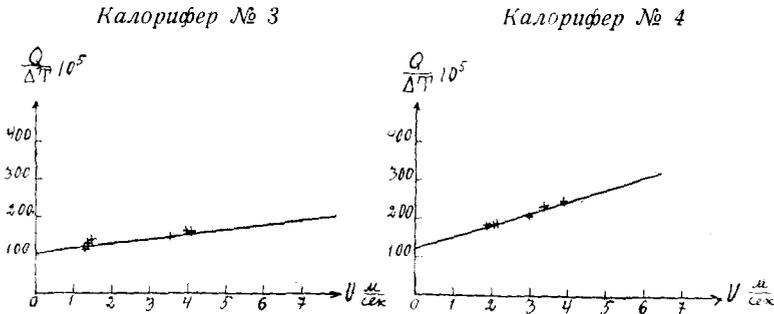


Рис. 4.

Грунтуючись на формулі (2), знаходимо  $c = \varphi(v)$ . Для цього відкладаємо значення

$$c = \frac{Q}{\Delta T}$$

як функцію від  $v$  (рис. 3—5). Знайдені значення  $c$  для досліджених  $\Delta T$  і  $v$  розташовуються з достатньою точністю на прямій лінії, тому

$$c = \frac{Q}{\Delta T} = B + Av \quad (3)$$

Звідси

$$Q = (B + Av) \Delta T \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Див. М. А. Михеев и А. С. Синельников, Теплоотдача труб в свободном потоке воздуха, Труды Госуд. физико-технич. лаборат., вып. 9, 1929 г.

Формулу (4) перевіряємо на експериментальних даних, визначивши для кожного калорифера  $B$  і  $A$  (табл. VI—XI). Величину  $B$  знаходимо безпосередньо з рисунків 3—5; величину  $A$  знаходимо або безпосередньо з тих же рисунків (бо

$$c = \frac{Q}{\Delta T} = B + Av = B + v \operatorname{tg} \theta,$$

де  $\theta$  кут нахилу прямої до осі абсцис), або з формули (4):

$$A = \frac{\frac{Q}{\Delta T} - B}{v} \quad (5)$$

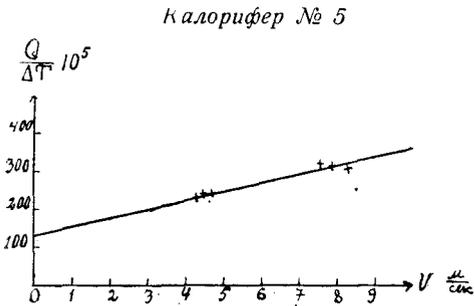


Рис. 5.

( $\frac{Q}{\Delta T}$  — відкладено на графіку на осі ординат, тому, взявши якесь значення при відповідному  $v$ , обрахуємо  $A$  24).

Як видно з таблиць, погодженість даних, одержаних за формулою (4), з експериментальними даними, цілком задовільна: середнє відхилення теоретичних даних від експериментальних — 2,3%, 2,8%, 3,8%, 2,5% і 2,4%, що не виходить за межі точності вимірів.

Як відомо, залежність  $\alpha$  ( $\frac{\text{в. кал}}{\text{м}^2 \text{сек } 1^\circ}$ ) — коефіцієнта зовнішньої тепловіддачі (а тому й  $Q$  — повної тепловіддачі) від швидкості має вигляд  $\alpha = kv^{0,75}$ , де  $k = \text{const}^1$ ).

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} \frac{0,0395 (Pe)^{0,75}}{\sqrt{\frac{Re}{Pe}}}$$

де  $\gamma$  — коефіцієнт теплопровідності,  $d$  — діаметр,  $Pe$  — критерій Пекле, рівний  $\frac{vd}{a}$ ,  $Re$  — критерій Рейнольдса, рівний  $\frac{vd\rho}{\mu}$ ,  $a$  — коефіцієнт температуропровідності,  $\rho$  — густина,  $\mu$  — коефіцієнт в'язкості.

Проте, в умовах дослідження для даного діапазону швидкостей і температур зручнішою виявилась подана тут формула, що, як показано в таблицях, дає результати, які в межах похибки вимірів збігаються з експериментальними даними.

Щодо впливу зміни вогкості повітря, яке продувається через калорифер, на тепловіддачу, то вона ілюструється такими даними:

Калорифер № 4

$\Delta T$	$v$	$q \left[ \frac{\text{г}}{\text{м}^3} \right]$	$Q$	$\frac{Q}{\Delta T}$
108,9	2,12	7,27	0,204	0,00187
108,8	2,16	93,20	0,212	0,00195

<sup>1)</sup> Див., напр., Ген Бош, Теплопередача, ДНТВУ, 1933. с. 97.

Як бачимо, при інших приблизно однакових умовах збільшення вогкості з  $7,27 \left(\frac{2}{M^3}\right)$  до  $93,2 \left(\frac{2}{M^3}\right)$ , тобто майже в 13 раз, практично величини тепловіддачі, віднесеної до  $\Delta T = 1^\circ$ , майже не змінило; збільшення на 4% пояснюється збільшенням швидкості руху повітря з 2,12 до 2,16.

Тому робимо висновок, що зміна вогкостей від 7 до  $100 \left(\frac{2}{M^3}\right)$  на тепловіддачу калорифера практично не впливає.

Для технічного користування необхідно мати значення величини тепловіддачі за годину, віднесеної до поверхні  $1 \text{ м}^2$ , і різниці між темпера-

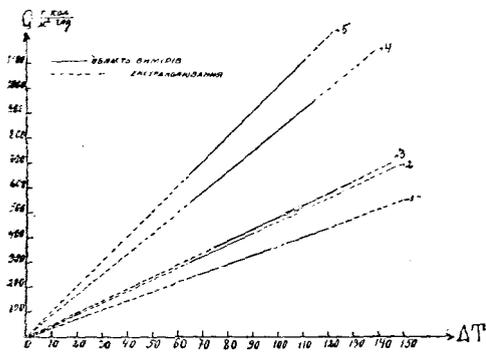


Рис. 6.

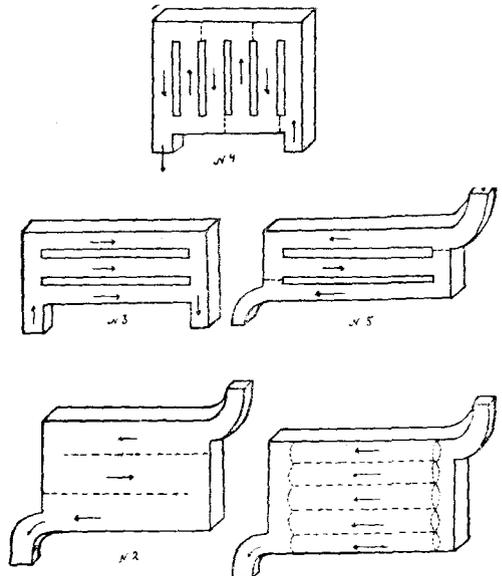


Рис. 7. № 1

турую повітря в калорифері і температурою кімнати в  $1^\circ \text{C}$ , тобто

$$Q_2 = \frac{Q \cdot 3600}{\Delta T \sigma} = \frac{3600}{\sigma} (B + A\sigma) \left[ \frac{\text{в. кал}}{\text{м}^2 \text{год } 1^\circ} \right]$$

або

$$Q_2 = H (B + A\sigma) \left[ \frac{\text{в. кал}}{\text{м}^2 \text{год } 1^\circ} \right] \quad (4a)$$

коли  $\frac{3600}{\sigma} = H$ ,  $\sigma \text{ м}^2$  — поверхня тепловіддачі калорифера.

В табл. XI подано величини для вирахування тепловіддачі  $1 \text{ м}^2$  поверхні прилада при різниці температур (повітря в калорифері, повітря в кімнаті)  $1^\circ \text{C}$  в залежності від середньої швидкості повітря в калорифері.

Через те, що перерізи каналів калориферів різні, а середня швидкість повітря в калорифері за даною швидкістю повітря в подавальній трубі залежить від співвідношення перерізів у них, то для порівняння характеристик різних калориферів і для підрахунку подані в табл. XI формули незручні. Зручніше користуватись формулами залежності тепловіддачі калориферів від об'єму повітря, що проходить через них. Тому вводимо новий параметр — об'єм повітря, що проходить через калорифер за годину

$$V = v \cdot s \cdot 3600,$$

де  $s$  — поперечний переріз повітрянпроводу в місці виміру. Підрахувавши, бачимо, що при  $V=1 \left( \frac{M^3}{год} \right)$  і при однакових умовах асбошиферні калорифери № 3, 4, 5 мають значно більшу тепловіддачу проти бетонних № 1 і 2, а саме:

$$\begin{aligned} \text{I. Бетонні калорифери} \dots\dots\dots Q_3^I &= 2,44 \left[ \frac{\text{в. кал}}{M^2 \text{ год } 1^\circ} \right] \\ &Q_3^{II} = 3,55 \\ \text{II. Асбошиферні калорифери} \dots\dots\dots Q_3^{III} &= 4,21 \\ &Q_3^{IV} = 3,93 \\ &Q_3^V = 5,78 \end{aligned}$$

при чому особливо мале значення тепловіддачі в калорифера № 1 пояснюється потовщенням стінок і викликане циліндричною формою каналів, як це видно з ескізів калориферів.

Таким чином знайдемо, що:

1. Для досліджених калориферів у межах температури повітря в приладі  $90-150^\circ C$  при сталій середній швидкості повітря тепловіддача прямо пропорціональна різниці між температурою повітря в калорифері і температурою в помешканні і лінійно залежить від середньої швидкості руху повітря в калорифері

$$Q = (B + Av) \Delta T \left[ \frac{\text{в. кал}}{\text{сек}} \right]$$

де  $B$  і  $A$  константи, що характеризують прилад, а  $v$  — середня швидкість повітря в приладі.

2. Зміна вогкості повітря в калорифері від 7 до  $90 \frac{g}{M^3}$  практично не впливає на тепловіддачу прилада.

3. Визначено константи  $B$  і  $A$  для кожного прилада.

4. Обрахунки приведено до зручного вигляду для порівняння характеристик калорифера; дано характеристики окремих калориферів.

Цікаво порівняти тепловіддачу досліджених калориферів з одного квадратного метра при продуванні через прилад  $100 M^3$  повітря за годину при  $\Delta T = 1^\circ C$  з тепловіддачею при таких же умовах скляної і чавунної труб, що була визначена в нашій лабораторії:

$$\begin{aligned} \text{Калорифер № 1} &- 3,6\left[ \frac{\text{в. кал}}{M^2 \text{ год } 1^\circ} \right] \\ \text{№ 2} &- 4,71 \\ \text{№ 3} &- 4,81 \\ \text{№ 5} &- 10,12 \end{aligned}$$

Скляна труба діаметром 5 см  
з товщиною стінки 1,5 мм — 18,90  $\frac{\text{в. кал}}{\text{м}^2 \cdot \text{год}}$   
Чавунна труба діаметром 5 см  
з товщиною стінки 4 мм — 26,70

Т а б л и ц я I<sup>1)</sup>

## Експериментальні дані тепловіддачі

Калорифер № 1. Матеріал—бетон; товщина стінок 25 мм. Конструкцію прилада видно з ескізу. Поверхня тепловіддачі 3,25 м<sup>2</sup>.

$t_1$	$t_2$	$t_n$	$t_0$	$t_1 - t_2$	$\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0 =$ $= \Delta T$	$v_{вх}$	$v_{впр}$	Тепловід- дача при- лада в. кал
104,2	78,0	55,7	17,2	26,2	73,9	2,07	1,53	0,354
131,8	95,5	67,1	20,0	36,3	93,7	1,90	1,41	0,416
156,6	115,4	78,5	17,5	41,2	118,5	2,51	1,86	0,586
101,0	80,2	63,2	20,0	20,8	70,6	3,25	2,40	0,436
130,0	100,2	77,9	21,2	29,8	93,9	3,31	2,45	0,591
159,6	122,5	97,2	24,0	37,1	117,1	3,50	2,59	0,722

Т а б л и ц я II

## Експериментальні дані тепловіддачі

Калорифер № 2. Матеріал — бетон; товщина стінок 25 мм; поверхня тепловіддачі 3,27 м<sup>2</sup>.

$t_1$	$t_2$	$t_n$	$t_0$	$t_1 - t_2$	$\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0 =$ $= \Delta T$	$v_{вх}$	$v_{впр}$	Тепловід- дача при- лада в. кал сек
103,4	72,8	57,3	19,0	30,6	69,1	1,63	3,24	0,361
133,3	91,4	72,6	21,6	41,9	90,8	1,77	3,52	0,498
97,4	74,6	60,0	20,4	22,8	65,6	2,36	4,69	0,388
123,0	90,8	70,5	23,5	32,2	83,4	2,40	4,77	0,526
132,3	97,0	77,1	23,5	35,3	91,2	2,61	5,19	0,610

<sup>1)</sup> В таблицях I—V символи мають таке значення:  $t_1$  — температура повітря, що входить у калорифер,  $t_2$  — т-ра повітря, що виходить з калорифера,  $t_n$  — т-ра центральної частини зовнішньої поверхні калорифера,  $t_0$  — т-ра помешкання в момент виміру,  $v_{вх}$  — швидкість руху повітря у вхідному каналі,  $v_{впр}$  — швидкість руху повітря в приладі, одержана з залежності

$$v_{впр} = \frac{v_{вх} \cdot S_{вх}}{S_{впр}}$$

де  $S_{вх}$  — площа перерізу вхідного каналу, а  $S_{впр}$  — площа перерізу каналу, або сума перерізу каналів прилада (багатоканальний прилад).

Таблиця III

## Експериментальні дані тепловіддачі

*Калорифер № 3.* Матеріал — пресований асбошифер; товщина стінок 5 мм. Повна поверхня тепловіддачі 1,15 м<sup>2</sup>. З даної поверхні тепловіддачі неробочою частиною поверхні треба рахувати поверхні, де дві, що випромінюють, поверхні містяться одна проти одної, бо тепловіддача їх дуже незначна. Для калорифера № 3 неробоча частина = 0,26 м<sup>2</sup>, тому робоча поверхня нагріву 1,15 — 0,26 = 0,89 м<sup>2</sup>. Швидкість вимірювалась у приладі в усіх трьох паралельних каналах. Переріз в місцях виміру — 82 см<sup>2</sup>.

$t_1$	$t_2$	$t_n$	$t_0$	$t_1 - t_2$	$\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0 =$ $= \Delta T$	$v_{np}$	Тепловіддача прилада в кал сек
100,0	88,2	61,2	19,0	11,8	75,0	1,29	0,087
131,5	113,6	75,6	19,5	17,9	102,5	1,45	0,141
162,0	139,4	95,6	20,0	22,6	130,7	1,38	0,158
100,0	94,2	70,5	18,5	5,8	78,6	3,56	0,116
131,0	123,0	89,0	20,5	8,5	106,5	4,08	0,172
150,4	140,3	101,3	21,5	10,0	123,9	3,96	0,202

Таблиця IV

## Експериментальні дані тепловіддачі

*Калорифер № 4.* Матеріал — пресований асбошифер, товщина стінок 5 мм. Повна поверхня тепловіддачі 1,40 м<sup>2</sup>, неробоча поверхня (див. табл. III) — 0,30 м<sup>2</sup>, робоча поверхня 1,40 — 0,30 = 1,10 м<sup>2</sup>. Швидкість вимірювалась всередині прилада, перекрій в місці виміру 65,6 см<sup>2</sup>.

$t_1$	$t_2$	$t_n$	$t_0$	$t_1 - t_2$	$\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0 =$ $= \Delta T$	$v_{np}$	Тепловіддач прилада в кал сек
103,0	61,5	55,0	18,0	41,5	64,3	1,86	0,119
135,5	79,4	68,5	18,0	56,1	89,9	2,08	0,166
162,0	92,3	80,0	18,2	69,7	108,9	2,12	0,204
100,4	69,2	60,0	15,0	31,2	69,8	2,98	0,143
131,3	86,6	74,4	16,5	44,7	90,5	3,36	0,216
160,4	105,6	90,0	17,8	54,8	115,7	3,85	0,286

Таблиця V

## Експериментальні дані тепловіддачі

Калорифер № 5. Матеріал — пресований асбошифер. Товщина стінок 5 мм. Повна поверхня тепловіддачі — 1,05 м<sup>2</sup>, неробоча поверхня (див. табл. III) — 0,24 м<sup>2</sup>, робоча поверхня 1,05 — 0,24 = 0,81 м<sup>2</sup>. Швидкість вимірювалась в калорифері, переріз каналу виміру 65 см<sup>2</sup>.

$t_1$	$t_2$	$t_n$	$t_0$	$t_1 - t_2$	$\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0 =$ $= \Delta T$	$v_{np}$	Тепловіддачі прилада $\left[ \frac{\text{в. кал}}{\text{сек}} \right]$
100,4	77,5	62,5	24,5	22,9	64,5	4,24	0,147
131,1	98,2	79,5	24,8	32,9	89,8	4,66	0,215
154,0	111,3	89,0	25,5	42,7	107,2	4,45	0,255
99,5	80,0	67,0	21,0	19,5	68,8	7,51	0,220
128,3	101,9	83,5	22,0	26,4	93,1	7,86	0,291
141,0	113,4	92,5	25,0	27,6	102,1	8,30	0,312

Таблиця VI

Калорифер № 1. Порівняння експериментальних даних з даними, одержаними за формулою (4).  $B = 0,00220$ ;  $A = 0,0016$ .

$\Delta T$	$v_{np}$	$Q_{експ}$	$Q_{теор}$	$\frac{Q_m - Q_e}{Q_e}$
73,9	1,5	0,354	0,343	— 3,2%
93,7	1,41	0,416	0,413	— 0,7%
118,5	1,86	0,586	0,613	+ 4,7%
70,6	2,40	0,436	0,426	— 2,3%
93,9	2,45	0,591	0,576	— 2,8%
117,1	2,59	0,722	0,743	+ 3,0%

Середнє відхилення від експериментальних даних  $\pm 2,3\%$ .

Таблиця VII

Калорифер № 2. Порівняння експериментальних даних з даними, одержаними за формулою (4).  $B = 0,00322$ ;  $A = 0,000614$ .

$\Delta T$	$v_{np}$	$Q_{експ}$	$Q_{теор}$	$\frac{Q_m - Q_e}{Q_e}$
69,1	3,24	0,361	0,369	+ 2,2%
90,8	3,52	0,498	0,489	— 1,8%
65,6	4,69	0,388	0,401	+ 3,4%
83,4	4,77	0,526	0,514	— 2,3%
91,2	5,19	0,610	0,585	— 4,2%

Середнє відхилення від експериментальних даних  $\pm 2,8\%$ .

Таблиця VIII

Калорифер № 3. Порівняння експериментальних даних з даними, одержаними за формулою (4).  $B = 0,00104$ ;  $A = 0,000132$ .

$\Delta T$	$v_{np}$	$Q_{експ}$	$Q_{теор}$	$\frac{Q_m - Q_e}{Q_e}$
75,0	1,29	0,087	0,088	+ 1,2%
102,5	1,45	0,141	0,126	-- 11,1%
130,7	1,38	0,158	0,160	+ 1,3%
78,6	3,56	0,116	0,119	+ 2,6%
106,5	4,08	0,172	0,168	-- 2,4%
123,9	3,96	0,202	0,194	-- 4,0%

Середнє відхилення від експериментальних даних  $\pm 3,8\%$ .

Таблиця IX

Калорифер № 4. Порівняння експериментальних даних з даними, одержаними за формулою (4).  $B = 0,00120$ ;  $A = 0,000320$ .

$\Delta T$	$v_{np}$	$Q_{експ}$	$Q_{теор}$	$\frac{Q_m - Q_e}{Q_e}$
63,4	1,86	0,119	0,116	- 2,6%
89,5	2,08	0,166	0,167	+ 0,6%
108,9	2,12	0,204	0,205	+ 0,5%
69,8	2,98	0,143	0,150	+ 5,0%
90,5	3,36	0,216	0,206	- 4,7%
115,7	3,85	0,286	0,282	- 1,4%

Середнє відхилення від експериментальних даних  $\pm 2,5\%$ .

Таблиця X

Калорифер № 5. Порівняння експериментальних даних з даними, одержаними за формулою (4).  $B = 0,00130$ ;  $A = 0,000229$ .

$\Delta T$	$v_{np}$	$Q_{експ}$	$Q_{теор}$	$\frac{Q_m - Q_e}{Q_e}$
64,5	4,24	0,147	0,147	0,0%
89,8	4,66	0,215	0,213	- 0,9%
107,2	4,45	0,255	0,249	- 2,4%
68,8	7,51	0,220	0,208	- 5,6%
93,1	7,86	0,291	0,289	- 0,7%
102,1	8,30	0,312	0,327	+ 4,8%

Середнє відхилення від експериментальних даних  $\pm 2,4\%$

## Таблиця XI

для залежності тепловіддачі калориферів від середньої швидкості руху повітря тепловіддачу зведено до поверхні  $1 \text{ м}^2$  і  $\Delta T = 1 \text{ С}$ .

Калорифер № 1:	$Q_2^I = 1,11(2,20 + 1,60 \cdot v)$	$\frac{\text{в. кал}}{\text{м}^2 \text{ год } 1}$
„ № 2:	$Q_2^{II} = 1,10(3,22 + 0,614 \cdot v)$	
„ № 3:	$Q_2^{III} = 4,04(1,04 + 0,132 \cdot v)$	
„ № 4:	$Q_2^{IV} = 3,27(1,20 + 0,320 \cdot v)$	
„ № 5:	$Q_2^V = 4,44(1,30 + 0,229 \cdot v)$	

## Таблиця XII

Формули залежності тепловіддачі калориферів з поверхні  $1 \text{ м}^2$  від об'єму повітря  $V$  куб. м що проганяється за 1 годину через прилад при  $\Delta T = 1^\circ \text{ С}$ .

Калорифер № 1:	$Q_3^I = 2,4376 + 0,0124 \cdot V$	$\left[ \frac{\text{в. кал}}{\text{м}^2 \text{ год } 1} \right]$
№ 2:	$Q_3^{II} = 3,532 + 0,0117 \cdot V$	
№ 3:	$Q_3^{III} = 4,2016 + 0,0021 \cdot V$	
№ 4:	$Q_3^{IV} = 3,9276 + 0,04442 \cdot V$	
№ 5:	$Q_3^V = 5,7772 + 0,0434 \cdot V$	

Институт физики Всеукраинской Академии Наук (Киев)

## Теплоотдача бетонных и асбошиферных калориферов

Акад. О. Г. Гольдман, А. М. Павленко и Н. Т. Бойко

## Резюме

По поручению „Главпроекта“ были обследованы бетонные (рис. 7, № 1 и 2) и асбошиферные (рис. 7, № 3, 4, 5) калориферы, при температурах продуваемого воздуха  $90 - 150^\circ \text{ С}$ , скорости воздуха в каналах калорифера  $v = 1,3 - 8,3 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$  и при влажности  $7 - 90 \frac{\text{г}}{\text{м}^3}$ . Установлено для теплоотдачи следующее эмпирическое соотношение:

$$Q = (B + Av) \Delta T,$$

где  $\Delta T$  — средняя разность между температурой воздуха в калорифере и температурой помещения,  $B$  и  $A$  константы, зависящие от размеров, конструкции и материала прибора. Экспериментальные данные достаточно хорошо укладываются в указанную формулу (2 — 4% средние отклонения)

Влажность в указанных пределах на результат практически не влияет.

Приведены таблицы для технических расчетов теплоотдачи указанных типов калориферов.

Institute of Physics of the AllUkrainian Academy of Sciences

## Heat-emission of the concrete and asbestos slate caloriferes

Alex. Goldmann, A. Pawlenko and M. Boiko

### Summary

We investigated for technical use the heat conductivity and heat emission in concrete and asbestos-slate caloriferes (heating apparatus) under the following conditions:

s) heated air was blown through the caloriferes,

b) heat was emitted to the surrounding space, the average difference between the temperature in the calorifere and this space being between 90—150°C and the air speed in the channels of the heating apparatus varying from 1,3 — 8,3  $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ .

At the above given conditions for every given constant speed  $v$  of the air in the heater, the emission of the heat into the surrounding space is proportional to the difference of temperatures between the average  $t^\circ\text{C}$  of the gas in the heater and the temperature of the surrounding space

$$Q = c \Delta T$$

where

$$c = f(v)$$

After finding  $c$  graphically or analytically equal

$$c = B + Av$$

where  $B$  and  $A$  are constants depending upon the size, construction and material of a given apparatus, we obtain:

$$Q = (B + Av) \Delta T$$

The quantities of emitted heat calculated by this formula fall in well with the results of the experiment.

The variations of the humidity in the air used in caloriferes (from 7 — 90  $\frac{\text{gr}}{\text{m}^3}$ ) practically did not influence the quantity of emitted heat.

Tables are given for practical use.

Інститут фізики Всеукраїнської Академії Наук (Київ)

## Випростувач із сполуками заліза

В. Ляшенко

1. Найдено випростувач із сполуками заліза, утвореними на залізній пластиночці. (Коефіцієнт випростування для напруг 0,5—0,7 вольт до 250, для менших напруг більший).

2. Одержано випростування в системі, що складається з оксиду заліза та двох електродів, між якими оксид затиснено. За один електрод править графіт або залізо, за другий платина чи інший метал.

3. Виявлено, що для цього випростувача:

а) Проходження струму через контакт графіт — оксид заліза дає, як вольтамперну характеристику, пряму лінію (сталість опору — випростування нема).

б) Вздовж порошку, як показали зонди 1 та 2, відбувається спад потенціалу відповідно до закону Ома.

в) При проходженні струму через контакт оксид заліза — платина або інший метал (оливо, мідь) вольтамперна характеристика має форму графіка, поданого на рис. 7, 8, 9. При малих напругах струм малий; із збільшенням напруги струм зростає значно швидше. При зворотному напрямі струму хід характеристики формою схожий, але кількісно з попереднім не збігається; залежно від цієї асиметрії характеристики дістаємо випростування.

г) Більший ступ проходить тоді, коли на другий електрод (платина, оливо чи інший метал) подано негативний потенціал.

### I. Випростувач з окисдованим залізом

Уніполярність проходження струму через контакт метал — провідник широко відома. Півпровідником беруть або сполуку, утворену на металі з самого електрода, наприклад, оксид, як це було у Грондаля (відомі мідь-оксидні випростувачі)<sup>1)</sup>, або у вигляді порошку, припресованого до електрода<sup>2)</sup>. У першому випадку випростувальні дії пояснюють заірним шаром між півпровідником та металом<sup>3)</sup>.

Шукаючи інших об'єктів для вивчення заірного шару, я найшов випростувальні дії сполук заліза; вказівок на це в літературі я не подибував.

Сполуки заліза утворювалися так. Залізна полірована пластинка деякий час перебувала в парі галоїдів (йоду або хлору) або в парі кислоти (випробував дію соляної та азотної кислоти), а потім залишалася на повітрі. Утворені за час перебування в парі солі сприяли оксидації пластинки, і вона через кілька днів мала вигляд ржавого заліза. Роби-

<sup>1)</sup> L. Grondahl, Phys. Rev., 27, 813, 1926; Лепешинская-Кракау, Вестник электротехники, № 5, 179, 1930.

<sup>2)</sup> И. В. Курчатов, Журн. техн. физики, 1, 632, 1931; Кобеко, Курчатов и Синельников, Журн. РФХО, ч. физ., 61, 459, 1929.

<sup>3)</sup> W. Schottky u. W. Deutschmann, Phys. Zst., 30, 839, 1929; W. Schottky, R. Stormer u. F. Waibel, Zst. f. Hochfrequenztechnik, 37, 162, 175, 1931.

лися також спроби оксидувати залізо нагріванням в печі. Сама залізна пластинка правила за один електрод, другим електродом був інший метал (платина, оливо, мідь, цинк), що притискувався або безпосередньо, або через тонкий шар порошку хемічно чистого оксиду заліза.

Випростувальні дії вимірювалися за звичайною схемою (рис. 1). Струм вимірювався або дзеркальним гальванометром (ціна поділки  $1 \cdot 10^{-8} \text{A}$ ), або стрілковим (ціна поділки  $3 \cdot 10^{-7} \text{A}$ ).

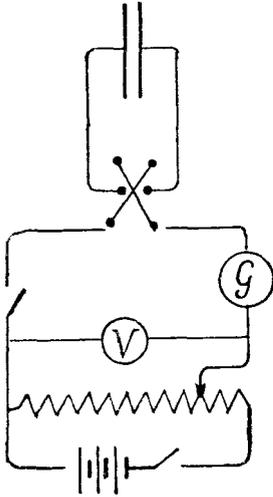


Рис. 1.

При вимірах я вживав до гальванометрів шунтів. Напруга вимірялася мавометром з додатковим опором на 3 вольти. Щоб уникнути нагрівання випростувача, попередю потенціометром за вольтметром встановлювалася відповідна різниця потенціалів, а потім на короткий час (3 сек.) подавалася на випростувач. Отже, сам вимір струму провадився протягом трьох секунд, павзи між вимірами 2,5 хв.

Виміряно було декілька десятків пластинок. Всі вони дають схожі щодо ходу вольтамперні характеристики, різниця між ними лише в величині струмів. Рис. 2 подає зразок такої вольтамперної характеристики (зразок № 66<sup>a</sup>). Сполуки на залізній пластинці цього зразка утворено від попереднього оброблення парою азотної кислоти. За другий електрод править платинова фольга, притиснута до утворених сполук заліза безпосередньо. Табл. I подає виміряний на цьому зразку струм.

Таблиця I

Прикладена напруга	Струм, коли Fe-	Струм, коли Pt-	Відношення струмів
0,0	$-33 \cdot 10^{-6}$	$+33 \cdot 10^{-6}$	
0,1	0	$15 \cdot 10^{-5}$	
0,2	3	45	150
0,3	27	90	33
0,4	175	135	18
0,6	$9 \cdot 10^{-5}$	255	28
0,8	36	420	12
1,0	210	$60 \cdot 10^{-4}$	3
1,2	$42 \cdot 10^{-4}$	78	2
1,4	63	99	1,5

Більший струм проходить тоді, коли на платиновий електрод подано від'ємний потенціал. Вольтамперна характеристика не проходить через початок координат, точка, для якої струм рівний нулеві, зсунута ліворуч

на 0,1 вольта, бо сам випростувач (у темноті і на світлі) дає невеличку, порядку 0,1 вольта, електрорушну силу, і замкнений через гальванометр випростувач, коли зовнішньої напруги не прикладено, всеж дає невеличкий струм. Ця електрорушна сила не зникає і тоді, коли випростувач був замкнений через сам гальванометр (опір 32 $\Omega$ ) протягом 16 годин. Внизу

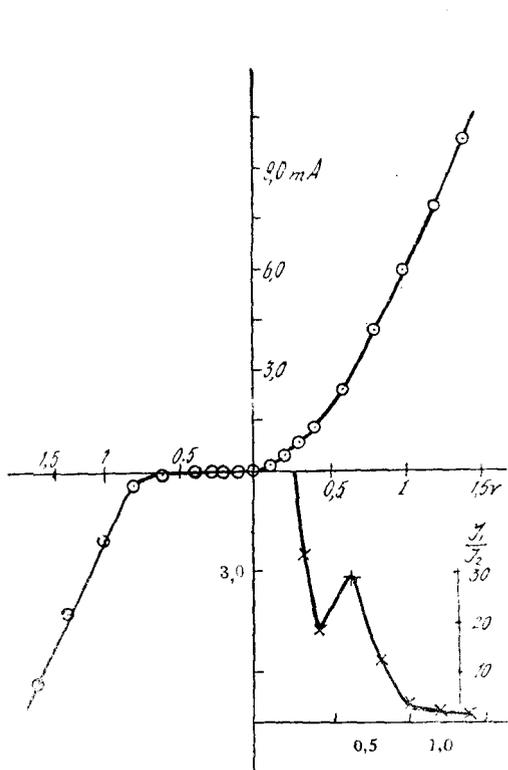


Рис. 2.

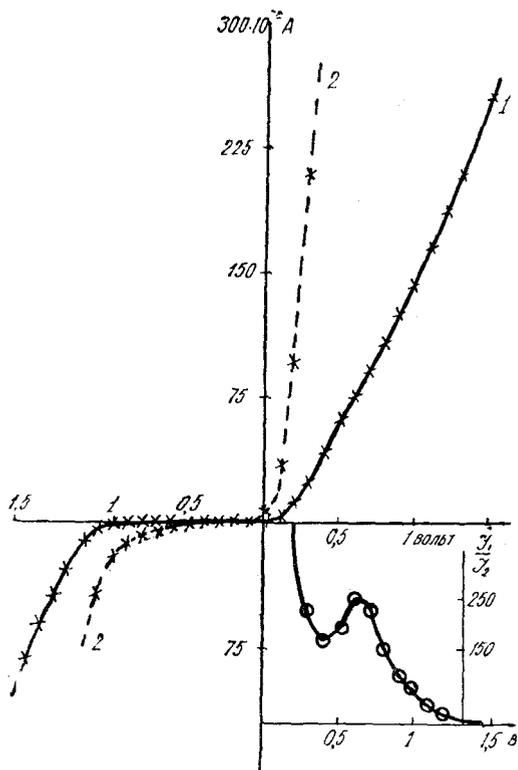


Рис. 3.

рис. 2 в правому кутку подано криву відношення струмів, що течуть в пропускну та затримуючому напрямках. Це відношення є велике для дуже малих напруг (0—0,3 вольта), зменшується для 0,4—0,5 вольта і знов зростає для напруг 0,5—0,7 вольта. Напрямок випростування не залежить від того, який метал взято за другий електрод. Величина струму, що протікає в одному й другому напрямі—мінється. Найкраще випростування одержано тоді, коли другий електрод (з випробуваних металів Pt, Pb, Zn, Cu) був платиновий. Коли за другий електрод було взято графіт, випростування фактично не було. Разом з тим, краще випростування було в тих зразків, у яких сполуки заліза утворювалися після попереднього оброблення азотною кислотою.

## II. Порошок оксиду заліза як засіб до випростування

Рис. 3 подає вольтамперну характеристику такого самого випростувача з тою лише відмінню, що другий електрод, платинова

фольга, притиснутий до сполук залізної пластинки через тоненький напорошений шар порошку хемічно-чистого оксиду заліза ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ). На рис. 3 крива II є та сама крива I, але подана в збільшеному в 10 раз масштабі ординат. Внизу праворуч подано також криву відношення струмів. Хід кривої струм — напруга, а також кривої відношення струмів такий самий, як і на попередньому рисунку. Відношення струмів тут для напруги 0,6 вольт сягає до 250. Сам порошок оксиду заліза, затиснутий між чистою полірованою залізною пластинкою та платиновою фольгою, теж показує проходження струму в один бік більше, ніж в другий. Наводжу зразок такого випростування; тут взято товщину шару порошку близько одного міліметра, затиснутого струбциною. Виміри подано в табл. II; графічно, як вольтамперну характеристику, на рис. 4. Хід кривої тут подібний до раниш наведених кривих.

Таблиця II

Зовнішня різниця потенціалів	Струм, коли Fe—	Струм, коли Pt—	Відношенн: струмів
0,0	$-10 \cdot 10^{-8}$	$+10 \cdot 10^{-8}$	
0,1	+2	82	41
0,2	10	350	35
0,3	25	850	34
0,4	42	1425	34
0,5	60	1845	31
0,6	85	2400	28
0,7	130	3000	23
0,8	177	3600	20
0,9	215	4275	19
1,0	300	4950	15
1,2	670	6600	10

Подібне випростування одержувано, коли за електроди брали графіт та платину, або графіт та інший метал. Порошок оксиду заліза, затиснутий між двома електродами з того самого металу, не показує (як і слід було чекати) уніполярності проходження струму, але показує, що струм з напругою міняється не за законом Ома. Опір залежить від прикладеної різниці потенціалів. Зразки кривих наведено на рис. 5 (масштаб струму для кожної кривої різний). Порошок же, затиснутий між двома графітовими електродами, показує провідність, що в межах 0—3 вольти міняється за законом Ома і тільки при більших напругах намічається відхил від лінійності. Опір контакту графіт—оксид заліза та самог оксиду до 2-х вольт залишається сталим. Природно чекати, що коли взяти за перший електрод графіт, за другий платину чи інший метал

а між ними затиснутий оксид заліза, то ця система має проводити уніполярно, що і спостерігалось.

Щоб в'яснити механізм випростування, було зроблено виміри зондами розподілу потенціалу в препараті з порошку оксиду заліза. Препарат було виготовлено так (рис. 6): два електроди (за перший взято залізо або графіт, за другий платину або оливу) було приклеєно воском та каніфоллю на слюдяну пластинку. Відстань між ними 9 мм (коли вживано два зонди), або 12 мм (коли брали три зонди). Між ними на рівних відстанях (по 3 мм) ставилися зонди. Зондами були вугляні волосинки з вугляних освітлювальних ламп. Зонди паралельно покладено було в порошок насипано з верхом, зверху покладено ще пластинку слюди і препарат було затиснуто струбциною. Переріз стовпчика порошку та площа електродів була  $3 \times 25$  мм. Вимір струму провадився за наведеною схемою, а потенціали зондів вимірялися квадрантним електрометром. Потенціал зонда вимірявся три рази, з них бралось середнє значення. Здебільшого покази електрометра збігалися, а як і був відхил, то не більше 1%. Сам вимір провадився так. Подавши напругу на препарат, установлювався певний струм, і з нього вимірялися потенціали електродів та зондів. Струм проходив протягом усього часу вимірів (кілька хвилин). Для контролю було зроблено вимір

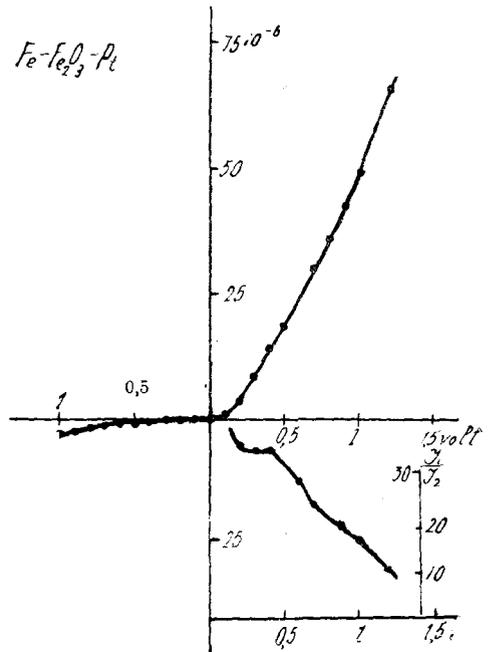


Рис. 4.

потенціалів зондів від першого до третього і навпаки. Різниці в показках не було

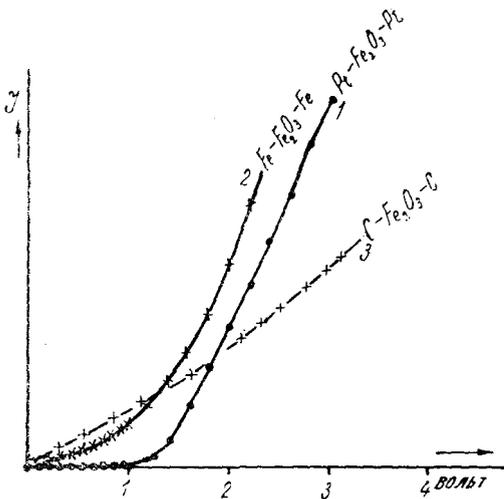


Рис. 5.

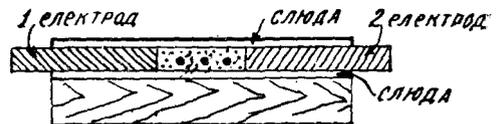


Рис. 6.

потенціалів зондів від першого до третього і навпаки. Різниці в показках не було

Як зразок таких вимірів, наводжу виміри з препарату, де електродами були графіт та оліво, у вигляді вольтамперної характеристики (рис. 7); тут потенціали подано в залежності від струму, що протікає через препарат, і на рис. 8, де подано струм, як функцію різниць потенціалів:

$$I = f(V_{2b} - V_3) - 1 \text{ крива}$$

$$I = f(V_3 - V_2) - 2$$

$$I = f(V_2 - V_1) - 3$$

$$I = f(V_1 - V_0) - 4$$

Потенціал графіту взято за 0. Як уже зазначено, сам препарат має свою електрорушну силу. Тому потенціали зондів та електродів для значення

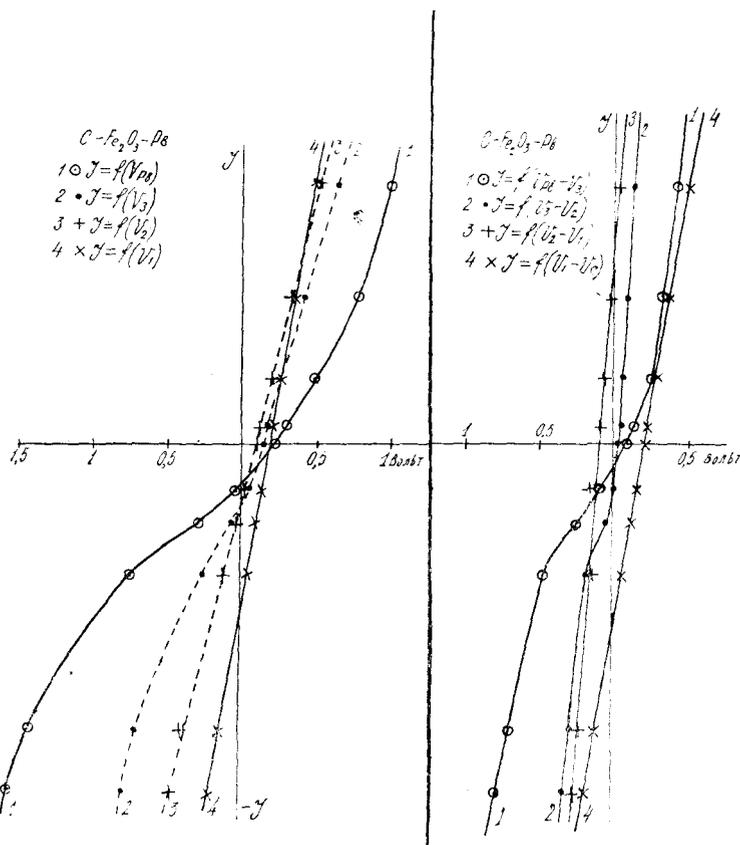


Рис. 7

Рис. 8.

струму, рівного нулеві, вимірялися, коли коло випростувача було розімкнене. Ці значення на графіках відкладено по осі абсцис (ордината 0). З графіків видно, що потенціал першого та другого зондів міняється лінійно як у пропускній, так і в затримуючій частині. Потенціал третього зонда міняється лінійно лише в пропускній частині і дає відхил в затримуючій частині. Потенціал другого електрода міняється так, як у вольтамперній характеристиці, але відхил від ординати не такий крутий, як звичайно, бо товщина шару порошку велика, 12 мм. Криві на рис. 8

показують, що провідність між графітовим електродом і першим зондом, а також першим та другим зондом відповідає законові Ома. Цього немає в провідності між другим та третім зондом, особливо третім зондом та олив'яним електродом. Тут ми маємо більший спад потенціалу, аніж за законом Ома. Цей спад потенціалу для напруг понад піввольта складає майже половину прикладеної зовні різниці потенціалів.

Коли другий електрод було взято платиновий, то цей спад коло платини був значно більший, аніж коли електродом було оливо. Це видно з кривих рис. 9. Препарат мав два зонди. Потенціали обох зондів мінялися лінійно. Залежність струмів від різниці потенціалів, що є між графітовим електродом і першим зондом, між першим та другим зондом подана прямими лініями (крива 2 та 3). Крива залежності струму від різниці потенціалів між графітом та платиною показує неоднаковий хід для одного та другого напрямку струму. Тут ясно виражено великий спад потенціалу саме у платинового електрода.

Препарат після проходження струму від зовнішньої різниці потенціалів, замкнутий потім на гальванометр без прикладання зовнішньої напруги, показує струм більший, аніж препарат давав від власної електрорушної сили. Цей струм швидко спадає.

Доводиться думати, що явище випростування обумовлюється тими процесами, що мають місце коло платинового чи олив'яного електрода. Ці процеси нагадують явище електрохімічної поляризації необоротних електродів. Дальше вивчення механізму випростування провадиться.

Цю роботу виконано під керівництвом акад. О. Г. Гольдмана, за що висловлюю йому щиро подяку.

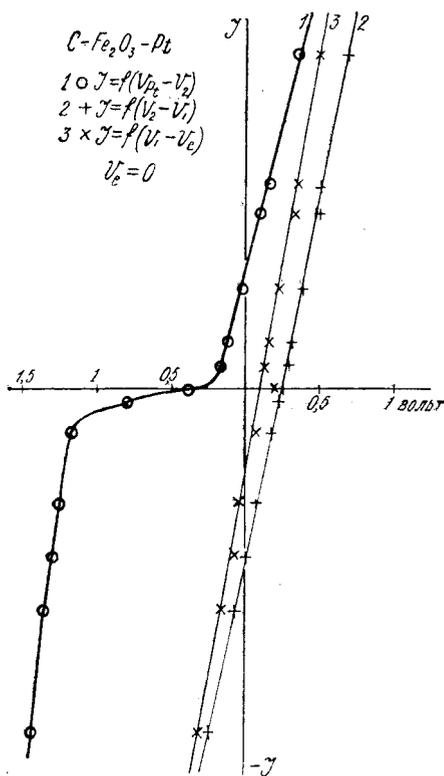


Рис. 9.

Институт физики Всеукраинской Академии Наук (Киев)

## Выпрямитель с соединениями железа

В. Ляшенко

Резюме

1. Найден выпрямитель с соединениями железа, полученными на железной пластинке. (Коэффициент выпрямления для напряжений 0,5—0,7 вольт до 250, для меньших напряжений больше).

2. Получено выпрямление в системе, состоящей из окиси железа и двух электродов, между которыми окись зажата (графит или железо служит одним электродом, платина или иной металл — другим).

3. Для последнего выпрямителя установлено:

а) Вольтамперная характеристика для тока через контакт графит — окись железа прямолинейна (постоянное сопротивление; выпрямления нет).

б) Имеющееся падение потенциала вдоль слоя окиси железа соответствует закону Ома.

в) Вольтамперная характеристика для тока через контакт окись железа — платина или другой металл (свинец, медь) имеет форму, поданную на рис. 7, 8 и 9. При небольших напряжениях ток мал, с увеличением напряжения ток растет значительно быстрее. При обратном направлении тока ход характеристики по форме похож, но количественно с предыдущим не сходится. В зависимости от этой асимметрии характеристики получается выпрямление.

д) Большой ток проходит тогда, когда на другой электрод (платина, свинец или иной металл) дан отрицательный потенциал.

Institute of Physics of the All-Ukrainian Academy of Sciences

## The iron compound rectifier

V. Liashenko

Summary

1. A rectifier is constructed, consisting of iron compounds on an iron plate. (Coefficient of rectification for  $V = 0,5 - 0,7$  volts is about 250, for smaller  $V$  it is larger).

2. The rectification is obtained in a system consisting of two plates between which iron oxide is compressed. (One electrode is of graphite or iron and the second is of platinum or some other metal).

3. It is found that for this rectifier:

a) The passage of the current through the contact graphite-iron oxide gives a straight line for the volt-ampere characteristics, i. e. the resistance is constant and there is no rectification.

b) Along the oxide-mass there is a fall of potential in accordance with Ohm's law as it was found by sounding.

c) At the passage of the current through the contact iron oxide-platinum (or some other metal Pb, Cu) volt-ampere characteristics have the appearance shown in fig. 7, 8 and 9. In case of small difference of potential the current is small; with the growth of difference of potential the current grows more rapidly. In case of reversing the current, the form of characteristics is similar, but quantitatively it is different. Because of this asymmetry we obtain the rectification.

d) The current is larger in case the second electrode Pt, Pb, or Cu has a negative potential.

Інститут фізики Всеукраїнської Академії Наук (Київ)

## Кільцева електронна лінза

Перша стаття

Вадим Дяченко

В цій статті, присвяченій електронній оптиці, я даю в явному вигляді вираз потенціалу кільця (скінченної та нескінченно-малої товщини). При виводі першого потенціалу я використав геометричні зазначення К. Неймана і аналітичний шлях Б. Рімана.

За останні роки багато уваги в фізиці приділяють проблемі електронної оптики, тобто будові приладів (електронних мікроскопів, осцилографів), в яких одержуються збіжні електронні пучки, подібно до того, як у приладах звичайної оптики одержуються збіжні пучки світла, пучки фотонів. Мені здається, що таку збіжність можна використати також в приладах для зруйнування атомної зернини (для пучків  $\alpha$ -часток та дейтонів), бо концентрація відповідних часточок дасть певне збільшення ймовірності потрібного співудару.

В даній роботі я не описую існуючих приладів<sup>1)</sup>, а подаю математичну теорію лінзи нової конструкції.

Основу цієї конструкції складає система кілець, заряджених до певного потенціалу. Спочатку я даю повний розрахунок для випадку одного кільця. Навіть в цьому простішому випадку, як ми побачимо далі, вже досягаємо певного ефекту збіжності пучка (на рис. 1 накреслено одну з можливих траєкторій).

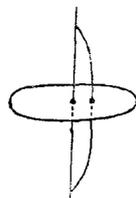


Рис. 1.

З математичного погляду задача ділиться на дві частини.

Перша частина полягає у визначенні потенціального електростатичного поля даного провідника або даної системи провідників при заданих потенціалах<sup>2)</sup> цих провідників.

Це так звана задача Діріхле.

Конкретно, в цій першій статті я докладно трактую задачу Діріхле для випадку кільця (тора) з коловим меридіональним перерізом (рис. 2): визначити інтеграли  $u(x, y, z)$  рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

який на поверхні даного кільця має задане стале значення  $u_0$  і на нескін-

<sup>1)</sup> Такий опис містить робота І. І. Сахарова, що друкується в цьому числі.

<sup>2)</sup> Зауважу, що крім електростатичного поля застосовується і магнітне поле і, навіть електромагнітне, але в даній роботі я не подаю пов'язаних з ними розрахунків. Потрібні дані є в роботі І. І. Сахарова, на яку я вже вище посилався.

ченності стає нулем. Вперше розв'язав цю задачу Ріман в роботі „Über das Potential eines Ringes“<sup>1)</sup>, потім К. Нейман, спираючись на такі саме змінні, що запровадив Ріман, визначив розподіл електрики на поверхні кільця<sup>2)</sup>. Крім того, це питання трактується в книзі Е. Нейне<sup>3)</sup>.

Я даю повнішу, потрібну мені трактовку цієї проблеми, спираючись на простіший шлях Рімана і на геометричне визначення його змінних у Неймана. Крім того, я також розглядаю випадок нескінченно-тонкого кільця.

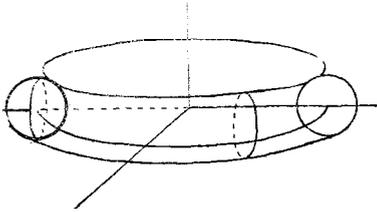


Рис. 2.

Друга частина задачі полягає у визначенні траєкторій руху електронів, у визначенні потрібних для електронної лінзи фізичних і геометричних параметрів (фокусне віддалення, побільшення тощо). І, нарешті, я трактую цю задачу для системи кілець і для комбінації кілець з провідниками іншої форми.

Наприкінці цього короткого вступу я вважаю за потрібне зауважити, що на важливість проблем електронної оптики звернув мою увагу академік Гольдман; крім того, під час доповідів, які я робив у зв'язку з цією роботою в Інституті фізики ВУАН, акад. Гольдман зробив мені ряд важливих зауважень, за які я приношу йому ширю подяку.

## Розділ 1

## Потенціал кільця

§ 1. *Лапласове різняння в формі Рімана — Неймана.* Для визначення потенціалу кільця, зарядженого до певного потенціалу  $u_0$ , ми йдемо шляхом запровадження особливих криволінійних координат в рівнянні Лапласа. Значимо якісь довільні, спочатку криволінійні координати через  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ .

Нехай Декартові координати визначаються через них за допомогою рівнянь:

$$x = x(\lambda, \mu, \nu); \quad y = y(\lambda, \mu, \nu); \quad z = z(\lambda, \mu, \nu) \quad (2)$$

Приймемо далі, що координати  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  ортогональні, тобто задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial \mu} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial y}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial \nu} + \frac{\partial z}{\partial \mu} \frac{\partial z}{\partial \nu} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \nu} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \nu} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \nu} \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Gesammelte Werke, с 407—412.

<sup>2)</sup> Theorie der Electricitäts- und Wärme-Vertheilung in einem Ringe, Halle, 1864.

<sup>3)</sup> Handbuch der Kugelfunktionen, Zweiter Band, S. 283.

Тоді квадрат диференціала дуги визначиться так:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{r^2 \lambda^2}{L^2} + \frac{du^2}{M^2} + \frac{dv^2}{N^2},$$

де:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{L^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2 \\ \frac{1}{M^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ \frac{1}{N^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

визначається, як відомо, через ортогональні криволінійні координати так <sup>1)</sup>:

$$\Delta u = LMN \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{L}{MN} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{M}{LN} \frac{\partial u}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{N}{LM} \frac{\partial u}{\partial v} \right) \right\} \quad (5)$$

Візьмемо окремий випадок — циліндричні координати

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z$$

Маємо на підставі (4), (5):

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \\ \Delta u &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Звідси ми перейдемо до перетворення оператора Лапласа до форми, що запроваджується як Ріманом, так і Нейманом, і яка є основна для дальшого.

В площині  $(z, r)$  циліндричних координат запроваджуємо нові координати  $(\vartheta, \omega)$  за допомогою рівнянь (рис. 3):

$$\left. \begin{aligned} z = \xi, \quad r = \eta, \quad -\infty \leq \xi \leq \infty, \quad 0 \leq \eta \leq \infty \\ \xi + i\eta = f(\vartheta + i\omega) = \phi(\vartheta, \omega) + i\ell(\vartheta, \omega), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

де  $i = \sqrt{-1}$ , функція  $f(\vartheta + i\omega)$  є аналітична функція, тобто для неї справджуються співвідношення Коші — Рімана:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \eta}{\partial \omega} \quad \frac{\partial \xi}{\partial \omega} = -\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} \quad (8)$$

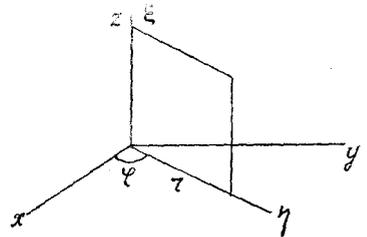


Рис. 3.

<sup>1)</sup> Наприклад, див. М. Планк, Einführung in die Theorie der Elektrizität. und des Magnetismus, 1928, S. 47—51 (є переклад цієї книги).

Диференціал дуги в нових координатах, як показує диференціювання, визначається так:

$$ds^2 = \rho (d\vartheta^2 + d\omega^2) + \eta^2 d\varphi^2; \quad \rho = \left(\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}\right)^2 \quad (9)$$

Звідси, на підставі формули (5), одержуємо оператор Лапласа:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial\vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial\omega} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial\omega} \right) + \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \right\} \quad (10)$$

Запровадьмо в останній вираз нову функцію  $v$  через підставлення:

$$v = u \sqrt{\eta}; \quad (11)$$

одержимо:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho\sqrt{\eta}} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\omega^2} + \frac{\rho}{\eta^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \frac{v}{4} \right) \right\} \quad (12)$$

Отже, рівняння Лапласа в нових координатах буде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\omega^2} + \frac{\rho}{\eta^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \frac{v}{4} \right) = 0 \quad (13)$$

Про це рівняння Нейман зауважує, що „задачу про рівновагу теплоти або електрики для певного однорідного тіла, що обмежене поверхнею  $\vartheta = \text{const}$ , можна розв'язати, якщо  $\frac{\rho}{\eta^2}$  залежить тільки від  $\vartheta$ , або являє собою суму двох функцій, при чому одна залежить від  $\vartheta$ , а друга від  $\omega$ “.

Випадок, який ми зараз трактуємо, і був у задачі Діріхле для кільця. Розгляньмо це твердження Неймана докладніше.

Нехай, дійсно,

$$\frac{\rho}{\eta^2} = F_1(\vartheta) + F_2(\omega),$$

тобто сума двох функцій відповідно з аргументами  $\vartheta$  і  $\omega$ .

Покладемо тоді:

$$v(\vartheta, \omega, \varphi) = v_1(\vartheta) v_2(\omega) (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (14)$$

де  $n$  довільне ціле додатне число або нуль.

Підставляючи (14) в (13), одержимо:

$$v_1'' v_2 + v_1 v_2'' + (F_1 + F_2) \left( -n^2 + \frac{1}{4} \right) v_1 v_2 = 0, \quad (15)$$

де штрихи означають диференціювання.

Поділивши в (15) змінні, маємо:

$$\frac{v_1''}{v_1} - \alpha_n^2 F_1 = - \left( \frac{v_2''}{v_2} + \alpha_n^2 F_2 \right) = \text{const} = \beta,$$

де

$$\alpha_n^2 = n^2 - \frac{1}{4}$$

Звідси:

$$\begin{aligned} v_1'' - (\beta + \alpha_n^2 F_1) v_1 &= 0 \\ v_2'' + (\beta + \alpha_n^2 F_2) v_2 &= 0 \end{aligned} \quad 16$$

Отже, ми переходимо до розв'язання звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Якщо, зокрема,  $F_2 = 0$  (з цим випадком ми маємо справу далі), тоді, якщо прийняти  $\beta = m^2$ , де  $m$  ціле число, одержуємо:

$$v_2(\omega) = A_m \cos m\omega + B_m \sin m\omega \quad (17)$$

і частинний розв'язок Лапласового рівняння за (14) буде:

$$v(\vartheta, \omega, \varphi) = v_1^{(m, n)}(\vartheta) (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) (A_m \cos m\omega + B_m \sin m\omega),$$

де  $v_1^{(m, n)}$  є інтеграл рівняння

$$v_1'' - (m^2 + \alpha_n^2 F_1) v_1 = 0 \quad (18)$$

Тоді ми можемо утворити загальний розв'язок у вигляді суми подвійного нескінченного ряду:

$$v(\vartheta, \omega, \varphi) = \sum_{m, n} v_1^{(m, n)}(\vartheta) (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) (A_m \cos m\omega + B_m \sin m\omega), \quad (19)$$

де подвійна сума поширюється на всі додатні цілі або нульові значення  $m$  і  $n$ ; довільні сталі визначаються як константи Фур'є в розкладі заданої функції:

$$v(\vartheta_0, \omega, \varphi) \equiv \Phi(\omega, \varphi),$$

де  $\vartheta_0 = \text{const}$  — рівняння поверхні сталого потенціалу (заряджена поверхня провідника  $u = u_0 = \text{const}$ ,  $v = u_0 \sqrt{\eta}$ ).

Очевидно, що в конкретних випадках треба перевірити законність математичних операцій, з якими ми мали справу (збіжність, диференціальність).

Залишаючи поки ці загальні міркування, візьмемо такий окремий випадок, що нас в даному разі цікавить.

Ми, насамперед, будемо мати справу з випадком осьової симетрії, тобто з випадком, коли потенціальна функція  $u$  не залежить від кута  $\varphi$ :

$$u = u(\vartheta, \omega);$$

тоді також і  $v$  буде функцією лише  $\vartheta$  і  $\omega$ :

$$v = v(\vartheta, \omega)$$

Рівняння Лапласа приймає простіший вигляд:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \omega^2} + \frac{\rho}{4\eta^2} v = 0 \quad 20$$

Рівняння (13) та (20) і є шукана нами форма Рімана.

§ 2. *Кільцеві координати. Потенціал кільця.* Для розв'язання задачі Діріхле у випадку кільця (тор з перерізом в формі кола) зручно запровадити особливі координати, так звані кільцеві координати.

По суті, запроважуючи їх, розв'язують задачу і Ріман, і Нейман.

Запровадимо кільцеві координати в площині  $(\xi, \eta)$ . Візьмемо на осі  $\eta$ , на віддалі  $a$  від початку координат, дві точки:  $A$  і  $B$  (рис. 4). Сполучимо довільну точку  $M$  верхньої півплощини з точками  $A$  і  $B$ ; нехай  $r$  і  $r'$  відрізки  $\overline{MA}$  і  $\overline{MB}$  ( $r < r'$ ) і  $\omega = \angle AMB$ . Тоді

$$\frac{r}{r'} = \lambda \quad \text{і} \quad \omega \quad 21$$

будуть кільцеві координати точки  $M$ . Коли точка  $M$  довільно переміщується в верхній півплощині,  $\lambda$  змінюється від нуля до одиниці, включаючи ці величини;  $\omega$  змінюється від 0 до  $\pi$ , також включаючи ці значення. В нижній півплощині визначення координати  $\lambda$  залишається те саме, а координата  $\omega$  визначається кутом, що доповнює до  $2\pi$  кут  $AM_1B$  (рис. 4).

Через те, що  $\eta$ , в нашому випадку, приймає тільки додатні значення (або нуль), ми визначаємо точку  $A$  також з додатної сторони осі  $\eta$ . Координати  $\lambda, \omega$  однозначно визначають точку півплощини  $\eta_1 \geq 0$ , якщо вони змінюються в границях, визначених вище.

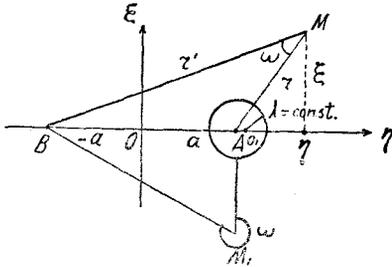


Рис. 4.

Координатна лінія  $\lambda = \text{const}$  буде коло, в середині якого (але не в центрі) знаходиться точка  $A$ ; координатна крива  $\omega = \text{const}$  теж визначає дугу кола, ортогонального до кіл  $\lambda = \text{const}$ , що спирається на хорду  $AB$ .

З рис. 4, після певних перетворень, можна встановити зв'язок Декартових координат  $(\xi, \eta)$  і кільцевих  $(\lambda, \omega)$ .

Маємо:

$$\frac{\xi + i\eta - ia}{\xi + i\eta + ia} \quad 22$$

Звідси, визначаючи  $\lambda = e^{-\vartheta}$  і розв'язуючи це рівняння відносно  $\xi + i\eta$ , одержимо:

$$\xi + i\eta = ia \frac{1 + e^{-(\vartheta + i\omega)}}{1 - e^{-(\vartheta + i\omega)}} = f(\vartheta + i\omega) \quad 23$$

Це рівняння доводить, що  $\xi + i\eta$  є аналітична функція від  $\vartheta + i\omega$ . Отже, ми можемо використати рівняння Лапласа в формі Рімана—Неймана.

Поділяючи в (23) праву сторону на дійсну і уявну частини і порівнюючи з лівою стороною, маємо:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a \frac{2\lambda \sin \omega}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2} = \frac{a \sin \omega}{\text{ch } \vartheta - \cos \omega} \\ \eta &= a \frac{1 - \lambda^2}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2} = \frac{a \text{sh } \vartheta}{\text{ch } \vartheta - \cos \omega} \end{aligned} \right\} \quad 24$$

де

$$\operatorname{sh} \vartheta = \frac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{2}; \quad \operatorname{ch} \vartheta = \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2}$$

так звані гіперболічний синус та гіперболічний косинус.

Далі за (9) та (24)

$$\frac{\rho}{\eta^2} = \left( \frac{\partial \lg \eta}{\partial \omega} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lg \eta}{\partial \vartheta} \right)^2 = \left( \frac{2\lambda}{1-\lambda^2} \right)^2 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \vartheta} \quad (25)$$

Підставляючи (25) в (20), одержимо рівняння Лапласа (для випадку осової симетрії) в кільцевих координатах:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \omega^2} + \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \vartheta} v = 0 \quad (26)$$

Отже, наша задача звелася на визначення такого інтеграла рівняння (26), що на поверхні заданого кільця  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$  цей інтеграл дорівнює  $u_0 \sqrt{\eta}$ :

$$v(\vartheta_0, \omega) = \bar{v} = u_0 \sqrt{\eta} \quad (27)$$

і на нескінченності дорівнює нулеві. На підставі (24) можемо (27) переписати так:

$$\bar{v} = u_0 \frac{\sqrt{a \operatorname{sh} \vartheta_0}}{\sqrt{\operatorname{ch} \vartheta_0 - \cos \omega}} = u_0 \sqrt{a} \frac{\sqrt{1 - \lambda_0^2}}{\sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos \omega + \lambda_0^2}}, \quad \lambda_0 = e^{-\vartheta_0} \quad (28)$$

Рівняння (26) задовольняє умову Неймана для розв'язання через розподіл змінних.

Покладемо в рівнянні (26):

$$v = v_1(\vartheta) v_2(\omega), \quad (29)$$

будемо мати:

$$v_1'' v_2 + v_1 v_2'' + \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \vartheta} v_1 v_2 = 0$$

або

$$\frac{v_1''}{v_1} + \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \vartheta} = - \frac{v_2''}{v_2} = n^2 = \text{const} \quad (30)$$

Звідси:

$$\left. \begin{aligned} v_2'' + n^2 v_2 &= 0 \\ v_1'' + \left( \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \vartheta} - n^2 \right) v_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Перше рівняння дає:

$$v_2(\omega) = a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega,$$

при чому  $n$  ми прийнемо цілим додатним числом або нулем. Ця умова відповідає такому доповненню, що збільшення  $\omega$  на  $2\pi$  (при сталих значеннях інших координат) не змінює точки простору.

Якщо в другому рівнянні (31) замість  $\vartheta$  запровадити  $\lambda$ , то одержимо за (25):

$$\frac{d^2 v_1}{(d \lg \lambda)^2} + \left[ \frac{1}{\left( \frac{1}{\lambda} - \lambda \right)^2} - n^2 \right] v_1 = 0 \quad (32)$$

Якщо зробити підставлення в рівнянні (31) або (32):

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} - \lambda \right) = \operatorname{sh} \vartheta = t; \quad \operatorname{ch} \vartheta = \frac{dt}{d\vartheta} \quad (33)$$

далі:

$$\frac{dv_1}{d\vartheta} = \operatorname{ch} \vartheta \frac{dv_1}{dt}, \quad \frac{d^2 v_1}{d\vartheta^2} = (1+t^2) \frac{d^2 v_1}{dt^2} + t \frac{dv_1}{dt}$$

одержимо:

$$t^2 (1+t^2) \frac{d^2 v_1}{dt^2} + t^3 \frac{dv_1}{dt} - \left( n^2 t^2 - \frac{1}{4} \right) v_1 = 0 \quad (34)$$

До такого вигляду зводить рівняння Ріман.

Зведемо, насамперед, це рівняння до звичайної форми гіпергеометричного, або, так званого, Гаусового рівняння.

Для цього зробимо підставлення в (34):

$$\tau = -t^2; \quad \frac{d\tau}{dt} = -2t, \quad (35)$$

попередньо маємо:

$$\frac{dv_1}{dt} = -2t \frac{dv_1}{d\tau}; \quad \frac{d^2 v_1}{dt^2} = -4\tau \frac{d^2 v_1}{d\tau^2} - 2 \frac{dv_1}{d\tau} \quad (36)$$

Отже:

$$\frac{d^2 v_1}{d\tau^2} + \frac{1-2\tau}{2\tau(1-\tau)} \frac{dv_1}{d\tau} + \frac{4n^2\tau+1}{16\tau^2(1-\tau)} v_1 = 0 \quad (37)$$

Ми бачимо, що це рівняння типу Фукса<sup>1)</sup>, яке має особливості в точках  $(0, 1, \infty)$ ; характеристичні показники цього рівняння є  $\left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right); \left( 0, \frac{1}{2} \right); \left( \frac{n}{2}, -\frac{n}{2} \right)$ . Тоді інтеграл рівняння (37) можна записати в зазначенні Рімана так:

$$v_1(\tau) = P \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{n}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{n}{2} \end{array} \tau \quad (38)$$

Для остаточного зведення гіпергеометричного рівняння, зробимо ще дальше підставлення в (37):

$$v_1 = \tau^{\frac{1}{4}} w;$$

<sup>1)</sup> Див., напр., Schlesinger, Differentialgleichungen, або Смирнов, Курс анализа, ч. III.

одержимо для  $w(\tau)$  таке рівняння:

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + \frac{2-3\tau}{2\tau(1-\tau)} \frac{dw}{d\tau} + \frac{4n^2-1}{16\tau(1-\tau)} w = 0 \quad (39)$$

Розв'язок цього рівняння можемо записати так:

$$w_i(\tau) = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \tau \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{n}{2} + \frac{1}{4} \end{Bmatrix}$$

Рівняння (39) і є шукане Гаусове, або гіпергеометричне, рівняння. Його, взагалі, записують так:

$$\tau(1-\tau) \frac{d^2 w}{d\tau^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\tau] \frac{dw}{d\tau} - \alpha\beta w = 0 \quad 40$$

В нашому випадку:

$$\alpha = \frac{n}{2} + \frac{1}{4}, \quad \beta = -\frac{n}{2} + \frac{1}{4}, \quad \gamma = 1 \quad (41)$$

Для рівняння (40) добре відомі розкладання інтеграла  $w(\tau)$  навколо довільної точки площини комплексного змінного  $\tau$ .

Які розклади потрібні для визначення потенціалу в довільній точці простору? При запровадженні кільцевих координат,  $\lambda$  змінюється від 0 до 1;  $\vartheta = -\lg \lambda$  при цьому змінюється від  $\infty$  до 0;  $t = \text{sh } \vartheta$  змінюється від  $\infty$  до 0;  $i$ , нарешті,  $\tau$  змінюється від  $-\infty$  до 0.

Отже, нам потрібно обчислювати  $w$  для всіх від'ємних значень  $\tau$ , тобто розклади повинні охопити всі точки комплексної площини  $\tau$ . Для цього ми розглядаємо розклад навколо початку координат ( $\tau=0$ ) і навколо нескінченно далекої точки ( $\tau=\infty$ ). Розклад навколо точки  $\tau=0$  (що не стає нескінченно великим при  $\tau=\infty$ ) буде, як відомо:

$$w(\tau) = F(\alpha, \beta, \gamma, \tau) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} \tau + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} \tau^2 + \dots \quad (42)$$

Що цей розклад задовольняє рівняння (40), легко перевірити і через безпосереднє його підставлення в це рівняння.

В нашому випадку, коли  $\alpha, \beta, \gamma$  визначаються з рівностей (41), ряд (42) збігається для всіх значень  $\tau$ , що модулем менші або дорівнюють одиниці:

$$|\tau| \leq 1$$

Щоб  $v_1 = \tau^{\frac{1}{4}} w$  при від'ємному  $\tau$  ( $-1 \leq \tau \leq 0$ ) залишалось дійсним, ми візьмемо:

$$w_n(\tau) = (-1)^{-\frac{1}{4}} F(\alpha, \beta, \gamma, \tau), \quad (43)$$

де індекс  $n$  вказує на відповідні значення  $\alpha, \beta$ .

Тоді

$$v_1 = |\tau|^{\frac{1}{4}} F(\alpha, \beta, \gamma, \tau) \quad (44)$$

Розклад навколо точки  $\tau = \infty$ , що відповідає нашому випадкові і задовольняє умови дійсності інтеграла  $v_1$ , має вигляд:

$$w_n(\tau) = (i)^n \cdot \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}} F\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}, \frac{n}{2} + \frac{1}{4}, 1 - n, \frac{1}{\tau}\right) \quad (45)$$

Цей ряд збігається для всіх значень  $\tau$  модулем більших за одиницю:

$$|\tau| > 1$$

Отже, ми бачимо, що ряди (42), (43) і (45) дають можливість обчислити значення  $w(\tau)$  та  $v_1(\tau)$  для всіх значень  $\tau$ .

Підставляючи знайдені значення  $v_1$  та  $v_2$  в (29) і взявши суму за  $n$ , маємо розв'язок рівняння (26) у вигляді:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{\frac{1}{4}} w_n(\tau) (a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega), \quad (46)$$

де, як зазначено вже вище,

$$\tau = -\operatorname{sh}^2 \theta = -\left(\frac{1 - \lambda^2}{2\lambda}\right)^2 \quad (47)$$

Для потенціалу кільця  $u$  через підставлення (24) і (46) в (11), одержимо такий вираз:

$$u = \frac{v}{\sqrt{\eta}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{\frac{1}{4}} w_n(\tau) (a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega),$$

де  $a_n, b_n$  — сталі, які ми повинні визначити з граничної умови ( $u = u_0 = \text{const}$ , при  $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$ ). Маємо:

$$\frac{u_0}{\sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos \omega + \lambda_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{a} \sqrt{1 - \lambda_0^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \tau_0^{\frac{1}{4}} w_n(\tau_0) \right] (a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega) \quad (48)$$

Отже, щоб визначити коефіцієнти  $a_n, b_n$ , треба розкласти ліву сторону рівняння (48) в тригонометричний ряд. Будемо мати:

$$\left(1 - 2\lambda_0 \cos \omega + \lambda_0^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda_0) \cos n\omega, \quad (49)$$

при чому <sup>1)</sup>:

$$A_0(\lambda_0) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda_0^2\right)$$

$$A_n(\lambda_0) = 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \lambda_0^n F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + n, 1 + n, \lambda_0^2\right) \quad (50)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

<sup>1)</sup> Див. Tisserand, Mécanique céleste, t. I, p. 270–279.

Підставлення (49) в (48) і порівняння лівої та правої сторони дає:

$$a_n = u_0 \sqrt{a} \frac{A_n(\lambda_0) \sqrt{1 - \lambda_0^2}}{\left| \tau_0^{\frac{1}{4}} \omega_n(\tau_0) \right|}, \quad b_n = 0 \quad (51)$$

Тоді, остаточно, рівняння потенціалу кільця буде:

$$u = u_0 \sqrt{\frac{1 - \lambda_0^2}{1 - \lambda^2}} \sqrt{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\lambda_0) \frac{\left[ \tau^{\frac{1}{4}} \omega_n(\tau) \right]}{\left[ \tau_0^{\frac{1}{4}} \omega_n(\tau_0) \right]} \cdot \cos n\omega \quad (52)$$

або, на підставі (47):

$$u = u_0 \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda} \left( \frac{-\tau_0}{-\tau} \right)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda_0) \frac{\left[ \tau^{\frac{1}{4}} \omega_n(\tau) \right]}{\left[ \tau_0^{\frac{1}{4}} \omega_n(\tau_0) \right]} \cdot \cos n\omega \quad (53)$$

Докладне дослідження потенціалу кільця і відповідного йому силового поля будемо провадити далі.

Я подам ще потенціал нескінченно тонкого кільця, а потім порівняю його з потенціалом кільця скінченної товщини.

§ 3. *Потенціал досить тонкого кільця.* Розглянемо в площині  $xz$  таке тонке кільце, що ми переріз його будемо вважати за геометричну точку. Радіус кільця позначимо через  $a$ . Вісь  $z$  скеруємо нормально до площини кільця з його центра.

Через те, що ми маємо випадок осьової симетрії, досить визначити потенціал в якійсь точці  $P$  площини  $xz$ ; координати точки  $P$  позначимо  $(\eta, 0, \xi)$ , що збігається з зазначенням попередніх параграфів. Довільну точку кільця позначимо через  $M$ ; її Декартові координати  $(x, y)$ , а полярні координати  $(a, \psi)$ :

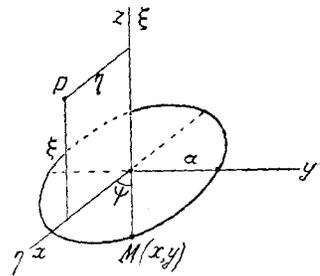


Рис. 5.

$$\begin{aligned} \text{Маємо:} \quad x &= a \cos \psi \\ y &= a \sin \psi \end{aligned} \quad (54)$$

Віддаль  $\Delta$  між точками  $P$  і  $M$  буде:

$$\Delta = \sqrt{(x - \eta)^2 + y^2 + \xi^2} = \sqrt{a^2 + r^2 - 2a\eta \cos \psi}, \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2$$

Зазначимо лінійну щільність електрики через  $\gamma$ ; тоді потенціал кільця  $u$  в точці  $P$  буде:

$$u(\xi, \eta) = \gamma a \int_0^{2\pi} \frac{c \psi}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2a\eta \cos \psi}} \quad (55)$$

Можна легко звести його до канонічного вигляду. Для цього зробимо заміну змінної в (55):

$$\psi = \pi - 2\theta, \quad \cos \psi = -\cos 2\theta = -(1 - 2 \sin^2 \theta), \quad d\psi = -2d\theta$$

$$u(\xi, \eta) = 2a\gamma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2a\eta - 4a\eta \sin^2 \theta}} \quad (56)$$

Зазначимо далі

$$k^2 = \frac{4a\eta}{(a+\eta)^2 + \xi^2} \leq 1 \quad (57)$$

Тоді рівняння (56) можна переписати так:

$$u(\xi, \eta) = \frac{4a\gamma}{\sqrt{(a+\eta)^2 + \xi^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{4a\gamma}{\sqrt{(a+\eta)^2 + \xi^2}} E(k), \quad (58)$$

при чому:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right) \quad (59)$$

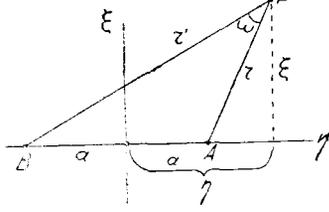


Рис. 6.

Цей інтеграл, як відомо, є повний еліптичний інтеграл першого роду.

Якщо запровадити кільцеві координати  $(\lambda, \omega)$ , то будемо мати:

$$r' = \sqrt{(a+\eta)^2 + \xi^2} = \frac{2a}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}} \quad (60)$$

[за формулою (24)].

$$k^2 = 1 - \lambda^2; \quad \lambda^2 = 1 - k^2 = k'^2; \quad \lambda = k' \quad (61)$$

$k'$  є так званий доповнюючий модуль еліптичного інтеграла (59).

Підставляючи (60), (61) в (58), одержимо потенціали нескінченно тонкого кільця в кільцевих координатах:

$$\begin{aligned} u(\lambda, \omega) &= 2\gamma \sqrt{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2} E(\sqrt{1 - \lambda^2}) = \\ &= \pi\gamma \sqrt{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 - \lambda^2\right) \end{aligned} \quad (62)$$

На підставі рівності (60) можна потенціал нескінченно тонкого кільця представити так:

$$u = \frac{2\pi a\gamma}{r'} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 - \lambda^2\right) \quad 63$$

Простежимо тепер загальний хід потенціалу.

Значення потенціалу на самому кільці дорівнює нескінченності. Дійсно покладемо:

$$\xi = 0; \quad \eta = a;$$

маємо за (55):

$$u(0, a) = \gamma a \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{2a^2(1 - \cos \psi)}} = \gamma \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\sin \frac{\psi}{2}} = 2\gamma \lg \operatorname{tg} \frac{\psi}{4} \Big|_0^{\pi} = 2\gamma \cdot \infty = \infty$$

В центрі кільця ( $\xi = 0, \eta = 0$ ) маємо:

$$u(0, 0) = 2\pi\gamma = \frac{e}{a},$$

де  $e = 2\pi\gamma a$  — заряд кільця.

Загальний вираз потенціалу на осі ( $\eta = 0$ ) буде:

$$u(\xi, 0) = \frac{e}{\sqrt{a^2 + \xi^2}}$$

7. X 1934

Институт физики Всеукраинской Академии Наук (Киев)

### Кольцевая электронная линза

В. Дяченко

Резюме

В этой работе, которая представляет первую часть общего рассмотрения кольцевой электронной линзы, дано в явном виде выражение потенциала кольца (конечной и бесконечно малой толщины) [формулы (53) и (58)]. При выводе потенциала кольца конечной толщины были использованы геометрические обозначения К. Неймана и аналитический путь Б. Римана.

Institute of Physics of the All-Ukrainian Academy of Sciences

### The ring electron lens

V. Diatchenko

Summary

In this paper, which represents the first part of a general study of a ring electron lens, is given an evidentiary expression for the potential of a ring (of finite and infinitely-small thickness) [formulae (53) and (58)]. For the determination of the potential of a ring of finite thickness were utilized the geometric designations of K. Neuman and the analytical method of B. Riemann.

Інститут фізики Всеукраїнської Академії Наук (Київ)

## Обчислення електроємності кільця

В. Є. Дяченко і І. І. Сахаров

§ 1. Теорію потенціалу кільця з круглим меридіональним перерізом вперше накреслив В. Рієманн<sup>1)</sup>. Розв'язок доведено до тригонометричних рядів, коефіцієнти яких є інтеграли гіпергеометричного рівняння.

Докладну теорію розподілу електрики на поверхні кільця подав С. Неуманн в монографії: „Theorie der Elektrizität und Wärme Vertheilung in einem Ringe“ (1864).

Основні координати, в яких розв'язується згадана задача, зустрічаються ще раніш у В. Томсона<sup>2)</sup> (1845 і 1846).

Теорію питання подано також у книзі Е. Гейне: „Handbuch der Kugelfunktionen“ (Zweiter Band).

В цій статті ми подаємо вказівки до виводу формул, зв'язаних з питанням електроємності кільця, а також наближені вирази для обчислення електричної ємності.

Ці результати будуть нами далі поширені і використані при розгляді нової схеми електронної лінзи, електричне поле якої визначається системою кілець.

§ 2. *Кільцеві координати.* Уявимо собі кільце з круглим меридіональним перерізом  $Q$  (рис. 1). Екваторіальну площину кільця візьмемо за площину  $ux$  Декартової системи координат з початком у центрі кільця. Вісь  $z$  скеруємо так, аби утворити праворучну систему координат.

Розглянемо певну меридіональну площину (рис. 2), що проходить через вісь  $z$  і утворює кут  $\varphi$  з площиною  $xz$ . Декартові координати в цій площині позначимо через  $\xi$ ,  $\eta$ . Візьмемо на осі  $\eta$  дві довільних точки  $A$  і  $B$ , що лежать на рівній віддалі  $a$  від початку координат. Далі, сполучимо довільну точку  $P$  верхньої півплощини прямими з точками  $A$  і  $B$  і позначимо відповідні відрізки  $r$  і  $r'$  (при чому  $r \leq r'$ ). Тоді, за визначенням,  $\lambda$  і  $\omega$  (де  $\angle APB = \omega$  і  $\frac{r}{r'} = \lambda$ ) будуть кільцевими координатами точки

$P$ . Для точки  $P'$  нижньої півплощини кільцева координата  $\omega = \angle AP'C$ . Координатна лінія  $\omega = \text{const}$  — є дуга кола, що проходить через точки  $ABP$ , а координатна лінія  $\lambda = \text{const}$  є коло, при чому точка  $A$  міститься

<sup>1)</sup> В. Riemann, Gesammelte Werke, 1876, S. 407—412.

<sup>2)</sup> Liouville, Journal XII, 256—263.

всередині його. Координати  $\lambda, \omega$  однозначно визначають точку півплощини  $\eta \geq 0$ , що ми і будемо далі припускати.

Для точок осі симетрії  $O\xi$ , а також для нескінченно далеких точок  $\lambda=1$ ; для точки  $A$ :  $\lambda=0$ . Для останніх точок півплощини  $\lambda$  міститься

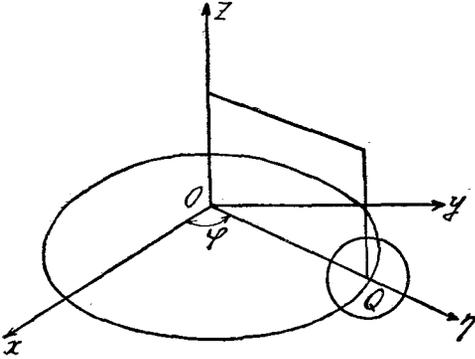


Рис. 1.

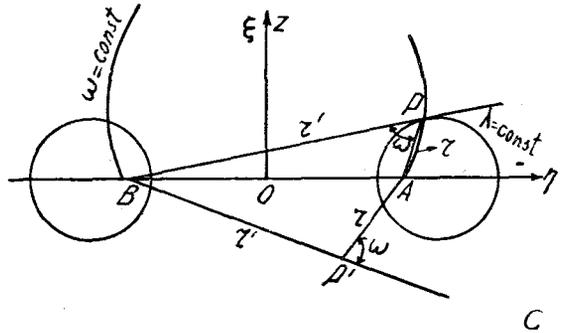


Рис. 2.

між 0 і 1. Координата  $\omega$  міняється від 0 до  $2\pi$ . Таким чином, положення точки в просторі однозначно визначено кільцевими координатами  $\varphi, \lambda, \omega$ .

§ 3. *Заряд і електроємність кільця.* Розглянемо провідник у формі кільця з круглим меридіональним перерізом. Геометричні розміри кільця

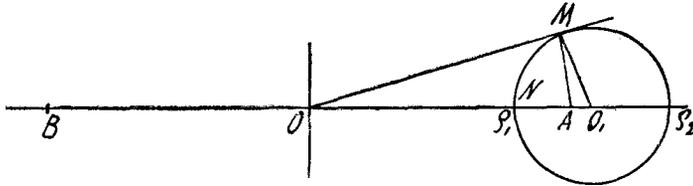


Рис. 3.

визначимо абсцисами  $\rho_1, \rho_2$  найближчої і найбільш віддаленої точок поверхні від центра кільця.

Віддалення  $\overline{OA} = a$  визначається з  $\triangle OO_1M$ , а саме  $\overline{OM} = a = \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}$ . Далі, значення кільцевої координати  $\lambda = \text{const}$  визначається так (взявши до уваги, що координата  $\lambda$  на всій поверхні кільця стала, можна значення її обчислити, наприклад, для точки  $N$ ):

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = c = \frac{a - \rho_1}{a + \rho_1} = \frac{\sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2} - \rho_1}{\sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2} + \rho_1}$$

при чому відповідно для точок всередині і зовні кільця  $\lambda \geq c$ .

Сталий потенціал  $V$  внутрішньої точки кільця (і точки поверхні) буде  $V = \int T_{is} e_s d\sigma_s$ , де  $T_{is}$  — обернена величина віддалення змінної точки, розташованої на поверхні, якій відповідає індекс  $s$  до довільної постійної точки всередині кільця з відповідним їй індексом  $i$ ;  $e_s$  — густина електричного заряду в точці  $s$  на елементі поверхні  $d\sigma_s$ .

Обчислення цього інтеграла, докладно подане в зазначеній вище роботі С. Нейштапп-а, дає такий результат: ємність кільця

$$K = \frac{e}{V} = 2a \sum_p \frac{I_p(c)}{A_p(c)}$$

де

$$\sum_p T_p = T_0 + 2T_1 + 2T_2 +$$

Звідси, загальний заряд кільця  $e = KV$  визначається за заданим потенціалом відносно нульового потенціалу на нескінченності.

В цих формулах:

$$I_p(c) = \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2p - 1}{p!} c^p F\left(\frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}, p + 1, c^2\right)$$

$$I_0(c) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, c^2\right)$$

$$A_p(c) = c^p F\left(\frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}, 1, 1 - c^2\right)$$

де

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1) \beta(\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} x^2 + \dots$$

гіпергеометричний ряд, що збігається для  $|x| \leq 1$ .

Для малих значень  $c$  можна відкинути в формулі електроємності кільця всі члени ряду, крім першого; тоді одержимо таку наближену формулу:

$$K \approx 2a \frac{I_0(c)}{A_0(c)} \approx \frac{2a}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 - c^2\right)} \quad (1)$$

Гіпергеометричний ряд, що стоїть у знаменнику цієї формули, має четвертий аргумент близький до одиниці, а тому для обчислення його можна використати наближену формулу:

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 - c^2\right) \approx \frac{2}{\pi} \lg \frac{4}{c}$$

Тоді одержимо наближену формулу для ємності кільця в такому вигляді:

$$K \approx \frac{\pi a}{4 \lg \frac{4}{c}} \quad (2)$$

Коли позначимо через  $\delta = r_2 - r_1$  діаметр кільця (товщина матеріалу)

і введемо  $R$ —середній радіус кільця, то для великих значень  $\frac{R}{\delta}$  можна прийняти таку наближену формулу:

$$K \approx \frac{\pi R}{\lg \frac{16 R}{\delta}} \quad (3)^1$$

Формула (2) показує, що електроємність кільця пропорційна (при малих і сталих значеннях  $c$ ) середньому геометричному з внутрішнього і зовнішнього радіусів кільця, тобто величині  $a = \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}$ .

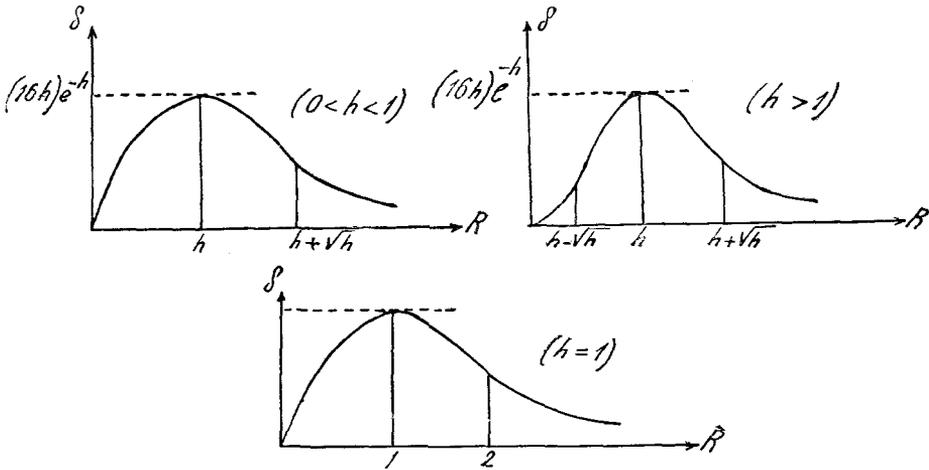


Рис. 4.

Крім того, відмітимо наближену залежність, що випливає з формули (3) між радіусом кільця  $R$  і товщиною кільця  $\delta$  при  $K = \text{const}$ .

Маємо:

$$\delta = (16R)^h e^{-R},$$

де  $h = \frac{K}{\pi}$  (на рис. 4 подано графіки цієї залежності).

Безпосередньо бачимо, що для того, аби зберегти сталу ємність кільця при збільшенні радіуса кільця  $R$ , треба збільшувати товщину  $\delta$  кільця, поки  $R < h$ , далі із збільшенням радіуса кільця треба товщину кільця зменшувати.

3. VI 1934

<sup>1)</sup> Формула (3) ідентична формулі, що наведена Ф. Ойлендорфф-ом (Potentialfelder der Elektrotechnik, с. 103, Berlin, Springer, 1932) для ємності кільця, у якого радіус матеріалу малий, порівнюючи з радіусом кільця.

Институт физики Всеукраинской Академии Наук (Киев)

## Вычисление емкости кольца

В. Е. Дяченко и И. И. Сахаров

### Резюме

В настоящей статье мы даем указание для вывода формул, относящихся к вопросу емкости кольца с круглым меридиональным сечением, а также приближенные выражения для емкости кольца.

Нами вычислены следующие приближенные формулы:

1. Емкость кольца

$$K \cong \frac{2a}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-c^2\right)} \quad (1)$$

где  $a = \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}$  и  $\rho_1$  и  $\rho_2$  соответственно внутренний и внешний радиусы кольца,  $c = \frac{a - \rho_1}{a + \rho_1}$  и  $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-c^2\right)$  — гипергеометрический ряд.

2.

$$K \cong \frac{\pi a}{\lg \frac{4}{c}} \quad (2)$$

3. Если ввести  $R$  как средний радиус кольца  $\left(R = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right)$  и обозначить  $\delta = \rho_2 - \rho_1$  — диаметр (толщина материала кольца), то получим (при больших значениях  $\frac{R}{\delta}$ ):

$$K \cong \frac{\pi R}{\lg \frac{16 R}{\delta}} \quad (3)$$

Physikalisches Institut der AllUkrainischen Akademie der Wissenschaften

## Berechnung der Elektrokapazität des Ringes

W. Djatschenko und I. Sacharoff

### Zusammenfassung

In diesem Bericht geben wir die Zusammenfassung der Formeln betreffs der Frage der Elektrokapazität des Ringes mit rundem meridionalem Durchschnitt. Wir haben folgende annähernde Formeln ausgerechnet:

1. Die Kapazität des Ringes

$$K \cong \frac{2a}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-c^2\right)} \quad (1)$$

wo  $a = \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}$  ( $\rho_1$  und  $\rho_2$  sind entsprechend der innere und der äussere Radius des Ringes),

$$c = \frac{a - \rho_1}{a + \rho_1}$$

und

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 - c^2\right)$$

eine hypergeometrische Reihe ist.

2. Wenn aber  $c$  so klein ist, erhalten wir eine noch einfachere Formel

$$K \approx \frac{\pi a}{\lg \frac{4}{c}} \quad (2)$$

3. Wenn man  $R$ , als mittleren Radius des Ringes  $\left(R = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right)$  einführt und  $\delta = \rho_2 - \rho_1$  als Durchmesser des Ringes bezeichnet (Dicke des Materials) so erhält man (bei grösseren Werten  $\frac{R}{\delta}$ ):

$$K \approx \frac{\pi R}{\lg \frac{16 R}{\delta}} \quad 5$$

Інститут фізики Всеукраїнської Академії Наук (Київ)

## До питання геометричної електродоптики

I. I. Сахаров

За останні роки широко розгорнуто роботу по дослідженню оптичних властивостей електронних променів<sup>1)</sup>, зокрема дослідження електронних лінз і електронного мікроскопа. Ці дослідження відкривають зовсім нову галузь вивчення фізичних явищ, що, за аналогією із світловими променями, може бути названа геометричною електродоптикою.

Вказівки на аналогію між шляхами матеріальної точки й світлового променя ми маємо в Hamilton-овій оптиці неоднорідного середовища.

Як найпростіший випадок цієї аналогії, можна розглядати рух зарядженої часточки — електрона в однорідному електричному полі. Встановлено, що нескінченно тонкий подвійний електричний шар, який може пропускати електрони, діє на електронний потік, скерований на нього, так само, як середовище з різними показниками заломлення на світлові промені, і показник заломлення визначається рівнянням:

$$n = \sqrt{1 + \frac{E_0}{E}},$$

де  $E_0$  — різниця потенціалів електричного шару,  $E$  — швидкість електронів у вольтах.

В цьому рівнянні  $E_0$  може набувати всіх значень від  $-\infty$  до  $+\infty$ . Тому ми можемо довільно міняти показник заломлення, утворюючи для електронних променів подвійним електричним шаром різного типу оптичні системи: призми, лінзи і т. д.

Історично електронна лінза постала з практичної проблеми збирання на дуже малій поверхні електронного потоку з джерела виходу електронів (катодний осцилограф). Явище збирання електронних променів було відоме ще в минулому столітті. Е. Рієске в 1881 р. вперше подав теорію руху електронів в однорідному магнітному полі і встановив, що однорідним магнітним полем від довгої магнітної шпулі можна збирати електронний потік. Справді, якщо електрон маси  $m$  і заряду  $e$  рухається із швидкістю  $v$ , що утворює кут  $\alpha$  з напрямом магнітного поля  $H$ , то, розклавши швидкість на повздовжню складову  $v_1 = v \cos \alpha$ , яка не змінюється під впливом поля, і поперечну  $v_2 = v \sin \alpha$ , яка буде міняти напрям так, що проекції шляхів електронів на площину, нормальну до силових ліній поля, будуть кола з радіусом  $\rho = \frac{mv_2}{eH}$ , для шляхів електронів

<sup>1)</sup> Під електронними променями слід розуміти катодні промені.

одержимо гвинтові лінії. Оскільки час обходу одного повного обороту гвинтової лінії буде  $\tau = \frac{2\pi m}{eH}$ , то електрони, що вийшли в певний момент з однієї точки, через повний оборот або  $n$  оборотів (де  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) знову попадуть на ту силову лінію магнітного поля, що проходить через точку виходу.

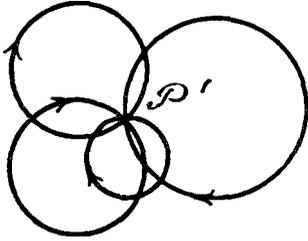


Рис. 1. Проекції електронних шляхів на площину, нормальну до магнітного поля

При умові, що повздовжня швидкість для всіх електронів однакова, електрони зберуться в одній точці  $P'$ . Якщо взяти проекції траєкторії руху різних електронів на площину, нормальну до напрямку поля, то одержимо кола, що перерізаються в спільній точці (рис. 1).

Практично для утворення магнітного поля вживаються короткі магнітні шпулі. Ці шпулі утворюють неоднорідне магнітне поле. Тому в 1926—1927 р. Busch-ем<sup>1)</sup> теоретично було розглянуто питання руху електронів у неоднорідному магнітному полі й встановлено, що поле короткої магнітної шпулі діє на електронні промені так само, як оптична лінза на світлові.

Отже, по суті галузь геометричної електроніки можна звести до розгляду поведінки електронів у магнітному й електричному полях. Підбором відповідної конфігурації поля ми можемо з електронними променями одержувати явища, аналогічні світловим променям. Тепер особливий інтерес викликають електронні лінзи й електронний мікроскоп. Конструктивно як електронна лінза, так і мікроскоп подібні до відомої Браунівської трубки: на шляху електронів встановлюється відповідно електроннооптична система (магнітна шпуля або електричний шар). На екрані, що флюорескує, можна одержувати побільшене відображення об'єкта, що вилучає потік електронів, або здібний пропускати електронні промені.

Експериментальна перевірка теорії дала гарні наслідки. Останніми роботами Е. Руска<sup>2)</sup> електронним мікроскопом з магнітною лінзою одержано побільшення близько 12 000 раз і припускається можливість довести побільшення до 50 000 раз.

Для теоретичного розгляду питання про „розрешающую силу“<sup>3)</sup> електронного мікроскопа можна виходити з того, що за de Broglie, довжина хвилі рівна  $\frac{h}{mv}$ , де  $h$  — стала Планка, рівна  $6,54 \cdot 10^{-27}$ ,  $m$  — маса електрона, а  $v$  — його швидкість. Отже, при великих швидкостях електронів, тобто при великих напругах збудження, довжина хвилі стає дуже малою. Як відомо, „розрешающая сила“ мікроскопа за Abbe визначається:

$$d = \frac{\lambda}{A} \text{ (см)},$$

де  $\lambda$  — довжина хвилі,  $A$  — апертура.

<sup>1)</sup> Н. Busch, Ann. d. Phys., 81, 974, 1926; Arch. f. Elektr., 18, 583, 1927.

<sup>2)</sup> Е. Ruska, Zeitschr. f. Phys., 87, 580, 1934.

<sup>3)</sup> Залишаємо російський термін, тому що український остаточно не ухвалено. Ред.

Для звичайного мікроскопа  $\lambda = 0,550 \mu$ ,  $A = 1,3$  і  $d_s \approx 0,4 \mu$ .  
Якщо довжину хвилі, за de Broglie, прийняти:

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{E}} 10^{-8} \text{ см},$$

де  $E$  — швидкість електронів у вольтах, то для

$$E = 1500 \text{ V: } \lambda = 3 \cdot 10^{-5} \mu$$

$$E = 75\,000 \text{ V: } \lambda = 4,5 \cdot 10^{-6} \mu$$

Для апертури дослід дає  $A = 0,02$ . Тоді „разрешающая сила“ електронного мікроскопа буде

$$d_e \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \mu \quad \text{для } 1500 \text{ V}$$

$$d_e \approx 0,22 \cdot 10^{-3} \mu \quad \text{„ } 75\,000 \text{ V}$$

Ці дані вказують, що „разрешающая сила“ електронного мікроскопа більша, ніж звичайного, і лежить у межах атомних розмірів.

Поруч з магнітними лінзами розроблюються електричні лінзи. Наявний теоретичний і експериментальний матеріал дає лише попередні відомості з галузі електричних лінз, що вимагають докладнішого розгляду. Практично ж дуже важливо розв'язати питання електричної лінзи, бо сполукою магнітної і електричної лінзи може бути здійснена ахроматична електронна лінза.

Матеріал огляду складається з двох частин: у першій частині буде подано теорію магнітної лінзи, в другій — розглянуто питання електричних лінз.

Докладний список літературних джерел буде подано в другій частині.

#### Частина перша

#### Магнітна лінза

§ 1. Траекторія руху електронного проміння в електромагнітному полі аксіальної симетрії. З електродинаміки відомо, що на електрон з зарядом  $e$ , що рухається в електричному полі напруги  $\mathcal{E}$  із швидкістю  $v$ , буде діяти пондеромоторна сила:

$$F_1 = e\mathcal{E}$$

а в магнітному полі  $H$ :

$$F_2 = e[v \cdot H]$$

Сила  $F_2$  за визначенням завжди нормальна до переміщення електрона  $v$  і напруги поля  $H$ , а тому магнітне поле не змінює величини швидкості ( $v = \text{const}$ ), а змінює лише її напрям.

Якщо ж електрон одночасно рухається в електричному і магнітному полі, то сила, що діє на нього, за Lorentz-ом:

$$F = F_1 + F_2$$

Позначимо масу електрона через  $m$  і розглянемо швидкості, що будуть малими порівнюючи із швидкістю світла, так що можна прийняти

$m = \text{const}$ , і диференціальне рівняння руху електрона в електромагнітному полі буде:

$$mp = e + e\mathcal{E} [v \cdot H], \quad 1$$

де  $p$  — прискорення, або в проєкціях на осі Декартової системи координат:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = eX + eH_z \frac{dy}{dt} - eH_y \frac{dz}{dt}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = eY + eH_x \frac{dz}{dt} - eH_z \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = eZ + eH_y \frac{dx}{dt} - eH_x \frac{dy}{dt}$$

Розглянемо рівняння руху для того випадку, коли електростатичне поле задано через потенціал  $V$ :

$$\mathcal{E} = -\text{grad } V, \quad (2)$$

а магнітне поле — через векторний потенціал  $\mathcal{A}$ :

$$H = \text{curl } \mathcal{A}; \quad (3)$$

тоді проєкції напруги електричного поля будуть:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

і магнітного:

$$H_x = \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial z}$$

$$H_y = \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x}$$

$$H_z = \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial y}$$

і відповідно в циліндричних координатах  $r, \varphi, z$ :

$$R = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad H_r = \frac{\partial \mathcal{A}_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \mathcal{A}_\varphi}{\partial z}$$

$$\Phi = -\frac{\partial V}{r \partial \varphi} \quad H_\varphi = \frac{\partial \mathcal{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial r}$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathcal{A}_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial \mathcal{A}_r}{r \partial \varphi}$$

Отже, загальні рівняння руху в циліндричних координатах будуть:

$$\frac{1}{\eta} p_r = v_\varphi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathcal{A}_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial \mathcal{A}_r}{r \partial \varphi} \right) - v_z \left( \frac{\partial \mathcal{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{1}{\eta} p_\varphi = v_z \left( \frac{\partial \mathcal{A}_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \mathcal{A}_\varphi}{\partial z} \right) - v_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathcal{A}_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial \mathcal{A}_r}{r \partial \varphi} \right) - \frac{\partial V}{r \partial \varphi}$$

$$\frac{1}{\eta} p_z = v_r \left( \frac{\partial \mathcal{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial r} \right) - v_\varphi \left( \frac{\partial \mathcal{A}_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \mathcal{A}_\varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial V}{\partial z},$$

де  $\eta = \frac{e}{m}$ .

Або введемо оператор:

$$\frac{d}{dt} = v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\varphi \frac{\partial}{r \partial \varphi} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} p_r &= v_\varphi \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathcal{M}_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial r} + v_r \frac{\partial \mathcal{M}_r}{\partial r} - \frac{d \mathcal{M}_r}{dt} - \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{\eta} p_\varphi &= v_z \frac{\partial \mathcal{M}_z}{r \partial \varphi} + v_r \frac{\partial \mathcal{M}_r}{r \partial \varphi} + v_\varphi \frac{\partial \mathcal{M}_\varphi}{r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{d(r \mathcal{M}_\varphi)}{dt} - \frac{\partial V}{r \partial \varphi} \\ \frac{1}{\eta} p_z &= v_r \frac{\partial \mathcal{M}_r}{\partial z} + v_\varphi \frac{\partial \mathcal{M}_\varphi}{\partial z} + v_z \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial z} - \frac{d \mathcal{M}_z}{dt} - \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

В дальшому обмежимося розглядом частинного випадку. Припустимо, що електронний промінь виходить з точки  $P$ , яка лежить на осі  $z$  циліндричної координатної системи; а електростатичне поле  $\mathcal{E}$  і магнітне  $H$  мають аксіальну симетрію (остання умова справджується для точно намотаної магнітної шпулі). Умови симетрії вимагають, щоб  $H_\varphi = 0$ , а для цього досить, щоб  $\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_z = 0$ ; тоді залишаються лише компоненти

$$\mathcal{M}_\varphi = A; \quad \frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$$

відповідно для аксіально симетричного електростатичного поля:

$$\frac{\partial V}{r \partial \varphi} = 0$$

При цих умовах розглянемо рівняння руху:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} p_r &= v_\varphi \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{\eta} p_\varphi &= - \frac{1}{r} \frac{d(rA)}{dt} \\ \frac{1}{\eta} p_z &= v_\varphi \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \quad (5)$$

і визначимо компоненти прискорення  $p_r$ ,  $p_\varphi$  і  $p_z$  через похідні координат по часу. На підставі рівняння Lagrange другого роду будемо мати:

$$\frac{1}{\eta} p_r = \frac{1}{\eta} (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = v_\varphi \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (6a)$$

$$\frac{1}{\eta} p_\varphi = \frac{1}{\eta} (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = - \frac{1}{r} \frac{d(rA)}{dt} \quad (6b)$$

$$\frac{1}{\eta} p_z = \frac{1}{\eta} \ddot{z} = v_\varphi \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z} \quad (6c)$$

Розглянемо рівняння (6b); його можна записати так:

$$r^2 \ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = - \eta \frac{d(rA)}{dt};$$

інтегруємо:

$$r^2 \dot{\varphi} = - \eta r A + \text{const}; \quad v_\varphi = r \dot{\varphi} = - \eta A; \quad (7c)$$

член  $\text{const}/r$  відкидаємо тому, що ми розглядаємо шляхи електронів, які проходять через вісь ( $r=0$ ), де  $v_\varphi$  повинно мати скінченне значення.

Одержане значення для  $v_\varphi$  вставимо в рівняння (6a) і (6c), і остаточно рівняння руху електронів можна записати в такій формі:

$$\ddot{r} = -\eta^2 A \frac{\partial A}{\partial r} - \eta \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \eta^2 A^2 + \eta V \right) \quad 7a$$

$$\ddot{z} = -\eta^2 A \frac{\partial A}{\partial z} - \eta \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \eta^2 A^2 + \eta V \right) \quad 7b$$

$$v_\varphi = -\eta A \quad 7c$$

Застосуємо ці рівняння для досить вузького електронного променя, тоді, приймаючи, що  $r$  порівнюючи мала величина, можна  $A$  і  $V$  розкласти по степенях  $r$ , при чому зауважимо, що магнітне поле вільне від вихорів (власним полем електронних променів нехтуємо), і

$$\text{curl curl } \mathfrak{A} = 0$$

Розклад в ряд дає:

$$A = \frac{r}{2} H_0(z) - \frac{r^3}{2^2 \cdot 4} H_0''(z) + \frac{r^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} H_0^{(IV)}(z) - \dots, \quad 8$$

де  $H_0(z)$  сила поля на осі  $z$  ( $r=0$ ),  $H_0''(z)$ ,  $H_0^{(IV)}(z)$ ... і т. д.— похідні по  $z$ . Аналогічно для електростатичного поля:

$$V = g(z) - \frac{r^2}{2^2} g_2(z) + \frac{r^4}{4^2} g_4(z) - \dots, \quad 9$$

де:

$$g_2(z) = g''(z) + a_0(z), \quad g_4(z) = \frac{1}{2^2} g^{(IV)}(z) + \frac{1}{2^2} a_0''(z) - a_2(z)$$

.....

а  $g(z)$ — сила електричного поля на осі  $z$ , і  $a_0(z)$ ,  $a_2(z)$ ... коефіцієнти розкладу в ряд просторового заряду  $\rho$  по степенях  $r$  в рівнянні Poisson'a:

$$4\pi\rho = a_0(z) + r^2 a_2(z) + \dots$$

Після підставлення (8) і (9) в рівняння (7a) і (7b) одержимо:

$$\ddot{r} = -r \left[ \frac{\eta^2}{4} H_0^2(z) - \frac{\eta_1}{2} g_2(z) \right] + r^3 \left[ \frac{\eta^2}{8} H_0(z) H_0''(z) - \frac{\eta}{4} g_4(z) \right] + \dots \quad 10a$$

$$\ddot{z} = -\eta g'(z) - r^2 \left[ \frac{\eta^2}{4} H_0(z) H_0'(z) - \frac{\eta_1}{4} g_2'(z) \right] + \dots \quad 10b$$

Прийнявши промінь остільки вузьким, що членами другої і вищих степенів  $r$  можна нехтувати, одержимо:

$$\ddot{r} = -r \left[ \frac{\eta^2}{4} H_0^2(z) - \frac{\eta}{2} g_2(z) \right] \quad 11a$$

$$\ddot{z} = -\eta g'(z),$$

або після інтегрування:

$$\dot{z}^2 = v_0^2 - 2\eta g(z), \quad 11b$$

де  $v_0$ — стала інтегрування, що визначає початкову повздовжню швидкість

електронів. Для вузького променя однорідних швидкостей можна вважати, що  $v_0$  для всіх електронів є однаковою.

Розглянемо лише ті електрони, що залишають вихідну точку  $P$  одночасно, — тоді з рівняння (11b) виходить, що  $z$  залежить лише від  $t$ , а не від  $r$ , а разом з тим  $H_0(z)$  і  $g(z)$  можемо розглядати, як однозначні функції від  $t$ . Тому рівняння (11a) буде:

$$\ddot{r} = -rF(t), \quad (12)$$

де  $F(t)$  при досить значній силі магнітного поля буде величиною додатною. При цих припущеннях виходить, що  $\dot{r}$  буде мати знак протилежний  $r$ , тобто крива  $r(t)$  відносно осі увігнута і тим більше, чим далі її точки віддалені від осі  $t$ .

Отже виходить, що крива, яка має початок у точці  $P$  осі  $t$ , при досить сильному магнітному полі знову повертається до осі  $t$  і перетинає її в точці  $P'$ .

Важливо зазначити, що диференціальне рівняння (12) є лінійне і однорідне, а для такого рівняння справедливий закон: якщо ми знайшли розв'язок рівняння (12) —  $r_1(t)$ , то всі розв'язки, що відповідають кривим, які проходять через точку  $P$ , будуть записані у формі:

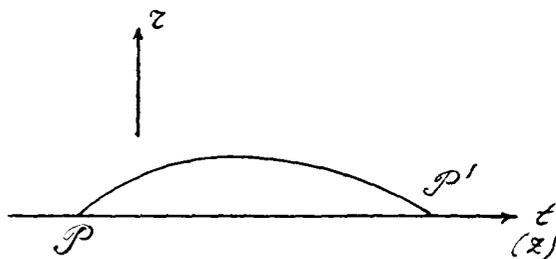


Рис. 2.

$r = C \cdot r_1(t)$ ,  
де  $C$  — стала інтегрування. Це означає, що всі інтегральні криві, які проходять через точку  $P$ , також повинні пройти через точку  $P'$ .

Як вище було відзначено,  $z$  залежить лише від  $t$ . Тому криві  $r(t)$  одночасно є криві  $r(z)$  (з відповідно зміненим масштабом абсцис). Тобто меридіанні криві електронних орбіт або всі електронні орбіти, що виходять з точки  $P$ , знову зберуться в точці  $P'$  осі  $z$ .

Цим доводиться, що при неоднорідних магнітних полях з неоднорідним електростатичним полем, обумовленим просторовими зарядами, справджується концентруюча дія магнітної шпулі.

Теоретичний розгляд для збирання електронного проміння накладає такі умови:

1. Електронні промені повинні виходити з елемента поверхні, близького до точки.

2. Магнітне поле шпулі і просторовий розподіл зарядів повинні мати аксіальну симетрію, при чому вісь симетрії повинна проходити через точку виходу променів.

3. Електронний промінь повинен бути порівнюючи вузький і його вісь з віссю симетрії збігатися.

4. Повздовжня складова початкової швидкості, яка зустрічається в диференціальному рівнянні, повинна бути однаковою для всіх електронів; це ідентичне тому, що початкові швидкості всіх електронів є рівні.

Здійснення умови 2 практично не зустрічає труднощів; практика показала, що для цього досить вживати стійкі циліндричні магнітні шпулі так, щоб їхні осі збігалися з віссю трубки.

Щодо умов 1 і 3, то докладного розгляду перевести не можна; можна говорити лише про характер певних граничних умов, а саме: як буде діяти скінченна величина джерела електронних променів і отвору (діафрагми). Для дослідження 1-го положення припустимо, що джерело електронів є маленька скінченна площинка, нормальна до осі, і розглянемо два випадки: а) однорідного магнітного поля і паралельного осі незалежного від  $r$  електростатичного поля; тоді від кожної точки поверхні виходу електронів на екрані одержимо відображення натуральної величини; б) магнітного поля короткої шпулі, при чому воно таке мале

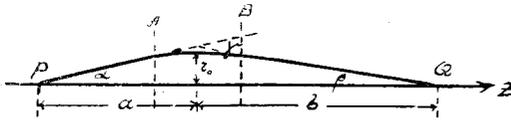


Рис. 3.

й вузьке, що на осі  $z$  значно відмінне від 0 лише в певному інтервалі, що порівнюючи малий з віддаленням шпулі від джерела електронів і від екрана. Далі припустимо, що електростатичне поле остільки мале, що його впливом можна нехтувати. При цих умовах розглянемо рух електронів; електрони, що виходять з точки  $P$ , до входу в поле шпулі рухаються майже прямолінійно (рис. 3).

В магнітному полі вони будуть закручуватися, і після шпулі рух знову буде прямолінійний. Вище ми прийняли, що поле діє лише в невеликому інтервалі, а тому для нього  $r \approx \text{const}$ . Нехтуючи також електростатичним полем, рівняння (11b) переходять в

$$\ddot{z} = 0; \quad \dot{z} = \text{const} = v_0 \quad (13)$$

і основне рівняння (11a) буде:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -r \cdot \frac{\gamma_0^2}{4v_0^2} H_0^2(z) \quad (14)$$

Проінтегруємо це рівняння в інтервалі поля  $A$  і  $B$ , — одержимо:

$$\left( \frac{dr}{dz} \right)_B - \left( \frac{dr}{dz} \right)_A = -r_0 \frac{\gamma_0^2}{4v_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^2(z) dz = -\frac{r_0}{f} \quad (15)$$

але

$$\begin{aligned} \left( \frac{dr}{dz} \right)_A &= \text{tg } \alpha = \alpha \\ \left( \frac{dr}{dz} \right)_B &= -\text{tg } \beta = -\beta \end{aligned} \quad \alpha + \beta = \gamma = \frac{r_0}{f} \quad (16)$$

Виходить, що коротка шпуля має властивість нахилити електрони до осі на кут  $\gamma$ , пропорційний до осьового віддалення  $r_0$ .

Як відомо, аналогічну властивість має оптична лінза. Ця аналогія особливо помітна, якщо рівняння (16) перепишемо у формі:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (17)$$

Отже, коротка магнітна шпуля для електронів має властивість лінзи з фокусним віддаленням

$$f = \frac{4v_0^2}{\eta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^2(z) dz} \quad (18)$$

Звідси виходить, що, вживаючи коротку магнітну шпулю, можна елемент виходу електронних променів зобразити на екрані, який флюорескує, при чому, одмінно від однорідного магнітного поля, не в натуральну величину, а побільшено або зменшено, у відношенні  $p = \frac{b}{a}$ .

Але, згідно з рівнянням (7с), електронні орбіти після шпулі проходять не через початкову меридіанну площину, а через іншу, що відносно першої буде повернута на кут  $\Phi$ . Тому відображення буде відхилитися від звичайного оптичного.

Визначимо кут повороту:

$$v_\varphi = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\eta \frac{A}{r} = -\frac{\eta}{2} H_0(z)$$

Інтегруємо в границях  $A$  і  $B$ , — одержимо:

$$\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\eta}{2} \int_A^B H_0(z) dt = -\frac{\eta}{2v_0} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(z) dz, \quad (19)$$

або, на підставі рівняння (18), можна записати:

$$\Phi = -\frac{1}{\sqrt{f}} \cdot \frac{\int H_0(z) dz}{\sqrt{\int H_0^2(z) dz}},$$

або, поклавши  $\zeta = \frac{z}{c}$  (де  $c$  є масштабний фактор), буде:

$$\Phi = -\sqrt{\frac{c}{f}} \cdot \frac{\int H_0(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\int H_0^2(\zeta) d\zeta}} \quad (20)$$

Отже, кут повороту є пропорціональний до кореня з масштабного фактора, або, інакше кажучи, кут повороту тим більший, чим довше шпуля. Граничними випадками будуть:

1. Нескінченно коротка шпуля ( $\Phi = 0$ ), що, аналогічно оптичній лінзі, дає обернене відображення джерела електронів.

2. Нескінченно довга шпуля ( $\Phi = 180^\circ$ ), що дає пряме відображення в натуральну величину.

Далі цікаво дослідити рух електронів, ураховуючи вплив електростатичного поля. Нехай електростатичне поле залежить лише від  $z$ , тобто еквіпотенціальні площини нормальні до осі  $z$ . При цих умовах функції  $g_2(z)$ ,  $g_4(z)$  і т. д. рівняння (9) дорівнюють нулеві. Тоді рівняння (11a) буде:

$$\ddot{r} = -r \frac{\eta^2}{4} H_0^2(z),$$

але, на підставі рівняння (11b):

$$dt = \frac{dz}{z} = \frac{dz}{\sqrt{v_0^2 - 2\eta g(z)}}$$

Перемножимо ці рівняння і проінтегруємо в інтервалі, що його кінцеві точки лежать по різні сторони шпулі; тоді одержимо:

$$[\dot{r}]_2 - [\dot{r}]_1 = -r_0 \frac{\eta^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0^2(z) dz}{\sqrt{v_0^2 - 2\eta g(z)}} \quad (21)$$

Якщо через  $u$  позначимо швидкість електронів поза шпулею, де  $u_\varphi = 0$ , то

$$[\dot{r}]_1 = u \sin \alpha \quad \text{і} \quad [\dot{r}]_2 = -u \sin \beta,$$

і далі, позначивши через  $u_0$  якенебудь стабільне значення електронних швидкостей (наприклад, на екрані, де електростатичне поле практично дорівнює нулеві), рівняння (21) можна переписати:

$$\left[ \frac{u}{u_0} \sin \alpha \right]_1 + \left[ \frac{u}{u_0} \sin \beta \right]_2 = -\frac{r_0 \eta^2}{4u_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0^2(z) dz}{\sqrt{v_0^2 - 2\eta g(z)}} = \frac{r_0}{f} \quad (22)$$

З рівняння (22) видно, що поза шпулею електронні промені розповсюджуються не прямолінійно, тобто вони поводять себе так, як і світлові промені в середовищі із змінним показником заломлення:

$$n = \frac{u}{u_0}$$

Якщо продовжити електронні шляхи безпосередньо за шпулею прямолінійно до перетину з віссю у точках  $P'$  і  $Q'$  (рис. 4) і позначити відповідні віддалення від середини шпулі через  $a'$  і  $b'$ , то наближено можна прийняти:

$$\sin \alpha_0 = \frac{r_0}{a'}; \quad \sin \beta_0 = \frac{r_0}{b'}$$

рівняння (22) записати у формі

$$\frac{n_a}{a'} + \frac{n_b}{b'} = \frac{1}{f}, \quad (23)$$

де  $n_a$  є показник заломлення безпосередньо ліворуч, а  $n_b$  — праворуч

шпулі. Це рівняння ідентичне з рівнянням лінзи з фокусним віддаленням:

$$f = \frac{4u_0}{\eta^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0^2(z) dz}{\sqrt{v_0^2 - 2\eta g(z)}}} \quad 24$$

коли вона з обох боків оточена середовищами з показниками заломлення  $n_a$  і  $n_b$ .

Обчислення побільшення у цьому випадку можна перевести на підставі теореми Lagrange—Helmholtz-a, при чому будемо отожднювати центровану систему з осью симетрії. Відомо, що для центрованої оптичної системи добуток з поперечного



Рис. 4.

побільшення  $p$  і кутового  $\gamma = \frac{\text{tg } \beta_1}{\text{tg } \alpha_1}$  складає:

$$p \cdot \gamma = p \cdot \frac{\text{tg } \beta_1}{\text{tg } \alpha_1} = \frac{n_{a1}}{n_{b1}} \quad (25)$$

або:

$$p = \frac{n_{a1} \text{tg } \alpha_1}{n_{b1} \text{tg } \beta_1}$$

Практично електростатичне поле зосереджено лише з одної сторони шпулі (сторона катода). Тому наближено можна покласти:

$$\beta_1 = \beta_0 = \beta; \quad n_{b1} = 1$$

$$n_{a1} \text{tg } \alpha_1 \approx n_{a1} \sin \alpha_1 = \sin \alpha_0 \approx \text{tg } \alpha_0,$$

де  $\alpha_0$  — кут між електронним променем і віссю безпосередньо коло входу в шпулю. Тоді:

$$p = \frac{\text{tg } \alpha_0}{\text{tg } \beta} \quad (26)$$

тобто побільшення залежить лише од відхилення, що обумовлене шпулею.

Умова 3 — електронний промінь повинен бути порівнюючи вузьким — справджується лише для нескінченно вузького електронного променя. Практично ж ми маємо промінь із скінченим кутовим отвором, а, значить, у рівняннях (10a) і (10b) членами з  $r^2$  і  $r^3$  нехтувати не можна і тому рівняння (12) не є лінійне. Отже, фокусне віддалення залежатиме від кута нахилу променів до осі, бо крайні промені утворюють інше віддалення від осі, ніж центральні. Це викликає явище, аналогічне оптичному явищу — сферичній аберації. Коли  $r = \text{const}$ , аберация зростає із збільшенням коефіцієнтів у рівняннях (10a) і (10b), що рівнозначне збільшенню неоднорідності магнітного поля.

Нарешті, переходимо до умови 4. Оскільки початкові швидкості електронів практично близькі до нуля, і всі електрони проходять однакою різницю потенціалів між анодом і катодом, можна вважати, що ця умова здійснюється.

Практично нам доводиться вживати шпулі скінченної довжини. Дія такої шпулі лежить між двома граничними випадками: нескінченно довгої і нескінченно короткої шпулі. Розгляд шпулі скінченної довжини викликає труднощі. Вживаючи порівнюючи коротку шпулю і вузький промінь, з певним практично достатнім наближенням можна вважати, що дія її буде мало відмінною від дії нескінченно короткої шпулі.

§ 2. Обчислення амперзвоїв магнітної лінзи. У попередньому параграфі було доведено, що фокусне віддалення магнітної лінзи визначається рівнянням:

$$f = \frac{4v_0^2}{(e/m)^2} \cdot \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} H_0^2(z) dz}$$

Далі треба перейти до обчислення

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_0^2(z) dz$$

Відомо, що сила поля  $H$  в будь якій точці простору пропорціональна до сили струму. Тому можна покласти:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_0^2(z) dz = (kI)^2, \quad (27)$$

де  $I$  визначає число амперзвоїв шпулі (струм через весь поперечний переріз шпулі), а  $k$  — константа форми шпулі.

З рівняння:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

маємо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_0^2(z) dz = (kI)^2 = \left( \frac{2v_0}{e/m} \right)^2 \frac{a+b}{ab};$$

звідси:

$$I = \frac{1}{k} \frac{2v_0}{e/m} \sqrt{\frac{a+b}{ab}} = \frac{1}{k} \frac{2v_0}{e/m} \sqrt{\frac{L}{ab}}, \quad (28)$$

де  $L = a + b$  — довжина електронного променя, що вимірюється віддаленням від джерела або анодної бленди до екрана. Для обчислення константи форми шпулі

$$k = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{H_0(z)}{I} \right)^2 dz} \quad (29)$$

треба знати поле шпулі на осі симетрії. На підставі закону Біот — Са-

варіа сила магнітного поля на осі симетрії лінійного колового провідника визначається:

$$\frac{H_0(z)}{I} = \frac{2\pi r^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (30)$$

де  $I$  — число амперзвоїв лінійного колового провідника,  $r$  — його радіус,  $z$  — віддалення зовнішньої осьової точки від площі, в якій міститься провідник, а  $H(z)$  — сила магнітного поля в цій точці.

З рівняння (29) і (30) одержуємо:

$$\int \left( \frac{H_0(z)}{I} \right)^2 dz = \int \frac{4\pi^2 r^4}{(r^2 + z^2)^3} dz$$

або, інтегруючи:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{H_0(z)}{I} \right)^2 dz = k^2 = \frac{3\pi^3}{2r} = \frac{3\pi^3}{d},$$

де  $d$  — діаметр лінійного колового провідника. Для константи форми шпулі одержимо:

$$k = \sqrt{\frac{3\pi^3}{d}} \quad (31)$$

Вставимо знайдене значення для форми шпулі в загальне рівняння (28), — одержимо значення для амперзвоїв лінійного колового провідника:

$$I = \frac{1}{k} \frac{2v_0}{e/m} \sqrt{\frac{L}{ab}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3\pi^3}{d}}} \frac{2v_0}{e/m} \sqrt{\frac{Ld}{ab}} \quad (32)$$

Далі треба визначити амперзвої в функції напруги збудження. Для цього скористуємося з залежностей:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{і} \quad v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{em_0}{c^2} E\right)^2}}, \quad (33)$$

де  $m_0$  — маса електрона у нерухомому стані,  $c$  — швидкість світла,  $E$  — напруга збудження.

Вставимо ці значення в рівняння (32), — одержимо:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\frac{3\pi^3}{d}}} \frac{2c}{e/m_0} \sqrt{\frac{2e/m_0}{c^2} E + \left(\frac{e/m_0}{c^2} E\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{Ld}{ab}} \quad (34)$$

або, підставляючи значення для  $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}}$  і  $\frac{e}{m_0} = 1,77 \cdot 10^7$ , одержимо:

$$I = 3514 \sqrt{0,393 \cdot \frac{E}{100} + \left(0,197 \frac{E}{100}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{Ld}{ab}}, \quad (35)$$

де  $I$  в амперах, а  $E$  — в кіловольтах.

Отже, число амперзвоїв шпулі при певних розмірах прилада, величині побільшення і швидкості електронів — можна визначити з рівняння (35).

Якщо ж знехтувати релятивістичну поправку зміни маси й швидкості, одержимо наближено:

$$I = 220 \sqrt{\frac{ELd}{ab}} = 220 \sqrt{\frac{E}{f}} d \quad (36)$$

Як показали F. Ollendorff і G. Wendt <sup>1)</sup>, відношення фокусного віддалення, обрахованого за класичною теорією  $f_{кл}$  і  $f$  з релятивістичною поправкою, складає:

$$\frac{f}{f_{кл}} = 1 + \frac{E}{1000}$$

Тому при напругах, що перевищують 10 kV, для фокусного віддалення належить ураховувати релятивістичну поправку.

Відповідно з рівнянь (35) і (36) одержимо вирази для фокусного віддалення:

$$f = 3514^2 \left[ 0,393 \frac{E}{100} + \left( 0,197 \frac{E}{100} \right)^2 \right] \frac{d}{I^2} \quad (37)$$

$$f \approx \frac{220^2 \cdot E \cdot d}{I^2} \quad (38)$$

§ 3. *Експериментальна перевірка теорії магнітної лінзи Busch-a.* Перевірка теорії Busch-a, а разом з тим здійснення електронного мікроскопа належать Kroll-ю і Ruska.

В загальних рисах електронний мікроскоп для швидких електронів (від 10—100 kV) складається з частин:

1. Розрядної трубки, що повинна задовольняти такі вимоги: а) не давати коливань струму емісії, б) витримувати довгочасну роботу, в) зразу давати точкувату емісію, г) мати високу густоту струму по осі електронного променя і швидке спадання її зовні від осі.

Катод побудовано як змінну гвинтову вставку, що гарантує легку заміну катода. Анод — металева трубка, що охоплює катод і закінчується гвинтовою вставкою, в яку можна вставляти різної величини бленди для діафрагмування конуса променя.

2. Камери змінного об'єкту, що відповідає столику для об'єктів у звичайного мікроскопа. Ця камера розташовується безпосередньо за конденсорною шпулею і дозволяє досліджувати різні об'єкти, не порушуючи вакуума; для цього влаштовано систему зубчатих коліс, що обертаються зовні, користуючись шліфами.

3. Шпулі. Здебільшого для потужного електронного мікроскопа вживається три шпулі: конденсорна — для збирання променів на досліджуваній об'єкт; об'єктивна і проєкційна, що проєктує відображення на екран. Іноді для спеціальних досліджень вживається ще одна проєкційна шпуля.

4. Тубуса. За об'єктивною і проєкційною шпулями вставлено тубус з 2—3 віконцями для спостереження. На кінці тубуса розташовано камеру для внутрішніх і зовнішніх фотографувань.

<sup>1)</sup> F. Ollendorff und G. Wendt, Zts. f. Ph., 76, 655, 1932.

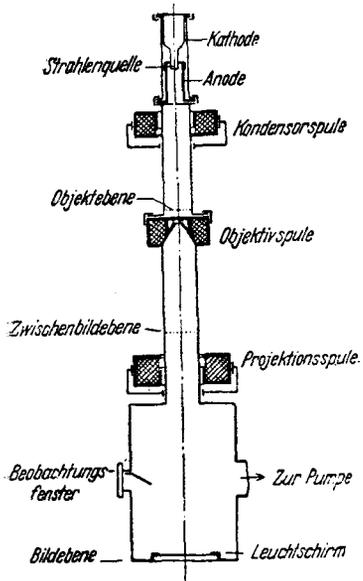


Рис. 5. Схема магнітного електронного мікроскопа.

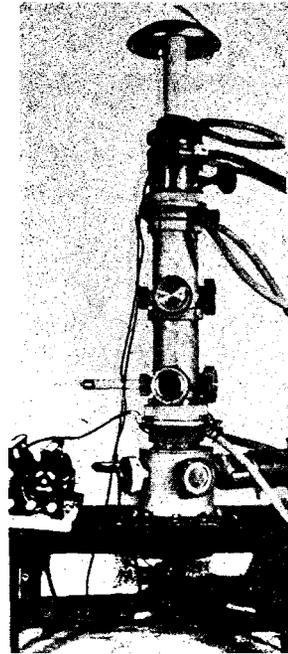


Рис. 6. Загальний вигляд електронного мікроскопа з магнітними лінзами.

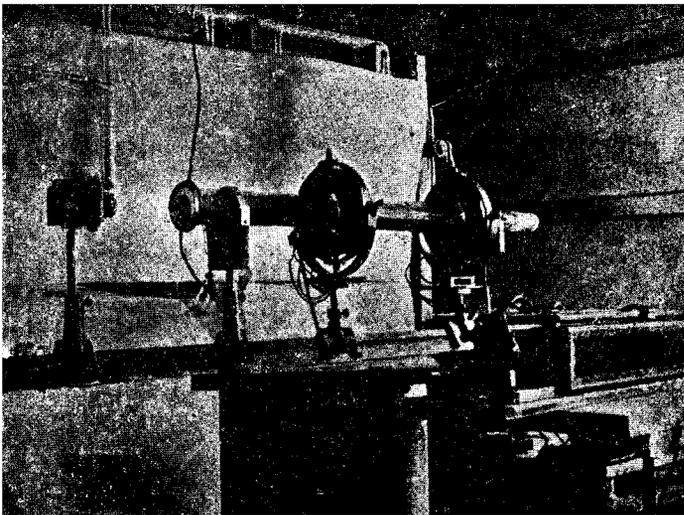


Рис. 7. Загальний вигляд електронного мікроскопа з магнітними лінзами.

Всі частини сполучені між собою і центруються гаечним затвором; тубус закріплюється на експериментальному столі.

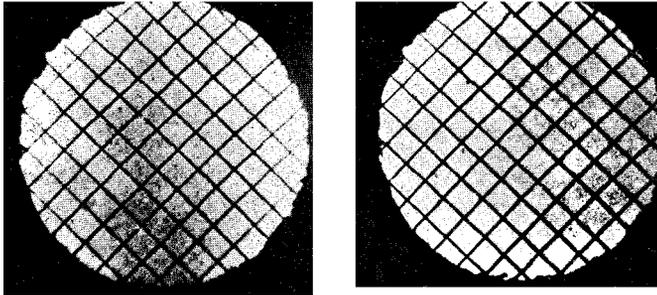


Рис. 8. Електронограми (ліворуч) і мікрофотографія (праворуч) ґратки з молібденового дроту. Електронограму знято при 70 кВ напруги (12-тикратне побільшення).

Окремі частини мікроскопа і допоміжні установки зв'язані із спільною системою охолодження.

Схема і загальний вигляд мікроскопів подано на рис. 5, 6, 7.

На рис. 8 подано електроннограми, одержані електронним мікроскопом.

#### Частина друга

#### Електричні лінзи

§ 1. *Рух електрона в електричному полі аксіальної симетрії.* В першій частині ми розглянули теорію магнітної лінзи, що ґрунтується на впливі магнітного поля на електронні промені. Крім магнітного поля, в електроннооптичних системах вживають електричне поле, що можливо здійснити різними способами:

1. Просторовими зарядами, які постають: а) від власної йонізації електронних променів в розрядній трубці з невисоким тиском (0,01—0,1 мм Hg), а саме: через поштовхи електронів з молекулами рештків газу в трубці утворюватимуться додатні йони, що, порівнюючи з електронами, мають невеликі швидкості, і, таким чином, на шляху всього електронного променя утвориться аксіально симетричний просторовий заряд, що між віссю і краєм дасть певну різницю потенціалів, а, значить, і радіальну складову сили поля (цей випадок впливу поля на електронні промені аналогічний впливові магнітного поля довгої шпулі), б) від сторонньої йонізації електронами, що утворює допоміжний просторовий заряд на короткому інтервалі загального шляху електронного променя (випадок аналогічний дії поля короткої магнітної шпулі).

2. Комбінацією різного типу заряджених провідників з отворами (кулястий, плескатий конденсатор з отворами, циліндричний, окремі циліндри тощо), що утворюють електростатичне поле. Зауважимо, що незалежно від способу утворення поля важливим є характер розподілу електричного поля, що визначатиме траєкторію руху електрона в цьому полі, а разом з тим і властивість електроннооптичної системи.

Розглянемо умови руху електрона в електричному полі аксіальної симетрії, при чому будемо нехтувати власним магнітним полем електрона, а також припускати, що поле немає ніяких значних просторових зарядів. Крім того, розглядатимемо аксіальні електронні промені, тобто промені, що утворюють малі кути з віссю симетрії; тоді швидкості електронів з достатнім наближенням будуть рівні компонентам швидкостей в напрямі осі симетрії  $z$  ( $v_z = v$ ), а потенціали близьких до осі точок можна замінити через потенціали відповідних точок осі.

При цих умовах рівняння руху електрона в електричному полі будуть:

$$\frac{1}{2} m v_z^2 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = e(E_0 + \varphi), \quad (1)$$

де  $eE_0 = \frac{mv_0^2}{2}$  — початкова енергія електрона,  $m$  — його маса,  $e$  — заряд,  $v$  — швидкість, а  $\varphi$  потенціал на осі симетрії. Або, зважаючи на те, що  $\frac{dr}{dt} \ll \frac{dz}{dt}$ ,

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = e(E_0 + \varphi) \quad \text{і} \quad v = \sqrt{2 \frac{e}{m} (E_0 + \varphi)} \quad (2)$$

При відповідно підбраному розподілі електричного поля на електрон буде діяти радіальна складова сили поля; коли далі припустити, що при рухові в цьому полі електрон не буде мати обертової швидкості, тобто траєкторія плоска, радіальне рівняння руху буде:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = e \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (3a)$$

де  $e$  — заряд електрона,  $m$  — його маса,  $U(z, r)$  — потенціал в якій завгодно точці електричного поля. Або

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{dr}{dz} \frac{dz}{dt} \right) \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dz} \left( v_z \frac{dr}{dz} \right) v_z = \frac{d}{dz} \left( v \frac{dr}{dz} \right) v = \frac{e}{m} \frac{\partial U}{\partial r} \quad (3b)$$

Для розв'язку рівнянь (2) і (3) треба знати потенціальну функцію  $U$  — розподілу потенціалу в усіх точках простору.

За О. Scherzer-ом<sup>1)</sup> наближений вираз цієї функції буде:

$$U(z, r) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(\nu!)^2} \varphi^{(2\nu)} \left( \frac{r}{z} \right)^{2\nu}, \quad (4)$$

де  $\varphi = U(z, 0)$  — розподіл потенціалу на осі симетрії системи, а індекс  $(2\nu)$  визначає  $2\nu$  диференціювання по  $z$ . Підставивши (4) в (3), одержимо:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{e}{m} \left( \frac{r}{z} \varphi'' - \frac{r^3}{8} \varphi^{IV} + \frac{r^5}{384} \varphi^{VI} - \dots \right) \quad (5)$$

При умовах аксіальних електронних променів можна обмежитися в розкладі лише першим членом, тоді матимемо:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \approx v \frac{d}{dz} \left( v \frac{dr}{dz} \right) = - \frac{r}{z} \frac{e}{m} \varphi'' \quad (6)$$

<sup>1)</sup> О. Scherzer, Zs. f. Phys., **80**, 193, 1933; Н. Bateman, Part. Diff. Equ. of Math. Physics, pp. 406.

на підставі (2), остаточно рівняння руху буде:

$$2 \left( E_0 + \varphi \right) \frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{dr}{dz} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} r(z) = 0 \quad (7)$$

Ми одержали лінійне диференціальне рівняння другого порядку, в яке час  $t$  не входить. Якщо нам задано функцію  $\varphi(z)$  — розподіл потенціалу на осі симетрії системи, то, розв'язуючи це рівняння, ми одержимо зв'язок між  $r$  і  $z$ , тобто можемо накреслити траєкторію руху електрона в полі даної системи провідників; і, навпаки, по заданій траєкторії — функції  $r = r(z)$  можна визначити розподіл потенціалу.

Отже, рівнянням (7) розв'язується в першому наближенні питання як про траєкторію руху електрона, так і розподіл потенціалу, залежно від того, яка з двох функцій  $\varphi(z)$  або  $r(z)$  нам відома.

Метод розв'язку рівняння (7) буде визначатися характером заданої функції  $\varphi(z)$  або  $r(z)$ .

§ 2. *Обчислення фокусного віддалення і побільшення електроннооптичної системи.* Для визначення фокусного віддалення і побільшення можна обрати два способи: 1) ґрунтуючись на геометрично-оптичній структурі електронних променів, застосувати до них відомі з геометричної оптики способи побудови відображення і одержання основних співвідношень для лінз; 2) безпосередньо, виходячи з рівнянь руху електрона в електричному полі.

Розглянемо окремо ці два способи.

1. Як і в геометричній оптиці для світлових променів, позначимо через  $F$  і  $F'$  — головні фокуси;  $H_1$  і  $H_2$  — головні площини,  $z_2$  і  $z_3$  — вузлові точки системи;  $K$  — об'єкт-катод;  $S$  — відображення-екран (рис. 9).

Візьмемо в просторі об'єкта два промені  $r_1$  і  $r_2$ . Для цих променів, згідно з рівнянням (7) § 1, одержимо два рівняння:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{E_0 + \varphi} \frac{d}{dz} \left( \sqrt{E_0 + \varphi} \frac{dr_1}{dz} \right) &= -\frac{1}{2} r_1 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \\ 2\sqrt{E_0 + \varphi} \frac{d}{dz} \left( \sqrt{E_0 + \varphi} \frac{dr_2}{dz} \right) &= -\frac{1}{2} r_2 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Після множення першого рівняння на  $r_2$ , а другого на  $r_1$ , віднімання одного від другого і додавання  $\pm \sqrt{E_0 + \varphi} \frac{dr_1}{dz} \frac{dr_2}{dz}$ , одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( r_2 \sqrt{E_0 + \varphi} \frac{dr_1}{dz} - r_1 \sqrt{E_0 + \varphi} \frac{dr_2}{dz} \right) &= 0 \\ r_2 \frac{dr_1}{dz} - r_1 \frac{dr_2}{dz} &= \frac{C_{12}}{\sqrt{E_0 + \varphi}}, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $C_{12}$  — стала інтегрування. Рівняння (9) показує, що для двох електронних променів  $r_1$  і  $r_2$  різниця  $r_2 \frac{dr_1}{dz} - r_1 \frac{dr_2}{dz}$  пропорціональна до  $\frac{1}{\sqrt{E_0 + \varphi}}$ .

Далі припустимо, що промінь  $r_1$  проходить паралельно осі  $z$ , а промінь  $r_2$  проходить через перший головний фокус. Ці промені відповідають електронам, що вийшли з однієї точки катода з початковою швидкістю, мало

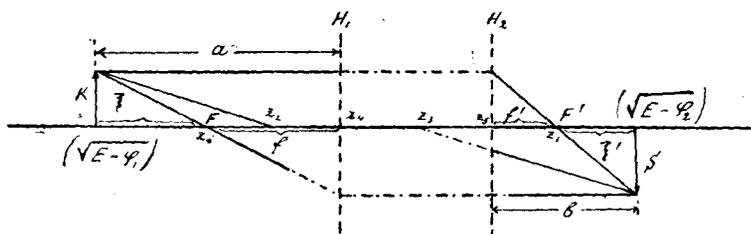


Рис. 9.

відмінною від 0, але різною щодо напрямку. Слід зауважити, що фактично шлях електронних променів в електричному полі не буде прямолінійний, але в першому наближенні, особливо в просторі об'єкту і в просторі відображення, ми можемо прийняти, що для центральних променів шлях близький до прямолінійного.

При цих умовах рівняння променів  $r_1$  і  $r_2$  в просторі об'єкту відповідно будуть:

$$r_1 = l; \quad \frac{dr_1}{dz} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{dr_2}{dz} = -d = \operatorname{tg} u_2; \quad r_2 = d(z_0 - z) \quad (11)$$

Вставимо одержані значення для  $r_1$  і  $r_2$  у рівняння (9); одержимо значення для сталої інтегрування:

$$C_{12} = l \cdot d \sqrt{E_0 + \varphi_1},$$

де  $\varphi_1$  — значення потенціалу в просторі об'єкту, і рівняння для променів  $r_1$  і  $r_2$  буде:

$$r_2 \frac{dr_1}{dz} - r_1 \frac{dr_2}{dz} = l \cdot d \frac{\sqrt{E_0 + \varphi_1}}{\sqrt{E_0 + \varphi}} \quad (12)$$

Відповідно в просторі відображення:

$$\frac{dr_1}{dz} = -h = \operatorname{tg} u_1'; \quad r_1 = h(z_1 - z) \quad (13)$$

$$r_2 = -k; \quad \frac{dr_2}{dz} = 0$$

Для фокусних віддалей одержимо:

$$f' = \frac{l}{h}; \quad f = -\frac{k}{d} \quad (14)$$

Після підставлення (13) в (12) дістанемо:

$$kh = l \cdot d \frac{\sqrt{E_0 + \varphi_1}}{\sqrt{E_0 + \varphi_2}}, \quad (15)$$

де  $\varphi_2$  — значення потенціалу в просторі відображення.

Із співвідношень (14) і (15) одержимо:

$$\frac{f}{f'} = - \frac{\sqrt{E_0 + \varphi_1}}{\sqrt{E_0 + \varphi_2}} \quad (16)$$

Приймаючи, що показник заломлення пропорціональний до  $\sqrt{E_0 + \varphi}$ , матимемо:

$$nf = -n'f', \quad (17)$$

де  $n$  — показник заломлення в просторі об'єкту і  $n'$  — в просторі відображення.

Позначимо віддаль об'єкту від першого головного фокуса через  $\xi$  і віддаль відображення від другого головного фокуса через  $\xi'$ ; тоді одержимо:

$$\xi = \frac{l}{\operatorname{tg} u_2} = - \frac{l}{d}$$

$$\xi' = - \frac{k}{\operatorname{tg} u'_1} = \frac{k}{h}$$

і на підставі (14):

$$\xi\xi' = ff'; \quad (a-f)(b-f) = ff'$$

або:

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{b} = 1, \quad (18)$$

де  $a$  і  $b$  відповідно віддалення об'єкту й відображення від головних площин.

Рівняння (18) дає зв'язок між фокусними віддаленнями і віддаленнями до об'єкту і відображення.

Якщо покладемо  $f=f'=F$ , то одержимо відоме з оптики співвідношення для тонкої лінзи:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

Для визначення побільшення системи розглянемо промінь  $r_3$ , що проходить через передню ( $z_2$ ) і задню ( $z_3$ ) вузлові точки. Рівняння цього променя в просторі об'єкту буде:

$$r_3 = B(z_2 - z); \quad \frac{dr_3}{dz} = -B \quad (19)$$

і в просторі відображення:

$$r_3 = B(z_3 - z); \quad \frac{dr_3}{dz} = -B \quad (20)$$

Для променів  $r_1$  і  $r_3$  в просторі об'єкту можна скласти рівняння, аналогічне (12), тоді одержимо:

$$C_{13} = lB\sqrt{E_0 + \varphi_1} \quad (21)$$

На підставі рівнянь (14), (19), (20) і (21) буде:

$$z_1 - z_3 = f' \frac{\sqrt{E_0 + \varphi_1}}{\sqrt{E_0 + \varphi_2}} = -f \quad (22)$$

тобто задня вузлова точка знаходиться від другого головного фокуса на віддаленні, рівному передньому фокусному віддаленню, і аналогічно для променів  $r_2$  і  $r_3$ :

$$z_2 - z_0 = -f \frac{\sqrt{E_0 + \varphi_2}}{\sqrt{E_0 + \varphi_1}} = f' \quad (23)$$

передня вузлова точка знаходиться від першого головного фокуса на віддаленні, рівному другому фокусному віддаленню. Віддалення передньої вузлової точки від передньої головної площини буде:

$$z_4 - z_2 = f - f' \quad (24)$$

і відповідно для задньої вузлової точки

$$z_3 - z_5 = f - f' \quad (25)$$

Лінійне побільшення визначається рівнянням:

$$p = \frac{b}{a} \frac{f}{f'} = \frac{b + (f - f')}{a - (f - f')} \quad (26)$$

З рівнянь (18) і (26) можна визначити віддалення від предмета і відображення за заданими фокусними віддаленнями і заданому побільшенню:

$$a = \left(1 + \frac{1}{p}\right) f \quad (27)$$

$$b = (1 + p) f' \quad (28)$$

Для визначення фокусного віддалення за заданим розподілом по потенціалу розглянемо силу заломлення екіпотенціальної поверхні. В оптиці світлових променів сила заломлення визначається співвідношенням:

Сила заломлення дорівнює:

$$\frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

або при наших умовах:

$$\frac{A \sqrt{E_0 + \varphi_2}}{f'} = -\frac{A \sqrt{E_0 + \varphi_1}}{f} \quad (29)$$

де  $A$  — коефіцієнт пропорційності.

Рівняння екіпотенціальної поверхні буде:

$$U(z, r) = \text{const} = C$$

або:

$$P(z, r) \equiv U(z, r) - C = 0 \quad (30)$$

Радіус кривини цієї поверхні визначається формулою:

$$R = -\frac{\left[\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial z} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2} \quad (31)$$

Для точки перетину поверхні з віссю ( $r=0$ ) одержимо:

$$R_0 = 2 \frac{\frac{d\varphi}{dz}}{\frac{d^2\varphi}{dz^2}} \quad (32)$$

бо на підставі рівняння (4) § 1:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dz^2}; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

Сила заломлення еквіпотенціальної поверхні, що перетинає вісь  $z$  в точці  $z$  буде:

$$K(z) = \left| \frac{dn}{R} \right|_{r=0} = \frac{1}{R_0} \left( \frac{dn}{dz} \right)_{r=0} dz \quad (33)$$

Змінний показник заломлення

$$n = A \sqrt{E_0 + U(r, z)} = A \sqrt{E_0 + \varphi(z)} \quad (34)$$

або

$$\left( \frac{dn}{dz} \right)_{r=0} = \frac{A \cdot \frac{d\varphi}{dz}}{2 \sqrt{E_0 + \varphi(z)}} \quad (35)$$

Після підставлення (35) і (32) в (33) одержимо для сили заломлення еквіпотенціальної поверхні, що перетинає вісь  $z$  в точці  $z$ :

$$K(z) = \frac{A \cdot \frac{d^2\varphi}{dz^2}}{4 \sqrt{E_0 + \varphi(z)}} dz \quad (36)$$

Сила заломлення  $K$  всього поля визначається рівнянням:

$$K = \sum K(z) + g, \quad (37)$$

де  $g$  функція, що залежить од віддалень між окремими поверхнями і сили заломлення цих поверхень.

В першому наближенні можна нехтувати величиною  $g$ , тобто припустити, що головні площини проходять через точки, які відповідають границям електричного поля, тоді дістанемо:

$$K = \frac{A}{4} \int \frac{d^2\varphi}{dz^2} \frac{1}{\sqrt{E_0 + \varphi(z)}} dz \quad (38)$$

Інтегрування треба провести на всьому інтервалі падіння потенціалу. На підставі (29) фокусні віддалення будуть:

$$f' = \frac{4 \sqrt{E_0 + \varphi_2}}{\int \frac{d^2\varphi}{dz^2} \frac{1}{\sqrt{E_0 + \varphi(z)}} dz} \quad (39)$$

$$f = - \frac{4 \sqrt{E_0 + \varphi_1}}{\int \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \frac{1}{\sqrt{E_0 + \varphi(z)}} dz} \quad (39)$$

Приймаючи, що в просторі об'єкту і в просторі відображення  $\frac{d\varphi}{dz} \approx 0$  після інтегрування частинами одержимо:

$$f' = \frac{8 \sqrt{E_0 + \varphi_2}}{\int \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \frac{1}{(E_0 + \varphi(z))^{\frac{3}{2}}} dz} \quad (40)$$

$$f = - \frac{8 \sqrt{E_0 + \varphi_1}}{\int \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \frac{1}{(E_0 + \varphi(z))^{\frac{3}{2}}} dz}$$

II. Для обчислення фокусного віддалення електричної лінзи з рівняння руху звернімося до рівняння (6) § 1:

$$v \frac{d}{dz} \left( v \frac{dr}{dz} \right) = - \frac{re}{2m} \varphi'' \quad (41)$$

і будемо розглядати як лінзу ту частину простору, яка лежить між  $z = a$  і  $z = b$  в припущенні, що лінза така тонка, що в інтервалі  $z = a$  і  $z = b$  можна покласти  $r = \text{const} = r_0$ .

Після інтегрування (41) одержимо:

$$v_b \left( \frac{dr}{dz} \right)_b - v_a \left( \frac{dr}{dz} \right)_a = - \frac{e \cdot r_0}{2m} \int_a^b \frac{1}{v} \varphi'' dz \quad (42)$$

Аналогічно міркуванням, що наведено в першій частині для магнітної лінзи, матимемо:

$$n_b r_b' - n_a r_a' = - \frac{e}{2m} \frac{r_0}{v_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v} \varphi'' dz \quad (43)$$

при чому границі інтегрування можна поширити до  $\pm \infty$  через те, що поле поза лінзою спадає швидко до нуля.

На підставі рівняння (2) § 1

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m} (E_0 + \varphi)}$$

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{e}{m} E_0};$$

після підставлення в (43) одержимо:

$$n_b r_b' - n_a r_a' = - \frac{r_0}{4 \sqrt{E_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{E_0 + \varphi}} \varphi'' dz \quad (44)$$

Рівняння (44) аналогічне оптичній формулі для тонкої лінзи з фокусним віддаленням:

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{4\sqrt{E_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{E_0 + \varphi}} \varphi'' dz \quad (45)$$

Отже, для визначення фокусного віддалення електричної лінзи треба знати функцію розподілу потенціалу на осі, початкову швидкість електронів  $E_0$  і  $\varphi''$ .

Інтересно зауважити, що фокусне віддалення електричної лінзи не залежить від маси часточок, що, як побачимо далі, дає переваги електричних лінз над магнітними.

Здебільшого точного інтегрування (45) перевести не можна, тому доводиться інтегрувати наближено, враховуючи, що в просторі поза лінзою поле наближається до 0, і тому при інтегруванні частину границь можна відкинути.

Після інтегрування частинами одержимо:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{8\sqrt{E_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(E_0 + \varphi)^3}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 dz \quad (46)$$

Рівняння (46) можна перетворити так:

$$\frac{1}{f} = \frac{\sqrt{E_L}}{8\sqrt{E_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{\left( \frac{E_0}{E_L} + \frac{\varphi}{E_L} \right)^3}} \left[ \frac{\partial \left( \frac{\varphi}{E_L} \right)}{\partial z} \right]^2 dz \quad (47)$$

(де  $E_L$  — напруга електричної лінзи) і розглядати фокусне віддалення, як функцію відношення  $\frac{E_L}{E_0}$ <sup>1)</sup>. Експериментально це твердження перевірено Н. Johansson-ом і О. Scherzer-ом<sup>2)</sup>.

§ 3. *Похибки електрооптичних систем.* Теоретично встановлене співвідношення як для магнітної, так і для електричної лінзи ґрунтується на двох основних припущеннях: 1) промені повинні бути аксіальними, тобто утворювати нескінченно малі кути з віссю симетрії, і 2) швидкості для всіх електронів — однакові. Практично ж промені утворюють з віссю симетрії кути скінченного отвору і промінь має електрони з різними швидкостями, тому електрооптичним системам будуть властиві похибки: 1) наявність неаксіальних променів обумовить явище, що за аналогією з системами для світлових променів можна назвати сферичною аберациєю. Як показали Knoll і Ruska, для магнітної лінзи, навіть при значних віддаленнях променів від осі, похибки сферичної аберациї лежать в гра-

<sup>1)</sup> Теоретично питання розглянуто автором в окремій роботі.

<sup>2)</sup> Н. Johansson und O. Scherzer, Zs. f. Phys., **80**, 183, 1933; Н. Johansson, An. d. Phys., **18**, 385, 1933.

ниціях похибок спостереження; 2) різним електронним швидкостям, тобто

різними довжинами хвиль  

$$\left( \lambda = \sqrt{\frac{150}{E_0}} 10^{-8} \text{ см, де} \right.$$

$$E_0 \text{ швидкість електронів} \left. \right)$$

відповідає різне фокусне віддалення. Тому зумовлені цим похибки можна, за аналогією із світловими променями, розглядати як хроматичну аберацію. В оптиці світлових променів ахроматичну систему одержують поєднанням збірної і розсіювальної лінз. Подібно до цього і в електронній оптиці можна здійснити ахроматичні системи комбінаціями різного типу лінз.

§ 4. Експериментальне здійснення електричної лінзи та електронного мікроскопа. З електричних лінз ми розглянемо лише ті, в яких застосовується електростатичне поле. На рис. 10 наведено окремі комбінації заряджених провідників, як зразки електростатичних лінз, і для деяких розподіл електричного поля.

Легко бачити, що всі перелічені системи утворюють поля аксіальної симетрії, що відповідає попередньому загальному теоретичному розгляду. Але аналітично розподіл поля для цих систем не досліджено і точних співвідношень, що характеризували б ці системи,—не визначено. Наведені

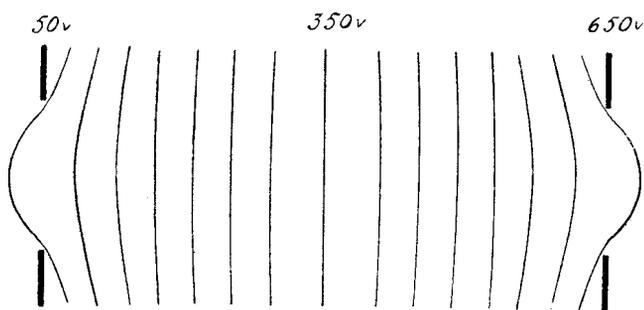


Рис. 10 а. Плоский конденсатор з отворами.

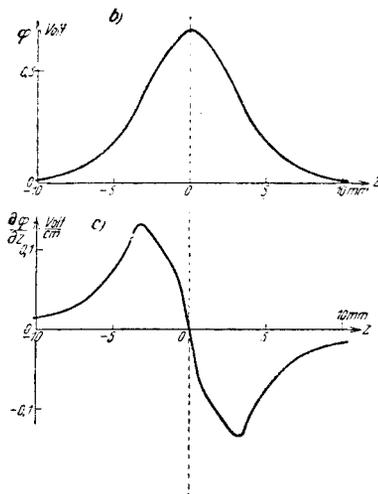
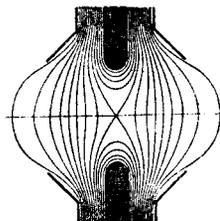
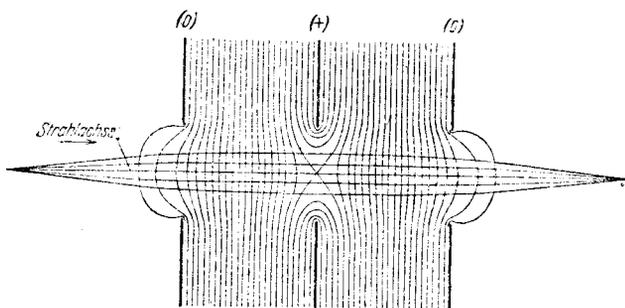


Рис. 10 б. Три пластинки з отворами.

зразки розподілу поля одержано експериментально — електролітичним методом.

На рис. 11 подана схема установки електростатичної лінзи: за об'єкт взято ґратку  $N$ , що освітлюється електронними променями ( $E_0$  швидкість електронів); за ґраткою встановлюється лінза  $L$ . При відповідному під-

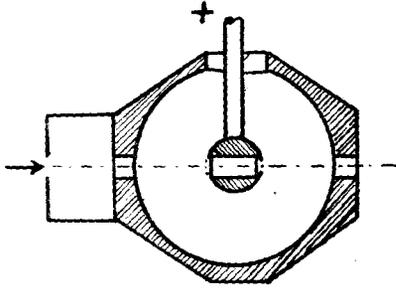


Рис. 10 с. Кулястий конденсатор з отворами.

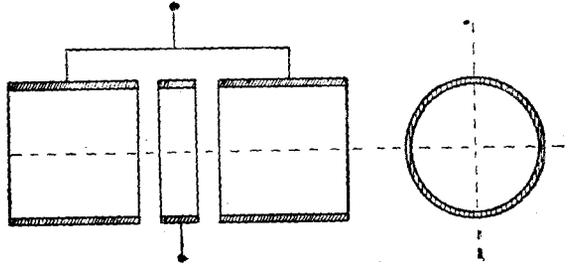


Рис. 10 д. Циліндри.

борі на лінзі напруги  $E_L$ , на екрані  $S$  одержується відображення ґратки. На рис. 12 показана одержана електростатичною лінзою електроннограма ґратки.

Для здійснення електронного мікроскопа, подібно до того як і в оптичній техніці світлових променів, доводиться вживати комбінації декількох лінз; основні співвідношення для складних систем можна визначити, виходячи

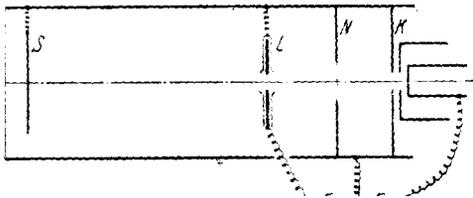


Рис. 11. Схема електростатичної лінзи.

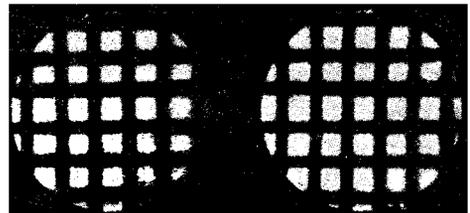


Рис. 12.

за аналогією із законів геометричної оптики для світлових променів, як це було показано для прикладу при визначенні фокусного віддалення електричної лінзи.

### § 5. Методи дослідження.

1. Метод проходження променя. Площина предмета лежить між джерелом електронних променів і системою відображення; пучок променів проходить досліджуваний предмет і далі концентрується електроноптичною системою (магнітною або електричною лінзою). Застосування: дослідження тонкої структури ґраток, тонких плівок і відміни в товщинах.

2. Метод відбиття. Джерело променів лежить збоку між площиною предмета і системою відображення; пучок променів відбивається від зов-

нішньої поверхні досліджуваного предмета. Застосування: дослідження зовнішніх поверхень різних матеріалів.

3. Метод самовилучення. Джерело променів лежить у площині предмета. Застосування: дослідження характеру емісійного розподілу тліючого, холодного і фотоелектричного катода в залежності від матеріалу катода, його переднього шару і температури.

4. Метод сторонньої емісії. Джерело променів лежить у площині предмета. Досліджується структура зовнішньої поверхні за допомогою електронної емісії з дуже тонкого шару речовини, що інтенсивно вилучає електрони.

5. Метод вилучення вторинних електронів. Дослідження вторинної електронної емісії поверхень, що бомбардується електронним променем.

6. Електронооптичний і світлооптичний метод.

§ 6. *Йонна лінза*. Співвідношення, що було встановлене для лінз з електронними променями, принципово можна віднести і до додатно заряджених часточок — йонів, або каналових променів.

Розглянемо фокусні віддалення магнітної і електричної лінзи.

Згідно з рівнянням (18) § 1 частини 1-ої, фокусне віддалення для магнітної лінзи буде:

$$f_m = \frac{4v^2 m^2}{e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^2(z) dz}$$

або

$$I = 220 \sqrt{\frac{E \cdot L \cdot d}{ab}} = 220 \sqrt{\frac{E \cdot d}{f_m}} \quad (48)$$

Позначимо масу електрона через  $m_{\text{ел.}}$  і йона через  $m_{\text{йон.}}$ , число зарядів через  $n$ , напругу електричного поля —  $E$ .

Сила струму короткої магнітної шпулі з середнім поперечним перетином  $d$  і фокусним віддаленням  $f_m$  за рівнянням (48) для випадку йона буде визначатися співвідношенням:

$$I_{\text{йон.}} = \frac{220}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{m_{\text{йон.}}}{m_{\text{ел.}}}} \sqrt{\frac{E \cdot d}{f_m}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{m_{\text{йон.}}}{m_{\text{ел.}}}} I_{\text{ел.}}, \quad (49)$$

при чому для напруги  $E$  зберігаємо однакове значення як для електрона, так і для йона.

З рівняння (49) легко бачити, що при тих самих умовах (величини фокусного віддалення, напруги, поперечника шпулі) для йонного променя сила струму шпулі зростає. Напр., для двічі зарядженого гелієвого йона одержимо:

$$I_{\text{He}} = I_{\text{ел.}} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 1850}{2}} = 60,8 I_{\text{ел.}} \quad (50)$$

Для аргонowego йона, що має одиничний додатний заряд, дістанемо:

$$I_A = \sqrt{40.1850} \cdot I_{ел.} = 272 I_{ел.} \quad (51)$$

В магнітній лінзі для електронних променів доводиться вживати струми порядку 1000 Аw, тому застосування її для йонних променів обмежене низькими напругами і невеликими фокусними віддаленнями. Для йонних променів краще вживати електричні лінзи, бо фокусне віддалення:

$$f = \frac{8\sqrt{E_0}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(E_0 - \varphi)^3}} \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dz}$$

не залежить від маси часточок і кількості елементарних зарядів.

Оскільки принципово закони електронної оптики можна віднести і до будь-яких заряджених часточок, далі застосування методики електронної оптики охопить більшу групу явищ, перетворюючись в оптику заряджених часточок, і відкриє новий засіб дослідження внутріатомних процесів.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

##### Іншомовна література

1. Manfred von Ardenne, Untersuchungen über achromatische Elektronenlinsen, Zs. f. Phys. 86 B, 802—809, 1933.
2. Manfred von Ardenne, Beitrag zur Elektronenoptik Braunschwer Röhren, Zs. f. Phys. 88, 251—259, 1934.
3. H. D. Arnold, Phenomena in Oxide-Coated Filament Electron Tubes, Phys. Rev., 16, 70, 1920.
4. F. L. Arnot, The Passage of Electron Beam through a Field-Free Enclosure, Proc. Roy. Soc., 129, 361—377, 1930.
5. T. A. Beaker, Phenomena in Oxide-Coated Filaments, Phys. Rev., 34, 1323, 1929.
6. H. Bethe, Über die Streuung von Elektronen an Kristallen, Naturw., 15, 786, 1927.
7. L. Binder, H. Förster, G. Frühauf, Neuartige Entladungsröhren für Kathoden-Strahl-Oszillographen, Zs. f. techn. Phys., 11, 379, 380, 1930.
8. Bodo von Borries und Ernst Ruska, Das kurze Raumladungsfeld einer Hilfsentladung als Sammellinse für Kathodenstrahlen, Zs. f. Phys., 76, 649—654, 1932.
9. Bodo von Borries und Ernst Ruska, Die Abbildung durchstrahlter Folien im Elektronenmikroskop, Zs. f. Phys., 83, 187—193, 1933.
10. E. Brüche, W. Ende, Fadenförmige, sichtbare Elektronenstrahlen, Zeit. f. Phys., 64, 186, 1930.
11. E. Brüche, Elektronenoptik und Elektronenmikroskop, Naturw., 3, 49, 1932.
12. E. Brüche und H. Johannson, Elektronenoptik und Elektronenmikroskop, Naturw., 21, 353, 1932.
13. E. Brüche und Johannson, Einige neue Kathoden-Untersuchungen mit dem elektrischen Elektronenmikroskop, Phys. Zs., 22, 898, 1932.
14. E. Brüche, Biegsame Elektronenstrahlen, Zs. f. Phys., 177—195, 1932.
15. E. Brüche, Die Geometrie des Beschleunigungsfeldes in ihrer Bedeutung für den gaskonzentrierten Elektronenstrahl, Zs. f. Phys., 78, 26—42, 1932.
16. E. Brüche, Die Braunsche Röhre als Problem der geometrischen Elektronenoptik, Arch. f. El., 28, 384—390, 1934.

17. E. Brüche und H. Johansson, Elektronenmikroskopische Beobachtungen an der Barium Aufdampfkathode, Zs. f. Phys., **84**, 56—58, 1933.
18. E. Brüche, Über die Grundlagen der geometrischen Elektronenoptik, Zs. f. techn. Phys., **3**, 49—58, 1933.
19. E. Brüche und O. Scherzer, Geometrische Elektronenoptik, Berlin, Julius Springer, 1934.
20. E. Brüche, Elektronenmikroskopische Abbildung mit licht-elektrischen Elektronen, Zs. f. Phys., **86**, 448—450, 1933.
21. E. Brüche, O. Scherzer, Die Braunsche Röhre als elektronenoptisches Problem, Zs. f. techn. Phys., **14**, 464—466, 1933.
22. E. Brüche und H. Johansson, Kristallographische Untersuchungen mit dem elektrischen Elektronenmikroskop, Zs. f. techn. Phys., **14**, 487—488, 1933.
23. E. Brüche, Elektronenoptik und Elektronenmikroskopie, A. E. Y. Mitteilungen № 2, S. 45—47, 1934.
24. H. Busch, Berechnung der Bahn von Kathodenstrahlen im axialsymmetrischen elektromagnetischen Felde, An. d. Phys., **81**, 974, 1926.
25. H. Busch, Über die Wirkungsweise der Konzentrierungsspule der Braunschen Röhre, Arch. f. El., **18**, 583, 1927.
26. W. E. Benham, Note on a Demonstration of a Low Voltage Electron Microscope Using Electrostatic Focusing, Journ. J. E. E., **75**, 388—390, 1934.
27. C. Davisson and C. Calbick, Electron Microscope, Phys. Rev., **45**, 764, 1934.
28. C. Davisson and C. Calbick, Electron lenses, Ph. Rev., **38**, 585, 1931.
29. C. Davisson and C. Calbick, Electron lenses, Ph. Rev., **42**, 580, 1932.
30. C. Davisson and H. Pidgeon, The Emission of Electrons from Oxide-Coated Filaments, Ph. Rev., **15**, 553, 1920.
31. G. Dobke, Eine neue Braunsche Röhre kleiner Strahlgeschwindigkeit, Zs. f. techn. Ph., **13**, 432, 1932.
32. Ende, Über Gaskonzentration von Elektronenstrahlen, Phys. Zs., **23**, 942, 1931.
33. G. J. Elias und I. G. Mulder, Over het gebruik der Braunsche buis, Physica, **3**, 143—150, 1923.
34. W. Espe, Über den Emissionsmechanismus von Oxydkathoden, Wiss. Veröffentl. a. d. Siemens-Konz., **5**, 29—45, 1927.
35. J. Frenkel and S. Bobkowsky, On the theory of gas-focused cathode rays, Phys. Zeits. d. Sowjetunion, B. 5, H. 3, S. 464—502, 1934.
36. Ph. Frank, Zs. f. Phys., **80**, 4, 1932.
37. W. Glaser, Über geometrisch-optische Abbildung durch Elektronenstrahlen, Zs. f. Ph., **80**, 451—464, 1933.
38. W. Glaser, Zur geometrischen Elektronenoptik des axialsymmetrischen elektromagnetischen Feldes, Zs. f. Phys., **81**, 647—686, 1933.
39. W. Glaser, Theorie des Elektronenmikroskops, Zs. f. Phys., **83**, 104—122, 1933.
40. H. Graupner, Über einige Versuche zur elektrostatischen Konzentrierung von Kathodenstrahlen, Ar. f. El., **26**, 725, 1932.
41. E. Hammacher, Die Konzentrierungsspulen der Vergrößerungslinse, Arch. f. El., **26**, 215, 1932.
42. E. Hess, Beitrag zur Kenntnis der elektronenoptischen Immersionslinse, Zs. f. Phys., **92**, 274—282, 1934.
43. H. Johansson, Das elektrische Immersionsobjektiv als System der Braunschen Röhre, Zs. f. Phys., **90**, 748—753, 1934.
44. H. Johansson, Über das Immersionsobjektiv der geometrischen Elektronenoptik, An. d. Phys., **18**, 385, 413, 1933.
45. H. Johansson und Knecht, Beitrag zur kombinierten Benutzung elektrischer und magnetischer Elektronenlinsen, Zs. f. Phys., **86**, 367—372, 1933.
46. H. Johansson und Scherzer, Über die elektrische Elektronensammellinse, Zs. f. Phys., **80**, 183, 1933.
47. B. Johnson, A Low Voltage Cathode Ray Oscillograph, Journ. Opt. Soc. Am., **6**, 701—712, 1922.

48. W. Knecht, Das kombinierte Licht und Elektronenmikroskop, seine Eigenschaften und seine Anwendung, *Ann. d. Phys.*, **20**, 161—182, 1934.
49. M. Knoll und Ruska, Beitrag zur geometrischen Elektronenoptik, *An. d. Phys.*, **12**, 607, 1932.
50. M. Knoll und G. Lubszynski, Elektronenmikroskopische Abbildung durch Sekundärelektronen, *Phys. Zs.*, **17**, 671, 1933.
51. M. Knoll und E. Ruska, Das Elektronenmikroskop, *Zs. f. Ph.*, **78**, 318—339, 1932.
52. M. Knoll, F. G. Houtermans und W. Schulze, Untersuchung der Emissionsverteilung an Glühkathoden mit dem magnetischen Elektronenmikroskop, *Zs. f. Ph.*, **78**, 340—362, 1932.
53. M. Knoll, Elektronenlinsen für Kathodenstrahlröhren *Arch. Elektrotechn. Zs.*, **28**, 1—8, 1934.
54. M. Knoll, H. Knoblauch u. Borries, Fortschritte am Kathodenstrahl-Oszillographen durch Dauerbetrieb mit Metallentladungsröhren und durch Aussenphotographie sehr kurzzeitiger Vorgänge, *Elektrotechn. Zs.*, **51**, 966—970, 1930.
55. M. Knoll, Nutzeffekt des Kathodenstrahloszillographen, *Zs. f. techn. Phys.*, **12**, 54, 1931.
56. M. Knoll und Ruska, *Zs. f. Phys.*, **73**, 233, 1932.
57. M. Knoll und Ruska, *Zs. f. Phys.*, **76**, 14, 1932.
58. M. Knoll und Ruska, *Arch. Tech. Mess.*, **1**, 3, 834, 1932.
59. M. Knoll, Electrostatic Lenses for Cathode-Ray Tubes. *Arch. f. El.*, **28**, 1, 1934.
60. L. Marton, Electron Microscopy of Biological Objects, *Phys. Rev.*, **46**, 527—528, 1934.
61. F. Ollendorf, Potentialfelder der Elektrotechnik, Berlin, 1932, Springer.
62. C. Ollendorf und G. Wendt, Relativistische Korrektur der Abbildungsgesetze einer magnetischen Sammellinse für Kathodenstrahlen, *Zs. f. Phys.*, **B. 76**, H. 9 u. 10, 655—659, 1932.
63. Johannes Picht, Beiträge zur Theorie der geometrischen Elektronenoptik, *An. d. Phys.*, **15**, 926—964, 1932.
64. Johannes Picht, Zur Theorie der Elektronenoptik, *Zs. f. techn. Phys.*, **6**, 239—241, 1933.
65. J. Ficht, Geometrical Optics in Non-homogeneous Media, *Zeitschr. f. Instrumentenkunde.* **53**, 274, 1933.
66. L. Posener, Zur Theorie des Elektronenmikroskops, *Zs. f. Phys.*, **80**, 813, 1933.
67. E. F. Fichter, Elektronenmikroskopische Beobachtungen über die Wanderung der Emissionssubstanz auf Oxydkathoden, *Zs. f. Phys.*, **86**, 697—709, 1933.
68. E. Riecke, Über die Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem homogenen magnetischen Felde und das negative elektrische Glimmlicht, *An. d. Phys.*, **13**, 191, 1881.
69. E. Ruska und M. Knoll, Die magnetische Sammelspule für schnelle Elektronenstrahlen *Zs. f. techn. Phys.*, **8**, 389—399, 1931. Nachtrag, 448.
70. E. Ruska, Die elektronenmikroskopische Abbildung elektronenbestrahlter Oberflächen, *Zs. f. Phys.*, **83**, 492—497, 1933.
71. E. Ruska, Zur Fokussierbarkeit von Kathodenstrahlbündeln grosser Ausgangsquerschnitte, *Zs. f. Phys.*, **83**, 684—697, 1933.
72. E. Ruska, Über ein magnetisches Objektiv für das Elektronenmikroskop, *Zs. f. Phys.* **89**, 90—128, 1934.
73. E. Ruska, Über Fortschritte im Bau und in der Leistung des magnetischen Elektronenmikroskops, *Zs. f. Phys.*, **87**, 580—602, 1934.
74. E. Ruska, *Forsch. u. Fortschr.*, **10**, 8, 1934.
75. O. Scherzer, Zur Theorie der elektronenoptischen Linsenfehler, *Zs. f. Phys.*, **80**, 193, 1933.
76. C. Stromer, The Path of Electrons in Axial Symmetrical Electric and Magnetic Fields, *An. d. Phys.*, **16**, 685, 1933.
77. Tomson, P. P. Elektronen-Optik, *Nature*, **129**, 81, 1932.
78. Thibaud M. J., Longitudinal Magnetic Effects in Beams of Slow Electrons, *Journal de Physique*, **10**, 161, 1929.
79. K. Zworykin, Electron Optics, *Journ. of the Franklin Inst.*, **215**, 536, 1933.
80. K. Zworykin, Television with Cathode-Ray Tubes, *Journ. I. E. E.*, **437**, 1933.
81. E. E. Watson, Dispersion of an Electron Beam, *Philosophical magazine*, vol. III, 849—853, 1927.

## Література російською мовою

1. А. Грошев, Электронный микроскоп, Природа, № 5, 6—13, 1934.
2. Курчагов, Электронный микроскоп, Ж. тех. физ., т. III, в. 5, 689—697, 1933.
3. Н. Н. Малов, Электронный микроскоп, Успехи физ. наук, т. XIII, в. 3, 367—384, 1933.
4. Л. Полотовский, Основы расчета электронно-оптических систем для телевидения, Известия электропром. слабого тока, № 5, 22—35, 1934.
5. Я. И. Френкель и С. А. Бобковский, К вопросу о нитевидных электронных пучках, Жур. эксп. и теорет. физики, т. II, в. 5—6, 353—364, 1932.

Інститут фізики Всеукраїнської Академії Наук (Київ)

**Електричне поле плоского конденсатора з отворами,  
як електроннооптична система<sup>1)</sup>**

І. І. Сахаров

1. Теоретично досліджено розподіл електричного поля плоского конденсатора з отворами і встановлено залежності розподілу від геометричних розмірів його.
2. Обчислено і переведено аналіз радіальної складової сили електричного поля конденсатора в залежності від прикладених до пластинок потенціалів і розмірів конденсатора.
3. Розглянуто умови руху електрона в полі конденсатора і встановлено, що поле діє на електрон як система, що складається з збірної і розсіювальної лінзи.
4. Теоретично підтверджено, що властивість даної електроннооптичної системи визначається відношенням  $\frac{U_1}{U_2}$ , де  $U_1$  напруга лінзи, а  $U_2$  швидкість електронів.

Електронна оптика поступово набуває все більшого практичного значення, входячи в окремі ділянки науки і техніки (катодний осцилограф, більдапарати, дослідження поверхень, що вилучають електрони і т. д.).

Побудова електроннооптичних систем ґрунтується на вивченні руху електронів в електричному і магнітному полях; характер руху електронів визначається розподілом електричного або магнітного поля; так, наприклад: відокремлений діафрагмою вузький пучок електронних променів, що виходить з опуклого катода розрядної трубки, розповсюджується прямолінійно, при чому поперечний перетин пучка променів із зростанням віддалення від діафрагми збільшується. Як-

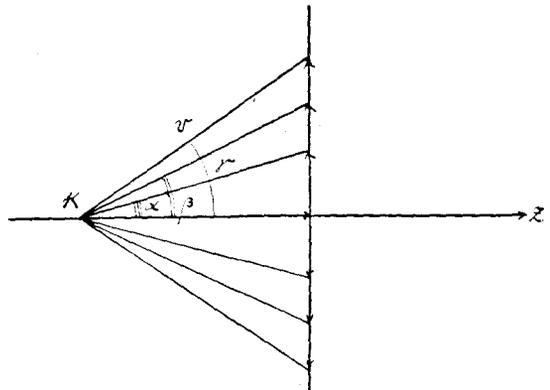


Рис. 1.

що розглядати меридіанні електронні промені (рис. 1), тобто промені, що лежать в одній площині і утворюють з віссю симетрії пучка різні кути ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  і т. д.), то для одержання електронного променя з малим поперечним перетином, тобто для концентрування електронних променів на дуже малому елементі поверхні, треба на шляху розповсюдження їх утворити поле так, щоб кожний електрон під час руху в силовому полі втрачав радіальний імпульс, що є пропорціональний віддаленню променів від осі пучка. Отже,

<sup>1)</sup> Кандидатська дисертація, захищена 3. XII 1934 р.

утворюючи, наприклад, електричне поле, яке дає радіальну складову сили поля  $\mathcal{E}_r$ , перпендикулярну до осі променя і величиною тим більшу, чим далі від осі міститься промінь, можна здійснити електричну лінзу; причому, якщо напрям радіальної складової електричного поля буде збігатися з напрямом радіального імпульсу променя,—одержимо розсіювальну лінзу; а при протилежних напрямках—збірну (рис. 1).

Отже, щоб вирішити питання про придатність поля для електронно-оптичної системи, треба досліджувати характер розподілу електричного поля, що визначатиме траєкторію руху електронного променя в даному полі, а разом з тим і властивість електроннооптичної системи.

Аналітичне дослідження розподілу поля в загальному випадку являє значні математичні труднощі, тому, за аналогією з центрованими системами в світловій оптиці, можна розглядати електроннооптичні системи, що мають аксіальну симетрію (на практиці здебільшого використовуються такі системи).

Докладну теорію руху електронів у магнітному полі аксіальної симетрії подано Busche-ем<sup>1)</sup>.

Ми розглянемо окремий випадок електричного поля аксіальної симетрії—поля плоского конденсатора з отворами. Розгляд охоплює дві частини: 1) теоретичне дослідження розподілу електричного поля, 2) на підставі аналізу розподілу поля визначаються умови руху електронів у цьому полі.

### § 1. Обчислення електричного поля аксіальної симетрії

Відомо, що електричне поле графічно можна окреслити екіпотенціальними поверхнями або силовими лініями. Для відображення поля екіпотенціальними поверхнями нам треба знати потенціал у всіх точках поля; сполучивши точки рівних потенціалів, одержимо екіпотенціальні поверхні, а користуючись зв'язком між напругою поля  $E$  і потенціалом  $U$   $E = -\text{grad } U$ ,—можна побудувати силові лінії. Отже, при дослідженні електричного поля основне завдання полягає у визначенні потенціалу в будь-якій точці поля.

Аналітичний розгляд цього питання приступний лише для полів окремих найпростіших систем провідників (напр., поля конденсаторів: плоского, кулястого, циліндричного; площини, циліндричного дроту, кулі тощо), тоді як в техніці доводиться вживати різноманітні системи. Ми розглянемо окремі загальні методи визначення розподілу потенціалу. Здебільшого при розгляді цього питання доводиться шукати розв'язок рівняння Laplace-а

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Точне інтегрування цього рівняння можна провести лише в окремих частинних випадках. Тому, що багато задач, які зводяться до рівняння

<sup>1)</sup> Н. Busch, Ann. d. Phys., **81**, 974, 1926; Н. Busch, Arch. f. El., **18**, 583, 1927.

Лапласе-а, мають аксіальну симетрію, розглянемо розподіл аксіально-симетричного електричного поля.

Для зручності перепишемо рівняння Лапласе-а в циліндричних координатах:

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0;$$

при умові аксіальної симетрії ( $U$  від  $\varphi$  не залежить), одержимо:

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Це рівняння задовольняє подана О. Scherzer-ом<sup>1)</sup> потенціальна функція:

$$U(z, r) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \varphi^{(2\nu)} \left( \frac{r}{2} \right)^{2\nu} \quad (1)$$

де індекс  $(2\nu)$  визначає  $2\nu$  диференціювання по  $z$  функції  $\varphi = U(z, 0)$  — розподілу потенціалу на осі симетрії системи.

Справді:

$$\left( \frac{r}{2} \right)^{2\nu} \left[ \frac{(-1)^{\nu+1} \frac{1}{2} \cdot (\nu+1)}{[(\nu+1)!]^2} \varphi^{(2\nu+2)} + \right. \\ \left. + \frac{\frac{1}{2} (-1)^{\nu+1} (\nu+1) (2\nu+1)}{[(\nu+1)!]^2} \varphi^{(2\nu+2)} - \frac{(-1)^{\nu+1} (\nu+1)^2}{[(\nu+1)!]^2} \varphi^{2\nu+2} \right] = 0$$

або:

$$(\nu+1) + (\nu+1)(2\nu+1) - 2(\nu+1)^2 = 0 \\ (\nu+1)(1+2\nu+1-2\nu-2) = 0$$

Отже, якщо знаємо розподіл потенціалу вздовж осі симетрії системи провідників, можна знайти величину потенціалу в будь якій точці простору. Практично задача зводиться до обчислення ряду (1).

Далі розглянемо рівняння Лапласе-а в полярних (сферичних) координатах при умовах аксіальної симетрії:

$$\Delta U = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0 \quad (2)$$

будемо шукати розв'язок цього рівняння у формі добутку:

$$U = \Phi(\theta) \cdot R(r) \quad (3)$$

Після підставлення (3) в (2) одержимо:

$$\Delta U = \frac{R(r)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta \cdot \Phi'(\theta)] + \Phi(\theta) \frac{\partial}{\partial r} [r^2 R'(r)] = 0$$

<sup>1)</sup> О. Scherzer, Zs. f. Phys., **80**, 193, 1933; Н. Bateman, Part. Diff. Equ. of. Math. Physics, p. 406.

або

$$\frac{[\sin \theta \Phi'(\theta)]'}{\Phi(\theta) \cdot \sin \theta} = - \frac{[r^2 R'(r)]'}{R} \quad 4$$

Ліва частина рівняння (4) не залежить від  $r$ , тому обидві частини рівняння дорівнюють const.

$$\frac{[\sin(\theta) \Phi'(\theta)]}{\Phi(\theta) \sin \theta} = - \frac{[r^2 R'(r)]'}{R} = -\lambda$$

звідси:

$$[\sin \theta \cdot \Phi'(\theta)]' + \lambda \Phi(\theta) \sin \theta = 0$$

і

$$[r^2 R'(r)]' - \lambda R = 0$$

Покладімо:

$$\cos \theta = x; \quad \lambda = n(n+1)$$

Одержимо:

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)] \frac{d\Phi}{dx} + n(n+1) \cdot \Phi = 0 \quad 5$$

$$\frac{r^2 R'}{R} = n(n+1) \quad 6$$

Рівняння (5) є рівняння Legendre-a. Функції, що задовольняють це рівняння, будуть:

$$\Phi_n = P_n(\cos \theta) \quad 7$$

Рівняння (6) дає розв'язок:

$$R = C_1 r^n + C_2 \frac{1}{r^{n+1}} \quad (7a)$$

Загальний розв'язок рівняння (2) буде:

$$U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad \text{для } r < 1 \quad (8)$$

$$U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad \text{для } r > 1$$

при  $\theta = 0$ , тобто для значення функції на осі  $z$ , відповідно одержимо:

$$U(r, 0) = \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \quad \text{для } z < 1 \quad (9)$$

$$U(r, 0) = \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{1}{z^{n+1}} \quad \text{для } z > 1$$

Виходить, що коли нам задано  $\varphi(z)$  — розподіл потенціалу по осі симетрії системи у вигляді рівномірнорозбіжного степеневого ряду, то для одержання потенціальної функції  $U(r, \theta)$  треба у виразах для  $\varphi(z)$  замінити  $z^n$  на  $r^n P_n(\cos \theta)$  або  $\frac{1}{z^{n+1}}$  на  $\frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}$  і далі перевести обчислення рядів (8). Значення поліномів Legendre-a можна взяти з таблиці

Переліченими методами розв'язується питання розподілу електричного поля аксіальної симетрії, незалежно від форми і комбінації сполук заряджених провідників, якими утворено електричне поле, при умові, що відомий розподіл потенціалу по осі симетрії. Вибір того чи іншого методу визначатиметься видом функції розподілу потенціалу по осі і ознаками збіжності рядів (рівномірна збіжність, як швидко збігаються ряди).

Графічна інтерпретація електричного поля, як уже згадувалось, здійснюється через екіпотенціальні поверхні. Рівняння екіпотенціальних поверхней буде:

$$P(z, r) \equiv U(z, r) - \varphi_0 = 0, \quad (10)$$

де  $\varphi_0$  значення потенціалу, що відповідає даній екіпотенціальній поверхні. Розв'язуючи це рівняння, можна накреслити поверхні.

## § 2. Електричне поле плоского конденсатора з отворами в пластинках

В багатьох прикладних питаннях і зокрема в електронній оптиці вживаються заряджені пластинки з отворами (діафрагми, електричні лінзи), тому інтересно дослідити розподіл поля для цих систем провідників.

Розглянемо поле двох паралельних пластинок  $A$  і  $B$ , що мають отвори радіуса  $r_0$  (рис. 2) і заряджені відповідно до потенціалу  $U_1$  і  $U_2$ ; позначимо віддалення між пластинками через  $2d$ . Згадана система має аксіальну симетрію. Введемо циліндричні координати  $z$  і  $r$  з початком в точці  $O$ .

При умові, що  $r_0 < 2d$ , розподіл потенціалу по осі  $z$  визначається залежністю від значення  $z$  чотирма рівняннями<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \varphi_I &= U_1 - \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left( \frac{z}{r_0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r_0}{z} - 1 \right) \\ &\quad (\text{при } z \leq 0) \\ \varphi_{II} &= U_1 + \frac{U_2 - U_1}{2d} z - \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left( \frac{z}{r_0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r_0}{z} - 1 \right) \\ &\quad (\text{при } d \geq z \geq 0) \\ \varphi_{III} &= U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2d} (z - 2d) + \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left( \frac{z - 2d}{r_0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r_0}{z - 2d} - 1 \right) \\ &\quad (\text{при } d \leq z \leq 2d) \\ \varphi_{IV} &= U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left( \frac{z - 2d}{r_0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r_0}{z - 2d} - 1 \right) \\ &\quad (\text{при } z \geq 2d) \end{aligned} \quad (1)$$

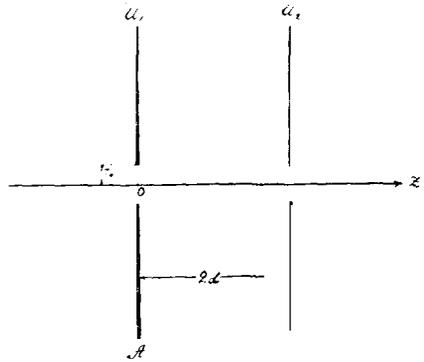


Рис. 2.

<sup>1)</sup> F. Ollendorf, Potentialfelder der Elektrotechnik.

На підставі формули (1) § 1, розподіл потенціалу у всьому просторі буде визначатися рівняннями:

$$\begin{aligned}
 U_I(z, r) &= \varphi_I - \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0^3 \left[ \frac{r^2}{2(z^2 + r_0^2)^2} + \frac{r^4(r_0^2 - 5z^2)}{8(z^2 + r_0^2)^4} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r^6(35z^4 - 42z^2r_0^2 + 3r_0^4)}{48(z^2 + r_0^2)^6} + \dots \right] \quad (\text{при } z \leq 0) \\
 U_{II}(z, r) &= \varphi_{II} - \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0^3 \left[ \frac{r^2}{2(z^2 + r_0^2)^2} + \frac{r^4(r_0^2 - 5z^2)}{8(z^2 + r_0^2)^4} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r^6(35z^4 - 42z^2r_0^2 + 3r_0^4)}{48(z^2 + r_0^2)^6} + \dots \right] \quad (\text{при } d \geq z \geq 0) \\
 U_{III}(z, r) &= \varphi_{III} + \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0^3 \left[ \frac{r^2}{2(t^2 + r_0^2)^2} + \frac{r^4(r_0^2 - 5t^2)}{8(t^2 + r_0^2)^4} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r^6(35t^4 - 42t^2r_0^2 + 3r_0^4)}{48(t^2 + r_0^2)^6} + \dots \right] \quad (\text{при } d \leq z \leq 2d) \\
 U_{IV}(z, r) &= \varphi_{IV} + \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0^3 \left[ \frac{r^2}{2(t^2 + r_0^2)^2} + \frac{r^4(r_0^2 - 5t^2)}{8(t^2 + r_0^2)^4} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r^6(35t^4 - 42t^2r_0^2 + 3r_0^4)}{48(t^2 + r_0^2)^6} + \dots \right] \quad (\text{при } z \geq 2d)
 \end{aligned} \tag{2}$$

де  $t = z - 2d$ .

Обчислення можна також провадити за формулами (8) § 1. Для цього треба функції  $\varphi_I$ ,  $\varphi_{II}$ ,  $\varphi_{III}$  і  $\varphi_{IV}$  розкласти в ряд.

Для прикладу подамо докладний розклад  $\varphi_I$ .

$$\operatorname{arctg} \frac{r_0}{z} = \frac{\pi}{2} - \frac{z}{r_0} + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{r_0} \right)^3 - \frac{1}{5} \left( \frac{z}{r_0} \right)^5 + \frac{1}{7} \left( \frac{z}{r_0} \right)^7 - \dots \quad \text{для } |z| < r_0$$

$$\operatorname{arctg} \frac{r_0}{z} = \frac{r_0}{z} - \frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{r_0}{z} \right)^5 - \frac{1}{7} \left( \frac{r_0}{z} \right)^7 + \dots \quad \text{для } |z| \geq r_0$$

Для  $z \leq 0$ :

$$\varphi_I = U_1 - \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ \frac{\pi}{2} \frac{z}{r_0} - \left( \frac{z}{r_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{r_0} \right)^4 - \frac{1}{5} \left( \frac{z}{r_0} \right)^6 + \frac{1}{7} \left( \frac{z}{r_0} \right)^8 - \dots - 1 \right] \quad |z| < r_0$$

$$\varphi_I = U_1 - \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{z} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{r_0}{z} \right)^4 - \frac{1}{7} \left( \frac{r_0}{z} \right)^6 + \dots \right] \quad |z| \geq r_0$$

$$\begin{aligned}
 U_I(r, \theta) &= U_1 - \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{r}{r_0} \right) P_1(\cos \theta) - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3} \left( \frac{r}{r_0} \right)^4 P_4(\cos \theta) - \frac{1}{5} \left( \frac{r}{r_0} \right)^6 P_6(\cos \theta) + \dots - 1 \right] \quad |r| < r_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_I(r, \theta) &= U_1 - \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 P_1(\cos \theta) + \frac{1}{5} \left( \frac{r_0}{r} \right)^4 P_3(\cos \theta) + \dots \right] \\
 &\quad |r| > r_0
 \end{aligned}$$

Аналогічно одержимо для решти функцій:

Для  $d \geq z \geq 0$ :

$$\varphi_{II} = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{2d} z - \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{z} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{r_0}{z} \right)^4 - \frac{1}{7} \left( \frac{r_0}{z} \right)^6 + \dots - 1 \right]$$

$|z| \geq r_0$

$$\varphi_{II} = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{2d} z - \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{z}{r_0} \right) - \left( \frac{z}{r_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{r_0} \right)^4 - \frac{1}{5} \left( \frac{z}{r_0} \right)^6 + \dots - 1 \right]$$

$|z| < r_0$

$$U_{II}(r, \theta) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{2d} z - \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 P_1(\cos \theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5} \left( \frac{r_0}{r} \right)^4 P_3(\cos \theta) - \frac{1}{7} \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 P_5(\cos \theta) + \dots - 1 \right]$$

$|r| > r_0$

3

$$U_{II}(r, \theta) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{2d} z - \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{r}{r_0} \right) P_1(\cos \theta) - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \left( \frac{r}{r_0} \right)^4 P_4(\cos \theta) - \frac{1}{5} \left( \frac{r}{r_0} \right)^6 P_6(\cos \theta) + \dots - 1 \right]$$

$|r| < r_0$

Для  $d \leq z \leq 2d$ :

$$\varphi_{III} = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2d} t + \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{t} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{r_0}{t} \right)^4 - \frac{1}{7} \left( \frac{r_0}{t} \right)^6 + \dots - 1 \right]$$

$(t = z - 2d) \quad |t| \geq r_0$

$$\varphi_{III} = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2d} t + \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{t}{r_0} \right) - \left( \frac{t}{r_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{t}{r_0} \right)^4 - \frac{1}{5} \left( \frac{t}{r_0} \right)^6 + \dots - 1 \right]$$

$|t| < r_0$

$$U_{III} = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2d} t + \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 P_1(\cos \theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5} \left( \frac{r_0}{r} \right)^4 P_3(\cos \theta) - \frac{1}{7} \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 P_5(\cos \theta) + \dots - 1 \right]$$

$|r| > r_0$

$$U_{III} = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2d} t + \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{r}{r_0} \right) P_1(\cos \theta) - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \left( \frac{r}{r_0} \right)^4 P_4(\cos \theta) - \frac{1}{5} \left( \frac{r}{r_0} \right)^6 P_6(\cos \theta) + \dots - 1 \right]$$

$|r| < r_0$

Для  $z \geq 2d$ :

$$\varphi_{IV} = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{t} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{r_0}{t} \right)^4 - \frac{1}{7} \left( \frac{r_0}{t} \right)^6 + \dots \right]$$

$|t| > r_0$

$$\varphi_{IV} = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{t}{r_0} \right) - \left( \frac{t}{r_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{t}{r_0} \right)^4 - \frac{1}{5} \left( \frac{t}{r_0} \right)^6 + \dots \right]$$

$|t| < r_0$

$$U_{IV} = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 P_1(\cos \theta) + \frac{1}{5} \left( \frac{r_0}{r} \right)^4 P_3(\cos \theta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{7} \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 P_5(\cos \theta) + \dots \right]$$

$|r| > r_0$

$$U_{IV} = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0 \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{r}{r_0} \right) P_1(\cos \theta) - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left( \frac{r}{r_0} \right)^4 P_4(\cos \theta) - \dots - 1 \right]$$

$|r| < r_0$

Користуючись рівнянням (8), будемо провадити обчислення. Щоб одержати рівняння екіпотенціальних поверхень, скористуємось залежностями (1) і (10) § 1, при чому обмежимося лише першими двома членами розкладу:

$$U(z, r) = \varphi_0 \\ \varphi - \frac{r^2}{4} \frac{U_2 - U_1}{2\pi d} r_0^3 \frac{1}{(z^2 + r_0^2)^2} \approx \varphi_0 \\ r \approx \pm \frac{2(z^2 + r_0^2)}{r_0} \sqrt{\frac{\pi d}{(U_2 - U_1) r_0}} \sqrt{\varphi - \varphi_0} \quad (4)$$

$\varphi$  — значення потенціалу на осі симетрії, а  $\varphi_0$  — наперед задане значення потенціалу, що відповідає шуканій екіпотенціальній поверхні.

### § 3. Результати обчислень

Користуючись вказаними в § 2 залежностями, проведено обчислення електричного поля плоского конденсатора з отворами, при чому одна пластинка конденсатора заряджена до потенціалу  $U_1 = 50$  V, друга —  $U_2 = 650$  V. Для порівняння результатів, обчислення зроблено для конденсаторів з різними геометричними розмірами, тобто віддаленнями між пластинками та радіусами отворів, а саме: для віддалень між пластинками  $d = 1,5$  см і  $d = 2$  см і радіусів отвору в пластинках  $r = 0,2$  см,  $r = 0,4$  см і  $r = 0,6$  см.

Табл. I подає значення на осі симетрії; ці самі результати інтерпретовано графічно на рис. 3.

Результати обчислень вказують, що при сталих значеннях потенціалу на обкладках конденсатора:

Т а б л и ц я I

значень потенціалу на осі симетрії для  $U_1 = 50$  V;  $U_2 = 650$  V

№	z в см	Віддалення між пластинками $2d = 1,5$ см			Віддалення між пластинками $2d = 2$ см		
		$r_0 = 0,2$ см	$r_0 = 0,4$ см	$r_0 = 0,6$ см	$r_0 = 0,2$ см	$r_0 = 0,4$ см	$r_0 = 0,6$ см
1	-4	50,05	50,17	50,53	50,015	50,13	50,40
2	3	50,10	50,30	51,00	50,030	50,22	50,75
3	2	50,10	50,66	52,25	50,065	50,50	51,69
4	1	50,38	52,47	57,44	50,26	51,87	55,86
5	0,9	50,40	53,00	59,00	50,30	52,26	56,76
6	0,8	50,51	53,70	60,5	50,38	52,78	57,90
7	0,7	50,69	54,6	63,2	50,49	53,50	59,9
8	0,6	50,89	56,0	66,4	50,67	54,51	62,3
9	0,5	51,20	57,9	70,6	50,93	56,0	65,5
10	0,4	51,85	60,9	76,2	51,38	58,2	69,7
11	0,3	53,02	65,5	84,0	52,3	61,6	75,6
12	0,2	55,46	72,8	94,6	54,1	67,0	83,5
13	-0,1	61,39	84,0	108,4	58,5	75,5	92,8
14	0	75,5	100,9	126,3	69,1	88,2	107,3
15	+0,1	101,39	124,0	148,4	88,5	105,5	122,8
16	0,2	135,46	152,8	174,6	114,1	127,0	143,5
17	0,3	173,02	185,5	204,0	142,3	151,6	165,6
18	0,4	211,85	220,9	236,2	171,38	178,2	189,7
19	0,5	251,20	257,9	270,6	200,93	206,0	215,5
20	0,6	290,89	296,0	306,4	230,67	234,51	242,5
21	0,7	330,69	334,6	343,2	260,49	263,50	269,9
22	0,8	369,31	365,4	356,2	290,38	292,78	297,9
23	0,9	409,11	404,0	393,6	320,30	322,26	326,76
24	1,0	448,80	442,1	429,4	350,25	351,87	355,86
25	1,1	488,15	479,1	463,8	379,7	377,74	373,24
26	1,2	526,98	514,5	496,0	409,62	407,22	402,1
27	1,3	564,54	547,2	525,4	439,51	436,5	430,1
28	1,4	598,61	576,0	551,6	469,33	465,49	457,7
29	1,5	624,5	599,1	573,7	499,07	494,0	484,5
30	1,6	638,61	616,0	591,6	528,62	521,8	510,3
31	1,7	644,54	627,2	605,4	557,7	548,4	534,4
32	1,8	646,98	634,5	616,0	585,9	573,0	556,5
33	1,9	648,15	639,1	623,8	611,5	594,5	577,2
34	2,0	648,80	642,1	629,4	630,9	611,8	592,7
35	3,0	649,75	648,31	646,31	649,75	648,13	644,14
36	+4,0	649,94	694,62	648,6	649,93	649,5	648,31

1. Значення потенціалу на осі симетрії: а) всередині конденсатора на віддаленні  $0,2$  см від пластинок зростають майже пропорційно, тобто поле наближається до поля звичайного плоского конденсатора; б) зовні пластинок — асимптотично наближаються до відповідних значень потенціалів пластинок; практично можна вважати, що на віддаленні  $1$  см від пластинок потенціали набувають сталих значень.

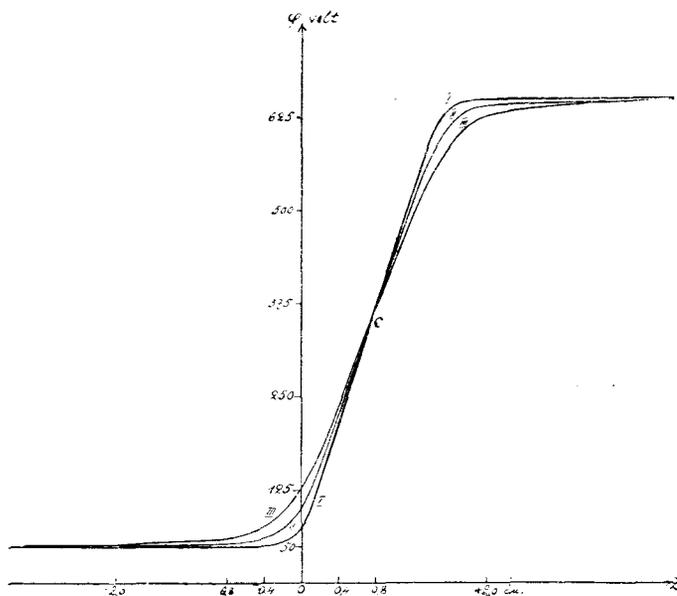


Рис. 3. Розподіл потенціалу на осі симетрії плоского конденсатора з отворами.  $U_1 = 50$  В;  $U_2 = 650$  В;  $2d = 1,5$  см. Графіки: I —  $r_0 = 0,2$  см; II —  $r_0 = 0,4$  см; III —  $r_0 = 0,6$  см.

2. Не порушуючи загального характеру кривої розподілу потенціалу на осі симетрії: а) збільшення радіуса отворів зменшує значення потенціалу в центрі отвору пластинки, що заряджена до більшого потенціалу і збільшує його в центрі отвору пластинки з меншим потенціалом, залишаючи майже незмінним значення в центрі самого конденсатора (точка С — перетину кривих розподілу потенціалу, рис. 4), що дорівнює середньому значенню від значень потенціалу на обкладках конденсатора, б) збільшення віддалення між пластинками зменшує значення потенціалів у центрах отворів (рис. 5).

Для визначення значень потенціалу в просторі конденсатора виділено циліндричний простір ( $r = 0,15$  см,  $z = -4$  см,  $z = +4$  см), як найбільш інтересну частину при дослідженні електронооптичних властивостей системи. Обчислення зроблено на підставі співвідношень (2) і (3) § 2.

Результати подано в табл. II, де  $z$  — вісь симетрії, а  $r$  віддалення від осі. Як видно з таблиці, відхилення значень, знайдених за формулою (2) § 2, від значень, обчислених за формулами (3) § 2, — не перевищують  $\pm 0,5\%$ .

На підставі табл. II і співвідношення (10) § 1 накреслено екіпотенціальні поверхні (рис. 6).

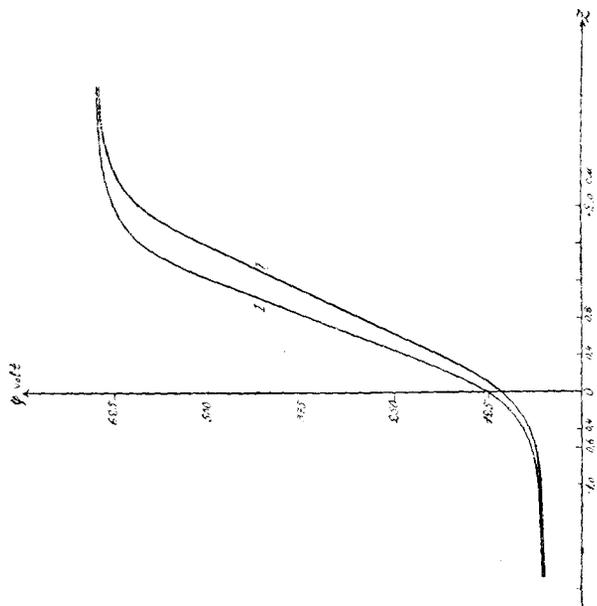


Рис. 5. Розподіл потенціалу на осі симетрії плоского конденсатора з отворами.  $U_1 = 50V$ ;  $U_2 = 650V$ ;  $r_0 = 0,6$  см. Графіки: I —  $2d = 1,5$  см; II —  $2d = 2,0$  см.

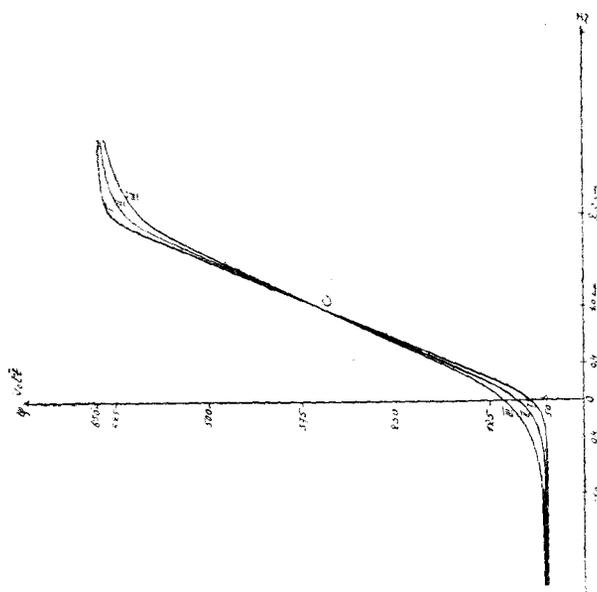


Рис. 4. Розподіл потенціалу на осі симетрії плоского конденсатора з отворами.  $U_1 = 50V$ ;  $U_2 = 650V$ ;  $2d = 2$  см. Графіки: I —  $r_0 = 0,2$  см; II —  $r_0 = 0,4$  см; III —  $r_0 = 0,6$  см.

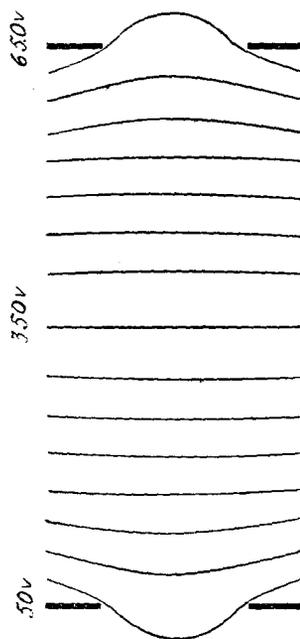


Рис. 6. Розподіл електричного поля плоского конденсатора.  $2d = 1,5$  см;  $r_0 = 0,2$  см.

Т а б л и ц я П

значень потенціалу в просторі плоского конденсатора з отворами

$$U_1 = 50 \text{ V}; U_2 = 650 \text{ V}; 2d = 1,5 \text{ см}; r_0 = 0,2 \text{ см}$$

№	z	r = 0	r = 0,05 см		r = 0,10 см		r = 0,15 см	
			За функцією Scherzer-a	За поліномами Legendre-a	За функцією Scherzer-a	За поліномами Legendre-a	За функцією Scherzer-a	За поліномами Legendre-a
1	-4,0	50,0510	50,0509	—	50,0509	—	50,0508	—
2	3,0	50,1020	50,1019	—	50,1019	—	50,1019	—
3	2,0	50,102	50,1019	50,084	50,1019	—	50,1019	50,083
4	1,0	50,383	50,381	50,338	50,378	—	50,372	50,328
5	0,9	50,404	50,402	50,416	50,397	—	50,388	50,401
6	0,8	50,510	50,507	50,528	50,499	—	50,485	50,500
7	0,7	50,69	50,684	50,682	50,67	—	50,649	50,620
8	0,6	50,89	50,88	50,87	50,86	—	50,82	50,81
9	0,5	51,20	51,19	51,21	51,15	51,17	51,08	51,10
10	0,4	51,85	51,82	51,82	51,73	51,70	51,59	51,57
11	0,3	53,02	52,94	52,99	52,73	52,63	52,42	52,41
12	0,2	55,46	55,27	55,10	54,72	54,61	53,93	54,17
13	-0,1	61,38	60,88	61,01	59,38	59,49	57,03	57,26
14	0	75,50	74,59	74,49	72,09	72,03	67,04	67,25
15	+0,1	101,38	100,88	101,01	99,38	99,49	97,03	97,26
16	0,2	135,46	135,27	135,10	134,72	134,61	133,93	134,17
17	0,3	173,02	172,94	172,99	172,73	172,63	172,42	172,41
18	0,4	211,85	211,82	211,82	211,73	211,70	211,59	211,57
19	0,5	251,20	251,19	251,21	251,15	251,17	251,08	251,10
20	0,6	290,89	290,88	290,87	290,86	—	290,82	290,81
21	0,7	330,69	330,68	330,68	330,67	—	330,65	330,62
22	0,8	369,31	369,32	369,318	369,33	—	369,35	369,38
23	0,9	409,11	409,12	409,13	409,14	—	409,19	409,19
24	1,0	448,80	448,81	448,79	448,85	448,83	448,92	448,90
25	1,1	488,15	488,18	488,18	488,27	488,30	488,41	488,43
26	1,2	526,98	527,06	527,01	527,27	527,37	527,58	527,59
27	1,3	564,54	564,34	564,90	565,28	565,39	566,07	565,83
28	1,4	598,61	599,12	598,99	600,63	600,51	602,97	602,74
29	1,5	624,50	625,31	625,51	627,91	627,97	632,96	632,75
30	1,6	638,61	639,12	638,99	640,62	640,51	642,97	642,74
31	1,7	644,54	644,73	644,90	645,28	645,39	646,07	645,83
32	1,8	646,98	647,06	647,01	647,27	647,37	647,58	647,59
33	1,9	648,15	648,18	648,18	648,27	648,30	648,41	648,43
34	2,0	648,79	648,81	648,79	648,85	648,83	648,92	648,90
35	3,0	649,75	649,75	—	649,7459	—	649,7471	—
36	+4,0	649,936	649,936	—	649,936	—	649,939	—

Розгляд поля вказує, що 1) загальний характер розподілу поля на певній віддалі від осі симетрії ( $r=0,05$  см, або  $r=0,1$  см, або  $r=0,15$  см) в межах виділеного циліндричного простору залишається той самий, що і для осі симетрії ( $r=0$ ); 2) утворення отворів у пластинках конденсатора деформує поле; еквіпотенціальні поверхні відносно середини конденсатора симетрично скривлені, тобто витягуються отворами; кривина поверхень зростає із збільшенням віддалення від осі симетрії — недеформованої еквіпотенціальної поверхні, що має середнє значення потенціалу від значення на обкладках конденсатора: при наших умовах  $U_p = \frac{U_1 + U_2}{2} = 350$  V.

#### § 4. Застосування поля плоского конденсатора з отворами для електрооптичних досліджень

Для виявлення придатності поля плоского конденсатора з отворами для електрооптичних досліджень розглянемо радіальну складову силу поля конденсатора. Ця складова визначається рівнянням:

$$\mathcal{E}_r = - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (1)$$

або, на підставі рівняння (1) § 1:

$$\mathcal{E}_r = - \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(\nu!)^2} \varphi^{(2\nu)} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{2\nu-1} \quad (2)$$

Користуючись рівнянням (2), обчислено значення радіальних складових сили поля в просторі циліндра:  $r=0,15$  см і  $z = \pm 4$  см конденсатора, що мав  $U_1 = 50$  V і  $U_2 = 650$  V, радіус отвору  $r_0 = 0,2$  см і віддалення між пластинками  $2d = 1,5$  см.

Результати обчислень подано в табл. III і графічно на рис. 7. Розгляд результатів приводить до таких висновків щодо радіальної складової сили поля: 1) зовні пластинок, із збільшенням віддалення від них, складова сили асимптотично наближається до 0; 2) в центрах обох отворів пластинок вона набуває максимальних і абсолютною величиною рівних значень; 3) в центрі конденсатора радіальна складова сили поля дорівнює нулеві і міняє напрям; 4) із збільшенням віддалення від осі симетрії системи, складова сили зростає, зберігаючи загальний характер розподілу в просторі.

Розглянемо рух електрона в полі цього конденсатора, при чому власним магнітним полем електрона і полем просторових зарядів ми будемо

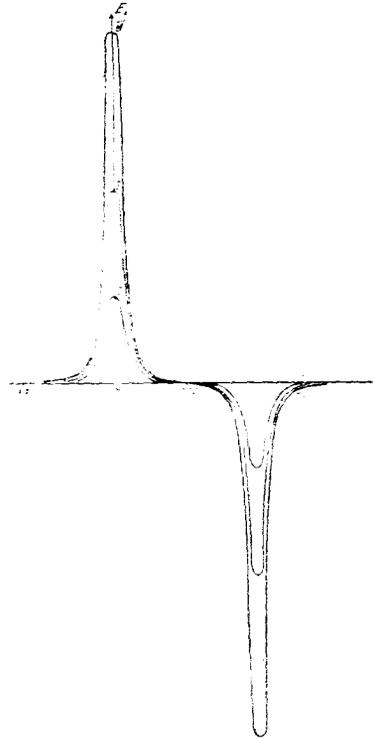


Рис. 7. Розподіл радіальної сили поля плоского конденсатора з отворами.  $U_1 = 50$  V;  $U_2 = 650$  V;  $2d = 1,5$  см;  $r_0 = 0,2$  см. Графіки: I —  $r = 0,05$  см; II —  $r = 0,1$  см; III —  $r = 0,15$  см.

Т а б л и ц я П І І

значень радіальної складової сили електричного поля плоского конденсат отворами  
 $U_1 = 50 \text{ V}$ ;  $U_2 = 650 \text{ V}$ ;  $2d = 1,5 \text{ см}$ ;  $r_0 = 0,2 \text{ см}$

№	$z$	$r = 0,05 \text{ см}$	$r = 0,10 \text{ см}$	$r = 0,15 \text{ см}$
1	-4,0	+ 0,00019	+ 0,00038	+ 0,00057
2	3,0	0,00062	0,00124	0,00186
3	2,0	0,0031	0,0062	0,0093
4	1,0	0,0469	0,0922	0,1344
5	0,9	0,0702	0,1375	0,1994
6	0,8	0,1094	0,2131	0,3063
7	0,7	0,1796	0,3478	0,4952
8	0,6	0,3166	0,6213	0,9067
9	0,5	0,5956	1,1393	1,5535
10	0,4	1,2447	2,3884	3,0120
11	0,3	2,9274	5,3404	6,8597
12	0,2	7,7188	13,9143	16,9463
13	-0,1	20,2763	39,2904	53,179
14	0	32,9177	73,2128	133,8956
15	+0,1	20,2763	39,2904	53,179
16	0,2	7,7188	13,9143	16,9463
17	0,3	2,9274	5,3404	6,8597
18	0,4	1,2445	2,3084	3,0120
19	0,5	0,5956	1,1393	1,5535
20	0,6	0,3166	0,6213	0,9067
21	0,7	+ 0,1796	+ 0,3478	+ 0,4952
22	0,8	- 0,1796	- 0,3478	- 0,4952
23	0,9	0,3166	0,6213	0,9067
24	1,0	0,5956	1,1393	1,5535
25	1,1	1,2447	2,3084	3,0120
26	1,2	2,9274	5,3404	6,8597
27	1,3	7,7188	13,9143	16,9463
28	1,4	20,2763	39,2904	53,179
29	1,5	32,9177	73,2128	133,8956
30	1,6	20,2763	39,2904	53,179
31	1,7	7,7188	13,9143	16,9463
32	1,8	2,9274	5,3404	6,8597
33	1,9	1,2447	2,3084	3,0120
34	2,0	0,5956	1,1393	1,5535
35	3,0	0,0097	0,0184	0,0291
36	+ 4,0	- 0,0013	- 0,0026	- 0,0039

нехтувати; обмежимося випадком аксіальних електронних променів, тобто будемо розглядати лише рух тих електронів, що їх швидкості утворюють малі кути з віссю симетрії; тому в розкладі рівняння (2) можна обмежитися лише першим членом. При цій умові рівняння руху електрона, що виходить з точки  $P$  осі симетрії розрядної трубки з початковою швидкістю  $v_0$  під кутом  $\alpha$  до осі (рис. 8) і далі проходить через електростатичну систему, яка складається з двох пластинок  $A$  і  $B$  з отворами, заряджених до потенціалів  $U_1$  і  $U_2$  відносно катода, при чому вісь симетрії системи збігається з віссю трубки, — буде:

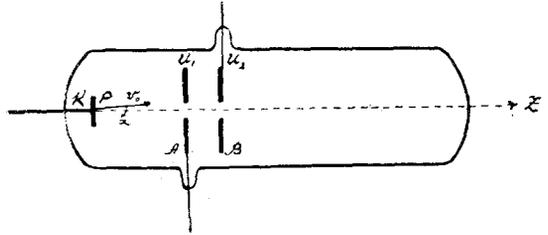


Рис. 8.

$$F_r = m \frac{d^2 r}{dt^2} = -e \cdot \mathcal{E}_r \approx -e \cdot \frac{r}{2} \varphi'', \quad (3)$$

або, підставляючи значення для  $\varphi''$  з рівняння (1) § 2, одержимо:

$$F_{r(I-II)} \approx -e \frac{r}{2} \left[ + \frac{U_2 - U_1}{\pi d} \frac{r_0^3}{(z^2 + r_0^2)^2} \right] \quad \text{для } z \leq d \quad (4)$$

$$F_{r(III-IV)} \approx -e \frac{r}{2} \left[ - \frac{U_2 - U_1}{\pi d} \frac{r_0^3}{[(z - 2d)^2 + r_0^2]^2} \right] \quad \text{для } z > d$$

Індекси I—II і III—IV відповідають окремим частинам поля.

З рівняння (3) і (4) видно, що:

1. Напрямок радіальної сили визначається знаком  $\varphi''$ ; якщо розташування координатної системи залишити те саме, що було прийняте в § 2, то в просторі  $z \leq d$  радіальна сила матиме протилежний знак  $r$ , тобто буде мати напрям протилежний радіальному імпульсу електрона; ця частина системи діє як збирна лінза; в просторі ж  $z > d$  напрям радіальної сили збігається з напрямом  $r$ , або напрямом радіального імпульсу, поле буде діяти як розсіювальна лінза. Отже виходить, що електростатичне поле двох заряджених пластинок з отворами поєднує дві відмінні електроннооптичні властивості<sup>1)</sup>

2. Величина радіальної сили при сталих геометричних розмірах системи пропорційна до різниці потенціалів  $U_2 - U_1$  між обкладками конденсатора. Рівняння (4) можна записати в формі:

$$F_{r(I-II)} \approx -e \frac{r}{2} \left[ + U_2 \frac{1 - \frac{U_1}{U_2}}{\pi d} \frac{r_0^3}{(z^2 + r_0^2)^2} \right] \quad (5)$$

і прийняти, що властивість розглядуваної електроннооптичної системи визначається відношенням  $\frac{U_1}{U_2}$  (де  $U_1$  напруга лінзи, а  $U_2$  швидкість елек-

<sup>1)</sup> Цікаво зауважити, що для побудови ахроматичних систем в оптотехніці світлових променів поєднують збірну і розсіювальну лінзи.

тронів); при  $U_2 = \text{const}$ , із зменшенням відношення  $\frac{U_1}{U_2}$ , тобто із зменшенням значення  $U_1$ , збільшується радіальна сила. Тому встановлений Н. Johansson-ом і О. Scherzer-ом<sup>1)</sup> експериментальний факт, що відображення виникає лише при певному додатному значенні відношення  $\frac{U_1}{U_2}$ ,

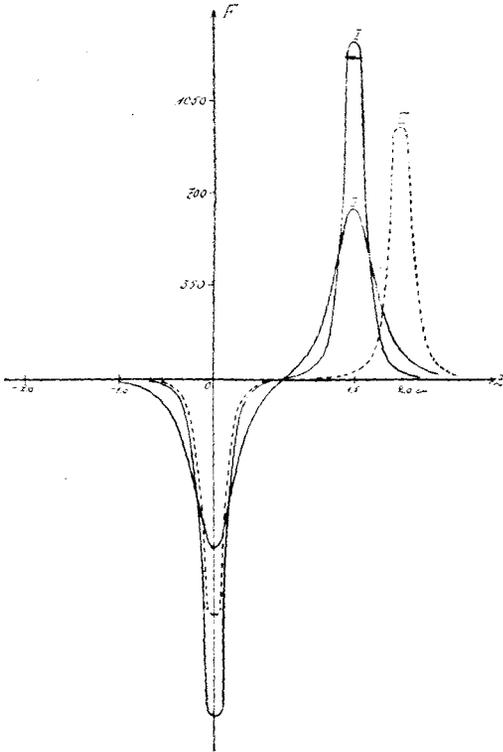


Рис. 9. Розподіл радіальної сили залежно від геометричних розмірів конденсатора.  $U_1 = 50V$ ;  $U_2 = 650V$ . І графіки: I —  $2d = 0,5$  см,  $r_0 = 0,2$  см; II —  $2d = 1,5$  см,  $r_0 = 0,4$  см; III —  $2d = 2$  см,  $r_0 = 0,2$  см.

В табл. IV наведені числові значення радіальної сили для різних геометричних розмірів конденсатора і на рис. 9 графічно показано вплив їх зміни на радіальну силу.

Таким чином, аналітичним дослідженням розподілу електростатичного поля плоского конденсатора з отворами принципово розв'язується питання про придатність поля конденсатора для електронооптичної системи.

Визначення основних електронооптичних співвідношень, що характеризували б дану систему (фокусне віддалення, побільшення, точність відображення), а також розробка схеми установки складає другу частину

а тим більше при від'ємному значенні, легко пояснити тим, що це відношення визначає величину радіальної сили, яка повинна відповідати радіальному імпульсові електрона.

3. Для аксіальних променів зберігається пропорціональне зростання сили із зростанням віддалення від осі, але в загальному випадку зростання не є пропорціональне (рис. 7); на електрони, що виходять під різними кутами до осі, будуть діяти радіальні сили не строго пропорціональні до радіального імпульсу, тому цій системі властиві похибки, що за аналогією із світловими променями можна назвати сферичною аберацією.

З рівняння (4) також можна визначити залежність радіальної сили від геометричних розмірів конденсатора, а саме: сила обернено пропорціональна до віддалення між пластинками і в центрах отворів (де відповідно  $z=0$  і  $z=2d$ ) обернено пропорціональна до радіусів отворів.

<sup>1)</sup> Н. Johansson, Ann. d. Phys., 18, 385, 1933; Н. Johansson und O. Scherzer Zs. f. Phys., 80, 183, 1933.

теоретичного розгляду, що треба поєднати з експериментальними дослідженнями системи.

Т а б л и ц я IV  
значень радіальної сили  $F_r$  в залежності від геометричних розмірів конденсатора  
 $U_1 = 50 \text{ V}; \quad U_2 = 650 \text{ V}$

№	$z$ в см	$F_r$		
		$2d = 1,5 \text{ см}$		$2d = 2 \text{ см}$
		$r_0 = 0,4 \text{ см}$	$r_0 = 0,2 \text{ см}$	$r_0 = 0,2 \text{ см}$
1	0	637	1274	955,4
2	0,1	564	815	611,5
3	0,2	408	318,5	238
4	0,3	260	126,6	95,5
5	0,4	159	51	38,2
6	0,5	87	24	18,2
7	0,6	60	12,7	9,5
8	0,7	38,6	7,3	5,4
9	0,8	25,5	4,4	3,3
10	0,9	17	2,8	2,1
11	1,0	12	1,9	1,4

В таблиці наведено лише частину значень, тому що, як видно з графіків рис. 9, значення сил симетричні відносно пластинок.

Наприкінці вважаю за прийнятний для себе обов'язок висловити подяку акад. О. Г. Гольдману за запропоновану тему, виявлений інтерес до неї і створення найсприятливіших умов для опрацювання теми. Разом з тим висловлюю щирю подяку члену-кореспонденту ВУАН проф. В. Є. Дяченкові за безпосереднє керівництво і цінні вказівки при опрацюванні теми.

3. XII 1934.

Институт физики Всеукраинской Академии Наук (Киев)

### Поле плоского конденсатора с круглыми отверстиями, как электроно-оптическая система

И. И. Сахаров

Резюме

1. Пользуясь решениями уравнения Лапласа в цилиндрических и сферических координатах, вычислено распределение электрического поля плоского конденсатора с круглыми отверстиями по заданному распределению потенциала вдоль оси симметрии и исследовано распределение поля в зависимости от геометрических размеров конденсатора (рис. 3, 4, 5, 6).

2. Исследовано распределение радиальной составляющей силы электрического поля в зависимости от геометрических размеров конденсатора (рис. 7).

3. Рассмотрены условия движения электрона в поле конденсатора и установлено, что поле действует на пучок электронных лучей как система, которая состоит из собирающей и рассеивающей электронных линз [формула (4) § 3; рис. 9].

4. Теоретически подтверждено, что электронооптические свойства данной системы определяются отношением  $\frac{U_1}{U_2}$ , где  $U_1$  напряжение линзы, а  $U_2$  скорость электронов в вольтах.

Institute of Physics of the AllUkrainian Academy of Sciences

### The field of a plane condenser with round apertures as an electron-optical system

J. Sakharov

S u m m a r y

1. With the help of the solution of the equation of Laplace in cylindric and spheric coordinates the author calculated the distribution of an electric field of a plane condenser with round apertures, according to the given potential distribution along the symmetry axis, and investigated the distribution of the field in dependance from the geometric dimensions of the condenser (Fig. 3, 4, 5, 6).

2. The distribution of the radial composing power of the electric field was determined in dependance from the geometric dimensions of the condenser (Fig. 7).

3. The conditions of the electron movement in the condenser field were investigated and it was established that the field affects a pencil of electron beams as a system, composed of collecting and dispersing electron lenses. [Formulae (4) § 3. Fig 9].

4. It was theoretically confirmed that the electron-optical properties of a given system are determined by the ratio  $\frac{U_1}{U_2}$ , where  $U_1$  is the lens intensity and  $U_2$ —the electron velocity in volts.

ТРЕТЯ ВСЕСОЮЗНА КОНФЕРЕНЦІЯ З ПИТАНЬ ПІВПРОВІДНИКІВ

27. V—3. VI в Одесі відбулася III Всесоюзна конференція з питань півпровідників. На конференцію з'їхались представники всіх головних інститутів Союзу, що вивчають проблему півпровідників.

Основними темами конференції були: темнова та світлова провідність півпровідників, кристаловий фотоелектричний ефект, вентильний фотоелектричний ефект і випрошення, внутрішній фотоелектричний ефект у діелектриках і, почасти, питання застосування вентильного фотоелектричного ефекту й випрошення у техніці.

Конференція вислухала понад 50 доповідей.

З питань темнотної та світлової провідності півпровідників: акад. А. Ф. Йоффе (про внутрішній фотоелектричний ефект у монокристалах куприту); проф. Я. И. Френкеля (про теорію світлової і темнотної провідності півпровідників); Д. М. Наследова і Л. М. Неменова (про явища поляризації в полікристалічному мідь-оксиді при температурі рідкого повітря) Б. М. Гохберга (про термоелектричні властивості мідь-оксиду); А. Н. Арсеньєвої та Б. В. Курчатова (про провідність п'ятиокису ванадію); П. В. Шаравського (про деякі нові властивості темнотної та світлової провідності селену); О. В. Лосева (про емсійний фотоелектричний ефект і методи його вивчення).

З питань внутрішнього фотоелектричного ефекту в діелектриках: П. С. Тартаковський доповідав про рівні енергії електронів у кристалах кам'яної солі; Калабухов — про проходження електронів з металу в діелектрик; А. А. Воробйов — про фотоелектричні властивості монокристалів сірки; Транев та Арцибашев — про природу штучного пофарбування деяких кристалів; Севастьянова — про утворення і зникання пофарбування у кристалах. Про теорію цих явищ доповів проф. Я. И. Френкель.

З питань кристалового фотоелектричного ефекту: акад. А. Ф. Йоффе подав теорію процесів у цьому ефекті. І. К. Кікоїн доповів про відкритий ним новий ефект утворення електрорушної сили під впливом магнітного поля при освітленні шару мідь-оксиду при температурі рідкого повітря.

З питань вентильного фотоелектричного ефекту: В. М. Лепешинська доповідала про селенові фотоелементи Центральної радіолабораторії. А. Ф. Йоффе подав наслідки роботи В. П. Жузе про випрошення з штучним випрошувальним шаром. М. П. Бронштейн доповів теорію явищ на границі між півпровідниками та провідниками.

З Інститутів УСРР Одеський фізичний інститут подав ряд доповідей (Е. А. Кирилова, Н. О. Барбаумова, Голубова, Пигарева та інших співробітників) про спектральні дослідження фотоелектричного ефекту на кристалах куприту, дослідження впливу температури на цей ефект, дослідження абсорбції в куприті; М. Н. Подашевський доповів про фотоелектричний метод визначення границі пружності в кристалах. З Харківського рентгенологічного інституту Д. М. Тучкевич доповів про застосування фотоелементів із запірним шаром для вимірювання рентгенового випромінювання.

Інститут фізики ВУАН подав на конференції сім доповідей і під час дискусії кілька коротких повідомлень. Прочитано такі доповіді:

1. Ляшенко В. І., Новий випрошувач з солями заліза (друкується в цьому числі „Укр. фіз. зап.“).

2. Гольдман О. Г., і Бернацький В. К., До теорії твердих випрошення (надруковано в „Журн. фіз.-хем. циклу ВУАН“, т. I, № 4, 1933).

3. Гольдман О. Г., Основні закономірності теорії твердих фотоелементів (надруковано в „Укр. фіз. зап.“, т. III, в. I, 1934).

4. Гейхман Д. С., Питання виготовлення мідь-оксидних фотоелементів з оптимальними даними.

5. Гольдман О. Г., Основні закономірності теорії ефекту Бекереля.

6. Миселюк О. Г., Залежність фотоелектроворушення в Бекерелевому мідь-оксидному фотоелементі від інтенсивності освітлення та впливу температури.

7. Косоногова О. М., Електричні характеристики мідь-оксидних Бекерелевих фотоелементів в замкнутому колі.

Резюме 4—7 доповідів подаємо нижче.

#### Доповідь Д. С. Гейхман

При виготовленні мідь-оксидних фотоелементів за методом Бернацького, Миселюка та Лукасевича (утворення верхнього електрода редукцією  $\text{Cu}_2\text{O}$  в гліцерині) чутливість фотоелемента та електрорушна сила, яка виникає під впливом світла, набуває максимального значення при певній концентрації гліцерину в редуруючому розчині. При цій оптимальній концентрації були одержані фотоелементи з чутливістю в  $250 \frac{\text{мікро-амп.}}{\text{люмен}}$ , електрорушна сила при освітленні досягла в окремих зразків 0,35 вольт. При докладніших дослідженнях встановлена неоднорідна чутливість на різних елементах поверхні фотоелементів: на окремих ділянках ( $4 \text{ мм}^2$ ) фотоелементів була знайдена чутливість до  $500 \frac{\text{мікро-амп.}}{\text{люмен}}$ .

Для вказаних фотоелементів були виміряні залежності фотоструму і фотовольтажу — від опору в зовнішньому колі і від інтенсивності освітлення.

Одержані графіки відповідають залежностям, вказаним акад. Гольдманом в його теорії твердих фотоелементів.

#### Доповідь О. Г. Гольдмана

Відповідно до теорії автора, фотоелектрорушна сила на ізольованому електроді фотогальванічного елемента відповідає стаціонарній рівновазі між процесами заряджання електрода фотострумом і природними втратами (деполяризацією) зарядженого електрода. Розглядаючи процес деполяризації електрода як аналогічний процесові витоку струму в твердих випростувачах і фотоелементах, доповідач пропонує, як робочу гіпотезу, такий вираз для залежності між струмом деполяризації і потенціалом  $V$  електрода ( $V_0$  -- його природний потенціал):

$$i = \frac{(V_1 - V_0)(V - V_0)}{R_0(V_1 - V)}$$

що рівнозначне:

$$\frac{i}{V - V_0} = \frac{1}{R_0} + \frac{i}{V_1 - V_0} \quad (1)$$

Запропонована формула була перевірена в роботі для мідь-оксидних електродів у розчинах хлористого калью, виконаній доповідачем з т. Стрешкевичем; одержано погодження експериментального ходу залежності з обчисленим у межах  $\pm 2-4\%$ .

Виходячи з формули (1) і припущення, що фотострум практично мало міняється при зміні потенціалу електрода в межах звичайних заряджень 0,1—0,2 вольт, дістаємо формулу:

$$I = AL \quad (2)$$

Одержана для залежності фотоелектрорушної сили від інтенсивності освітлення формула запропонована доповідачем ще в 1908 році (з іншими означеннями констант):

$$V - V_0 = (V_1 - V_0) \frac{L}{L + \frac{V_1 - V_0}{AR_0}}$$

Експериментальна перевірка цієї формули подається в доповіді О. Г. Миселюка.

Для Бекерелевого фотоелемента в замкнутому колі виведено, на підставі основних рівнянь (1) і (2), рівняння фотоструму в замкнутому колі в залежності від інтенсивності освітлення і опору зовнішнього кола.

Експериментальна перевірка запропонованих формул подається в доповіді О. М. Косоногової.

### Доповідь О. Г. Миселюка

Фотоелектрорушну силу  $V - V_0$  від мідь-оксидних електронів у розчині КСІ доповідач виміряв електрометрично в залежності від інтенсивності освітлення  $L$  (від 90 до 3100 люксів), при температурах  $18^\circ - 60^\circ \text{C}$ .

Відкладаючи по осі абсцис  $\frac{1}{L}$ , а по осі ординат  $\frac{1}{V - V_0}$ , доповідач одержував у всіх випадках з достатньою точністю прямолінійну характеристику:

$$\frac{1}{V - V_0} = B + \frac{C}{L} \quad \text{або} \quad \frac{1}{V - V_0} = \frac{1}{V_1 - V_0} + \frac{1}{AR_0} \frac{1}{L}$$

що підтверджує запропоновану акад. Гольдманом формулу.

Фототок короткого замикання в зазначених межах температур із зміною температури практично не міняється, що вказує на незалежність від температури константи  $A$  в рівнянні

$$I = AL$$

Доповідач вивчав залежність від температури константи

$$C = \frac{1}{AR_0}$$

Відкладаючи по осі абсцис  $\lg C = \lg \frac{1}{AR_0}$ , а по осі ординат  $\frac{1}{T}$ , доповідач одержував прямолінійну залежність, звідки

$$\frac{1}{AR_0} = De^{-\frac{\omega}{kT}}$$

$\omega$  одержано для різних зразків у межах 0,2 — 0,9 вольтелектронів.

### Доповідь О. М. Косоногової

Для фотоелемента, що складається з освітлюваного мідь-оксидного електрода і другого — великої поверхні — не освітлюваного, занурених в розчин КСІ, вивчені характеристики залежності між вольтажем і фотострумом у зовнішньому колі при різній освітленості, а також і характеристики залежності фотоструму в зовнішньому колі і вольтажу від інтенсивності освітлення  $L$  і залежності фотоструму від зовнішнього опору  $W$ .

Встановлена прямолінійна форма залежності для таких зразків:

а)  $\frac{1}{i}$  у функції  $\frac{1}{L}$  при сталому  $W$ .

б)  $\frac{1}{i}$  у функції  $W$  при сталому  $L$ .

Змінюючи інтенсивність освітлення від 116 до 2320 люкс і зовнішній опір від 300 до 9300 омів, одержали таблицю даних з точністю до 1—2% у погодженні з запропонованим акад. Гольдманом рівнянням.

*А. Рыбкин, С. Стрелков, Д. Тищенко, Фотоэлемент и его применение в химико-техническом контроле и анализе, Госхимтехиздат, Москва — Ленинград, 1934, с. 138.*

Завдання книжки, як це можна бачити з передмови і змісту, загальніші, ніж зазначено в заголовку. За задумом авторів, книжка повинна була викладом численних прикладів застосування фотоелементів у найрізноманітніших галузях техніки й дослідної роботи притягти увагу до нового технічного прилада, штовхнути творчу думку широких технічних кіл, наукових робітників, винахідників на шлях широкого застосування фотоелемента в техніці і лабораторній практиці в Союзі, озброївши їх знанням про цей прилад, якому, справді, належить відіграти величезну роль в радянській техніці. Цей задум можна тільки вітати, але виконання його далеко недосконале. Кидається в вічі недбале ставлення до роботи над книжкою, яке призводить часто і до прицеплювання невірних знань читачеві, а підбирання матеріалу в деяких місцях викликає заперечення.

Здавалося б, що передусім радянський робітник повинен дістати докладні відомості про той фотоелемент, який може широко застосовувати в своїй практиці, легко приступний йому радянський фотоелемент. Автори ж, зазначаючи, що „наши исследовательские организации овладели техникой изготовления различных конструкций фотоэлементов“ (с. 27) і що „Физико-техническим институтом<sup>1)</sup> и вакуумно-техническим отделом ВЭИ изготавливаются фотоэлементы, конструкция которых (від себе додамо — і якість) не уступает заграничным“ (с. 27—28), багато уваги приділяють зразкам деяких закордонних фірм, щедро наділяючи при цьому текст фотографіями, рисунками, зазначаючи точно габарити, розміри віконць і т. д., і лише побіжно згадують про радянські фотоелементи. Незрозуміло, чому в радянського читача „наибольшего внимания заслуживает продукция фирм General Electric Co, Вестингауз и Gaertner Scientific Corporation“ (с. 19), а не продукція Московського лампового заводу, ленинградської „Светлавы“ і ряду ленинградських і московських лабораторій.

Розповідаючи про вентильні фотоелементи, автори зовсім не згадують про ті основні причини (нестійкість мідь-оксидного, труднощі з підсилюванням, інерційність), які часто не дозволяють конкурувати цим фотоелементам з вакуумними та газонаповненими. У читача може залишитися вражіння абсолютної переваги цих фотоелементів над іншими типами і може бути незрозуміло, чому серед десятків прикладів застосування фотоелементів лише один в кінці книжки припадає на долю вентильного.

Говорячи про способи утворення верхнього півпрозорого електрода в мідь-оксидному фотоелементі (с. 33), автори не розповідають про найпростіший спосіб відновлення міді на поверхні мідь-оксиду, коли кинути розжарену пластинку в розведений водяний розчин якоїсь органічної речовини.

З недосить продуманого викладу теорії зовнішнього фотоелектричного ефекту на с. 9—11 читач може зробити висновок про тотожність фотоелектричного ефекту з металевим атомом і з поверхнею металу. Може утворитися думка, що фотоелектричний ефект з металу відрізняється від фотоелектричного ефекту з атома лише тим, що на останній накладаються поверхневі умови при першому. Коли б це було так, то червона межа фотоелектричного ефекту з металу завжди відповідала б сумі енергії йонізації атома і так званій роботі виходу електрона з поверхні. Справді ж це не так. Розповідаючи про зовнішній фотоелектричний ефект з металів, треба виходити не з Боровської моделі атома, а з теорії електронів у металевій ґратці.

Далі, на с. 12 у таблиці значень червоних меж фотоелектричного ефекту для лужних металів замість довжин світлових хвиль, при яких фотоелектричний ефект зникає, подаються ті довжини хвиль, при яких фотоелектричний ефект сягає найбільшої величини, тобто значення, що відповідають так званим селективним максимумам, а на рис. 7 (с. 18) подаються небувалі ніколи порівняльні криві спектральної чутливості катодів лужних металів. Незаперечним є той факт, що червоні межі фотоелектричного ефекту для цезію і рубідію містяться далі в червоному біку спектра, ніж для калію, у авторів же всі криві спектрального розподілу фотоелектричного ефекту для рубідію і цезію лежать цілком під довгохвильовим хвостом калієвої кривої.

З необережного описування авторами сенсibiliзації фотоелементів: „Для увеличения чувствительности фотоэлемента необходимо по возможности уменьшить работу выхода электрона из данного металла. Для этой цели прибегают к так называемой сенсibiliзации металлических слоев путем нанесения на них мономолекулярных слоев специально подобранных веществ (сера, окислы щелочно-земельных металлов, гидриды и т. д.)“ (с. 12), — читач може зробити невірний висновок, що утворення на поверхні металу плівки з такої електронегативної речовини як сірка приводить до зменшення роботи виходу електрона, а не навпаки, як це завжди буває. Обминаємо вже питання про „мономолекулярність“ шару, напр., сірки при сенсibiliзації фотоелементів.

Ніяк не можна погодитися з авторами, що „первым усовершенствованием, позволившим вывести изготовление фотоэлементов из лабораторной стадии и поставить их производство в производственном масштабе, было предложение Мартона и Ростоса заменить осаждение паров металла введением его сквозь стенку колбы электролитическим способом“ (с. 16), і що виготовлення їх простіше ніж іншими методами. Проти цього говорить уже той факт, що,

<sup>1)</sup> Відповідна лабораторія тепер знаходиться уже не в складі Фізично-технічного, а в складі Ленінгр. електротехнічного інституту.

за винятком небагатьох, майже всі фірми, які виготовляють фотоелементи, цим способом не користуються.

Грубих помилок припустилися автори при тлумаченні ролі електродів у фотоелементах. Подаються абсурдні твердження, за якими виходить, немов би на чутливість фотоелемента впливають розміри і форма анода: „так наприклад в елементі М — 122 (рис. 4), так називаємо м. сеточном фотоэлементе, анод выполнен в виде сетки из платиновой проволоки, расположенной в непосредственной близости к катоду, чем достигается понижение внутреннего сопротивления элемента и, следовательно, увеличение проходящего через него тока“ (с. 16—17). Для технічних цілей фірмою сконструйовано зображений на рис. 6 овальний елемент типу Т — 125; чутливість цього елемента несколько понижена, так как анод выполнен в виде проводящего кольца, что увеличивает внутреннее сопротивление элемента“ (с. 17). Справді ж форма анода та його розташування відносно поверхні катода обумовлює лише вигляд вольтамперних характеристик в частині до потенціалу насичення і величину самого потенціалу насичення (для вакуумного фотоелемента). Чутливість фотоелемента при даній формі катода (яка визначається завжди для потенціалів більших за потенціал насичення) залежить від фотоелементних властивостей катода, а внутрішній опір фотоелемента при робочому вольтажі є функція його чутливості та інтенсивності освітлення. Цілково помилково автори думають, що розміри фотокаатода визначають умови насичення фототоку: „Он (фотоэлемент) обладает очень большой светочувствительной поверхностью (90 см<sup>2</sup>) и вследствие этого напряжение, дающее ток насыщения, равно всего 2—4 V“ (с. 19). Відомо, що потенціал насичення залежить, крім контактної різниці потенціалів між електродами, лише від конфігурації та взаємного розташування електродів і більш ні від чого.

Такі ж дефекти подибуємо і в другій частині книжки; так, напр., в описі дослідів Драєра (с. 89—94) сказано, що коефіцієнт відбивання світла різними речовинами залежить від інтенсивності світла. Авторі або заплуталися у цій роботі, або повторюють, що мало ймовірно, чужі помилки (роботи Драєра нам не пощастило бачити). За розповіддю авторів, Драєр у своїх дослідах міняє освітлення заміною вольтажу на освітлювальній лампі розжарювання. Але при зміні вольтажу мінялася температура нитки лампи, а через це саме і спектральний розподіл світла. Зміна спектрального розподілу світла, звичайно, може відбитися на коефіцієнті відбивання. Інтенсивність же освітлення тут, очевидно, ні при чому.

Слід відзначити загальну недбайливість авторів, що також негативно позначилася на книжці; це недостатня в багатьох місцях ясність викладу, іноді неточність пояснення рисунків, відсутність зазначень на рисунках, про які говориться в тексті (рис. 42, 51, 68), подавання рисунків, які не допомагають текстові (напр., рис. 138) і т. д.

За класичний зразок недбайливості, непродумування матеріалу може правити розповідь авторів про фотоелемент з пластичним катодом: „Такая конструкция фотоэлемента получает за последнее время все большее и большее распространение в САСШ. Она удобна тем, что сложная и продолжительная процедура введения паров металла в эвакуированную колбу заменяется изготовлением пластин любой формы и величины. Светочувствительный металл наносится электролитически или катодным распылением. Весь процесс изготовления фотоэлемента по существу ничем не отличается от изготовления катодных ламп, что дает возможность выпускать в большом количестве однотипные фотоэлементы“ (! ?).

Книжку перевантажено зайвими рисунками. Невідомо, напр., для чого „на рис. 19 приведенны вольтамперные характеристики, тождественные с приведенными на рис. 14“. Крім того, вольтамперні характеристики показані ще й на рис. 2 та 9. А разом з тим всі ці розрізнені, подібні один до одного рисунки не дають уяви про залежність вигляду характеристики газонаповненого фотоелемента від тиску газу. Рис. 108 без потреби повторює схему рисунків 56 та 67. Це ж стосується й рис. 101 та 118. Схема подана на рис. 55 повторюється точно в такому ж вигляді на рис. 104. Незрозуміло також для чого аж на чотирьох рисунках (16, 20, 21, 22) треба було подавати характеристики залежності величини фототоку від освітлення. Дві схеми — рис. 56 і 57 в розділі „Принципиальные схемы измерительных приборов с фотоэлементами“ відрізняються „принципово“ хіба лише тим, що в одній фотоелемент повернутий цоколем догори, а в другій — цоколем донизу.

Висновок: книжка могла б бути дуже корисною, коли б матеріал було старанніше опрацьовано і грамотніше викладено.

П. Борзак

## З М І С Т

С. Герцрікен і М. Буцик, Визначення прозорості скла „Гетан“ для ультрафіолетових променів . . . . .	3
С. Герцрікен і К. Котляревська, Спроба визначення подвійного заломлення рентгенових променів . . . . .	11
Л. Штрум, Про енергію утворення нейтрона й протона . . . . .	17
Л. Штрум, Про інтегральний ефект Джоуля-Томсона . . . . .	21
А. Даниленко, Про інтенсивність ультразвуків, одержаних за допомогою магнітних вібраторів . . . . .	25
Акад. О. Гольдман, А. Павленко, М. Бойко, Тепловіддача бетонних і асбошиферних калориферів . . . . .	31
В. Ляшенко, Випростувач із сполуками заліза . . . . .	43
В. Дяченко, Кільцева електронна лінза . . . . .	53
В. Дяченко і І. Сахаров, Обчислення електроємності кільця . . . . .	67
І. Сахаров, До питання геометричної електронної оптики . . . . .	73
І. Сахаров, Електричне поле плоского конденсатора з отворами, як електроннооптична система . . . . .	105
Хроніка . . . . .	123

## S O M M A I R E

S. Herzrücken and M. Bootsik, The determination of transparence of the „Hetan“ glass for ultraviolet rays . . . . .	8
S. Herzrücken and K. Kotlarevska, An attempt of Determination of the Double Refraction of X-rays . . . . .	16
L. Strum, Of the energy of formation of neutrons and protons . . . . .	19
L. Strum, Sur l'effet intégral de Joule-Thomson . . . . .	24
A. Danilenko, Über die Intensität des mittels Magnetostruktionsvibratoren erzeugten Ultraschalles . . . . .	30
A. Goldman, A. Pawlenko and M. Boiko, Heat-emission of the concrete and asbestos slate caloriferes . . . . .	42
V. Liashenko, The iron compound rectifier . . . . .	50
V. Diatchenko, The ring electron lens . . . . .	65
W. Djatschenko u. I. Sacharoff, Berechnung der Elektrokapazität des Ringes . . . . .	71
I. Sakharov, On the question of geometrical electron . . . . .	73
I. Sakharov, The field of a plane condenser with round apertures as an electron-optical system . . . . .	122
Chronique . . . . .	123