Яна Яцула

ВИКОРИСТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЕКОНОМІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ

Основи вищої математики знаходять різноманітне застосування в інших галузях знань і, насамперед, в економічних. Майбутній економіст повинен володіти методами математики, які використовуються в економічних дослідженнях та в економічних розрахунках. Ряд задач економіки та управління, що розгортаються в часі, описуються диференціальними рівняннями.

Диференціальні рівняння винайдені Ньютоном (1642–1727). Ньютон вважав цей свій винахід настільки важливим, що зашифрував його у вигляді анаграми, смисл якої в сучасних термінах можна вільно передати так: «закони природи виражаються диференціальними рівняннями». З величезного числа робіт XVIII століття з диференціальних рівнянь виділяються роботи Ейлера (1707–1783) і Лагранжа (1736–1813) [3].

Диференціальне рівняння застосовуються в моделях економічної динаміки, в яких відображається не тільки залежність змінних від часу, але і їх взаємозв'язок у часі. На основі диференціальних рівнянь побудована модель рівноважного зростання випуску продукції в умовах конкуренції [1].

Для прикладу розглянемо модель росту в умовах конкуренції. Нехай ціна $P = P(Q)$ – спадна функція $\left(\frac{dP}{dQ} < 0\right)$, тобто із збільшенням випуску продукції відбувається насичення ринку і ціна спадає. Тоді з формул $I(t)= m\cdot p\cdot Q(t)$ $Q'(t) = l\cdot I(t)$ $(l = const)$, одержимо рівняння: $Q'(t) = l\cdot m\cdot P(Q)\text{-}Q(t)$, або $Q'=\alpha\, P(Q)\cdot Q$, де $\alpha = lm$.

Оскільки всі множники у правій частині цього рівняння додатні, $Q'>0$, тобто функція Q зростає. Характер зростання функції $Q(t)$ (опуклість) визначається знаком другої похідної:

$$Q''(t) = \alpha\left(\frac{dP}{dQ}Q'Q + P(Q)\cdot Q'\right) = \alpha Q'P\left(1 + \frac{dP}{dQ}\frac{Q}{P}\right) = \alpha Q'P\left(1 - \frac{1}{\left|E_p(Q)\right|}\right),$$

де $E_p(Q) = \frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP}$ – еластичність попиту. Розглянемо два випадки:

I. Попит еластичний, тобто $\left|E_p(Q)\right| > 1.$ Тоді $Q''>0$ і функція Q опукла вниз. Це означає прискорення зростання обсягу продукції.

II. Нееластичний попит $\left|E_p(Q)\right| < 1.$ Тоді $Q''<0$ і функція Q – опукла вгору, що означає уповільнення росту обсягу продукції (насиченість ринку). У найпростішому випадку, коли залежність $P = P(Q)$ лінійна, тобто

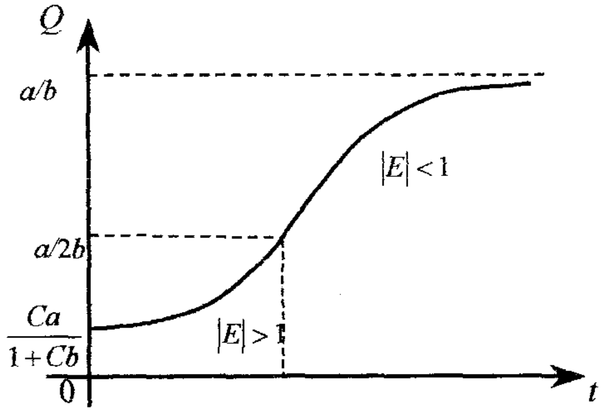
$$P(Q) = a - bQ, \qquad a>0,\ b>0,$$

рівняння матиме вигляд: $Q' = \alpha\,(a\text{-}bQ)\text{-}Q$.

Розв'яжемо це рівняння:

$$\frac{dQ}{Q(a-bQ)}=\alpha dt \Rightarrow \int\frac{dQ}{Q(a-bQ)}=\alpha t+C \Rightarrow \frac{1}{a}\ln\frac{Q}{bQ}=\alpha t+C \Rightarrow \frac{Q}{a-bQ}=Ce^{a\alpha t} \Rightarrow Q=\frac{Ca}{e^{-a\alpha t}+Cb}.$$

Графік даної функції називають **логістичною кривою.** Легко бачити, що Q'=0, коли *Q* = 0, або *Q =a/b,* і *Q = a/2b*- точка перегину [2]:



Кривою такого типу можна описати також деякі моделі розповсюдження інформації (реклами), динаміку епідемій, процеси розмноження бактерій в обмеженому середовищі тощо.

Список використаних джерел:

1. Гресько К. В. Математичні методи і моделі в економічних дослідженнях [Електронний ресурс] / Гресько К. В. // Экономические науки. Математические методы в экономике. – Режим доступу : http://www.rusnauka.com/14_ENXXI_2012/Economics/8_110240.doc.htm
2. Даль Н. В. Диференціальні рівняння закону попиту па пропозиції в економічних задачах [Електронний ресурс] / Даль Н. В. – Режим доступу : http://intkonf.org/dal-n-v-diferentsialni-rivnyannya-zakonu-popitu-i-propozitsiyi-v-ekonomichnih-doslidzhennyah/
3. Диференціальні рівняння [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://uk.wikipedia.org/wiki/Диференціальні_рівняння