Оксана Ласійчук

ІЗ ІСТОРІЇ ВИНИКНЕННЯ ПОНЯТТЯ ГРУПИ

При викладанні фундаментальних математичних дисциплін цінним є використання елементів історії математики. Розглянемо деякі історичні відомості, які, на нашу думку, доцільно згадати на початку вивчення елементів теорії груп в курсі вищої алгебри. Так поняття групи формувалося поступово з таких галузей математики як геометрія, теорія чисел та теорія рівнянь, тому можна вважати, що абстрактна теорія груп історично має три кореня виникнення.

В кінці XVIII століття геометрія почала швидко розвиватися, античні погляди на геометрію змінились докорінно. Було визначено цілий ряд нових геометрій. Розвиток гіперболічної геометрії (Ламберт, Гаус, Лобачевський та Бойян) на початку століття та еліптичної (Ріман) спричинив складні проблеми в тодішній геометрії. Дослідження Монжа і Попселя призвели до відкриття проективної геометрії.

Геометрія того часу почала втрачати свій метричний характер, розширилися традиційні поняття про координати, було використано для великої, але скінченної кількості вимірювань, абстрактні методи. Результати перетворень Мьобіуса, який почав класифікацію різних геометрій за властивостями, які залишаються незмінними при певних перетвореннях Штейна, який вивчав рухи, стали частиною теорії груп перетворень.

У дослідженнях теорії інваріантів Келі інтуїтивно розглядає поняття групи. В 1854 році він, використовуючи поняття групи за Галуа, дав означення скінченної групи. Побудова скінченної фундаментальної системи інваріантів стала поштовхом для встановлення в 80-ті роки основної теореми скінченних абелевих груп. Отже, абстрактна теорія інваріантів є перехідною до абстрактної теорії груп.

Теорія чисел відіграє велику роль в доведенні існування теоретико-групової теорії. Основні результати було отримано Ойлером та Гаусом. Ойлер вказав приклад розкладу абелевої групи на суміжні класи і довів теорему Лагранжа для частинного випадку циклічної групи. При даному доведенні Ойлер використовував міркування, що здійснюються зараз при розкладі групи на суміжні класи.

Гаус продовжив дослідження Ойлера і зробив великий внесок в теорію абелевих груп. Він розглядав 4 види груп: адитивну групу mZ цілих чисел за модулем m, мультиплікативну групу чисел, взаємно простих із m, групу класів в бінарних квадратичних формах $ax^2+bxy+cy^2$, де $a,b,c \in \mathbb{Z}$, мультиплікативну групу коренів n-го степеня з одиниці; вивчав їх структуру і відношення ізоморфізму.

Кронекер був ознайомлений з роботами Гауса та вважав, що формалізація та аксіоматизація є перспективною. Він вказав закони абстрактної композиції елементів, які еквівалентні повній системі аксіом скінченної абелевої групи. З цієї системи аксіом Кронекер вивів такі наслідки як існування одиничного елемента. Але Кронекер не застосував потрібним чином вказані закони до теорії груп, хоча й був ознайомлений з теорією груп Галуа.

Теорія алгебраїчних рівнянь не призвела до аксіоматизації, але саме в ній розглядалися нові на той час групи підстановок. Вже в 60-ті роки зародилась теорія груп, яка була відокремлена від теорії алгебраїчних рівнянь.

В XVI столітті було знайдено загальні розв’язки кубічного рівнянь (Кардано) і рівняння 4-го степеня (Феррарі). Ойлер знайшов інший метод розв’язування рівняння 4-го степеня і намагався узагальнити його для будь-якого алгебраїчного рівняння.

Лагранж першим зробив висновок, що загальний розв’язок рівняння степеня $n \geq 5$ не може бути знайдений за допомогою вже відомих методів. Перше коректне доведення цього факту зробив Абель в 1824 році для 5-го степеня, в 1826 році – для всіх степенів $n > 4$. Роботи Лагранжа мали велике значення для теорії груп, оскільки Лагранж вперше встановив зв’язок між розв’язками алгебраїчних рівнянь і підстановками. Симетричні групи підстановок були відкриті завдяки Лагранжу. Розглядаючи симетричні функції, він довів важливу теорему, яка в сучасній теорії груп називається теоремою Лагранжа.

Руффіні навів декілька доведень нерозв’язності рівнянь 5-го степеня в радикалах, тим самим визначив всі підгрупи симетричної групи S_5. Групу підстановок Руффіні називає «permutazione», що в перекладі означає «перестановка». Він розглядає два основних типи підстановок: «permutazione semplice» і «permutazione composta» (в сучасній термінології – циклічні). Руффіні також розглядав теорему Лагранжа і висловив гіпотезу, що для кожного k, що ділить $|S_n|$, існує підгрупа порядку k .

На результати Руффіні звернув увагу Коші. Він доводить, що в S_n для кожного простого дільника p числа $|S_n|$ існує підгрупа порядку р. Основоположником теорії підстановок та її термінології довгий час вважався саме Коші. Сучасний термін «група підстановок» він називав «система спряжених підстановок». Коші здійснив великий вплив на розвиток теорії підстановок.

Термін «група» вперше використав Галуа в 1829 році. Він використовував слово le groupe взято з французького словникового запасу. що в перекладі означає «множини», «комплекси». Галуа не дав означення групи. Під групою він розуміє множину підстановок, замкнених відносно операції множення. Однак сталої термінології ним не було встановлено.

Отже, в 60-ті роки XIX ст. з теорії рівнянь виникла самостійна галузь дослідження – теорія груп підстановок.

На провідну роль поняття групи в математиці звернули увагу С. Лі та Ф. Клейн. Лі вводить поняття неперервної групи (групи, елементи якої залежать від систем неперервно змінних параметрів, що задовольняють певні диференціальні умови) та використовує методи теорії груп для класифікації і спрощення розв'язків певних диференціальних рівнянь. Клейн переглянув різні типи геометрій з групової точки зору. Він вважав, що кожна група перетворень задає певну геометрію.

Для розвитку теорії груп велике значення мали підручники Серре, Сальмана, Вебера та монографія Бернсайда. В них розглядались зазвичай скінченні групи. Скінченні групи не змогли задовольнити всі потреби. Через виникнення нескінченних структур, подібних до груп, виникла як самостійна дисципліна абстрактна теорія груп. Основи теорії груп без обмеження їх скінченності було викладено в монографії «Абстрактна теорія груп» студента-п'ятикурсника Київського університету Святого Володимира О. Ю. Шмідта (1913 р.).

Пізніше розпочався розвиток загальної теорії груп, який був пов'язаний із перебудовою алгебри в 20-ті роки XX століття. Сьогодні теорія груп – це надзвичайно важливий та цікавий розділ математики, що займає провідне місце в сучасній алгебрі.

Список використаних джерел:

1. Историко-математические исследования. Под редакцией Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича. – Выпуск XVII. – Москва : Наука, 1966. – 472 с.
2. Костарчук В. М., Хацет Б. І. Курс вищої алгебри. – К. : Вища школа, 1969. – 540 с.
3. Требенко Д. Я. Требенко О. О. Алгебра і теорія чисел: В 2-х ч. Ч. 1. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. – 400 с.